〔書　評〕

L. Johansen, Production Function

1

生産函数の理論の具体化は1934年のダグラスの業績に端を発し分配と生産の関連に多くの光明を与えた。その後において収穫逓増又は逓減の見地から多くの論議が交されていったが，1961年の CES 生産函数の出現によって資本と労働の代用の弾力性１と云う仮定が捨象されて大きな進歩を遂げた。他方において1963年にソロウによって経済成長理論への生産函数の導入が試みられ，いわゆる新古典派の安定成長論を生み出したことは周知の事実である。先に「経済成長の多部門分析」で世界の注目を浴びた L. Johansen は今回 Production Fnuction pp. 274+IX, Amsterdam, 1972 なる著書を著わして，これらの問題に取り組もうとしている。その内容は，第１章序論，第２章種々の生産函数の概念とその相互関係，第３章マクロ・レヴェルでの短期生産函数の設定，第４章短期マクロ生産函数の形態，第５章生産力の分布から得られた短期マクロ生産函数の数学例，第６章短期マクロ生産函数に対応する供給函数と需要函数，第７章生産函数動学化の諸要因，第８章経験的接近，第９章ノールウェーのタンカー資料による経験的例解。となっている。

第２章に於ては「この理論で示すような広汎な代替の可能性は現実にはないであろうが，より一般的なモデルを発展させるための手段として生産函数を考えるのである。」とし，「資本の異質性には問題があるが，本書ではこれを無視する。」としている。そして，

(1)ミクロ・レヴェルでの ex ante 函数，
(2)ミクロ・レヴェルでの ex post 函数，
(3)マクロ・レヴェルでの短期(一時的)函数，
(4)マクロ・レヴェルでの長期(定常的)函数，

の四種の生産函数を区別する。記号を第１表のように定めると，(1)においては，凡ての生産要素の間に代替の可能性があり，(2・1)を得る。$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{k}$ は最適規模にある。これに対し，(2)の考え方でいくと $\bar{x}$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{k}$ はもはや変数ではなく，(2・2)のように考える必要

第１表

$\bar{x}$	新生産単位で測った生産力
$\bar{v}_1$	フル操業したときの要素１の投入量
$\bar{k}$	投資された資本額

$$\bar{x}=\phi(\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{k}) \qquad (2\cdot1)$$

$$\left.\begin{aligned} &0\leqq x\leqq\bar{x}\\ &v_1=\frac{\bar{v}_1}{\bar{x}}x,\ \text{或いは}\ v_1=\xi_1x\\ &v_2=\frac{\bar{v}_2}{\bar{x}}x\ \text{或いは}\ v_2=\xi_2x \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot2)$$

がある。バーのない記号は，現実の産出・投入量である。ex ante の見地からすれば，(2・1)を充すためには，

$$\bar{x}=\phi(\xi_1\bar{x},\ \xi_2\bar{x},\ \bar{k}) \qquad (2\cdot3)$$

なることを要し，$v_1\geqq\xi_1x$, $v_2\geqq\xi_2x$ なるときには (2・4)を得る。しかし，より一般的には ex post の函数を(2・5)のように考える方がよい。この見地から ex ante の函数を再検討することになる。

$$x=\mathrm{Min}\left[\frac{\bar{x}}{\bar{v}_1}\bar{v}_1,\ \frac{\bar{x}}{\bar{v}_2}\bar{v}_2,\ \bar{x}\right]$$

$$=\mathrm{Min}\left[\frac{\bar{v}_1}{\xi_1},\ \frac{\bar{v}_2}{\xi_2},\ \bar{x}\right] \qquad (2\cdot4)$$

$$x=\lambda(v_1,\ v_2,\ t),\ (v_1,\ v_2)\epsilon D_{\lambda t} \qquad (2\cdot5)$$

先ず資本投入量が単一の変数 $\bar{k}$ で測られるとし，ex post 函数においてある額の資本を作るに $\lambda0$ を要するとすれば，

$$\bar{k}=\phi^*(\lambda),\ \lambda\epsilon\Lambda \qquad (2\cdot6)$$

を得る。次に短期のマクロ函数に移ろう。(2・2)から出発するが企業ごとに ξ_1 と ξ_2 は異なる値をとるものとする。X, V_1, 及びV_2 を以てマクロの産出量及び投入量を示すものとすれば(2・7)を得る。V_1, V_2 の所与の値に対し，(2・7 b-d)の条件に制約されつつXの最大を図ると仮定する。

$$X=\sum x^i \qquad (2\cdot7\,\mathrm{a})$$

$$V_1 \geqq \sum \xi_1{}^i x^i \qquad (2\cdot 7\,\mathrm{b})$$
$$V_2 \geqq \sum \xi_2{}^i x^i \qquad (2\cdot 7\,\mathrm{c})$$
$$0 \leqq x^i \leqq \bar{x}^i \qquad (2\cdot 7\,\mathrm{d})$$

ヨハンセンはマクロの生産函数をミクロの函数から analogues に引き出すために，この仮定を用いるのであるが，計画経済でない限り，マクロのXの最大を図るべき主体は存在しない筈であり，Klein 以来の Aggregation の問題が解決されているとは云いがたい。彼はその理由を Market Behaviour に求めているが，果して妥当であろうか？ところで彼の云うところによれば，Optimization は単純な線型計画(2・8)で解ける。

$$\begin{array}{llll|l}
\xi_1{}^1x^1+\xi_1{}^2x^2+\cdots\cdots\cdots+\xi_1{}^Nx^N\leqq V_1 & & & & q_1 \\
\xi_2{}^1x^1+\xi_2{}^2x^2+\cdots\cdots\cdots+\xi_2{}^Nx^N\leqq V_2 & & & & q_2 \\
x^1 & & & \leqq\bar{x}^1 & r^1 \\
 & x^2 & & \leqq\bar{x}^2 & r^2 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & x^N & \leqq\bar{x}^N & r^N
\end{array} \qquad \cdots\cdots(2\cdot 8)$$

q_1, q_2 は生産要素に関する制約条件，r_1, $r_2\cdots\cdots$, r_N は生産力に関する制約条件である。われわれの問題は

$$q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i+r^i\geqq 1 \qquad (2\cdot 10)$$

なる条件の下に(2・9)を最小にすることである。

$$q_1V_1+q_2V_2+r^1\bar{x}^1+r^2\bar{x}^2+\cdots\cdots+r^N\bar{x}^N \qquad (2\cdot 9)$$

(2·10)は(2・8)の係数行列の変換によって得られる。そして(2・7 *a*)の係数1が(2·10)の右辺に来る。(2・10)の必要条件(十分条件でない)として $x^i>0$ を得るし，更に $r^i>0$ は $\bar{x}_i$ が到達する値を示す。可能なケースは次のようになる。

$$\left.\begin{array}{lll}
 & r^i=0 & r^i>0 \\
q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i+r^i=1 & 0\leqq x^i\leqq\bar{x}^i & x^i=\bar{x}^i \\
q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i+r^i>1 & x^i=0 & \text{不能}
\end{array}\right\} \quad (2\cdot 11)$$

「不能」の意味は $\bar{x}^i>0$ ならば列条件によって $x^i=0$ となり，行条件によって $x^i=\bar{x}^i$ となるからである。

$q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i+r^i>1$, $r^i=0$ により $q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i>1$ となるから，(2·11)から次式を得る。

$$q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i>1 \longrightarrow x^1=0 \qquad (2\cdot 12\,a)$$
$$q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i=1 \longrightarrow 0\leqq x^i\leqq\bar{x}^i \qquad (2\cdot 12\,b)$$
$$q_1\xi_1{}^i+q_2\xi_2{}^i<1 \longrightarrow x^i=\bar{x}^i \qquad (2\cdot 12\,c)$$

q_1, q_2 は産出物単位で示した投入物の shadow price と解釈できる。便宜上，

$$s^i=1-q_1\xi_1{}^i-q_2\xi_2{}^i \qquad (2\cdot 13)$$

とおけば産出物一単位あたりの準 rent となる。

更に長期マクロ生産函数について考える。この際，次の２つの仮定をおく。

(1)(2・1)における v_1, v_2, k の割合は optimal scale にあり，産出物単位当りの投入量は最小になる。

(2)部門全体としての V_1, V_2, K も optimal scale にある。即ち(2·14)が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
\bar{v}_1&=\bar{v}_1\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right),\\
\bar{v}_2&=\bar{v}_2\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right),\\
\bar{k}&=\bar{k}\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot 14)$$

ex ante の函数(2·1)を(2·14)に代入して optimal size の産出量を求めれば，

$$\begin{aligned}
\bar{x}&=\phi\left\{\bar{v}_1\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right),\ \bar{v}_2\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right),\ \bar{k}\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right)\right\}\\
&\equiv\phi^*\left(\frac{V_1}{K},\ \frac{V_2}{K}\right)
\end{aligned} \qquad (2\cdot 15)$$

optimal size における産出物単位当りの input は次式により決定される。

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1&=\frac{\bar{v}_1(V_1/K,\ V_2/K)}{\phi^*(V_1/K,\ V_2/K)}\\
\xi_2&=\frac{\bar{v}_2(V_1/K,\ V_2/K)}{\phi^*(V_1/K,\ V_2/K)}\\
\xi_3&=\frac{\bar{k}(V_1/K,\ V_2/K)}{\phi^*(V_1/K,\ V_2/K)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot 16)$$

これを書き直すと，(2·17) のようになり，technical relation と呼ぶことができる。

$$\phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=1 \qquad (2\cdot 17)$$

仮定(2)により，

$$V_1=\xi_1X,\quad V_2=\xi_2X,\quad K=\xi_3X \qquad (2\cdot 18)$$

であるから，(2·17)は(2·19)のように表わせる。

$$\phi\left(\frac{V_1}{X},\ \frac{V_2}{X},\ \frac{K}{X}\right)=1 \qquad (2\cdot 19)$$

これがマクロ・レヴェルにおける一次同次の生産函数である。optimal size における産出物の数をNとすれば，

$$X=N(V_1,\ V_2,\ K)\phi\left(\frac{V_1}{N(V_1,\ V_2,\ K)},\ \frac{V_2}{N(V_1,\ V_2,\ K)},\ \frac{K}{N(V_1,\ V_2,\ K)}\right) \qquad (2\cdot 20)$$

となる。

2

第3章に入って函数の存在領域が論ぜられる。一般に生産力利用の pattern を $u(\xi_1, \xi_2)$ で示すと，(3・1)のようになる。

$$0 \leqq u(\xi_1, \xi_2) \leqq 1 \qquad (3\cdot1)$$

一定の生産力利用の pattern が選択されれば「細胞」$\Delta\xi_1\Delta\xi_2$ の生産力は $f(\xi_1, \xi_2)\Delta\xi_1\Delta\xi_2$ となるから(3・2)，(3・3)が定義される。これは(2・7 a–c)に対応し，(3・4)を導くことになる。i は input の番号を示す。

$$X = \iint u(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot2)$$

$$V_i = \iint \xi_i u(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\xi_1, \xi_2) \in G \text{ に対し } u(\xi_1, \xi_2) = 1 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin G \text{ に対し } u(\xi_1, \xi_2) = 0\end{array}\right\} \qquad (3\cdot4)$$

ここにおいて(3・2)，(3・3)より

$$X = \iint_G f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot5)$$

$$V_i = \iint_G \xi_i f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot6)$$

更に次のような組合せ

$$\left.\begin{array}{l}V_i^* = \lambda V_i^1 + (1-\lambda) V_i^2 \\ X^* = \lambda X^1 + (1-\lambda) X^2\end{array}\right\} \qquad (3\cdot7)$$
$$(0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

を定義すると，これも実現可能な変量になる。

マクロの生産函数に対して線型計画の理論を適用すれば，準レントが零の線として

$$q_1\xi_1 + q_2\xi_2 = 1 \qquad (3\cdot8)$$

なる条件の下に解の存在領域は

$$q_1\xi_1 + q_2\xi_2 \leqq 1, \quad \xi_1 \geqq 0, \quad \xi_2 \geqq 0, \qquad (3\cdot9)$$

となる。産出物価格を P, 投入物の現在価格を(ここに予想価格を入れていない点は一つの問題点である) Q_1, Q_2 とし

$$P - Q_1\xi_1 - C_2\xi_2 \geqq 0 \qquad (3\cdot10)$$

を得る。

V_1, V_2 が存在可能な領域に於て X を最大にする efficient point が存在する。換言すれば，V_1 と $X(V_2, X)$ の存在可能な領域に於て $V_2(V_1)$ を最小にする点が存在する。$\xi_1{}^A$, $\xi_2{}^A$ によって示される点 A を含む領域 ε_A に於て，$u(\xi_1, \xi_2) < 1$ なる利用率函数 $u(\xi_1, \xi_2)$ を考え，$\xi_1{}^B$, $\xi_2{}^B$ によって示される点 B を含む領域 ε_B に於て，$u(\xi_1, \xi_2) < 1$ であるとする。即ち $\xi_1{}^B < \xi_1{}^A$, $\xi_2{}^B \leqq \xi_2{}^A$ であるか又は $\xi_1{}^B \leqq \xi_1{}^A$, $\xi_2{}^B < \xi_1{}^A$ である。ε_A における利用度函数 $\bar{u}_A(\xi_1, \xi_2)$ は逓減し，ε_B における利用度函数 $u_B{}^+(\xi_1, \xi_2)$ は逓減する。(3・2)より X を消去すれば，

$$\iint_{\varepsilon_B} u_B{}^+(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$
$$= \iint_{\varepsilon_A} u_A{}^-(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot11)$$

(3・3)より，

$$\Delta V_i = \iint_{\varepsilon_B} \xi_i u_B{}^+(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 -$$
$$\iint_{\varepsilon_A} \xi_i u_A{}^-(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot12)$$

これより，

$$\Delta V_i \leqq (\bar{\xi}_i{}^B - \bar{\xi}_i{}^A) \iint_{\varepsilon_A} u_A(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (3\cdot13)$$

を得る。但し $\bar{\xi}_i{}^B$ ε_B はにおける ξ_i の上限，$\bar{\xi}_A$ は ε_A における ξ_i の下限である。ε_C の領域における利用度函数を $u_C{}^-$ とし，$u_A{}^+$, $u_B{}^+$, $u_C{}^-$ を一定とする。(このあたりに景気変動による有効需要の変化を無視すると云う論理が implicit に入ってくる。)

$$\Delta X = u_A{}^+ \iint_{\varepsilon_A} f d\xi + u_B{}^+ \iint_{\varepsilon_B} f d\xi - u_C{}^- \iint_{\varepsilon_C} f d\xi \qquad (3\cdot14)$$

また

$$\Delta V_i = u_A{}^+ \iint_{\varepsilon_A} \xi_i f d\xi + u_B{}^+ \iint \xi_i f d\xi$$
$$- u_C{}^- \iint_{\varepsilon_C} \xi_i f d\xi \qquad (3\cdot15)$$

ε_A, ε_B, ε_C を十分に狭くとれば，(3・14)，(3・15)は次のように書き直すことができる。

$$\Delta X = u_A{}^+ f(A)\varepsilon_A + u_B{}^+ f(B)\varepsilon_B - u_C{}^- f(C)\varepsilon_C \qquad (3\cdot16)$$

$$\Delta V_i = u_A{}^+ \xi_i{}^A f(A)\varepsilon_A + u_B{}^+ \xi_i{}^B f(B)\varepsilon_B$$
$$- u_C{}^- \xi_i{}^c f(C)\varepsilon_C \qquad (3\cdot17)$$

但し $f(A) = f(\xi_1{}^A, \xi_2{}^A)$ 等である。

$\Delta V_1 = 0$, $\Delta V_2 = 0$ なる条件を求めれば

$$\left.\begin{array}{l} f(A)\xi_1{}^A \dfrac{u_A{}^+\varepsilon_A}{u_C{}^-\varepsilon_C} + f(B)\xi_1{}^B \dfrac{u_B{}^+\varepsilon_B}{u_C{}^-\varepsilon_C} = f(C)\xi_1{}^C \\ f(A)\xi_2{}^A \dfrac{u_A{}^+\varepsilon_A}{u_C{}^-\varepsilon_C} + f(B)\xi_2{}^B \dfrac{u_B{}^+\varepsilon_B}{u_C{}^-\varepsilon_C} = f(C)\xi_2{}^C \end{array}\right\} \qquad (3\cdot18)$$

このための必要且つ十分なる条件は次の行列が零でなく，しかも同符号を持つことである。

$$\begin{vmatrix} f(A)\xi_1{}^A & f(B)\xi_1{}^B \\ f(A)\xi_2{}^A & f(B)\xi_2{}^B \end{vmatrix} = f(A) f(B) (\xi_1{}^A \xi_2{}^B - \xi_2{}^A \xi_1{}^B) \qquad (3\cdot19)$$

$$\begin{vmatrix} f(A)\xi_1{}^A & f(C)\xi_1{}^C \\ f(A)\xi_2{}^A & f(C)\xi_2{}^C \end{vmatrix} = f(A)f(C)(\xi_1{}^A\xi_2{}^C - \xi_2{}^A\xi_1{}^C) \tag{3・20}$$

$$\begin{vmatrix} f(C)\xi_1{}^C & f(B)\xi_1{}^B \\ f(C)\xi_2{}^C & f(B)\xi_2{}^B \end{vmatrix} = f(B)f(C)(\xi_1{}^C\xi_2{}^B - \xi_2{}^C\xi_1{}^B) \tag{3・21}$$

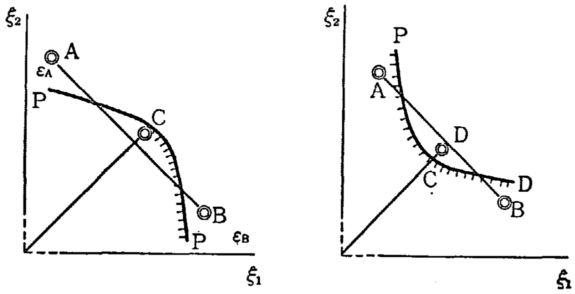
A, B, C 共に正の生産力の領域に属すから $f(A)$, $f(B)$, $f(C)>0$ である。

第1図(a)に於て $\xi_1{}^A$, $\xi_2{}^B$ に還元して考えれば，(3・19)-(3・21)の右辺の括孤内は負であることが容易に解る。(3・18)は $u_A{}^+/u_C{}^-$, $u_B{}^+/u_C{}^-$ なる比率を決定するだけであるから，0から1の間の許容区間において，$u_A{}^+$, $u_B{}^+$, $u_C{}^-$ を選択することは可能である。(3・18)を $f(C)$ で割り(3・22)のような正のウエイトを附ければ，(3・18)を(3・23)のように書き改めることができる。これを ξ_1 ξ_2 軸の新らしい点の座標と解釈できる。これを$D=(\xi_1{}^D,\ \xi_2{}^D)$ とおく。

$$P_A = \frac{f(A)u_A{}^+\varepsilon_A}{f(C)u_C{}^-\varepsilon_C},\quad P_B = \frac{f(B)u_B{}^+\varepsilon_A}{f(C)u_C{}^-\varepsilon_C} \tag{3・22}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_A}{P_A+P_B}\xi_1{}^A + \frac{P_B}{P_A+P_B}\xi_1{}^B &= \frac{\xi_1{}^C}{P_A+P_B} = \xi_1{}^D \\ \frac{P_A}{P_A+P_B}\xi_2{}^A + \frac{P_B}{P_A+P_B}\xi_2{}^B &= \frac{\xi_2{}^C}{P_A+P_B} = \xi_2{}^D \end{aligned}\right\} \tag{3・23}$$

第1図



a　　　　b

(3・23)の右辺に於て $\xi_2{}^D/\xi_1{}^D=\xi_2{}^C/\xi_1{}^C$ であるから，この新らしい点は原点とC点を結ぶ直線上にある。更に(3・23)の左辺に於てD点は AB を結ぶ直線上にある。かくしてDが定まる。C点が直線 AB の外側にあるとすれば(3・23)から(3・24)を得る。(3・16)と比べると $\Delta X>0$ となる。第1図bにおいても ε_A, ε_B において利用度を下げ，ε_C において上げることによって産出量は増加する。他方において境界線が直線が直線であるときには総投入量が一定なる限り産出量は増加しない。

$$P_A+P_B = \frac{f(A)u_A{}^+\varepsilon_A + f(B)u_B{}^+\varepsilon_B}{f(C)u_C{}^-\varepsilon_C} > 1 \tag{3・24}$$

3

第4章では短期マクロ函数の形が論じられる。$q_1\xi_1+q_2\xi_2=1$ を書き換えて

$$\xi_2 = \frac{1}{q_2} - \frac{q_1}{q_2}\xi_1 \tag{4・1}$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned} X &= \int_0^{\frac{1}{q_1}}\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1} f(\xi_1,\ \xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 = g(q_1,\ q_2) \\ V_1 &= \int_0^{\frac{1}{q_1}}\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1} \xi_1 f(\xi_1,\ \xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 = h(q_1,\ q_2) \\ V_2 &= \int_0^{\frac{1}{q_1}}\int_0^{\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1} \xi_2 f(\xi_1,\ \xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 = h_2(q_1,\ q_2) \end{aligned}\right\} \tag{4・2}$$

とおくことができる。これより

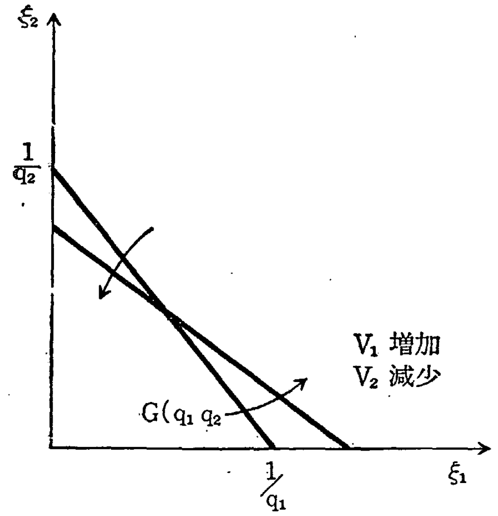
$$\left.\begin{aligned} dX &= \frac{\partial g}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial g}{\partial q_2}dq_2 \\ dV_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial h_1}{\partial q_2}dq_2 \\ dV_2 &= \frac{\partial h_2}{\partial q_2}dq_1 + \frac{\partial h_2}{\partial q_2}dq_2 \end{aligned}\right\} \tag{4・3}$$

を得る。これより，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial q_1} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \xi_1 f\left(\xi_1, \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \\ \frac{\partial g}{\partial q_2} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \left(\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right) f\left(\xi_1,\ \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial q_1} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \xi_1{}^2 f\left(\xi_1,\ \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial q_2} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \xi_1\left(\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right) f\left(\xi_1, \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \xi_1\left(\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right) f\left(\xi_1, \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}} \left(\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)^2 f\left(\xi_1, \frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \end{aligned} \tag{4・4}$$

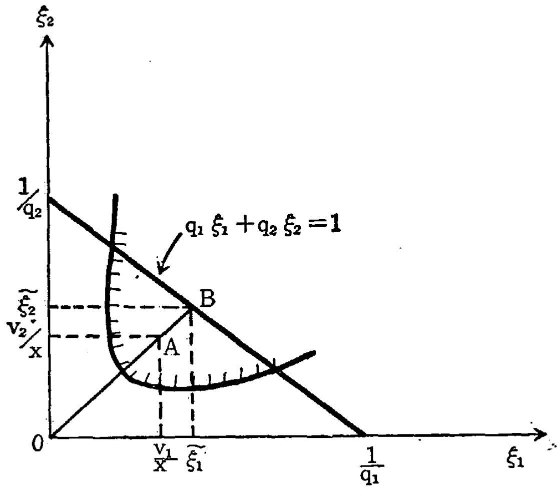
を得る。(3・9)に於て $G(q_1,\ q_2)$ について考えると第2図のようになる。

第２図



V_1 が増加し V_2 が減少(q_1 が減少，q_2 が増加)したときの境界線 $q_1\xi_1+q_2\xi_2=1$ の変化

第３図



第２図に於てパラメーター q_1, q_2 は総要素投入量 V_1, V_2 の変化にしたがって変化する。V_i の変化に対して shadow price q_i は負の反応を示すことは確実であり，他の要素の投入量の増加に対しては正の反応を示す。したがって要素１を相対的に集約的にする附加的生産力が利用される場合には，要素２を相対的に集約化するような附加的な生産力が利用されることはない。これに続いてマクロの限界生産力均等式が示される。

短期マクロ函数における規模の経済性は(4・5)で与えられる。

$$\varepsilon=\frac{dX}{dV_1}\frac{V_1}{X}=\frac{dX}{dV_2}\frac{V_2}{X} \qquad (4\cdot5)$$

古典的な生産理論によれば

$$\varepsilon X=V_1\frac{\partial X}{\partial V_1}+V_2\frac{\partial X}{\partial V_2} \qquad (4\cdot6)$$

或いは

$$\varepsilon=q_1\frac{V_1}{X}+q_2\frac{V_2}{X} \qquad (4\cdot7)$$

を得る。

V_1/X は，領域 $G(q_1, q_2)$ における ξ_1 の平均値であり，第３図A点で示される。この点は，もちろん，利用度領域 $G_1(q_1, q_2)$ の内部にある。B点は原点とA点を結ぶ直線と境界線 $q_1\xi_1+q_2\xi_2=1$ の交点である。この点の座標は ξ_1, ξ_2 である。但し

$$V_1/X=\alpha\xi_1,\quad V_2/X=\alpha\xi_2,\quad \alpha=0A/0B \qquad (4\cdot8)$$

である。(4・8)を(4・7)に代入すれば，

$$\varepsilon=q_1\frac{V_1}{X}+q_2\frac{V_2}{X}=(q_1\xi_1+q_2\xi_2)\alpha=\alpha \qquad (4\cdot9)$$

を得る。又，α は規模弾力性の大いさを示す。

マクロの生産函数の全微分をとれば，限界投入係数 dV_1/dX 及び dV_2/dX は次式によって制約される。

$$q_1\frac{dV_1}{dX}+q_2\frac{dV_2}{dX}=1 \qquad (4\cdot10)$$

これは $q_1\xi_1+q_2\xi_2=1$ の条件に対応する。

次に代用の弾力性を s_{12} とすると，Xが一定なるとき，(4・11)が成り立つ。

$$s_{12}=\frac{d(V_2/V_1)}{d(q_1/q_2)},\ \frac{q_1/q_2}{V_2/V_1} \qquad (4\cdot11)$$

$$J=\frac{1}{q_2}\int_0^{\frac{1}{q_1}}f\left(\xi_1,\frac{1}{q_2}-\frac{q_1}{q_2}\xi_1\right)d\xi_1 \qquad (4\cdot12)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial q_1}=-JM(\xi_1), && \frac{\partial g}{\partial q_2}=-JM(\xi_2)\\
&\frac{\partial h_1}{\partial q_1}=-JM(\xi_1^2), && \frac{\partial h_1}{\partial q_2}=-JM(\xi_1\xi_2)\\
&\frac{\partial h_2}{\partial q_1}=-JM(\xi_1\xi_2), && \frac{\partial h_2}{\partial q_2}=-JM(\xi_2^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot13)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_i^2&=M\{[\xi_i-M(\xi_i)]^2\}=M(\xi_i^2)-[M(\xi_i)]^2\\
\sigma_{12}&=M\{[\xi_1-M(\xi_1)][\xi_2-M(\xi_2)]\}\\
&=M(\xi_1\xi_2)-M(\xi_1)M(\xi_2)
\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot14)$$

と置き換えれば，

$$s_{12}=J\frac{q_1}{q_2V_1V_2}(q_1V_1+q_2V_2)\sigma_1^2 \qquad (4\cdot15)$$

或いは

$$s_{12}=J\frac{q_1}{q_2}\frac{X}{V_1V_2}=J\frac{X}{V_1V_2}\varepsilon\sigma_1\sigma_2 \qquad (4\cdot16)$$

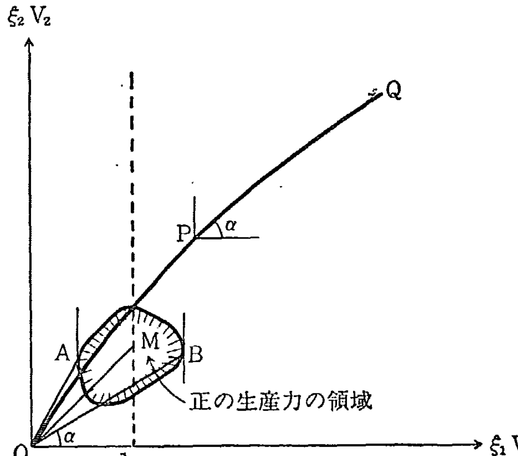
を得る。即ち s_{12} は σ に批例し，X が変化しない限り，$\sigma_1{}^2$ を消去すれば利用度領域の境界線の変化は V_2/V_1 に変化を及ぼさないであろう。しかし σ が存在する限り境界線の変化は V_2/V_1 に影響を及ぼすことになる。又，代用の弾力性は規模の経済性に正比例する。

ここで Johansen は 1955-56年に Houthacker によって試みられた，生産力分布函数 $f(\xi_1, \xi_2)$ がパレート型を示すとの仮説に対する比例が下される。この仮説によればマクロ函数 $F(V_1, V_2)$ も亦 Cobb-Douglas 型を示すことになる。これは elegant な型であるが現実的とは云えず，現実には次の属性があると考えられる。

(1)ξ_1, ξ_2 軸によって示される図に於て正の生産力を示す領域は原点から離れている。

(2)いかなる産出量が生み出されるにしても，産出物一

第４図



単位あたりの各生産要素の投入量が有限確定値を持つことのみが必要である。

(3)総生産力は有限であり，(3・5)によって示された積分は，領域Gが正の生産力を持す全領域を包含する場合，確定値を持つ。

第４図に於て(4・2)で示された q_2 を零とおけば，q_2 は V_2 の限界生産力であるから，これが上限界となる。したがって，

$$X=g(q_1, 0),\quad V_1=h_1(q_1, 0),\quad V_2=h_2(q_1, 0) \qquad (4\cdot17)$$

となり，(4・2)の ξ_2 の積分値が無限大に接近すると云う意味で上限界になる。しかし第２条件が充されれば ξ_2 の十分に大きな値に対して $f(\xi_1, \xi_2)$ は零になるから，このことは問題にならない。したがって $\xi_1=1/q_1$ によって示される垂線の左側に於てのみ凡ての積分値が存在できる。(4・17)の後の二つの式から q_1 を消去すれば代替領域の上限を示す曲線を得る。この二式を q_1 に関して微分し，(4・13)を代入すれば

$$\frac{dV_2}{dV_1}=\frac{M(\xi_2;\, q_1, 0)}{1/q_1}=q_1M(\xi_2;\, q_1, 0) \qquad (4\cdot18)$$

を得る。q_1 が与えられれば，(4・17)によって V_1, V_2, X が定まる。この V_1, V_2 の組合せがP点で代替領域の上限を示し，この点に於て $M=1/q$ であるから，この境界線の傾斜は OM と横軸がなす角度になる。この境界線を追跡すると垂線がA線に達し，この点に於ける代替領域の上限界線の傾斜が OA の傾斜に等しくなったとき，投入量と産出量の正の値が先ず現われる。右に移動してBに達すると凡ての生産力が枯渇し，Q点における限界線の傾斜は OB 線の傾斜に等しくなる。OPQ は逓減的曲線を示しているがこれは必然的ではなく，垂線が右に移動するに従って角αが或る部分に於て増大するケースのあることは容易に変えられる。

4

Houthacker は生産力分布がパレート型を示すと仮定し，次の函数を導いた。

$$f(\xi_1, \xi_2)=A\xi_1{}^{\alpha_1-1}\xi_2{}^{\alpha_2-1} \qquad (5\cdot1)$$

この式を変形すれば(5・2)のようになるが，第３図に於て $\varepsilon=OA/OB$ なる特殊ケースになる。

$$\frac{V_1}{X}=\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)q_1},\quad \frac{V_2}{X}=\frac{\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)q_2} \qquad (5\cdot2)$$

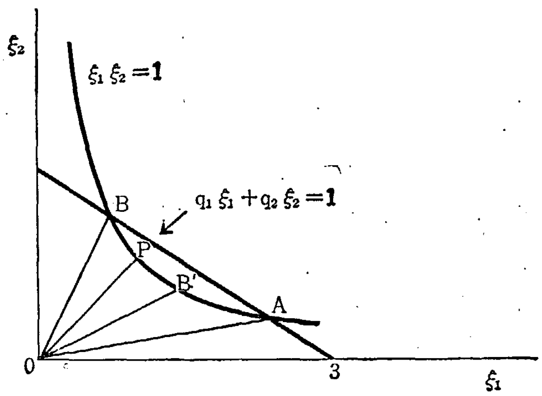
これより

$$\varepsilon=\frac{OA}{OB}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+1} \qquad (5\cdot3)$$

となり，第５図を得る。全生産力がAとBの間に在るとき，X, V_1, V_2 の値はどうなるか。A, B 両点に於ける ξ_2/ξ_1 の値を夫々 $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ とおけばAとP（この点に於て $\lambda=\xi_2/\xi_1=1$）とPとBの二つの区間に総生産力を分けることができる。これによってP点の周辺に於ける $\xi_1\xi_2=1$ 曲線に沿った生産力の分布を得る。

第６章に入って供給函数及び需要函数の導出に当り，産出物と投入物の絶対価格を P, Q_1, Q_2 で表わせ

第5図



ば,

$$\frac{Q_1}{P}=q_1,\quad \frac{Q_2}{P}q_2 \tag{6・1}$$

であり，Aggregate された供給函数と需要函数は

$$\left.\begin{aligned}X&=g\left(\frac{Q_1}{P},\ \frac{Q_2}{P}\right)\\V_1&=h_1\left(\frac{Q_1}{P},\ \frac{Q_2}{P}\right)\\V_2&=h_2\left(\frac{Q_1}{P},\ \frac{Q_2}{P}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6・2}$$

尚 $q_1\xi_1+q_2\xi_2=1$ に対応するものとして

$$Q_1\xi_1+Q_2\xi_2=P \tag{6・3}$$

を得る。Houthacker-Pareto-Cobb-Douglas 型においては次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned}X&=C_0\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{P}{Q_2}\right)^{\alpha_2}\\V_1&=C_1\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{1+\alpha_1}\left(\frac{P}{Q_2}\right)^{\alpha_2}\\V_2&=C_2\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{P}{Q_2}\right)^{1+\alpha_2}\end{aligned}\right\} \tag{6・4}$$

これが供給函数及び要素の需要函数である。これより

$$\left.\begin{aligned}X&=(P-s_1Q_1-s_2Q_2)\left(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}\right)\\V_1&=(P-s_1Q_1-s_2Q_2)\left(\frac{P-s_1Q_1-s_2Q_2}{2Q_1^2}+\frac{s_1}{Q_1}+\frac{s_2}{Q_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6・5}$$

を得る。$s_1=s_2=0$ なる単純なケースを考えれば

$$\left.\begin{aligned}X&=P\left(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}\right)\\V_1&=\frac{P^2}{2Q_1^2},\quad V_2=\frac{P^2}{2Q_2^2}\end{aligned}\right\} \tag{6・6}$$

を得る。

Pareto 分布を示している場合には

$$X=\frac{A_1}{\alpha_1}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{\alpha_1}+\frac{A_2}{\alpha_2}\left(\frac{P}{Q_2}\right)^{\alpha_2} \tag{6・7}$$

$$V_1=\frac{A_1}{\alpha_1+1}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{1+\alpha_1},\quad V_2=\frac{A_2}{\alpha_2+1}\left(\frac{P}{Q_2}\right)^{1+\alpha_2} \tag{6.8}$$

この式に於て $\alpha_1=\alpha_2=1$, $A_1=A_2=1$ なるときには(6・6)に一致する。(6・8)の要素需要函数は(6・4)を回想させるが要素価格の cross-effect を示すことはできない。Cobb-Douglas 函数を前提としたときの代替効果は

$$e_{11}=-1-\alpha_1 \tag{6・9}$$

となる。

第7章に入って附加的生産力が短期マクロ函数に及ぼす効果を論じる。新生産のために必要な投入量を V_1^+, V_2^+ で表わせば，(f^+ は新生産力の分布の型)

$$\left.\begin{aligned}&\iint f^+(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1 d\xi_2=1\\&V_1^+=X^+\iint \xi_1 f^+(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1 d\xi_2=X^+m_1^+\\&V_2^+=X^+\iint \xi_2 f^+(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1 d\xi_2=X^+m_2^+\end{aligned}\right\} \tag{7・1}$$

となる。但し m_1^+, m_2^+ は新生産力による産出物単位当りの平均投入量である。f^+ が新生産力の相対的分布を示すのに対して，X^+は絶対量を示すから最初の積分値は1に等しい。これより新短期マクロ函数は,

$$\left.\begin{aligned}X&=\iint_{G(q_1,q_2)}[f(\xi_1,\ \xi_2)+X^+f^+(\xi_1,\ \xi_2)]d\xi_1 d\xi_2\\V_1&=\iint_{G(q_1,q_2)}\xi_1[f(\xi_1,\ \xi_2)+X^+f^+(\xi_1,\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2\\V_2&=\iint_{G(q_1,q_2)}\xi_2[f(\xi_1,\xi_2)+X^+f^+(\xi_1,\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\right\} \tag{7・2}$$

これは(4.2)式に対応する。

現実の成長過程に於て賃金が資本の費用に比べて相対的に高くなれば，労働に代えて資本の使用が増加するであろう。深刻な不況の初期を除いては，新生産力が負にならない準レントを得ると期待できるであろうから次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned}X&=g(q_1,\ q_2)+X^+\\V_1&=h_1(q_1,\ q_2)+X^+m_1^+\\V_2&=h_2(q_1,\ q_2)+X^+m_2^+\end{aligned}\right\} \tag{7・3}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}g^+(q_1,\ q_2)&=\iint_{G(q_1,q_2)}f^+(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1 d\xi_2\\h_i^+(q_1,\ q_2)&=\iint_{G(q_1,q_2)}\xi_i f^+(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}\right\} \tag{7・4}$$

m_1 m_2 は新生産力に対する各生産要素の平均投入係数である。

$$X=F(V_1-X^+m_1^+,\ V_2-X^+m_2^+)+X^+ \qquad (7\cdot5)$$

とおけば，(7・6)を得る。

$$\frac{\partial X}{\partial X^+}=1-q_1m_1^+-q_2m_2^+ \qquad (7\cdot6)$$

又，

$$\left.\begin{aligned} h_{11}\frac{\partial q_1}{\partial X^+}+h_{12}\frac{\partial q_2}{\partial X^+}&=-h_1^+ \\ h_{21}\frac{\partial q_1}{\partial X^+}+h_{22}\frac{\partial q_2}{\partial X^+}&=-h_2^+ \end{aligned}\right\} \qquad (7\cdot7)$$

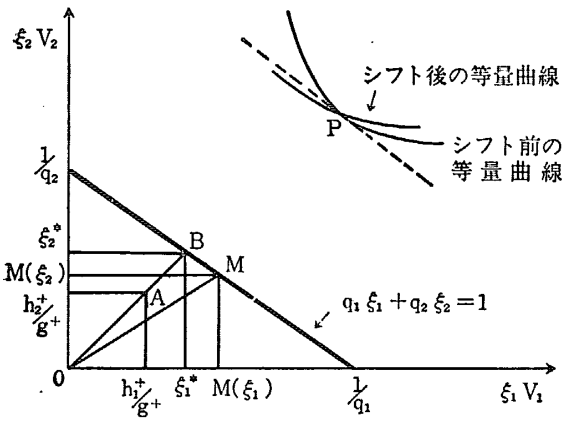
このシステムは(4・3)と同じである。

新生産力の附加は短期マクロ函数をシフトさせるから，技術進歩にもとづく中立性と bias の意味を明らかにしておく必要がある。ヒックス的な意味に於ては q_1/q_2 が不変なとき中立的で，i 番目の要素の限界生産力が他に比して下降したとき，その要素を節約する方向に向ったとき bias があることになる。これを表示すると(7・8)のようになる。

第6図は要素1節約的なるシフトが起り，要素2の限界生産力が相対的に上昇した場合，

$$\left.\begin{aligned} h_1^+/h_2^+&<M(\xi_1)/M(\xi_2) \\ h_1^+/h_2^+&=M(\xi_1)/M(\xi_2) \\ h_1^+/h_2^+&>M(\xi_1)/M(\xi_2) \end{aligned}\right\}\text{なるとき}\left\{\begin{aligned} &\text{要素 1 節約的} \\ &\text{中立的} \\ &\text{要素 2 節約的} \end{aligned}\right. \qquad (7\cdot8)$$

第6図



を示す。点 P において準レントは零であり，利用される新生産力は要素1節約的で $h_1^+/h_2^+<M(\xi_1)/M(\xi_2)$ である。P を通る新らしい等量線は古い等量線と同じ産出高を示すものではない。又，

$$\frac{\partial X}{\partial X^+}=g^+(q_1,\ q_2)(1-\alpha) \qquad (7\cdot9)$$

を得るが，これは新生産力による単位当りのマクロ生産函数の縦のシフトが $1-OA/OB=AB/OB$ に等しいことを示す。ここで実現化した技術進歩と潜在的技術進歩の効果が論ぜられた後，成長モデルが導かれる。

$$\begin{aligned} \dot{X}=&q_1\dot{V}_1+q_2\dot{V}_2 \quad \text{(現在の投入量の増加)} \\ &+\frac{1-q_1m_1^+-q_2m_2^+}{m_3^+}I \quad \text{(新資本)} \\ &+\iint_{G(q_1,q_2)}(1-q_1\xi_1-q_2\xi_2)k(\xi_1,\ \xi_2)f(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1d\xi_2 \\ &\qquad \text{(実現化しない技術進歩による生産力の増加)} \\ &+q_1\iint_{G(q_1,q_2)}\mu(\xi_1,\ \xi_2)\xi_1f(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1d\xi_2 \\ &\qquad \text{(投入節約的な潜在的技術進歩)} \\ &+q_2\iint_{G(q_1,q_2)}\mu_2(\xi_1,\ \xi_2)\xi_2f(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1d\xi_2 \end{aligned} \qquad (7\cdot9)$$

生産力の増加率と投入量の節約増進率が等しい場合には，

$$\dot{X}=q_1\dot{V}_1+q_2\dot{V}_2+\frac{1-q_1m_1^+-q_2m_2^+}{m_3^+}I+\iint_{G(q_1,q_2)}k(\xi_1,\ \xi_2)f(\xi_1,\ \xi_2)d\xi_1d\xi_2 \qquad (7\cdot8)$$

と単純化される。

更に $\kappa(\xi_1,\ \xi_2)=\kappa=\text{const}$ であるならば，最後の項を kX で表わすことができるから，古典的な潜在的進歩の率 κ で表わすことができる。

第8章は資料の取り扱い方を述べている。時系列資料の使用に際しては高度のアグリゲーションが行われる。V_1, V_2, X の示される時点はどちらかと云えば多いであろう。しかし短期函数を導出するに十分な variability が存在しない場合もあるし。短期函数自体が比較的単純な数式で表わせない理由もあるから，過度に単純化された生産力の分布を仮定した場合でさえも。現在の計量経済学では処理し切れない程の複雑な短期函数が現われてくる。われわれは近似式で我慢せざるを得ないが，規模に関する収穫逓減法則，限られた生産力，限られた範囲の代替関係と云う理論的構成の中で短期函数が導出されるように努力しなければならない。次に十分な variability が得られる場合ですら，われわれの函数が均衡を前提して居る，ことを忘れてはならない。

長期函数の導出に当っては次の困難がある。

(1)実現した技術進歩が存在しないか極めて緩慢である場合は好結果を得易い。

(2)現存する資本ストックが等質的であるためには資本設備の耐久度が短かい方がよい。

(3) ex ante の函数から類似の投資選択を得るために

は，投資家の価格予想が一致している必要がある。
(4)時を越えて生産要素の組合せの変化が起るには，現実の価格と予想値の間に或る変化が起る必要があるが，その変化は急激であってはならない。ここで彼は Houthacker-Cobb-Douglas 型を例示している。

これに対し Cross-section data を使用する場合には ex ante 函数の計測に際し次の条件を要する。
(a)企業が同一の技術情報を得ること。
(b)凡ての観察値が full capacity にあること。
(c)観察値が十分な範囲の分布を示していること。

X

以上が本書の大要である。(1)マクロの behaviour について十分な理論的根拠がないこと。(2) CES 生産函数についての積極的言及がないこと。(3)具体的計量に際しては第9章で $Q_1\xi_1{}^i+Q_2\xi_2{}^i=C^i$ なる費用函数の計測を行っているが，「マクロ函数は収穫逓減法則の作用があるから固定的係数を前提とした函数から乖離する。」として経験的に幾つかの点を導出しているが，理論的分析とどこまで結びついているのか必らずしも明らかでない。――等の問題点はあるが一読に値する良書であろう。

〔鈴木　諒一〕