Title	Z. Griliches and V. Ringstand Economies of Scale and the Form of the Production Function(園乾治先生退任記念号)
Sub Title	
Author	鈴木, 諒一
Publisher	
Publication year	1972
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.15, No.2 (1972. 6) ,p.285- 289
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19720630-03958986

〔書　評〕

Z. Griliches and V. Ringstad Economies of Scale and the Form of the Production Function

1

生産函数の問題は1934年，P. H. Douglas が限界生産力説の妥当性を計量化した時点から始まる。その後長い間この函数の計量化が各国で行なわれたが，1961年労働と資本の代用の弾力性について1以外の値を仮定することを可能にした CES 函数が考案されてから一段の進歩を遂げた。1971年に至って注目すべき幾つかの労作が生れたが，ここに紹介する Zvi Griliches and V. Ringstad, Economies of Scale and the Form of the Production Function, Amsterdam, 1971, pp. 204＋VI もその一つである。内容は，第1章序論，第2章理論的及び統計的背景，第3章データ，第4章主要結果，第5章原料の役割，第6章要約。となっている。

第2章では生産量を Q，input を X としたとき $Q=F(X)$ なる関係を設定する。附加価値を V，等質化された労働時間を L，原料を M，gross product を Y とおき，生産函数が次の属性を持つと考える。(1)特定の input に関する output の弾力性 $[\alpha_i=(\partial V/\partial X_i)(X_i/V)]$ (2)規模の弾力性 $(\varepsilon=\sum\alpha_i)$ 或いは凡ての input の比例的変化に関する output の弾力性，(3)労働と資本の間の代替の弾力性 σ，即ち $f_i=\partial F/\partial X_i$ とおいたとき，

$$\sigma(X_1X_2)=\left.\frac{\dfrac{X_2}{X_1}d\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right)}{\dfrac{f_1}{f_2}d\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)}\right|_{Y=\text{const}}$$

この研究の大部分は σ 一定を仮定し，ダグラス函数

$$V=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

か CES 函数

$$V=B[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-\mu/\rho}$$

を用いる。CES 函数では $\sigma\neq1$ で生産の弾力性は一定ではない。しかし規模の弾力性 $(\varepsilon=\mu)$ と代替の弾力性 $\sigma=1/(1+\rho)$ は一定である。

計算の便宜上ダグラス函数を書き換え，

$$V/L=A(K/L)^{\alpha}L^{h}$$

ただし，$h=\alpha+\beta-1=\varepsilon-1$ である。CES 函数も計算に際しては次のように書き直される。

$$V/L=BL^{h}[\delta+(1-\delta)(K/L)^{-\rho}]^{-\mu/\rho}$$

この場合 $h=\mu-1$ である。しかしこれでは線型にならないから $\rho=0$ の附近で函数の対数形をとり，Taylor 展開による近似値をとれば

$$ln(V/L)=lnB+hlnL-(\mu/\rho)f(\rho)$$

を得る。このとき $f(\rho)=ln[\delta+(1-\delta)(K/L)^{-\rho}]$ である。

第3項以下を無視すれば，

$$f(\rho)=f(0)+f'(0)P+\frac{1}{2}f''(0)P^2$$

であり，

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=-(1-\delta)ln(K/L)$$
$$f''(0)=\delta(1-\delta)[ln(K/L)]^2$$

である。したがって

$$f(\rho)\simeq-\rho(1-\delta)ln(K/L)+\frac{1}{2}\rho^2\delta(1-\delta)[ln(K/L)]^2$$

となり，CES 函数の近似値は次式で与えられる。

$$ln(V/L)=lnB+hlnL+\mu(1-\delta)ln(K/L)-\frac{1}{2}\rho\mu\delta(1-\delta)[ln(K/L)]^2$$

或いは

$$ln(V/L)\simeq a_0+a_1lnL+a_2ln(K/L)+a_3[ln(K/L)]^2$$

代替の弾力性が1に接近するほど，この近似式はよく当て嵌まるようになるが，1に一致し $\rho=0$ となったときにはダグラス函数に一致する。a_3 が零に対して有意の差を持たなければダグラス函数の妥当性を否定すべき理由はない。ρ が零でなければダグラス型は否定され CES 函数が容認されるが，a_3 が有意的に零でないことは，より一般的な函数形を導くことになり，CES 函数にのみ限定されない他の種のテストを可能にするであろう。又，a_3 は代替パラメーターの函数であるばかりでなく，他の2つのパラメーター δ と $(1-\delta)$（この2つは共に1より小さい）の函数でもある

から，その絶対値は小となる可能性が強い。したがって或る程度の自由度を持って，a_3の符号と値について論ずるためには，相当数の標本をとって K/L の分散を大きくする必要がある。この近似算式は弾力性一定を仮定するものではないから，a_1, a_2 したがって δ, σ の推計値はLとKの計測単位に依存する。しかし近似算式を用いて input の幾何平均値に対する弾力性を求めることはできる。KとLの幾何平均がサムプルの平均値に等しくなるようにとり $ln(K/L)=0$ とおけば事態は簡単になる。この場合弾力性は一定とはならないが，同次函数であるから代替の弾力性は二種の input の比率にのみ依存する。しかし自乗の項は一般の多項式のconstrained version であり，同次性をテストするためには unconstrained version を用いることもできる。即ち

$$ln(V/L)=a_0+a_1lnL+a_2ln(K/L)+a_{31}(lnK)^2$$
$$-2a_{32}(lnKlnL)+a_{33}(lnL)^2$$

同次性が成り立つには $a_{31}=a_{32}=a_{33}=a_3$ である。もしそうならなければ，われわれの標本の属性にもっと近いより一般的な多項式を導く必要がある。

代替の弾力性は又，限界生産力の関係式

$$Pf_2=w$$

から導くこともできる。但し $f_2=\partial F/\partial L$ であり，P は生産物の価格，wは賃金である。この式と CES 函数から，われわれは ACMS 函数

$$ln(V/L)=a+\sigma lnw$$

を導くことができる。この際Vとwは「実質額」で表わされる。この式の利点は形が単純でσが一次のパラメーターとして入ってくることである。規模の収益性は一定とは考えられないから，$\mu\neq1$ であって，限界生産力の条件はこの場合，次のように書き改められる。

$$ln(V/L)=a+\sigma lnw-(1-\sigma)\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)lnV$$

或いは

$$ln(V/L)=a+blnw+clnL$$

ただし $b=\mu/(\mu+\rho)$, $c=-(1-b)(1-\mu)$ である。したがって $\mu-1=c/(1-b)$, $\sigma=b/(1+c)$ となる。しかしCES函数が成立する条件はどちらかと云えば複雑であり，もっと広い意味の非同次函数を考えることもできるであろう。例えば，

$$V=A[\delta L^{-\rho_1}+(1-\delta)K^{-\rho_2}]^{-1/\rho_0}$$

とおくこともできる。これより次の限界生産力関係式

$$ln(V/L)=B+clnw+c(\rho_1-\rho_0)lnL$$

を得る。ただし $c=1/(1+\rho_0)$ である。

計測にあたっては random error 又は disturbance を考慮して

$$V=AK^{\alpha}L^{\beta}e^{u},$$
$$(Eu=0,\ Eu^2=\sigma,\ Eu\log K=Eu\log L=0)$$

とおいて計測する。1965年の Hoch と Mundlak の労働需要函数の計測では今一つのモデルがある。即ち

$$L=\beta\frac{P}{w}Ve^{v}$$

である。ここにvは random error である。

2

第3章では1963年のセンサスを使ってデータの検討が行なわれる(鉱工業)。20994の事業所があるが，1953年のセンサスに比して8000減少している。この中70％の事業所では10％以下の労働者を雇用しているに過ぎない。

E	建設された年
n_1	賃金労働者（生産労働者）数
n_2	給料労働者数
n_3	雇用主と給料の支払いを受けない家族労働者の数
W_1	生産労働者の賃金
W_2	事務系職員の賃金
W_3	家族労働者の賃金
P_1	雇用主によって支払われる社会保険
P_2	雇用主によって支払われる年金
X_1	「独立した」生産
X_2	修繕
X_3	請負仕事
M_1	原材料
M_2	燃料，電力等
M_3	荷造材料
M_4	請負仕事
G_1	販売された財の量
G_2	購入された財の量
U_1	生産にかかる税
U_2	販売される財にかかる10％の税
U_3	補助金
m_1	動力，総馬力数
m_2	電動機，総馬力数
m_3	その他の機械に消費される電力
C	個人乗用車
T	トラック
B	バス

K_1　建物の保険値

K_2　機械及び関連財の保険値

H　在庫

b　事業所の型

(1)　生産と原料消費の数変

$$Y=X_1+X_2+X_3+G_1+U_3-U_2$$

$$M=M_1+M_2+M_3+M_4+G_2+W_3$$

$$V=Y-M-U_1$$

(2)　労働投入変数

$$N=n_1+n_2+n_3$$

$$L_1=h+hW_2/W_1$$

$$L=\frac{h(W_1+W_2)}{W_1}+2n_3$$

(3)　資本投入函数

$$K=K_1+K_2+H+6C+10T+12.5B$$

車の操業のための生産費

$$CS=3.51C+8.5T+5.63B$$

資本用役の定義

$$SK=0.03K_1+0.15K_2+0.08K+3.51C+8.50T+5.63B$$

(4)　価格変数

$$W=W_1/h$$

(5)　質の変数

労働投入構成変数

$$d=n_3/N$$

$$g_1=K_2/K$$

$$g_2=(6C+10T+12.5B)/K$$

$$g_3=m/K_2=(m_1+m_2+m_3)/K_2$$

$$f=\begin{cases}1 & m=0\ のとき\\ 0 & m>0\ のとき\end{cases}$$

$$b=\begin{cases}1 & 2つ以上の事業所を持つ企業\\ 0 & 単一事業所の企業\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}1953年以後に建設された事業所についてはその年度\\ 1952年以前に建設された事業所については30\end{cases}$$

$$F=\begin{cases}1 & 1952年以前に建てられた事業所\\ 0 & 1953年以後に建てられた事業所\end{cases}$$

$$q=X_2/(V+M_1)$$

$$R_1=\begin{cases}1 & 工業化が進んだ地域の事業所\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$R_2=\begin{cases}1 & 工業化が進んでいない地域の事業所\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$r_1=\begin{cases}1 & N<10\ のとき\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$r_2=\begin{cases}1 & 50\leqq N<100\ のとき\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$r_3=\begin{cases}1 & N\geqq 100\ のとき\\ 0 & その他\end{cases}$$

次の数字は計算から除外される。

(a)　$n_1<3$　の生産労働者

(b)　$h=0$　の労働時間

(c)　$W_1=0$　の賃金

(d)　$K_1=0$　の建物の価値

(e)　$K_2=0$　のときの機械の価値

(f)　$V\leqq 0$　のときの附加価値

3

このような換算の下にノールエーのデータについて検討が行なわれる。一体 Griliches と云う学者は異質のデータの量的還元について多くの関心を持っている人であるが，その換算の基準について完全な客観性があるか否かが問題として残される。

第4章に入って次のような計算結果が表示される。

	資本の弾力性	規模係数	代替の弾力性	R^g	誤差
		$h=\alpha+\beta-1$	σ		
コブ・ダグラス型（C.D.）	0.199 (0.009)[a]	0.064 (0.005)	1.00[h]	0.351	0.203
15の別個の産業をクロス・セクションで捉えたC.D.	0.187 (0.009)	0.067 (0.006)	1.00[h]	0.398	0.196
15の別個の産業のクロス・セクションと資本の弾力性を考えた C.D.	*n.m.*[b]	0.070 (0.006)	1.00[h]	0.405	0.195
CES[f] に対する Kmenta の近似式（15産業のクロス・セクション）	0.192[j] (0.009)	0.067 (0.006)	0.88[k]	0.398	0.196
CES（非線型）	0.225[j] (*n.c.*)[c]	0.066 (0.005)	0.90[i]	*n.c.*	0.204

a　個々の係数の標準誤差が括弧内の値である。

b　*n.m.* 有意でない。

c　*n.c.* 計算不能

d　C.D.　$\log(V/L)=\text{const}+\alpha\log(SK/L)+h\log L$

e　Kmenta の近似式，C.D. に $[\log(SK/L)]^2$ の項を加えたものは

f　CES；$\log V=\text{const}+(1+h)\log[\delta L^{-\rho}+(1-\delta)(SK)^{-\rho}]^{-1/\rho}$，$\sigma=1/(1+\rho)$

　V,L,K　一事業所当りの値

g　R重相関係数

h　仮定

i　0.2の間隔を以て0.1から1.5に至る σ のレンジを観察した結果の計測値

j　幾何平均値に対する計測値

k　$[lnSK/L]^2$ の係数 $\hat{c}=-0.011(0.007)$，$\hat{\rho}=2\hat{c}(1+\hat{h})/\hat{\alpha}(1+\hat{h}-\hat{\alpha})$ 及び $\hat{\sigma}=1/(1+\hat{\rho})$

この相関係数はいずれの場合にも非常に低い。Griliches は CES の近似算式によって質変数の値を計測し，更に個々の産業についてダグラス型と Kmenta の近似式を当て嵌めている。けれどもこの相関係数も最高 0.623と高くない。又，ダグラス函数の β と分配率 S_L の比較をしているが，27 産業中 S_L の方が大きいのは1業種だけで，しかもその開きは相当に大きい。Kmenta の近似式による代替の弾力性は次のようになる。

$$y=a+bk+ck^2$$

但し，$y=ln(V/L)$，$k=ln(SK/L)$ である。

$c=-\frac{1}{2}\rho\alpha(1-\alpha)$，$\sigma=1/(1+\rho)$ と仮定すれば，$\rho=\frac{1}{2}$ のとき $\left(\sigma=\frac{2}{3}\right)$，$\alpha=0.4$，$c=-0.06$ となり非常に小さい。k の平均値が零になるようにとれば，c の tratio は b のそれに比して

$$\frac{t_c}{t_b}=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{\text{Var}\,k^2}{\text{Var}\,k}}$$

となる。k が正規分布をし，$b=\alpha$，$c\simeq-\frac{1}{2}\rho\alpha(1-\alpha)$ を代入すれば，

$$t_c/t_b=-\frac{1}{2}\rho(1-\alpha)\sqrt{2\,\text{Var}\,k}$$
$$=-\rho(1-\alpha)\sqrt{\text{Var}\,k/2}$$

上述の数値を代入すれば

$$t_c/t_b\simeq-0.15$$

であるから c の計測値の精度は b の 1/7 程度に過ぎない。$\rho=1$ でも $\left(\sigma=\frac{1}{2}\right)$ $t_c/t_b\simeq-0.30$ である。

かくして製造業全体について，

$$\begin{aligned}lnV=&1.6+\underset{(0.040)}{0.958}lnL+\underset{(0.033)}{0.241}lnSK-\underset{(0.011)}{0.026}(lnL)^2\\&-\underset{(0.007)}{0.010}[lnSK]^2+\underset{(0.016)}{0.019}(lnL)[lnSK]\end{aligned}$$

更に産業別の計測を行なった後，bias について述べている。z と w を外生変数，u と v を random variable としたとき，

$$y=\alpha z+\beta x+u$$
$$y-x=\theta w+v$$

なる関係が成立しているとする。$Euv=0$，と仮定すれば，上述の二式は，$y=lnV$，$z=lnSK$，$x=lnL$，$w=lnW$ と解することもできる。第一式は生産函数であり，第二式は θ を代替の弾力性としたときの限界生産力説成立のための条件式である。誘導形を作ると，

$$x=\frac{\alpha}{1-\beta}z-\frac{\theta}{1-\beta}w+\frac{u-v}{1-\beta}$$

が導かれる。このモデルにおいては，

$$P\lim_{n\to\infty}(\hat{\varepsilon}-\varepsilon)=[-h+\theta b_{wz}]R$$

なる関係が成立する。ただし，$h=\varepsilon-1=\alpha+\beta-1$ は規模係数であり，b_{wz} は資本に対する賃金率の回帰係数である。そして，

$$R=\frac{\sigma_u{}^2}{\sigma_u{}^2+\theta^2\sigma_w{}^2(1-r^2{}_{wz})+\sigma_v{}^2}$$

である。y の variance は，$\text{Cov}zu=0$ とおけば，

$$\text{Var}\,y=\alpha^2\text{Var}\,z+\beta^2\text{Var}\,x+2\alpha\beta\,\text{Cov}\,x^2$$
$$+\text{Var}\,u+2\beta\,\text{Cov}\,xu$$

で与えられ，x に関する誘導形を使用し，$\text{Cov}\,uw=\text{Cov}\,uv=0$ とおけば，

$$\text{Cov}\,xu=\frac{1}{1-\beta}\text{Var}\,u$$

となり，したがって

$$\text{Var}\,y=\alpha^2\,\text{Var}\,z+\beta^2\,\text{Var}\,x+2\alpha\beta\,\text{Cov}\,xz$$
$$+\frac{1+\beta}{1-\beta}\text{Var}\,u$$

或いは，

$$\text{Var}\,u=\frac{1-\beta}{1+\beta}[\text{Var}\,y-\alpha^2\,\text{Var}\,z-\beta^2\,\text{Var}\,x$$
$$-2\alpha\beta\,\text{Cov}\,xz]$$

となる。そこで前述の生産函数について，θ,β 等の数値が代入され，

$$\text{bias}\,\hat{h}=0.0115$$

となり，規模係数の約五分の一となる．

以上が本書の主要部分であり，基本はダグラス函数とCES函数にあるのであるが，規模の経済性についての観察が強調され，又，従来安易に計算されていたLやKについて質の差を量の差に還元する努力が払われていることは前述の如くである。ただ計測結果についてのフィットネスはあまり良くないので再検討する余地はあるであろう。尚

$$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}M^{\gamma}$$

$$Y=AL^{\beta}[\delta(SK)^{-\rho}+(1-\delta)M^{-\rho}]^{-\mu/\rho}$$

なる函数形も考えられている。

〔鈴木　諒一〕