Title	J.S. Cramer, Empirical Econometrics(園乾治先生退任記念号)
Sub Title	
Author	鈴木, 諒一
Publisher	
Publication year	1972
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.15, No.2 (1972. 6) ,p.277- 284
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19720630-03958985

〔書　評〕

J. S. Cramer, Empirical Econometrics

1

計量経済学に関する textbook は最近数多く見られるが，或いは経済理論に偏して統計学的手法の分析に不十分な点があったり，その反対に確率論的分析に重点をおくあまり経済学的意味が薄れたりして，なかなか調和のとれた文献が少ない。その意味で今回刊行された J. S. Cramer, Empirical Econometrics, 1971, North-Holland Company, pp. 277＋X は注目されてよい文献である。その内容は，第1章序論，第2章不規則変動とそれに関連した出来事，第3章消費者行動の属性，第4章所得分布，第5章線型回帰モデル，第6章同時決定方程式モデル，第7章家計分析，第8章消費函数，第9章需要分析，第10章生産函数。から構成されている。

第2章の議論から紹介しよう。$(t, t+\varDelta t)$ なる time-interval があり，その区間においてある出来事が生ずる確率が時間と独立で，時間の長さに比例すると仮定する。この確率は

$$\lambda \varDelta t$$

で表わされる。ただし λ は正の常数で $\lambda\varDelta t<1$ である。したがって時点0から t までにある出来事が起る確率は，random integer-valued n である。

$$P(n,\ t) \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

これより，

$$P(n,\ t+\varDelta t)=(1-\lambda\varDelta t-\lambda^2\varDelta t^2\cdots\cdots)P(n,\ t)$$
$$+\lambda\varDelta t\,P(n-1,\ t)+\lambda^2\varDelta t\,P(n-2,\ t)+\cdots\cdots$$

$$\frac{dP(n,\ t)}{dt}=P'(n,\ t)=\lambda P(n-1,\ t)-\lambda P(n,\ t) \quad (1\cdot1)$$

$$P(0,\ t)=e^{-\lambda t} \quad (1\cdot2)$$

であるから，〔$P(0,\ 0)=1$〕この式を(1･1)に代入すれば，

$$P(n,\ t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad (1\cdot3)$$

かくて有限の期間において $n=0,1,2,\cdots\cdots$が起る確率は Poisson の分布を示す。又，最初の出来事が起るまでの waiting time に関する確率分布は，

$$F(t)=P(\underline{t}\leqq t)=1-P(\underline{t}>t)=1-e^{-\lambda t} \quad (1\cdot4)$$

となるから t の確率密度は

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

で与えられる。これよりヒストグラムの説明があり，大数法則――ガウス分布と展開されていく。

第3章では Engel 曲線の説明から始まり，車を所有できる限界の所得を y_{0i}，それ以上の所得を y_i としたときの所得量 q は

$$\left.\begin{array}{lll} y_i\geqq y_{0i} & \text{に対しては} & q_i=1 \\ \text{それ以外の}\,y & \text{に対しては} & q_i=0 \end{array}\right\} \quad (2\cdot1)$$

とおく。ここで y_i が対数正規分布をなすものと仮定して2の函数とおけば，

$$\varLambda(z;\mu,\sigma^2)=N(\log z;\mu,\sigma^2)$$
$$=N\left\{\frac{\log z-\mu}{\sigma};0,1\right\} \quad (2\cdot2)$$

が成立する。

$$N(x;0,1)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

である。(2･1)，(2･2)から

$$P(\underline{q}_i=1|y_i=y)=P(\underline{y}_{0i}\leqq y)=\varLambda(y,\mu,\sigma^2) \quad (2\cdot3)$$

が導かれる。単純化のため，属性 q の期待値を Q で表わせば，

$$Q(y)=\varLambda(y;\mu,\sigma^2) \quad (2\cdot4)$$

となる。又，対数変換をすれば，所得分布ばかりでなく，所得に関する消費の弾力性の概念などの導入もできるとの指摘がある。そして，アメリカ，イギリスのエンゲル曲線の実例が示される。Aggregate した Engel 曲線は次式によって示される。

$$\bar{Q}=\int_0^{\infty}\varLambda(y;\mu,\sigma^2)\,dF_{\underline{y}}(y) \quad (2\cdot5)$$

ここで t 分布の説明があり，所得に関する消費の弾力性 η_Q は次式で示される。

$$\eta_Q=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma^2_y}}\quad\frac{n(t;0,1)}{N(t;0,1)} \quad (2\cdot6)$$

ただし

$$n(t;0,1)=\frac{dN(t;0,1)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

同様にして需要曲線の分析が行なわれ，価格に関する需要の弾力性の計測値が掲げられる。

第4章では個人所得の分布がとり上げられ，Pareto 法則のオランダ資料への当て嵌め，その確率分布的性格が論じられる。更に Mandelbrot のモデルが取り上げられる。n 個の不規則変数 $u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$ があり，

$$U_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

とおく。n は何れも線型変換が可能であると仮定すれば，

$$a_1u_1+b_1,\ \ a_2u_2+b_2,\ \ \cdots\cdots,\ \ a_nu_n+b_n$$

は同じ確率分布 $F(z)$ を持つ。$F(z)$ は安定的分布であり，その最も単純な形は正規分布である。これより Pareto-Levy モデルが展開されるのであるが，不幸にしてそれは実際に適しなかった。そこでこれに代るものとして，Champernowne, Simon, Steindl のモデルが批判され，対数正規分布 (Gibra) が推奨される。

2

第5章は回帰方程式の説明である。

$$Y_i=\phi(X_{1i}, X_{2i}, \cdots\cdots X_{wi}) \qquad (4\cdot1)$$

が直線型に展開されたとして，random disturbance u_i の役割が考えられる。

仮定1，　$\mathrm{covar}(X_{ji}, U_i)=0$　(4・2)

仮定2，　$E(u_i)=0$　(4・3)

仮定3，　$\mathrm{var}(u_i)=\sigma^2$　(4・4)

仮定4，　$\mathrm{cov}(u_iu_j)=0\quad(i\neq j)$　(4・5)

　　　　$\mathrm{cov}(u_iu_{i-1})=\rho\sigma^2\quad(0<\rho<1)$　(4・6)

これだけの前提をおいて最小自乗法が適用される。母集団に関し

$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots\cdots+\beta_kX_k+u_i \qquad (4\cdot7)$$

なる関係が存在すると考えたとき，サムプルから得る関係式

$$Y=b_0+b_1X_1+b_2X_2+\cdots\cdots+b_kX_k \qquad (4\cdot8)$$

との関係において

$$\lim_{n\to\infty} E(b)=\beta \qquad (4\cdot9)$$

を得る。経済学において屢々見られるように或るパラメーターが他のパラメーターの函数であるときには，

$$\beta=\phi(\alpha, \gamma, \delta\cdots\cdots) \qquad (4\cdot10)$$

であるから，これに対応するサムプルにおいては，

$$b=\phi(a, c, d, \cdots\cdots) \qquad (4\cdot11)$$

なる関係が成立し，

$$\mathrm{var}(b)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)^2\mathrm{var}(a)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial c}\right)^2\mathrm{var}(c)+\cdots\cdots$$
$$+2\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial c}\right)\mathrm{cov}(a, c)$$
$$+2\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial d}\right)\mathrm{cov}(a, d)+\cdots\cdots \qquad (4\cdot12)$$

となる。

第6章は同時決定方式の説明である。

$$Y=\phi(X_1, X_2, \cdots\cdots X_w) \qquad (4\cdot1)$$

なる函数が存在するとして，その相互依存関係を前提とする解法が呈示される。例えば

Q_D　需要量　　Q_S　供給量　　P　価格

と定めれば

需要函数　$Q_D=\beta_{10}+\beta_{11}P$　(5・1)

供給函数　$Q_S=\beta_{20}+\beta_{21}P$　(5・2)

なる線型式が成立するとする。先験的知識によって $\beta_{11}<0$, $\beta_{21}>0$ である。統計的観察可能な数値では，

$$Q_D(P^0)=Q_S(P^0)=Q^{0+} \qquad (5\cdot3)$$

しか得られない。ここで P^0, Q^0 を求めれば，

$$P^0=\frac{\beta_{20}-\beta_{10}}{\beta_{11}-\beta_{21}},\quad Q^0=\frac{\beta_{11}\beta_{20}-\beta_{10}\beta_{21}}{\beta_{11}-\beta_{21}} \qquad (5\cdot4)$$

を得る。明らかに $\beta_{11}\neq\beta_{21}$ である。

しかしこれでは identification の問題が解決できない。需要曲線のシフトが所得 Y によって，供給曲線のシフトが降雨量 Z によって起るものとすれば，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{需要函数} & Q=\beta_{10}+\beta_{11}P+\beta_{12}Y\\ \text{供給函数} & Q=\beta_{20}+\beta_{21}P+\beta_{22}Z\end{array}\right\} \qquad (5\cdot5)$$

となる。これより

$$\left.\begin{array}{l}P=\dfrac{1}{\beta_{11}-\beta_{21}}\{\beta_{20}-\beta_{10}+\beta_{22}Z-\beta_{12}Y\}\\ Q=\dfrac{1}{\beta_{11}-\beta_{21}}\{\beta_{11}\beta_{20}-\beta_{21}\beta_{10}+\beta_{11}\beta_{22}Z\\ \qquad\qquad -\beta_{21}\beta_{12}Y\}\end{array}\right\} \qquad (5\cdot6)$$

これが(5・5)の誘導形である。ここに

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_{11}=\dfrac{\beta_{22}}{\beta_{11}-\beta_{21}}, & \pi_{12}=\dfrac{-\beta_{12}}{\beta_{11}-\beta_{11}}\\ \pi_{21}=\dfrac{\beta_{11}\beta_{22}}{\beta_{11}-\beta_{21}}, & \pi_{22}=\dfrac{-\beta_{21}\beta_{12}}{\beta_{11}-\beta_{21}}\end{array}\right\} \qquad (5\cdot7)$$

と置き換えれば，(5・8)を得る。

$$\left.\begin{array}{l}P=\pi_{11}Z+\pi_{12}Y\\ Q=\pi_{21}Z+\pi_{22}Y\end{array}\right\} \qquad (5\cdot8)$$

これにより右辺は外生変数のみとなり identification が可能となる。更に進んで under-identification と just identification の説明がある。

次に random variable u の性格であるが，観察値 x, y に関して

$$By+Ax=u \tag{5・9}$$

なる関係があるとし，これを書き直して

$$y=\pi x+u \tag{5・10}$$

となる。ここにおいて前述の仮定

$E(u_{ji})=0$

$\mathrm{var}(u_{ji})=\sigma^2{}_j$

$\mathrm{covar}(u_{ji}, u_{jk})=0$

の他に更に

$$\mathrm{covar}(x_{li}\, u_{ji})=0 \tag{5・11}$$

を仮定し，reduced form を作ることになる。

構造モデルによって reduced form が何等の制約をも受けないときには，間接最小自乗法を使用することができるし，under-identification も over-identification も起らない。(5・10)が成立し，これを解いて

$$\left.\begin{aligned} -c_{1*}&=P'_{\Delta *}b_{1\Delta} \\ 0_{**}&=P'_{\Delta **}b_{1\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{5・12}$$

を得る。これは

$$y_\Delta=[\pi_{\Delta *}\pi_{\Delta **}]x+v_\Delta \tag{5・13}$$

を意味する。ただし(5・10)は(5・5)より導かれたものとする。

単一の overidentified equation について考える。

$$\beta_1 y+\gamma_1 x=u_1$$

なる関係があるとし，観察値について

$$\beta_{1\Delta}y_{\Delta i}+\gamma_{1*}x_{*i}=u_{1i}$$

が成立するものとする。書き直せば

$$y_{1i}=-\beta_{1,\Delta-1}\,y_{\Delta-1,i}-\gamma_{1*}x_{*i}+u_{1i} \tag{5・14}$$

$\beta_{1,\Delta-1}$ は正規分布化した後の残差を含む係数であり，又,

$$y_{\Delta-1}=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{G\Delta} \end{pmatrix}$$

である。$\beta_{1,\Delta-1}$ と γ_1 の推計にあたっては，最小自乗法を適用するに際し $y_{\Delta-1}$ の要素が u_1 から独立することを要する。

$$y_i=\pi x_i+v_i,\quad v_i=\beta^{-1}u_i \tag{5・15}$$

とおけば,

$$y_{\Delta-1,i}=\pi_{\Delta-1}x_i+v_{\Delta-1,i} \tag{5・16}$$

が導かれる。これより

$$y_\Delta=(\pi_{\Delta *}\pi_{\Delta **})x+v_\Delta \tag{5・17}$$

が求むる解となって2段階最小自乗法が成立する。

3

第7章は家計分析であるがXを所得，C_j を費目別消費として，Allen-Bowley の法則

$$C_{ji}=\beta_{j0}+\beta_{j1}X_i+u_{ji} \tag{6・1}$$

が成立するものとする。しかし記録に現われた所得 X' は誤差 V を含むから

$$X'_i=X_i+V_i \tag{6・2}$$

である。偏差を小文字で表わせば

$$b_{j1}=\frac{\sum c_j x'}{\sum x'^2}=\frac{\beta_{j1}\sum x^2+\beta_{j1}\sum xv+\sum xu+\sum uv}{\sum x^2+2\sum xv+\sum v^2}$$

となり,

$$P\ \lim(b_{j1})=\frac{\beta_{j1}\,\mathrm{var}\,X}{\mathrm{var}\,X+\mathrm{var}\,V}$$

を得る。

$$C_i=\sum C_{ji}$$

とおけば C_i と X_i の間にも同様の関係が成立する。

β_{j1} の variance は

$$\frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

で表わせる。

これより Engel 曲線の分析に入り，その近似式として

$$\log C_{jh}=\alpha_j+\beta_j\log X_h+U_{jh} \tag{6・3}$$

の fitness が検討される。又，択一的に

$$C_{ji}=\alpha_j+\beta_j\log X_i+U_{ji} \tag{6・4}$$

このとき所得に関する消費の弾力性は,

$$\eta_j=\frac{\partial\log \mathrm{C}_j}{\partial\log X}=\frac{1}{C_j}\frac{\partial C_j}{\partial\log X}=\frac{\beta_j}{C_j}$$

となり，消費の絶対額と弾力性は反比例する。(6・4)の α,β の推測値を a, b とすれば,

$$E_j(X_0)=\frac{b_j}{a_j+b_j\log X_0}$$

が所与の所得水準 X_0 に対する弾力性となる。平均所得を $\bar{X}$ とすれば

$$\bar{E}_j=\frac{b_j}{\bar{C}_j}$$

$$\left[\frac{\sigma(\bar{E}_j)}{\bar{E}_j}=\sigma\sqrt{\left\{\frac{1}{b_j{}^2\sum x^2}+\frac{1}{nC_j{}^2}\right\}}\right.$$

$$\frac{\sigma(\bar{b}_j)}{\bar{b}_j}=\sigma\sqrt{\frac{1}{b_j{}^2\sum x^2}}$$

を得る。これより η を求めると第1表のようになる。

第 1 表

	ドイツ 1950—51	アメリカ 1955	フランス 1956	イギリス 1958
パン	0.02	0.12	−0.12	−0.05
ミルク	0.11	−0.18	0	0.27
バター	0.76	0.37	0.31	0.30
チーズ	0.73	0.30	0.59	0.24
肉	0.50	0.30	0.64	0.25
魚	0.43	0.06	0.70	0.41
野菜	0.56	0.66	0.83	0.42
果物	1.02	0.14	1.10	0.70
砂糖	0.12	0.16	−0.09	0.07
卵	0.66	0.21	0.43	0.37
食料	0.47		0.57	0.28
被服	1.55		1.35	
家賃地代	0.61		1.35	

購入量を Q, 価格を P で表わせば

$$C_k(X)=Q_k(X)P_k \qquad (6\cdot5)$$

である。或いは

$$\log C_k(X)=\log Q_k(X)+\log P_k$$

であるから,

$$\eta_k=\frac{d\log C_k(X)}{d\log X}=\frac{X}{Q_k(X)},\ \frac{dQ_k(X)}{dX} \qquad (6\cdot6)$$

となり,

$$\eta_C=\frac{d\log C(X)}{d\log X},\quad \eta_Q=\frac{d\log Q(X)}{d\log X}$$

とおけば,

$$\eta_C=\sum\frac{C_k}{C}\eta_k,\quad \eta_Q=\sum\frac{Q_k}{Q}\eta_k \qquad (6\cdot7)$$

を得る。又

$$\eta_P=\frac{d\log P(X)}{d\log X}$$

とおけば

$$\eta_P=\eta_C-\eta_Q \qquad (6\cdot8)$$

である。これより各種弾力性の値を1950年のドイツについて求めると第2表のようになる。

第 2 表

	支出		数量		質	
	C_k（平均値）	η_C	Q_k（平均値）	η_Q	P_k（平均価格）	η_P
バター	95	0.76	17	0.74	5.6	0.02
マーガリン	77	0.01	33	0.01	2.3	0
軽焼	33	0.18	24	0.16	3.1	0.02
脂肪類計	245	0.35	74	0.24	3.3	0.12

ここで Engel 第2法則を考慮して世帯人員を F で表わすとき,

$$\log C=\alpha+\beta\log X+\gamma\log F+u$$

なる関係が考えられる。ここで sample 調査によって得られる β の推計値 b は

$$b=\frac{\sum xf}{\sum x^2}$$

によって得られる。ただし x は $\log X$ の偏差である。

$$E(b)=\beta+\gamma\frac{\sum xf}{\sum x^2}$$

ここにおいて, (1) $\gamma_j\fallingdotseq0$, 即ち家族人員の数が消費に影響を及ぼし, (2) $\sum xf\fallingdotseq0$, 即ち x と f の相関がある限り, b は β に対して bias を持つことになる。これを避けるには多元相関式を当て嵌めればよいのであるが, X と F の multi collinearity の問題が起ってくる。そこでこの問題を避けるために Cramer は先験的に

$$\beta+\gamma=1 \qquad (6\cdot8)$$

とおく。更に年齢差による消費単位の調整が第3表の如くに示される。

第 3 表

	子供の係数	大人の係数
国連	14才まで年齢に応じて0.20から0.80まで増加	男子 1.00 女子 0.80 60 歳以上 0.80
アムステルダム・スケール	14歳まで年齢に応じて 0.15 から 0.90 まで増加	男子 1.00 女子 0.90
C. R. E. D. O. C.—I. N. S. E. E.	15歳まで0.50	最初の成年者 1.00 同一世帯内に住む他の成年者 0.70

一般に

$$C_j/F_j=f_j(X/F) \qquad (6\cdot9)$$

とおく。F は family size であるが, 世帯人員を K としたとき

$$F_j=\sum\lambda_{lj}K_j,\quad F=\sum\Lambda_lK_l \qquad (6\cdot10)$$

とおいた値である。

$$\sum\frac{\partial C_j}{\partial X}=1,\quad \sum\frac{\partial C_j}{\partial K_l}=0 \qquad (6\cdot11)$$

であるから

$$C_j=F_j\cdot f_j(X/F)$$

から

$$\frac{\partial C_j}{\partial X}=\frac{F_j}{F}f'_j,\quad F=\sum F_jf'_j \qquad (6\cdot12)$$

を得る。K_l で微分し, (6·11)を代入すれば,

$$\frac{\partial C_j}{\partial K_l}=\lambda_{lj}f_j-\Lambda_l\frac{X}{F^2}F_jf'_j$$

(6·11)から

$$A_l \frac{X}{F^2} \sum F_j f'_j = \sum \lambda_{lj} f_j$$

(6・12)より

$$A_l = \frac{F}{X} \sum \lambda_{lj} f_j = \sum \frac{(C_j/F_j)}{(X/F)} \lambda_{lj} \qquad (6\cdot13)$$

即ち所得係数は，これに対応する個々の品目の所得係数の加重平均値であり，ウエイトは適当な adult scale によって修正された各財の家計に対する share である。しかし，この方法によっても，λ の計測に問題が残る。個々の商品について完全な分離確認が可能であると仮定できれば標準家計をとって，正規分布型にならした後，個々の所得係数を求めることもできるであろう。即ち標準家計に対しては，

$$C_j = f_j(X) \qquad (6\cdot14)$$

で第2の sub-sample については

$$C_j = g_j(X) \qquad (6\cdot15)$$

なる関係があるとする。(6・13)にしたがって

$$C_j^* = \frac{C_j}{1+\lambda_j}, \quad X^* = \frac{X}{1+A_l}$$

なる規模換算を行なう。

$$g_j(X) = (1+\lambda_{lj}) f_j(X^*) \qquad (6\cdot16)$$

(6・14)と(6・15)は計測された函数を表わすから，いずれかのサムプルから得られる Engel 曲線を最も良く当て嵌まる係数を求めるに際して標本誤差の発生は免れない。しかも最適係数を得ようとすれば，その係数は f_j, g_j の特定化の仕方と共に変化するであろう。Houthacker は A_l が1に等しいと云う仮定を置くことによってこの困難を回避したが，1949年の Nicholson の仮定の方が優れている。それは家計の中における子供の数を k とするとき，

$$\log C_{jk} = \beta_j \log X + [\alpha_j - \beta_j \log(1+kA_l)]$$

をおくことである。

第 4 表

1953年 England 資料による A の値

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
アルコール飲料	0.09	0.15	0.12
タ　バ　コ	−0.05	0.01	−0.05
娯　楽　費	−0.01	0.06	0.08

4

第8章は Keynes 体系の説明から始まる。

$$C_t = C(Y_t), \quad Y_t = C_t + I_t \qquad (7\cdot1)$$

より，

$$0 < \frac{dC}{dY} < 1, \qquad (7\cdot2)$$

$$0 < \frac{d \log C}{d \log Y} = \frac{Y}{C} \frac{dC}{dY} < 1 \qquad (7\cdot3)$$

なる属性が導かれる。そして消費は所得に対して線型函数を成すとの仮定が置かれる。ただし Aggregate した際には，

$$\sum C_{it} = \beta'_0 N_t + \beta_1 \sum Y_{it} + \sum u_{it} \qquad (7\cdot4)$$

となる。ここに N は世帯数で t に対し常数と仮定しなければ，マクロの消費函数においては常数項は存在しない。常数項がないと云うことは回帰方程式の適用に若干の問題を投げかけるし，更に N と Y の変化にあたって multicollinearity の問題も生じてくるので(7・4)を変形して

$$\frac{1}{N_t} \sum C_{it} = \beta'_0 + \beta_1 \frac{1}{N} \sum Y_{it} + \frac{1}{N} \sum u_{it} \qquad (7\cdot5)$$

とおく方が処理し易い。u の性格については，

$$E(u_{it}) = 0, \quad \mathrm{var}(u_{it}) = \sigma^2, \quad \mathrm{cov}(u_{it}, u_{i,t+1}) = 0$$

$$\mathrm{cov}(u_{it}, u_{jt}) = \rho\sigma^2, \quad \mathrm{cov}(u_{it}, u_{jt+1}) = 0$$

と仮定する。これによって回帰方程式が導出される。

時としては消費函数を

$$\log C_t = y_0 + y_1 \log Y_t + u_t \qquad (7\cdot6)$$

とおくこともある。

又 Friedman の恒常所得説では

$$Y_i = Y_p + Y_t$$

$$C_i = C_p + C_t$$

$$C_p = k Y_p$$

であるが，その統計学的性質としては，

$$\left.\begin{array}{ll} E(Y_p) = \mu_y, & E(Y_t) = 0 \\ \mathrm{var}(Y_p) = \sigma_p^2, & \mathrm{var}(Y_t) = \sigma_t^2 \\ \mathrm{cov}(Y_p, Y_t) = 0 & \end{array}\right\} \qquad (7\cdot7)$$

$$\left.\begin{array}{ll} E(Y_i) = \mu_y, & E(C_i) = k\mu_y \\ \mathrm{var}(Y_i) = \sigma_p^2 + \sigma_t^2, & \mathrm{var}(C_i) = k^2\sigma^2_p + \sigma^2_{ct} \\ \mathrm{cov}(C_i, Y_i) = k\sigma_p^2 & \end{array}\right\} \qquad (7\cdot8)$$

が要求される。所得に関する消費の弾力性

$$\eta = \frac{d \log C}{d \log Y} = \frac{Y}{C} \frac{dC}{dY}$$

については，

$$E = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} \frac{\sum cy}{\sum y^2}$$

をとり

$$P\lim(E) = P\lim(\bar{Y}/\bar{C}) P\lim(\sum cy/\sum y^2)$$

より

$$P\lim(\bar{Y})/P\lim(\bar{C}) = \mu_y/k\mu_y = \frac{1}{k}$$

$$P\lim(\sum cy/\sum y^2)=P\lim\left(\frac{1}{n}\sum cy\right)\Big/P\lim\left(\frac{1}{n}\sum y^2\right)$$
$$=k\sigma^2_p/(\sigma^2_p+\sigma^2_t)$$

を代入して

$$P\lim(E)=\frac{1}{k}\,\frac{k\sigma^2_p}{\sigma^2_p+\sigma^2_t}=\frac{\sigma_p{}^2}{\sigma_p{}^2+\sigma_t{}^2} \quad (7\cdot9)$$

を得る。第5表は所得に関する消費の弾力性の計測値である。

第 5 表

			E
1	アメリカにおける都市・農村の家計調査		
		1941	0.87
		1944	0.70
		1947	0.85
		1950	0.80
2	アメリカ，1950年，都市・農村の消費単位調査		0.82
	イギリス，1950–51年，都市・農村の所得単位調査		0.87
3	アメリカ，職業別調査		
	1935–36	非農家世帯	0.82
		農業世帯	0.63
	1941	非農家世帯	0.87
		農業世帯	0.64
	1948	個人業主，消費単位	0.70
		農　家，消費単位	0.69
		その他，消費単位	0.86

もっとも耐久消費財の購入に関してはボーナスBの影響が強いから

$$C_i=\beta_0+\beta_1Y_i+\beta_2B_i+u_i$$

とおいて，耐久財購入を除いた支出を C_1，耐久財購入を含んだ支出を C_2 として係数を求めると Bodkin の計算によれば次のようになる。

C_1 に対し，$b_1=0.56(0.01)$，$b_2=0.72(0.11)$

C_2 〃 $b_1=0.75(0.02)$，$b_2=0.97(0.01)$

これによると恒常支出及び変動支出のいずれに対しても，変動所得からの限界消費性向の方が高く，恒常所得説の仮定と矛盾してくる。

恒常所得説の動学化にあたっては

$$Y_{p,t}-Y_{p,t-1}=\gamma(Y_t-Y_{p,t-1}),\ (0<\gamma<1) \quad (7\cdot10)$$

とおく。$\gamma<1$ としたのは適応が不十分と考えたからである。

一般に

$$Y_{p,t}=\gamma\{Y_t+(1-\gamma)Y_{t-1}+(1-\gamma)^2Y_{t-2}+\cdots\} \quad (7\cdot11)$$

で定義される。或いは択一的に

$$Y^*_t=w_1Y_t+w_2Y_{t-1}$$
$$w_1,\ w_2>0,\ w_1+w_2=1$$

とおき，

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2Y_{t-1}+u_t \quad (7\cdot12)$$

を導く方法も考えられる。

更に

Y^0_t 過去の最高所得

とおいて，

$$C_t=\alpha_0+\alpha_1Y^0_t+\alpha_2(Y_t-Y^0_t)+u_t$$

或いは

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2Y^0_t+u_t \quad (7\cdot13)$$
$$\beta_1,\ \beta_2>0$$

も考えられる。習慣形成の理論としてはこの他に

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2C_{t-1}+u_t \quad (7\cdot14)$$

C^0 過去の最高消費

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2C^0_t+u_t \quad (7\cdot15)$$

とおくこともできるし，$0<\lambda<1$ なる制約の下に

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_1\lambda Y_{t-1}+\beta_1\lambda^2Y_{t-2}+\cdots+u_t \quad (7\cdot16)$$

とおくこともできる。(7・16)と(7・10)とは背後にある理論は全く異なるが，形式上は接近した形になる。

いま

$$C_t=C(Y_t,\ Y_{t-1},\ Y_{t-2},\cdots\cdots) \quad (7\cdot16)$$

なる函数があって静止状態における所得一定の場合に

$$\tilde{C}=C(Y,\ Y,\ Y,\cdots\cdots) \quad (7\cdot17)$$

なる関係が成立するとする。

第 6 表

学説	方程式	効果	
		短期	長期
1 単純Keynes式	$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t$	β_1	β_1
2 単純所得ラグ式	$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2Y_{t-1}$	β_1	$\beta_1+\beta_2$
3 過去の最高所得式	$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2Y^0$	β_1	$\beta_1+\beta_2$
4 過去の最高消費式	$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2C^0$	β_1	$\beta_1/(1-\beta_2)$
5 単純消費ラグ式	$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2C_{t-1}$	β_1	$\beta_1/(1-\beta_2)$
所得ラグ分布式	$C_t=\beta_0(1-\lambda)+\beta_1Y_t+\lambda C_{t-1}$	β_1	$\beta_1/(1-\beta_2)$
5′ 恒常所得説	$C_t=k\gamma Y_t-(1-\gamma)C_{t-1}$	$k\gamma$	k

$$Y_t=C_t+R_t \quad (7\cdot18)$$

なる関係があるとして autonomous であるとしたとき

$$Y_t=\pi_0+\pi_1R_t+V_t \quad (7\cdot19)$$

或いは

$$C_t=\pi_0+\pi_2R_t+V_t \quad (7\cdot20)$$

なる関係が導かれることになる。先決変数を Z_t で表わしたとき

$$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2Z_t+u_t \quad (7\cdot21)$$

或いは

$$C_t=\pi_0+\pi_1R_t+\pi_2Z_t+v_t \quad (7\cdot22)$$

この場合 $\tilde{C}=C_t=C^0_t$ であるから(7・13), (7・15)より,

$$\tilde{C}=\frac{\beta_0}{1-\beta_2}+\frac{\beta_1}{1-\beta_2}Y$$

となる。これが長期の波及効果で

$$\frac{d\tilde{C}}{dY}$$

によって示され, これに対し短期の波及効果は

$$\frac{\partial C_t}{\partial Y_t}$$

で与えられる。種々の消費函数の短期及び長期波及効果は第6表で与えられる。

これによって最小自乗法による推定値を求めることも考えられる。これによって限界消費性向を求めると第7表のようになる。

第 7 表

	ダービン・ワトソン比	限界消費性向	
		短期	長期
1 単純ケインズ式	0.45	0.19	0.19
2 単純所得ラグ式	0.92	0.10	0.63
3 過去の最高所得式	0.90	0.10	0.64
4 過去の最高消費式	1.10	0.15	0.43
5 単純所得ラグ式	1.38	0.07	0.25
所得ラグ分布式			
6 恒常所得式	1.41		

5

第9章では先ずシュルツの需要モデルが取り上げられる。これは需給量を価格の一次函数とおき, 常数項がない。次に Complete demand system においては,

$$Q^*_j=\phi_j(Y, P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k, 0) \quad (8\cdot1)$$

なる函数を考えると,

$$\sum P_jQ^*_j=Y \quad (8\cdot2)$$

$$\sum P_j\frac{\partial\phi_j}{\partial Y}=1 \quad (8\cdot3)$$

なる属性がある。しかし効用函数からの制約を考えると Slutsky の基本方程式から,「加重された限界効用均等法則」の方程式が導かれる。これより Barten と Stone の計測結果が紹介される。

第10章では限界生産力均等の法則から出発して, ダグラス函数の k の計測結果, (アメリカ全製造業)の計測結果が示される。

第 8 表

制約をつけない場合,	時系列	クロス・セクション
k	0.73(0.12)	0.76(0.02)
j	0.25(0.05)	0.25(0.02)
$k+j=1$ とおいたとき		
k	0.76(0.04)	0.75(0.02)

又, 鉄道の operation の分析に際しては貨物輸送を X_g, 旅客輸送を X_p, とするとき Klein は

$$X=X_pX^\delta_g \quad (9\cdot1)$$

とおいて生産函数を導出している。

Hildebrand と Liu の製造業における生産函数では, 生産労働者の数を V_p, 非生産労働者の数を V_n, 資本量を V_k として附加価値Xに対し

$$X=AV_p^{\alpha_1}V_n^{\alpha_2}V_k^{\beta} \quad (9\cdot2)$$

として計量化している。1957年のアメリカの資料では第8表のようになる。

次いで *CES* 生産函数がとり上げられる。一般には

第 9 表

	N	α_1	α_2	β
食料品製造業	35	0.32(0.10)	0.40(0.08)	0.31(0.06)
衣服製造業	18	0.59(0.13)	0.26(0.12)	0.11(0.07)
紙パルプ製造業	28	0.55(0.12)	0.27(0.11)	0.16(0.03)
化学工業	31	0.35(0.21)	0.57(0.20)	0.16(0.05)
石油石炭製造業	18	0.27(0.23)	0.50(0.27)	0.14(0.16)
ガラス土石製造業	25	0.67(0.18)	0.30(0.18)	0.08(0.04)
金属製造業	32	0.53(0.14)	0.34(0.12)	0.09(0.04)
機械製造業	25	0.47(0.13)	0.27(0.14)	0.19(0.04)
電気機械製造業	22	0.41(0.13)	0.24(0.08)	0.17(0.04)
輸送用機械製造業	26	0.41(0.24)	0.28(0.17)	0.19(0.04)
木材木製品製造業	14	0.79(0.34)		0.18(0.07)
ゴム・プラスティック製造業	16	0.85(0.10)		0.14(0.05)
第一次金属製造業	28	0.96(0.11)		0.10(0.05)
器具製造業	12	0.67(0.12)		0.25(0.07)
皮革製造業	15	0.85(0.12)		0.04(0.04)

X附加価値，L労働量，K資本量としたとき，

$$X=A\{L^{-\rho}+\varepsilon K^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{9・2}$$

が考えられるが，書き直して

$$X=\gamma\{\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{9・3}$$

とおく。代用の弾力性は

$$\sigma=-\frac{1}{1+\rho} \tag{9・4}$$

である。しかしより一般的には

$$X=\gamma\{\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho}\}^{-1/\lambda} \tag{9・5}$$

とおくべきである。これより

$$\frac{\partial\phi}{\partial L}=\delta\gamma^{-\lambda}\frac{\rho}{\lambda}\frac{X^{(1+\lambda)}}{L^{(1+\rho)}} \tag{9・6}$$

均衡条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial L}=C_1 w$$

であるから

$$\frac{X^{(1+\lambda)}}{L^{(1+\rho)}}=C_3 w$$

或いは

$$X/L=C_4 w^{1/(1+\rho)}X^{(\rho-\lambda)/(1+\rho)}$$

を得るから，

$$\log(X/L)=C_5-\sigma\log w-\sigma(\rho-\lambda)\log X \tag{9・7}$$

変形して

$$\log(X/L)=C_5-\sigma\log w \tag{9・8}$$

である。これに対し Cobb-Douglas 函数では

$$\log(X/L)=C_2+\log w$$

であるが，*CES* 函数を書き直せば

$$\log(X/L)=\beta_0+\beta_1\log w+u \tag{9・9}$$

となって対応する。第10表の Arrow の計算は (9・9) により，Fuchs の計算は

$$\log(X/L)=\beta_0+\beta_0'+\beta_1\log w+u \tag{9・10}$$

による。β_0' は先進国についてのみ計量化され，後進国においては零とおかれる変数である。

Fergson は (9・9) によって β_1 を計測し，Cobb-Douglas 函数のテストを行なった。第10表がそれであるが，*n.s.* とあるのは not significant の略称である。

以上が本書の大要であり，前半の部分は統計学の比較的初歩の段階の問題であるし，同時決定方式に関しては，random variable の相関の説明に関しては物足りなさを感じさせる。又，マクロ・ダイナミック分析がない等の欠点があるが，微視的問題については，今までの文献整理が良く行なわれて居り，この問題を勉学しようとしている人々にとっては恰好の Advanced Textbook となるであろう。　〔鈴木　諒一〕

第 10 表

	Arrow 推計		Fuchs 推計	
	自由度	b_1	自由度	b_1
乳製品	14	0.721(0.073)	13	0.902(0.080)
果物・野菜缶詰	12	0.855(0.075)	11	1.086(0.098)
穀物・粉製品	14	0.909(0.096)	13	1.324(0.167)
パン製品	14	0.900(0.065)	13	1.056(0.105)
砂糖	11	0.781(0.115)	10	0.898(0.183)
タバコ	13	0.753(0.151)	12	1.215(0.208)
織物	16	0.809(0.068)	15	0.976(0.104)
メリヤス製品	13	0.785(0.064)	12	0.948(0.090)
木材・木製品	16	0.860(0.066)	15	1.083(0.141)
家具	14	0.894(0.042)	13	1.043(0.090)
紙パルプ	14	0.965(0.101)	13	0.912(0.175)
印刷出版	14	0.868(0.056)	13	1.021(0.085)
皮革	12	0.857(0.062)	11	0.975(0.100)
化学製品	14	0.831(0.070)	13	1.113(0.104)
油脂	12	0.839(0.090)	11	1.058(0.181)
雑化学	14	0.895(0.059)	13	1.060(0.088)
土石	11	0.919(0.098)	10	0.658(0.197)
ガラス	11	0.999(0.084)	10	1.269(0.096)
陶器	10	0.901(0.044)	9	1.078(0.125)
セメント	10	0.920(0.149)	9	1.308(0.217)
鉄鋼	11	0.811(0.051)	10	0.756(0.112)
非鉄金属	8	0.011(0.120)	7	0.935(0.197)
金属製品	11	0.902(0.088)	10	1.006(0.166)
電気機械	12	0.870(0.118)	11	1.026(0.214)

第 11 表

時系列データによるダグラス函数の代用の弾力性

(アメリカ，1949-61，Fergson)

	自由度	b_1
食料品製造業	10	0.241(0.20) *n.s.*
タバコ製造業	10	1.183(0.46)
織物製造業	10	1.104(0.44)
衣服製造業	10	1.084(0.16)
木材・木製品製造業	11	0.905(0.067)
家具製造業	11	1.123(0.045)
紙パルプ製造業	11	1.016(0.060)
印刷出版業	10	1.147(0.31)
化学工業	11	1.248(0.072)
石油石炭製品製造業	11	1.300(0.149)
ゴム・プラスティック製造業	7	0.759(0.56) *n.s.*
皮革製造業	10	0.856(0.14)
ガラス土石製造業	7	0.666(0.47)
第一次金属製造業	8	1.200(0.105)
金属製品製造業	10	0.926(0.26)
一般機械製造業	11	1.041(0.041)
電気機械製造業	10	0.643(0.36)
輸送用機械製造業	10	0.237(0.56) *n.s.*
精密機械製造業	10	0.763(0.29)