Title	E.C.Bloomfield, Portfolio Theory and Investment Decision
Sub Title	
Author	鈴木, 諒一
Publisher	
Publication year	1974
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.17, No.1 (1974. 4) ,p.179- 185
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19740430-04050965

〔書　評〕

E. C. Bloomfield, Portfolio Theory and Investment Decision

1

ここに紹介する E.C.Bloomfield, Portfolio Theory and Investment Decisions, Australian National University 1973, pp. 83＋Ⅶ は次の内容から構成される。

第１章では先ず「単純な場合」が考えられる。これは単一の「危険を伴う」資産と「危険を伴わない」資産とに彼の利用可能な資本を配分する問題である。「危険を伴わない資産」の収益率は r，その標準偏差は0である。「危険を伴う資産」の収益率は E_2，その標準偏差は σ_2 である。危険を伴わない資産への投資は負にも正にもなり得る。その割合を X_1 とし，危険を伴う資産への投資割合を X_2 とすれば，

$$X_1+X_2=1,\quad -\infty<X_1\leq 1,\quad 0\leq X_2<+\infty$$

である。全有価証券の平均収益率の期望値 E_p は，X_1 と X_2 に依存する。即ち

$$E_p=X_1r+X_2E_2=r+X_2(E_2-r) \tag{1}$$

E_p の標準偏差を σ_p とすれば

$$\sigma_p=[X_1{}^2\sigma^2{}_1+X^2{}_2\sigma^2{}_2+2X_1X_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

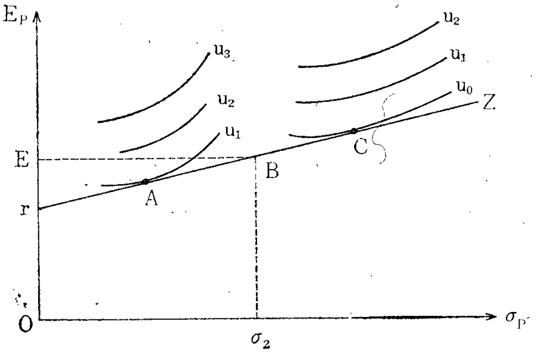
ただし ρ は二種の資産の収益率の相関係数である。ρ_{12} と σ_1 は零であるからこの式は結局において，$\sigma_p=X_2\sigma_2$ となり，したがって $X_2=\sigma_p/\sigma_2$ を得る。この関係を(1)に代入すれば，

$$E_p=r+\frac{\sigma_p}{\sigma_2}(E_2-r) \tag{2}$$

$\frac{E_2-r}{\sigma_2}=\theta$　とおいて(2)を書き直せば

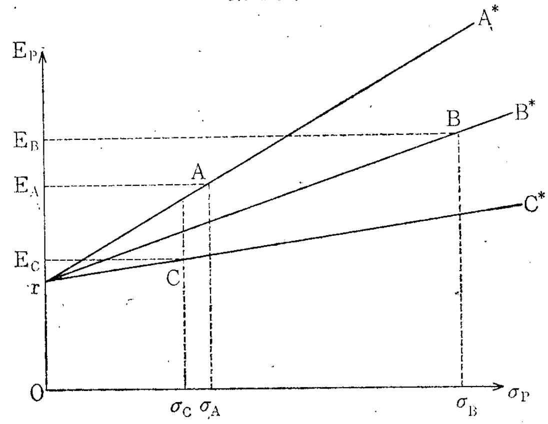
$$E_p-r=\theta\sigma_p \tag{3}$$

第１図



（投資の選択）

第２図



（危険を伴う証券と伴わない証券との市場機会の線）

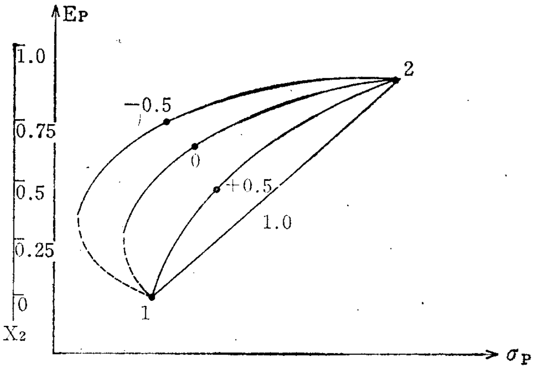
を得る。E_p-r は危険を伴わない資産の収益率に対する超過収益率である。

第１図においてＢ点は全資本が危険を伴う証券に投資されたときの収益率と危険を示す。このとき $X_2=1$，$X_1=0$，$E_p=E_2$，$\sigma_p=\sigma_2$ である。もし投資家の危険選択函数が u_1，u_2，u_3 で表わせるならば，彼の最適投資点はＡ点となり $0<X_1<1$ であり，彼の初期の資本のある部分は r なる率で収益を挙げるであろう。これに反して投資家の選択函数が u_a，u_b，u_c で表わされるならば，最適投資点はＣであり，$X_2>1$ となり，投資家は危険を伴わない収益率 r で借入れを行い，危険を伴う資産への投資を行うであろう。rZ は投資家の市場機会を示し，その交点は r，勾配は $\theta=(E_2-r)/\sigma_2$

である。

第2図においてA，B，Cは3種の異なった危険を伴う資産を示す。A点によっ示される危険と収益を持つ資産は，その市場機会に関して最大の匂配と最高の超過収益の期待値を持つ。この資産への投資によって，投資家はその投資規模に関係なく，彼の収益率の期待値を最高にすることができる。最善の危険を伴う投資の方法を発見すれば，投資家はこの市場機会線 rAA 線と彼の危険選択函数にもとづいて X_2 の最適値を定める。

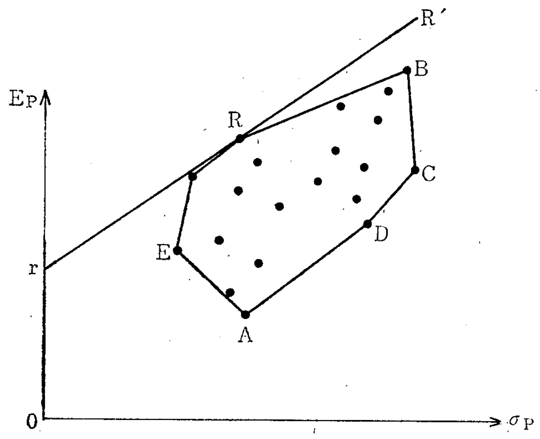
第3図



第3図は2種の危険を伴う資産の組合せが及ぼす効果を示す。この2種の資産の危険が完全な逆相関である場合には収益の標準偏差と平均値とは2つの直線を形成し E_p 軸上で交叉する。平均1標準局面上の2種の資産の曲線は双曲線となる。1種類の危険を伴う資産を2種類以上の危険な資産と組み合せる場合にも同じ Pattern で解釈できる。

N種の危険が完全に予見できる資産があるとして投資家がどのような選択を行うかを考えよう。$X_i>0$, $\Sigma X_i=1$ であるから，

第4図



$$E_p=\Sigma X_i E_i$$

$$\sigma_p=[\Sigma\Sigma X_i X_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j]^{1/2}$$

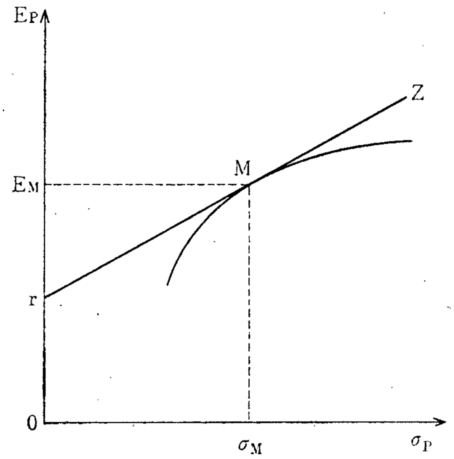
を得，これより前述の解の類推ができる。

2種の危険な資産または証券の組合せを収益率の期待値と variance に関連させてグラフを描くと第4図のようになる。ABCDは実現可能の危険負担の組合せを示す。これらの証券の間の相関が不完全な場合には境界線の凸なる部分が現われる。ERBがこれである。

2

第5図において点Mは市場証券を示す。もし市場が不均衡になれば，Mにおける資産の価格は吊り上げられ，M点になり証券の価格は下落して遂に全資産の価格が収益率の期待値の行列となるであろう。均衡においては凡ての投資家がrMzに沿ってその点を選択するであろう。より保守的な投資家は借入の分だけ，rMより下方の部分を選ぶであろうが，その他の人々は，

第5図



その投資を gear up するために借入れを行い，Mから離れた CML の位置に位しようとするであろう。縦軸（純利子率）は待望に対する報酬の価格と考えられる。この線に沿った最適証券の危険減価を θ_M で表わせば，資本市場線は次式で示される。

$$E_p=r+\theta_M\sigma_p \qquad (4)$$

したがって市場証券の軌跡は

$$E_M=r+\theta_M\sigma_M$$

となり，これより

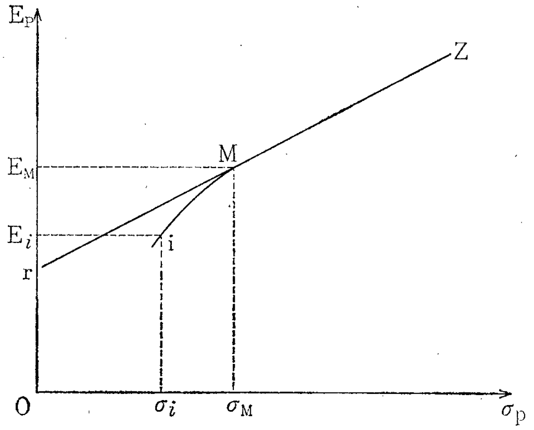
$$\theta_M=\frac{E_M-r}{\sigma_M}.$$

この式を(4)に代入して書き直せば，(5)を得る。

$$E_p-r=\left(\frac{E_M-r}{\sigma_M}\right)\sigma_p \qquad (5)$$

これは効率の良い証券の超過収益が，危険の尺度σ_pと$\frac{E_M-r}{\sigma_M}$で示される危険の価格の積であることが解る。

第6図



第6図において点iは単一の，CML以下の収益の標準偏差を持つ危険な資産を表わす。X_iを以てi番目の資産に投資される割合，X_Mを以て市場証券に投資される割合を表わせば$X_i+X_M=1$である。証券Wの収益の期待値と標準偏差は(6)および(7)式によって表わされる。

$$E_W=X_iE_i+X_ME_M \qquad (6)$$

$$\sigma_W=[X^2{}_i\sigma^2{}_i+X^2{}_M\sigma^2{}_M+2X_iX_M\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M]^{1/2} \qquad (7)$$

証券iの収益と偏差の軸は凸なる曲線iMによって表わされる。曲線iMの曲率はρ_{iM}によって決定される。曲線iMはM点においてCMLの正切になる。$\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j=C_{ij}$とおけば$C_{ij}$は$i$と$j$のCo-varianceになるから，

$$\frac{\partial\sigma_W}{\partial X_i}=\frac{X_i(\sigma^2{}_i+\sigma^2{}_M-2C_{iM})+C_{iM}-\sigma^2{}_M}{\sigma_W}$$

$$\frac{\partial E_W}{\partial X_i}=E_i-E_M$$

iMの勾配は $\frac{\partial E_W}{\partial\sigma_W}=\frac{\partial E_W}{\partial X_i}\div\frac{\partial\sigma_W}{\partial X_i}$

に等しいから

iMの勾配＝

$$\frac{(E_i-E_M)\sigma_W}{X_1(\sigma^2{}_i+\sigma^2{}_M-2C_{iM})+C_{iM}-\sigma^2{}_M} \qquad (8)$$

である。M点において$X_i=0$，$\sigma_W=\sigma_M$であるから

$$iM\text{の勾配}=\frac{(E_i-E_M)\sigma_M}{C_{iM}-\sigma^2{}_M} \qquad (9)$$

を得る。M点における勾配はCMLの勾配に等しく，これは(5)によって$\frac{E_M-r}{\sigma_M}$に等しくなるから，

$$\frac{(E_i-E_M)\sigma_M}{C_{iM}-\sigma^2{}_M}=\frac{E_M-r}{\sigma_M}$$

を得る。したがって

$$E_i-r=\frac{(E_M-r)C_{iM}}{\sigma^2{}_M} \qquad (10)$$

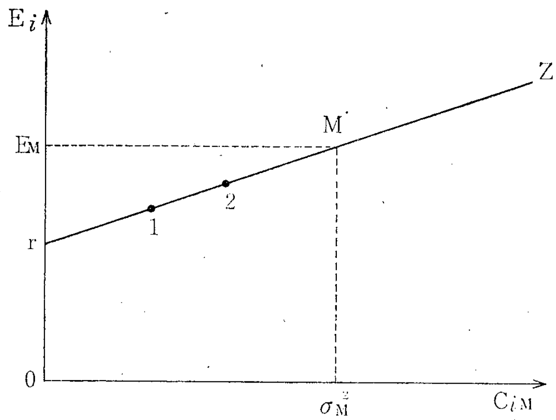
左辺はi資産を保有することによって得られる超過収益を示すが，それは資本市場が均衡状態に在ることを前提とするものである。(10)を書き直せば，(10′)を得る。

$$E_i-r=\frac{E_M-r}{\sigma_M}\rho_{iM}\sigma_i \qquad (10')$$

(10′)によって危険の尺度はC_{iM}ではなくて，$\rho_{iM}\sigma_i$と危険の市場価格$\frac{E_M-r}{\sigma_M}$の積である。(10)を書き換れば

$$E_i=r+\left(\frac{E_M-r}{\sigma^2{}_M}\right)C_{iM} \qquad (11)$$

第7図



となる。これより収益率の期待値と，危険な資産の収益率の期待値と市場証券の収益率の期待値とのCo-varianceの均衡条件を図示すれば第7図のようになる。rMZは債券市場線SMLを示す。点1，2は資本市場を持つ個々の資産を示す。市場証券に関しては，$C_{iM}=C_{MM}=\sigma^2{}_M$ E_Mと$\sigma^2{}_M$はCo-ordinatesとなる。

$b_i=\frac{C_{iM}}{\sigma^2{}_M}$を(11)に代入すれば，

$$E_i=r+b_i(E_M-r)=r(1-b_i)+b_iE_M$$

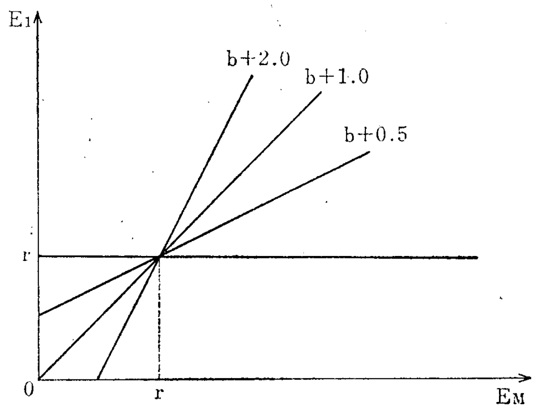
$$E_i=a_i+b_iE_M \qquad (12)$$

ただし

$$a_i=r(1-b_i)=r\left(1-\frac{C_{iM}}{\sigma^2{}_M}\right)$$

を得る。(12)式は，均衡においては危険な資産または証券の収益率の期待値が常数項a_iに等しくなる事実を

第8図



示す。この関係は第8図に示される。b_i は資産または証券の「移り気」を示し，市場収益率の変化に対する収益率の期待値の感応性を示す。

R_i を以て収益率の実際値を示せば，

$$R_i=a_i+b_i(R_M-E_M)$$

これを(12)と連立させれば

$$R_i=a_i+b_iE_M+b_i(R_M-E_M)$$

$$R_i=a_i+b_iR_M \qquad (14)$$

3

危険の総和は systematic risk S と unsystematic risk U に分けられる。即ち，

$$\sigma^2{}_i=s^2{}_i+u^2{}_i$$

systematic risk の市場 risk に対する関係は

$$S_i=b_i\sigma_M$$

であり，有価証券の場合には

$$S_p=b_p\sigma_M$$

である。

SE_i　i 資産を保有することによって得られるドルの期待値

SP_i　i 資産のドル価格

$S\sigma_i$　i 資産の保有から生ずるドルの標準偏差

とおけば，

$$E_i=\frac{SE_i}{SP_i}-1,\quad \sigma_i=\frac{S\sigma_i}{SP_i}$$

であるから

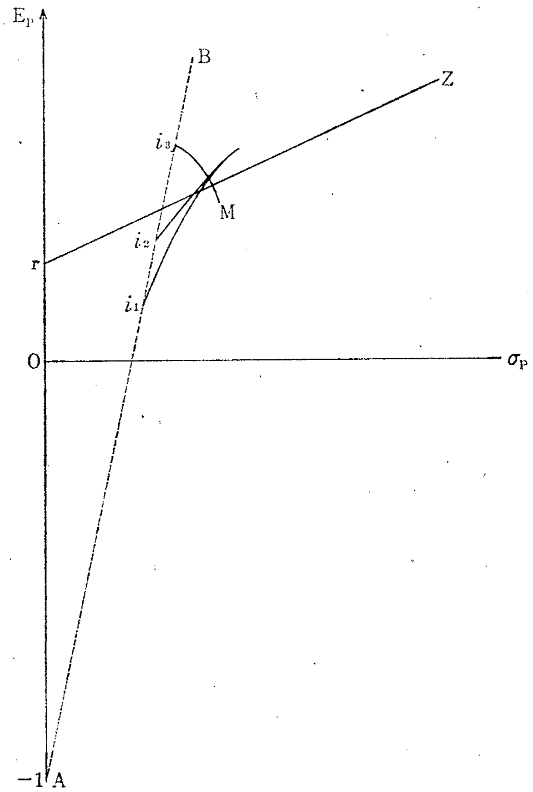
$$\frac{E_i+1}{\sigma_i}=\frac{SE_i}{S\sigma_i}$$

である。そして，

$$E_i=\left(\frac{SE_i}{S\sigma_i}\right)\sigma_i+1$$

である。(15)式によって示される E_i と σ_i の関係は第9図に図示される。その交点はマイナス1と $SE_i/S\sigma_i$

第9図



である。資産の価格 SP_i は射線 AB 点を決定するが，この線は収益率の期待値とその偏差を示すものである。資産の価格が下るほど SP_i は AB から離れるであろう。i_2M は CML の正切で rZ となり点 M において i_2 は資産 i の均衡価格となる。i_3 においては資産価格は下落し，i_1 においては高い価格をつけられるが，いずれにしても i_2 に戻ろうとする力が作用する。けれどもその過程において他の債券の価格が変化するであろうから事情は複雑である。

第3章に入って「対角線モデル」が考えられる。N 種の資産から構成される市場があり，N 種の収益率の期待値と variance および $(N^2-N)/2$ 個の Co-variance を含む input があるとする。$N=100$ の場合には5150の評価が必要となり，その際4950個の Co-variance が存在する。A_i, B_i を常数とし，市場の指標を I, C_i を期待値に関する random variable, Q_i を variance, C_i, C_j の Co-variance, C_i と I の Co-variance および Q を零と仮定する。

$$R_i=A_i+B_iI+C_i$$

このような単純化を行えば N 種の証券は $2N$ 個 (A_i, B_i) の常数と N 個の variance と市場収益率の期待値および variance を含むから $3N+2$ の input が問題となる。$N=100$ の場合には302個の input のみが

問題となり，単純化される。

危険分散の限界効率は次のようになる。

$$\sigma^2{}_p=\Sigma\Sigma X_iX_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$\sigma^2{}_p=\Sigma\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2{}_i+\Sigma\Sigma\left(\frac{1}{N}\right)^2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$=\frac{1}{N}\bar{\sigma}^2{}_i+\frac{N^{-1}}{N}\bar{\sigma}_{ij}$$

$\bar{\sigma}^2{}_i$　個々の資産の variance の平均値

$\bar{\sigma}^2{}_{ij}$　同じく Co-variance の平均値　である。

Nが大きくなるにしたがって右辺第1項は零に接近し，第2項が重要となる。市場モデルにおいては

$$\sigma^2{}_p=\bar{B}^2\sigma^2{}_M+\frac{1}{N}\bar{Q}$$

となる。ただし

$\bar{B}$　資産の「移り気」の平均値

$\sigma^2{}_M$　市場 variance

$\bar{Q}$　個々の資産の市場 variance の平均値

である。この場合，N が増大すれば，証券の total risk は $\bar{B}^2\sigma^2{}_M$ に接近するから，unsystematic risk は除去される。Evans と Arthur は 1958—67年のデータを用いて，代表的な株式の収益率の variance の 34％が市場関係に起因するものと考えた。この結果は

$$\sigma_p(\%)=11.91+\frac{8.63}{N}$$

であった。

二次の効用函数を仮定すれば次のようになる。

$$U=a+bR-cR^2$$

ここに U は効用，R は収益率，b，c は正なる常数である。k 種の収益率 (R_1, R_2, ……R_k) とその確率 (P_1, P_2, ……P_k) があるとするとき，

$$U_k=a+bR_k-cR^2{}_k \tag{15}$$

より U_p の期待値 $E(U_p)$ は，

$$E(U_p)=\Sigma P_kU_k=\Sigma P_k(a+bR_k-cR^2{}_k)$$
$$=a+bE_p-c\Sigma P_kR^2{}_k$$

を得る。しかし

$$\Sigma P_kR^2{}_k=\sigma^2{}_p+E^2{}_p$$

であるから

$$E(U_p)=a+bE_p-c(\sigma^2{}_p+E^2{}_p) \tag{16}$$

となる。効用曲線の形が与えられれば，$E(U_p)$ は常数 $E^*(U_p)$ となり，(16) を変形すれば，

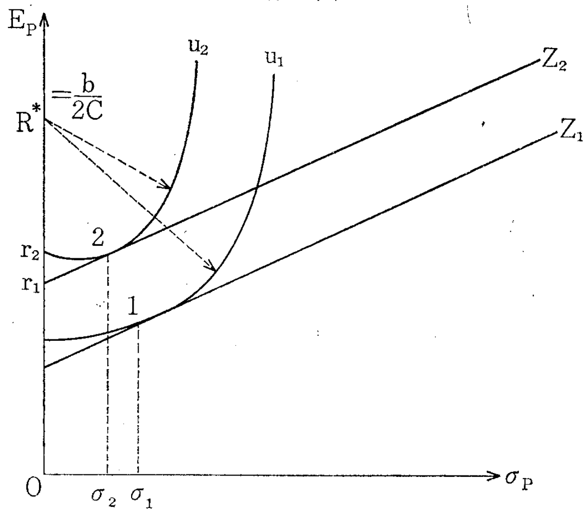
$$cE^2{}_p-bE_p+c\sigma^2{}_p=a-E^*(U_p)$$

となり，両辺を c で割り，$b^2/4c^2$ を加えれば，

$$E^2{}_p-\frac{b}{c}E_p+\frac{b^2}{4c^2}+\sigma^2{}_p=\frac{a-E^*(U_p)}{c}+\frac{b^2}{4c^2}$$

より，

第10図



$$\left(E_p-\frac{b}{2c}\right)^2+\sigma^2{}_p=\frac{a-E^*(U_p)}{c}+\frac{b^2}{4c^2} \tag{17}$$

を得る。右辺は常数項のみであるから，(17) は $E_p=\frac{b}{2c}$，$\sigma_p=0$ なる中心と R^* なる半径を持つ円となる。

ただし，

$$R^*=\left[\frac{a-E^*(U_p)}{c}+\frac{b^2}{4c^2}\right]^{1/2}$$

である。かくして二次の効用函数から得られる効用の無差別曲線は円の孤となる（第10図参照）。

4

更に複数の期間に関する考察が行われる。

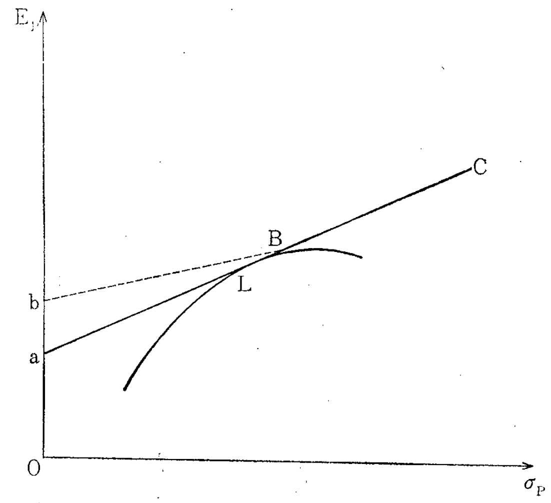
C_t　t 期の消費

T　死亡の時期 (random variable)

W_T　遺贈額

とおけば，次式が成立する。

第11図



$$U=U(c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_t,\ \cdots\cdots,\ c_j,\ W_T)$$

CML の伸開と市場 risk の逐次微分は，投資家が危険のないレートで借入れまたは貸付けうる仮定に依存するところが大きい。第11図に示すように借入れの方が貸付けよりも高い率である場合を考える。曲線 $aLBC$ は a なる貸付け率よりも高い借入れ率 b で借入れることのできる市場機会の実効性のある frontier を示す。投資家の選好が貸付けを行うようなものであれば L は危険な資産の最適組合せである。投資家が借入れをしようとする場合は B 点が最適組合せとなる。LB 曲線の上に位する限りは借入れも貸付も行われない。

(11)式で示したように

$$E_i=r+\left(\frac{E_M-r}{\sigma^2{}_M}\right)C_{iM}$$

であるが，単一の期間に関して，これより企業の操業に必要な現金の流れと株式保有の関係は

$$E_i=\frac{SE_i}{N_iSP_i}-1 \tag{18}$$

で表わされる。ここに

SE_i 企業の操業に要する現金の流れ

SP_i 期首における株式の価格

N_i 期首における株式の数

とすれば，(11)，(18)から

$$SP_i=\frac{\dfrac{SE_i}{N_i}}{1+r+\left(\dfrac{E_M-r}{\sigma^2{}_M}\right)C_{iM}} \tag{19}$$

を得る。ここに

$$\sigma_M=\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X_iX_jC_{ij}\right)^{1/2} \tag{20}$$

である。したがって

$$\frac{\partial\sigma_M}{\partial X_i}=\frac{\Sigma X_iC_{ij}}{\sigma_M}=\frac{C_{iM}}{\sigma_M} \tag{21}$$

を得る。(21)を(19)に代入すれば，

$$SP_i=\frac{\dfrac{SE_i}{N_i}}{1+r+\left(\dfrac{E_M-r}{\sigma_M}\right)\dfrac{\partial\sigma_M}{\partial X_i}} \tag{22}$$

を得る。ただし

X_i 企業 i の株式が占める市場価値の割合

$\dfrac{\partial\sigma_M}{\partial X_i}$ 企業 i の株式が市場証券の危険性に与える限界的割合

である。(22)によって，資本市場が均衡に在る場合，投資家によって危険のない割引率$(1+r)$分だけ，企業の株式は現金に対し割引を受ける。資産の「移り気」b_1 を導入すれば，b_1 は $C_{iM}/\sigma^2{}_M$ に等しくなるから，

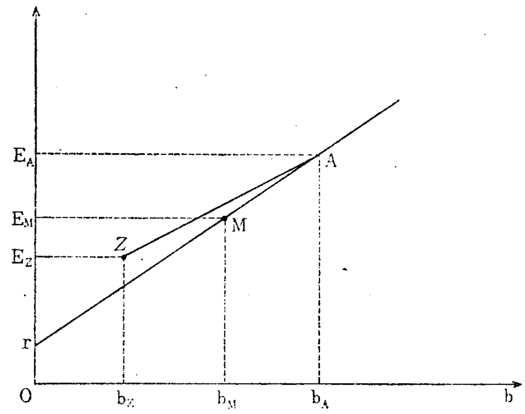
$$\frac{\partial\sigma_M}{\partial X_i}=\sigma_Mb_i$$

となり，(22)は次のように表わされる。

$$SP_i=\frac{\dfrac{SE_i}{N_i}}{1+r+b_i(E_M-r)} \tag{23}$$

即ち株式価格に影響を及ぼす要因は株式所有者の一株当りの現金の流れと企業の移り気である。

第12図



第12図において危険のある収益を持つ企業の立場を考える。収益率の期待値 E_2 と b_2 を持つ投資の大いさは Z で示される。

第７章に入って E_A，E_Z および E_{A+Z} を課税後の収益率とし α を以て新投資計画の費用の割合とすれば，$0\leq\alpha\leq1$ である。V_Z を以て代表的な投資計画の費用とする。

もし総株式投資が V_A で表わされるならば，新計画の費用は新普通株によって金融されるから，計画 Z がとり上げられたときの総普通株投資は $V_A+(1-\alpha)V_Z$ となり，現在の計画の中で普通株投資が占める割合は

$$\frac{V_A}{V_A+(1-\alpha)V_Z}$$

となる。また，新計画の中で普通株投資が占める割合は，

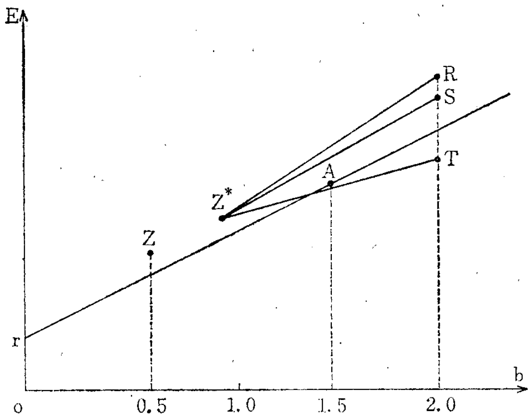
$$\frac{(1-\alpha)V_Z}{V_A-(1-\alpha)V_Z}$$

となる。i を以て借入金に対する利子率とすれば，借入金を返済した後において次式が成立する。

$$E^*{}_Z=\frac{V_2(1+E_2)-\alpha V_2-i\alpha V_2+ti\alpha V_Z}{(1-\alpha)V_Z}-1$$

これより

第13図



$$E^*_Z=\frac{L_Z-i\alpha(1-t)}{1-\alpha}$$

この結果として生ずる企業の普通株に対する収益率の期待値 E^*_{A+Z} は次式によって与えられる。

$$E^*_{A+Z}=\frac{V_AE_A}{V_A+(1-\alpha)V_Z}+\frac{(1-\alpha)V_Z}{V_A+(1-\alpha)V_Z}\cdot$$

$$\cdot\frac{E_Z-i\alpha(1-t)}{1-\alpha}=$$

$$=\frac{V_AE_A+V_Z[E_Z-i\alpha(1-t)]}{V_A+(1-\alpha)V_Z} \quad (19)$$

その結果として生ずる流動性 b_{A+Z} は Z 計画において

$$b_{A+Z}=\frac{V_Ab_A+V_Zb_Z}{V_A+(1-\alpha)V_Z} \quad (20)$$

で与えられる。Z 計画の全部が金融によるもので，$\alpha=0$ ならば，(19)，(20)から(19′)と(20′)が導かれる。

$$E_{A+Z}=\frac{V_AE_A+V_ZE_Z}{V_A+V_Z} \quad (19')$$

$$b_{A+Z}=\frac{V_Ab_A+V_Zb_Z}{V_A+V_Z} \quad (20')$$

第13図は E^*_{A+Z} と b_{A+Z} との関係の一例で $V_A=V_Z$，$t=50\%$ の場合である。Z^* は全部が普通株である場合で，Z^*R，Z^*S，Z^*T は利子率が5％，10％，20％の場合に得られる組合せを示している。Z^*T は SML と相交わるが，初期に SML 曲線上に描かれた計画は，一定の利子率と金融の状態とに対して株式価格の下落を導くであろう。

SML の方程式は

$$E_i=r+b_i(E_M-r)$$

であるから，Z 計画を受け容れるべき SML 上の点は

$$E_{A+Z}\geqq r+b_{A+Z}(E_M-r) \quad (21)$$

を条件とする。例えば第13図において，$V_A=V_Z=SLM$，$t=0.5$ と仮定すれば

$$E_{A+Z}=\frac{0.32-0.5i\alpha}{2-\alpha},\quad b_{A+Z}=\frac{2}{2-\alpha}$$

となり，(21)を解けば

$$\alpha\leqq\frac{0.04}{i-0.1} \quad (22)$$

を得る。これにより Z 計画は完全に金融され，株価も下落しない。

5

以上が本書の大要であって微視的経済理論による分析としては見るべきものがあるが σ が予見しうるか否かが大きな問題として残されるであろう。（実際問題に適用しようとすれば，過去の σ と将来の σ との間になんらかの仮定を置かざるを得ないであろう。）また，市場条件については全く所与であり，その変化を積極的に述べていないのは巨視的動学モデルを欠いているからであって，これがあれば一般の経済成長と株価市場との関係が明らかにされるであろう。

〔鈴木　諒一〕