〔書　評〕

Daniel Hamberg, Models of Economic Growth

1

経済成長理論は第2次大戦後登場したユニークな理論である。その発達の過程についてはここで改めて論ずるまでもないが，今日成長理論の権威者の一人である Daniel Hamberg は Models of Economic Growth, New York, 1971 なる著書を著わしてこの整理を行わうとした。その内容は第1章 Harrod-Domar モデル，第2章新古典派モデル，第3章所得の分配と経済成長に関するケムブリッジモデル，第4章上記3つのモデルに関する問題点，第5章貯蓄投資と経済成長，第6章蓄積の golden rule に関する新古典派の命題，第7章誘引された技術変化と新古典派成長。となって居り，246頁ほどの本である。第1章では周知のドーマー・モデル，

$$S_t = I_t = sY_t \tag{1}$$

$$\frac{dY_t}{dt} = 0I_t \tag{2}$$

$$I_t = I_0 e^{0st} \tag{3}$$

が説明され，(2)の dy_t/dt は期待値であると感ずるであろう，としている。そして加速度の原理との関連を論じ，implicit に full capacity growth rate を述べたものとの解釈を下し，投資需要方程式を欠いている Domar モデルでは均衡のための必要条件として $0s$ なる成長率を示しているのに対し，Harrod ではこの方程式を含んで居り，現実の成長率が $S/v(=0s)$ になるとの解釈を下している。$K_0 = vY_0$ と投資需要方程式(2)は $v = \Delta K/\Delta Y = K/Y = \mathrm{const}$ なることを示している。これに対し，その後の成長理論では $Y = F(K, L)$ なる生産函数を置いて考え，

$$Y = \min(AK,\ BL) \tag{4}$$

とおいたとき，$K/L = B/A$ は一定となる。かくして規模の経済性を認めない線型生産函数が導かれる。

自然成長率は均衡成長に沿った資本蓄積率と民間企業の資本需要との比較を基礎として論ぜらるべき性質のものであり，利子率が一定のとき，労働の供給と生産技術の進歩とが結合して惹き起した資本需要を持つ上の限界を示す成長率が即ち自然成長率である。数学的には次のように示される。

$$\frac{dY}{Y_n} \cdot \frac{dK}{dY} = \frac{dK}{Y_n} = \frac{I}{Y_n} \tag{5}$$

dY/Y_n は自然成長率を示し，労働供給，生産性，限界資本係数によって決定される。上述の要素によって云い尽されない投資需要が起る一つの可能性は，産業構造の変化によって資本係数が高まることである。この場合，自然成長率或いは保証成長率に対しては，

$$\frac{dY}{Y} \cdot \frac{dK}{dY} = \frac{1}{Y}\left(=\frac{S}{Y}\right) \tag{6}$$

であるから，保証成長率と dK/dY が与えられれば，保証成長率を維持するに必要な貯蓄と投資，したがって資本の増加率を知ることができる。

第2章に入って新古典派の理論が紹介される。先ず Cobb-Douglas 函数 $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ が設定され，資本所得総額を P とするとき，

$$P = K\frac{\partial Y}{\partial K} = K\alpha k^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \alpha Y$$

より

$$\alpha = \frac{P}{Y}$$

を得る。更に代用の弾力性が1となる説明があり，

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

より

$$L_t = L_0 e^{nt}, \quad A_t = e^{gt}$$

と置いたとき，

$$Y_t = e^{gt} K_t^{\alpha} (L_0 e^{nt})^{1-\alpha} \tag{7}$$

$$I_t = \frac{dK_t}{dt} = sY_t \tag{8}$$

と結合すると

$$\frac{dK_t}{dt} = sL_0^{1-\alpha} e^{[g+n(1-\alpha)]t} K^{\alpha}_t = sbe^{at}K_t^{\alpha} \tag{9}$$

を得る。ただし

$$a=g+n(1-\alpha),\quad b=L_0^{1-\alpha}$$

である。(9)から

$$\frac{dK_t}{K_t^{\alpha}}=K_t^{-\alpha}\,dK_t=sbe^{at}\,dt$$

となるから，積分して，

$$\int K_t^{-\alpha}\,dK_t=sb\int e^{at}\,dt \tag{10}$$

或いは

$$\frac{K_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{sb}{\alpha}e^{at}+C_0 \tag{11}$$

$K_t=K_0$ のときの C_0 の値は

$$C_0=\frac{K_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{sb}{a} \tag{12}$$

(11) (12) から

$$\frac{K_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{sb}{a}(e^{at}-1)+\frac{K_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{13}$$

或いは

$$K_t=\left[\frac{sb(1-\alpha)}{a}(e^{at}-1)+K_0^{1-\alpha}\right]^{1/[1-\alpha]} \tag{14}$$

(14)を(7)に代入して，

$$Y_t=e^{gt}L_0^{1-\alpha}e^{n(1-\alpha)t}\left[\frac{sb(1-\alpha)}{a}(e^{at}-1)+K_0^{1-\alpha}\right]^{\alpha/[1-\alpha]} \tag{15}$$

或いは

$$Y_t=be^{at}\,[C(e^{at}-1)+K]^{\alpha/[1-\alpha]} \tag{16}$$

ただし

$$C=\frac{sb(1-\alpha)}{a},\quad K=K_0^{1-\alpha}$$

時に関して Y_t を微分すれば，

$$\frac{dY_t}{dt}=b\left\{e^{at}a\,[C(e^{at}-1)+K]^{\alpha/[1-\alpha]}+e^{at}\frac{\alpha}{1-\alpha}[C(e^{at}-1)+K]^{[\alpha/[1-\alpha]-1]}\,Ce^{at}\,a\right\} \tag{17}$$

(16) (17) から

$$\frac{dY_t}{dt}=Y_ta\left[1+Ce^{at}\frac{\alpha}{1-\alpha}\ \frac{1}{C(e^{at}-1)+K}\right] \tag{18}$$

これより

$$\frac{1}{Y_t}\cdot\frac{dY_t}{dt}=a+aC\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{C-[(C-K)/e^{at}]} \tag{19}$$

$t\to\infty$ とすれば

$$\lim\frac{1}{Y_t}\frac{dY_t}{dt}=a+aC\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{C}=a\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$=a\frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{20}$$

a の定義式を代入して $t\to\infty$ とおけば

$$\lim\frac{1}{Y_t}\frac{dY_t}{dt}=\frac{g+n(1-\alpha)}{1-\alpha}=n+\frac{g}{1-\alpha}$$

或いは

$$Y_t=Y_0e^{[n+g/[1-\alpha]]t} \tag{20}$$

かくして，国民総生産は労働供給と技術の成長率の函数として指数函数の形で成長する。事実，新古典派の条件の下では，自然成長率が実現したとき均衡成長が起るのである。最近の研究によれば，長期成長率が，国民総生産に対する，貯蓄投資の割合に依存することも読者の注意を引いている。

2

かくして単純なる仮定の下では，投資及び資本の成長率も (21) に一致することが論証される。 次に Cobb-Douglas 函数よりも，もっと一般的で線型同次の生産函数を考える。

$$Y=F(K,\ L) \tag{21}$$

である。Euler の定理が成立するとして

$$Y\equiv\frac{R}{p}K+\frac{W}{p}\quad L \tag{22}$$

であり，

$$\frac{r}{p}=F_k=\frac{\partial}{\partial K}[Lf(k)]$$

$$=L[f'(k)]\frac{1}{L}=f'(k) \tag{23}$$

を得る。ただし $k=K/L$ である。

$$\frac{W}{p}=F_L=\frac{\partial}{\partial L}[Lf(k)]=f(k)+L\left[f'(k)\frac{\partial k}{\partial L}\right]$$

$$=f(k)+L\left[f(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right)=f(k)-kf'(k)\right. \tag{24}$$

となって，F_L, F_K は共に k のみの函数となる。

$$Y_t=F[K(t),\ L(t)] \tag{25}$$

なる函数について考え，

$$L(t)=L_0e^{nt} \tag{26}$$

$$K(t)=K(0)+\int_0^t I(t)\,dt \tag{27}$$

とおく。貯蓄・投資の均衡条件は

$$I(t)=sY(t) \tag{28}$$

であるから，(26) (27) (28) を結合すると，

$$Y(t)=F\left[K_{(0)}+\int_0^t sY(t)\,dt,\ L_0e^{nt}\right] \tag{29}$$

或いは

$$K(t)=sY(t)=sF\left(K(0)+\int_0^t \dot{K}(t)\,dt,\ L_0e^{nt}\right] \tag{30}$$

を得る。この式を単純化するため

$$k_0 \equiv \frac{K_0}{L_0} \underset{t}{\equiv} \frac{K(t)}{L(t)} = k_0{}^* \tag{31}$$

とおく。又

$$K(t) = nK(t) = nK_0e^{nt} \tag{32}$$

とおく。(32)を(30)に代入すれば

$$nK_0e^{nt} = sF〔K_0e^{nt},\ L_0e^{nt}〕 \tag{33}$$

となる。Fが線型同次式であると云う仮定により，

$$n = sF\left(1, \frac{L_0}{K_0}\right) = sf\left(\frac{L_0}{K_0}\right) = s\frac{Y_0}{K_0}$$

となる。

(33) を implicit に充すためには，自然成長率と保証成長率の一致が必要である。資本と労働の均衡比率(31)の存在はこのことを表わしている。即ち，$L(t)=L_0e^{nt}$ が与えられれば，(31) を充すには，$K(t)=k_0e^{nt}$ が成立する必要がある。再び(33)から出発して，Fが線型同次函数であるとすれば，

$$nk_0 = sF(k_0,\ 1) \tag{34}$$

を得る。かくして k_0 の解は

$$sf(k_0) - nk_0 = 0 \tag{35}$$

となる。ただし $f(k_0)=F(k_0,\ 1)$ である。そこで

$$\psi(k_0) = sf(k_0) - nk_0 = sk_0\left[\frac{f(k_0)}{k_0} - \frac{n}{s}\right] \tag{36}$$

と定義する。(33) から $\psi(k_0)=dk_0/dt$ である。
$\psi(k_0)$ が負となる条件は

$$\frac{f(k_0)}{k_0} < \frac{n}{s} \tag{37}$$

であるが

$$\lim_{k_0\to\infty}\frac{f(k_0)}{k_0} = \lim_{k_0\to\infty}\frac{f'(k_0)}{1} = 0 < \frac{n}{s} \tag{38}$$

を得る。

このことは第１図のように説明できる。この場合，sf_1 のみが，$F_K>0$, $F_L>0$, $F_{KK}<0$, $F_{LL}<0$ を保証するもので，sf_2 又は sf_3 はその条件に適さない。又，$k_0=k_0{}^*$ は資本と労働の比率を一定に維持する条件である。$\psi(k_0)$ が第１図右側のように，０から k_0 の区間において変動すれば，$k_0=k_0{}^*$ となる点において sf_1 は nk_0 に一致し，それ以後 sf_1 が nk_0 以下に下降するにつれて負となるであろう。

安定均衡が存在するための条件は，$k(t)<k^*(0)$ なる場合には，資本が労働よりも急速に成長しなければならぬと云うことである。もしこの条件が充されれば，k_0 の初期値如何に拘らず，$k(t)$ は $k^*(0)$ に接近するであろう。一般に $k_0{}^*$ の近傍で $\psi(k_0)$ が負の傾斜をとれば，その周辺において安定性が保証される。(26)(30)から次のことがいえる。

(a) $K(0)/L(0)<k^*(0)$ なる場合には，$K(0)$ の成長率は n を越えなければならない。即ち，$sY(0)/k(0)>n$ である。

(b) $K(0)/L(0)>k^*(0)$ なるときは，$sY(0)/K(0)<n$

(c) $k(0)<k^*(0)$ なるときは，$sf(k_0)>nk(0)$

(d) $k(0)>k^*(0)$ なるときは，$sf(k_0)<nk(0)$

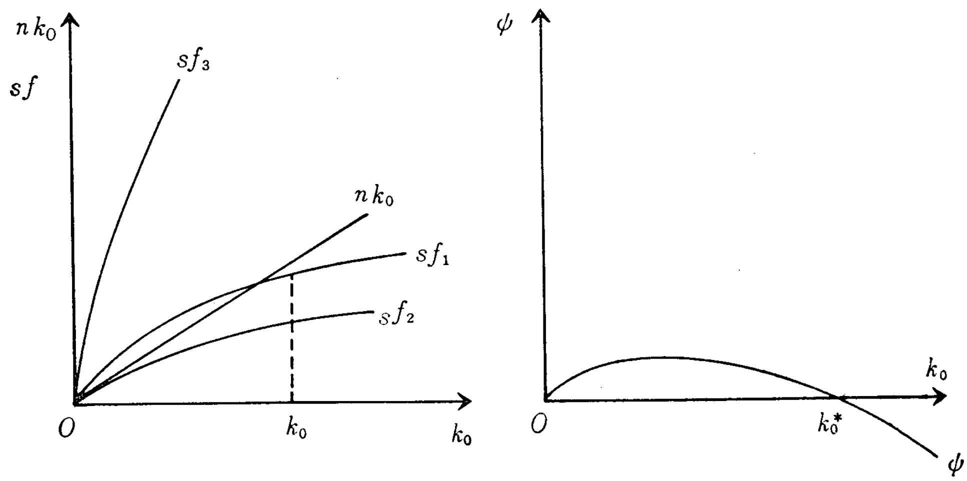
これが安定の条件である。

Harrod の中立的発明の場合には資本と労働の分配率が一定であるから，$Y'/Y=y$, $L'/L=n$, $K'/K=k$, $(\partial Y/\partial K)(K/Y)=\alpha$, $(\partial Y/\partial L)(L/Y)=1-\alpha$, $(1/Y)(\partial Y/\partial t)=g$ とおけば，

$$y = \alpha k + (1-\alpha)n + g \tag{39}$$

を得る。したがって，

第１図



$$k-y=(1-\alpha)\left[k-\left(n+\frac{g}{1-\alpha}\right)\right] \tag{40}$$

$k=s(Y/K)$ を代入すれば，

$$k-y=s(1-\alpha)\left[\frac{Y}{K}-\frac{n+g/(1-\alpha)}{s}\right] \tag{41}$$

$k=y=n+g/(1-\alpha)$ なるときの資本係数は

$$\frac{Y}{K}=\frac{n+g/(1-\alpha)}{s}$$

である。

次に新古典派的見地に立って中立的発明を論ずるならば，

$$Y(t)=F\left[K(t),\ A(t)L(t)\right] \tag{42}$$

とおいて(30)より，

$$K'(t)=sY(t)=sF\left[K(0)+\int_0^t K'(t)dt,\ A(t)L(t)\right] \tag{43}$$

を得る。

(a) $L(t)=L(0)e^{nt}$. (b) $A(t)=e^{gt}$

と仮定すれば，(43)の成長過程は，

(a) $Y(t)=F\left[K(t),\ A(t)L(t)\right]$

(b) $\dfrac{K'(t)}{K(t)}=\dfrac{sF\left[K(t),A(t)L(t)\right]}{K(t)}$

によって表わされる。ここで

(a) $\bar{L}(t)=A(t)L(t)$, (b) $\bar{k}(t)=K(t)/\bar{L}(t)$

(c) $\bar{L}(t)=L_0e^{(g+n)t}$

とおけば，$L(t)/\bar{L}(t)=g+n$ であるから

$$\frac{K'(t)}{K(t)}=g+n \tag{44}$$

と仮定する。したがって

$$\left.\begin{aligned}&(a)\quad \frac{Y(t)}{\bar{L}(t)}=F\left(\frac{K_0}{\bar{L}_0},\ 1\right)=f(\bar{k}_0)\\ &(b)\quad g+n=\frac{sF(K_0/\bar{L}_0,1)}{K_0/\bar{L}_0}=\frac{sf(\bar{k}_0)}{\bar{k}_0}\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

を得る。ここに

$$\left.\begin{aligned}&\frac{K(t)}{L(t)}=\frac{K_0e^{(g+n)t}}{L_0e^{nt}}=k_0e^{gt}\\ &\frac{\dot{k}'(t)}{k(t)}=\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}=\frac{\dot{\bar{L}}(t)}{\bar{L}(t)}-\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=g\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\psi(k_0)=sf(k_0)-(g+n)k_0 \tag{47}$$

(46)の k_0 の有意的な解はそれが $k_0{}^*$ に等しくなることであり，(47)は(32)と同じ問題に帰着する。

3

第3章ではケムブリッジ学派モデルが紹介される。利潤を P，賃金を W，賃金からの貯蓄を S_w，資本所得からの貯蓄を Sc とすれば，

$$\left.\begin{aligned}&Y=W+P\\ &S=S_w+Sc=s_wW+scP\\ &1>s_c>s_w>0\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Kaldor はこの式について，

$$W>W\min,\quad \frac{P}{Y}>m$$

なる制約条件を附している。Pasinetti の貯蓄函数は，

$$S=s_w(W+P_w)+s_cP_c$$

で表わされる。ここに P_w は労働者が受取る利潤，P_c は資本家が受取る利潤である。両者の間にはこれだけの差違があるが Kaldor モデルでは

$$\frac{\dot{K}}{K}=s\frac{Y}{K}=s_c\frac{P}{Y}\frac{Y}{K}=s_c\frac{P}{K} \tag{48}$$

或いは $\dfrac{P}{K}=\dfrac{n+g}{s_c}$

となる。換言すれば，ケムブリッジ型の貯蓄函数を持つ新古典派均衡成長は，均衡利潤率が自然成長率と資本家の貯蓄性向にのみ依存することを特徴とする。そしてこの均衡利潤率は生産函数の形に関係なく成立するのであるが，新古典派の均衡成長では $S=I$ が必然的に成立することになっているから，$P/Y=(1/s_c)(I/Y)$ となる。即ち P/Y は生産函数にのみ依存し，限界生産力説の成立を前提とする。貯蓄は所得の分配状態によって影響を受けるから，その意味で生産函数に依存し投資も新古典派の貯蓄に適応しなければならない。この場合，資本係数は，

$$n+g=s_c\frac{P}{Y}\cdot\frac{Y}{K}$$

或いは $\dfrac{Y}{K}=\dfrac{n+g}{s_c(P/Y)}$ (49)

である。P/Y は生産函数の形に依存するから，Y/K も依存することになる。このことは勤労所得者と資本家の貯蓄性向に差をつけないときにも云える。

次に Robinson モデルでは6つの均衡条件が必要となる。

(1) 労働の成長率と労働生産性の成長率とが中立的技術進歩の条件にしたがって自然成長率を生み出すこと。

(2) 貯蓄が企業と金利生活者によってのみ行われ，労働者は貯蓄しないこと。

(3) 独占は所得の分配を通じて貯蓄に影響を与える。

(4) 物価の変動に応じて賃金が定まる。

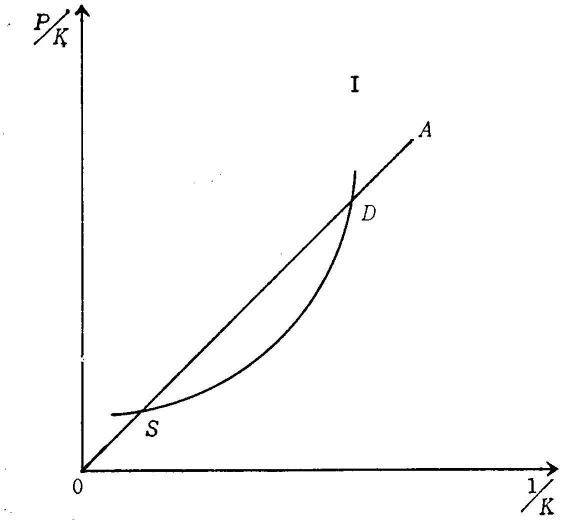
(5) 財政金融政策はインフレ抑制の方向に動き，利潤率と投資への刺激は低下する。

(6) 投資政策は Robinson モデルにおいては均衡決定

の最も重要な政策であるが，投資需要の明確な理論はない。

これより $P/K=(1/s_c)(I/K)$ となり，この関係は第2図で示される。D点とS点の2つの均衡点があるが，D点の右方においては予想される利潤率が現実の利潤率を越えた際に関連して起る蓄積率を示し，したがっ

第2図



て投資は減少して将来における成長率は下降する。Sの下方においては，利潤率に対応して生ずべき蓄積率よりも現実の成長率が低くなり，将来における投資の成長率を高める。D点においては，予想利潤率の下における蓄積率が現実のそれに一致するから安定均衡である。これに反しS点では，その左方において予想利潤率の下における蓄積率は現実の蓄積率を越え，投資はますます減少するから不安定均衡である。

第5章では先ず貯蓄と新古典派成長理論との関係が説かれる。Hicks の云う意味での中立的技術進歩を伴った Cobb-Douglas 函数を前提とすれば，

$$\frac{Y}{Y}=g+\alpha\frac{K}{K}+(1-\alpha)n \tag{50}$$

を得る。$K=sY$ であるから

$$\frac{Y}{Y}=g+\alpha s\frac{Y}{K}+(1-\alpha)n \tag{51}$$

となる。産出物と資本が長期の均衡成長率，$n+g/(1-\alpha)$ に沿って成長していくとすれば，これが自然成長率で，$\dot{Y}/Y=K/K$ となる。しかし $\dot{Y}/Y$ は K/K の比例的函数ではないから，実際には K/K は Y/Y を越える。その結果，出発点において両者が等しかったとしても，s の増加によって資本の成長率の方が高くなるから，資本係数は高まり，$\dot{Y}/Y$ がそれに適応しようとする動きが出てくる。K/K が下降するときも同様である。次で Vintage Production Function の場合の説明がある。

短期の貯蓄変動について考える。Cobb-Douglas 函数を前提とすれば，第2章で述べたように，

$$\frac{Y}{Y}=a+a\frac{(1-\alpha)sb}{a}e^{at}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{[((1-\alpha)sb/a](e^{at}-1)+K}$$

$$=a+\frac{sb\alpha\, e^{at}}{[(1-\alpha)sb/a](e^{at}-1)+K} \tag{52}$$

を得る。ただし，

$$a=g+n(1-\alpha)$$

$$b=L_0{}^{1-\alpha},\qquad K=K_0{}^{1-\alpha}$$

である。s と産出物の成長率の関係を決定するには，$\dot{Y}/Y=y$ を s で偏微分して

$$\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{b\alpha K}{e^{at}\{[(1-\alpha)sb/a][1-(1/e^{at})](K/e^{at})\}^2} \tag{53}$$

を得る。$b>0,\ \alpha>0,\ e^{at}>0,\ K>0$ であるから $\partial y/\partial s>0$ であり，$t\to\infty$ のとき，$\partial y/\partial s=0$ となる。$t=0$ においては $\partial y/\partial s=b\alpha/K$ であり，$\dfrac{\partial y}{\partial s}$ は短期的には t の逓減函数である。又 $\partial y/\partial s$ は s と K_0/Y_0 の逓減函数，g と n の逓増函数である。

一般的な形の生産函数

$$Y=(\mu K^{-\beta}+\gamma L^{-\beta})^{-1/\beta} \tag{54}$$

を前提とするとき，(μ と γ は正) 限界生産力は

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}\quad \frac{\partial Y}{\partial K}=\mu\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\beta}\\&\text{(b)}\quad \frac{\partial Y}{\partial L}=\gamma\left(\frac{Y}{L}\right)^{1+\beta}\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

で示される。代用の弾力性 MRS は

$$\mathrm{MRS}=\frac{\partial Y}{\partial L}\Big/\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{\gamma}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta} \tag{56}$$

で与えられる。したがって

$$\log\mathrm{MRS}=\log\frac{\gamma}{\mu}+(1+\beta)\log\frac{K}{L} \tag{57}$$

或いは

$$\frac{d\log(\mathrm{MRS})}{d[\log(K/L)]}=1+\beta \tag{58}$$

$$\sigma=\frac{d[\log(K/L)]}{d\log\mathrm{MRS}}=\frac{1}{1+\beta} \tag{59}$$

$$\beta=\frac{1-\sigma}{\sigma}$$

$$\alpha=\frac{\partial Y}{\partial K}\cdot\frac{K}{Y}=\mu\left(\frac{Y}{K}\right)^{\beta} \tag{60}$$

であるから，CES 函数では Cobb-Douglas 函数と違って操作は容易でない。そこで線型同次函数を変形して，

$$\frac{Y}{K}=\left[\mu+\gamma\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}\right]^{-1/\beta} \tag{61}$$

とおく。$\sigma<1$ ならば，$\beta>0$ となる。
K/L が増大するにつれて L/K は零に接近し，Y/K は $(1/\mu)^{1/\beta}$ の上限に接近する。Cobb-Douglas 函数と異なる点は，ダグラス型では Y/K について零から無限大までどのような値をもとり得ると考えられるのに対し，CES では Y/K が s の変化の効果を相殺できないことである。

4

第6章では新古典派のモデルと蓄積の Golden Rule との関係が説明される。自然成長率を $\bar{n}=n+g$ とおく。Harrod-Domar の中立的発明が成立しているとする。この steady growth の線に沿って総消費，したがって $L(t)$ を最大にするには，s の値をどのように定めればよいか？

命題，種々の自然成長率の path の中で，貯蓄，投資比率 s が生産物に関する資本の弾力性に等しくなるとき，規模の経済性がなく，自由競争下では貯蓄率は P/Y に等しくなり，consumption-path は最大となる。

第2章で述べたように

$$\psi(\bar{k}_0)=sf(\bar{k}_0)-\bar{n}k_0 \tag{62}$$

であるから古典派の命題 $c(t)=C(t)/L(t)$ が最大になるための条件は次のように展開される。

$$c(t)=\frac{C(t)}{\bar{L}(t)}=\frac{Y(t)-I(t)}{\bar{L}(t)}=\frac{(1-s)Y(t)}{\bar{L}(t)}$$
$$=(1-s)f(\bar{k})$$

自然成長率の下で golden-age 均衡が成立するには

$$c(t)=(1-s)f(\bar{k}_0^*)=f(\bar{k}_0^*)-sf(\bar{k}_0^*) \tag{63}$$

均衡成長が成立するためには書き直して

$$c(t)=f(\bar{k}_0^*)-n\bar{k}_0^* \tag{64}$$

これが自然成長下の golden-age 均衡実現の条件である。しかし $\bar{k}_0^*$ は s と n に依存する変数であるから，数多くの consumption path がある中で c(t) を最大にするには $\bar{k}_0^*$ の値を特定化しなければならない。即ち，

$$\frac{dc(t)}{d\bar{k}_0^*}=f'(\bar{k}o^*)-n=0$$

或いは
$$f'(\bar{k}_0^*)=n \tag{65}$$

である。(65) と s の間には，consumption path を最大にすると云う意味で何等かの関係があるはずである。

(65) の両辺に $\bar{k}_0^*/f(\bar{k}_0^*)$ を掛ければよい。

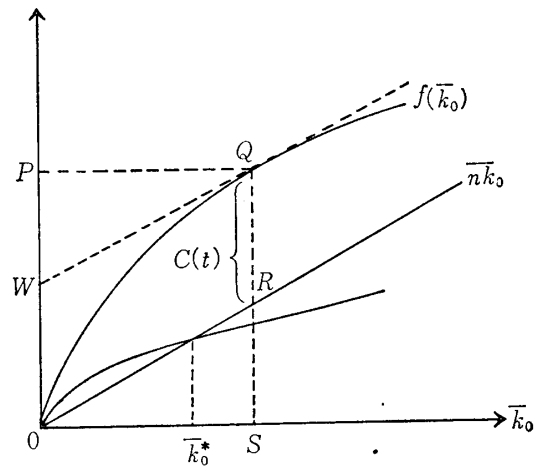
$$\frac{\bar{k}_0^*f'(\bar{k}^*_0)}{f(\bar{k}_0^*)}=\frac{\bar{k}_0^*\bar{n}}{f(\bar{k}_0^*)}=\frac{sf(\bar{k}o^*)}{f(\bar{k}_0^*)}=s^* \tag{66}$$

この間の事情は第3図によって示される。$f(k_0)$ の勾配は資本の限界生産物 $f'(k_0)$ を示し，函数自体は $Y(t)/\bar{L}(t)$ を示す。sf が生産函数の下方にあるときは，$f(k_0)$ は s に比例して下降する。

$$S(t)/\bar{L}(t)=〔S(t)/Y(t)〕〔Y(t)/\bar{L}(t)〕$$

なるときは，sf は k の函数である。$f(\bar{k}_0)$ は労働の生産性であるから，sf と f との縦軸に沿って測った距離

第3図



は $c(t)=C(t)/L(t)$ を表わす。$\overline{nk}_0$ は Harrod の中立的技術進歩にもとづく自然成長率である。s と $\bar{n}$ が与えられれば，$\bar{k}_0^*$ における sf と $\overline{nk}_0$ の交点は自然成長率 $\bar{n}$ の下での均衡成長を表わす。しかし s が変化すれば sf も変化するから，種々の k_0^* の値に対して種々の交点が成立し，$c(t)$ を最大にする k_0^* の値を選ぶ問題が生じてくる。(65)式によって明らかなように $\bar{k}_0^*$ の最適値は生産函数 $f(k_0)$ の正切が $\overline{nk}_0$ に平行なこと，換言すれば $f'(k_0)=n$ なることである。このときの k_0^* の値は S によって示される。点 Q における正切即ち限界生産物は PW/PQ で資本の平均生産物は QS/OS であるが，$QS=PQ$ であるから，平均生産力は結局において OS/PQ となる。したがって資本の限界生産力に対する比率は PW/QS となり，これは又，資本所得の分配率に等しくなる。R 点における sf と $\overline{nk}_0$ の交点は，貯蓄率 RS/OS を示す。POW と SRO は相似三角形であるから，$PW=RS$ であり，k_0^* を最大にするには，貯蓄率が資本所得の分配率に等しくなり，総利潤 PW が貯蓄・投資 RS によって相殺され

ることになる。

第7章に入って誘引投資の効果が論じられる。生産函数を動学化し,

$$Y=F(K,\ L,\ t) \tag{67}$$

とおく。前と同じく,$L(t)=L_0e^{nt}$ とおけば,

$$y=\frac{\dot{Y}}{Y}=n+\alpha(k-n)+I \tag{68}$$

$$f_K=\frac{\dot{F}_K}{F_K}=-\frac{1-\alpha}{\sigma}(k-n)+p \tag{69}$$

$$f_L=\frac{\dot{F}_L}{F_L}=\frac{\alpha}{\sigma}(k-n)+q \tag{70}$$

を得る。ただし

$$I=\frac{F_t}{F}=\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$p=\frac{F_{Kt}}{F_K}=\frac{1}{F_K}\frac{\partial F_K}{\partial t},\quad q=\frac{F_{Lt}}{F_L}\frac{\partial F_L}{\partial t}$$

である。規模の経済性が作用せず,Euler の定理が成立するとすれば,

$$Y=F_KK+F_LL$$

であるから両辺の対数をとって t で微分すれば

$$y=\alpha(f_K+k)+(1-\alpha)(f_L+n) \tag{71}$$

(68) から

$$I=\alpha f_K+(1-\alpha)f_L \tag{72}$$

(69) (70) を代入すれば,

$$I=\alpha p+(1-\alpha)q \tag{73}$$

即ち技術進歩の強度は,分配率をウエイトとした資本と労働の限界生産力の平均に等しい。Hicks-Harrod の中立的技術進歩の意味を考えるならば,資本と労働の比率は一定であり,更に拡張解釈すれば,資本の限界生産力が一定なる場合において,資本節約的或いは資本使用的発明は資本係数の低下又は上昇をもたらす。(69) に戻って $f_K=0$ とおけば,

$$(1-\alpha)(k-n)=p\sigma \tag{74}$$

(68) から

$$k-y=p\sigma-I \tag{75}$$

$$I\lesseqgtr p\sigma \quad から \quad k-y\gtreqless 0$$

を得る。かくして中立的技術進歩の場合には $I=pq$ となり $I>pq$ なる場合には資本の節約が起る。Hicks の中立的技術進歩では F_L/F_K が不変なることを意味するから,$p=q$ となり,技術変化にもとずく bias は $D=p-q\gtreqless 0$ で示される。

生産要素の使用量を増大させていく技術変化は,次の形の生産函数を前提とする。

$$Y(t)=F[B(t)K(t),\ A(t)L(t)] \tag{76}$$

$a=\dot{A}/A$, $b=\dot{B}/B$ とおけば,発明によって,

$$a=h(b) \tag{77}$$

$$h(0)=a^+>0,\quad h^{-1}(0)=b^+>0 \tag{77 a}$$

$$h'(0)<0,\quad h''(b)<0 \tag{77 b}$$

凡ての b に対し

$$b\leqq\bar{b} \quad 及び \quad h(b)\leqq\bar{a} \tag{77 c}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{b\to\bar{b}} h(b)=-\infty\\ \lim\limits_{a\to\bar{a}} h^{-1}(a)=-\infty\end{array}\right\} \tag{77 d}$$

$\bar{a}$ $\bar{b}$ はそれぞれの瞬間において達成されるはずの生産要素の使用量増大の上限界である。

(76) を両辺の対数をとって微分し,$I=F_t/F$ を代入すれば,(78) を得る。

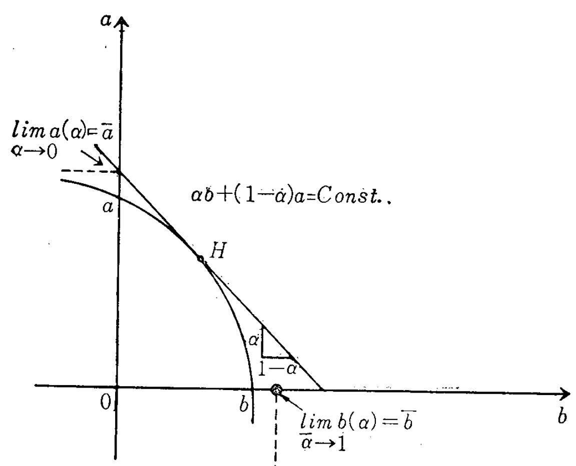
$$I=F_t/F=\alpha b+(1-\alpha)a \tag{78}$$

$a=h(b)$ なる条件の下で I を最大にするには,

$$\frac{dI}{db}=\alpha+(1-\alpha)h'(b)=0,\ h'(b)=-\frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{79}$$

であり,発明の可能性を示す勾配が分配率に等しくなることである。この事情は第4図の点Hに示される。

第4図



かくして (79) から資本と労働の最適成長率は,

$$b^*=b(\alpha) \tag{80}$$

によって示され,(77) から

$$a^*=h(b)=a(\alpha) \tag{81}$$

を得る。換言すれば b^* と a^* は α の連続函数である。(80) (81) を α に関して微分すれば

$$b'(\alpha)=\frac{db}{d\alpha}=\frac{1}{h''(b)}\frac{-1}{(1-\alpha)^2}>0 \tag{82}$$

ただし $h''(b)<0$

$$a'(\alpha)=\frac{da}{d\alpha}=\frac{dh(b)}{d\alpha}=h'(b),\ b'(\alpha)<0 \tag{83}$$

ただし $h'(b)<0$, $b'(\alpha)>0$ より導かれる。さらに

$$\frac{d[b(\alpha)-a(\alpha)]}{d\alpha}=b'(\alpha)-a'(\alpha)>0 \tag{84}$$

約言すれば，資本所得の分配率 α は，資本使用的な技術進歩 (83) と同一割合で増加し，労働使用的な技術変化 (84) と共に減少する。このようにして α が大きいほど，資本使用的な技術変化が起ることになり，第4図によって示される。α の増加は直線の勾配を高め，技術進歩の frontier の正切は下方に移動するであろう。したがって，b^* の最適値は増大し，a^* の最適値は小となる。(80), (81) から次の特性を引き出すことができる。

$b'(\alpha)>0$, ($0<\alpha<1$ の区間に対し)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\alpha\to 0} b(\alpha)=-\infty,\quad \lim\limits_{\alpha\to 1} b(\alpha)=b \\ 0<\alpha<1 \text{ の区間において，} a'(\alpha)<0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} a(\alpha)=\bar{a},\quad \lim\limits_{\alpha\to 1} a(\alpha)=-\infty\end{array}\right\} \tag{85}$$

又，

$$p=b-\frac{1-\alpha}{\sigma}(b-a) \tag{86}$$

$$q=a+\frac{\alpha}{\sigma}(b-a) \tag{87}$$

したがって，

$$D=\frac{1-\sigma}{\sigma}(a-b) \tag{88}$$

となり，労働使用的な技術進歩が及ぼす効果は σ の値が1より大であるか，又は小であるかによって左右される。$a=b$ なるときは，Hicks 的意味において技術進歩が中立的である。資本所得の定義により，われわれは次式を得る。

$$\alpha=\frac{F_K K}{Y} \tag{89}$$

両辺の対数をとり，時間に関して微分すれば，

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}=f_K+k-y \tag{90}$$

(65) (66) を代入すれば，

$$\alpha=\alpha(1-\alpha)\left[D-\frac{1-\sigma}{\sigma}(k-n)\right] \tag{91}$$

(88) を代入すれば，

$$\dot{\alpha}=\alpha(1-\alpha)\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)[a(\alpha)-b(\alpha)-(k-n)] \tag{92}$$

これが資本の分配率に関する動学式である。

貯蓄の過剰を出さないためには，

$$I=\dot{K}=sY$$

であるから，

$$k=s\frac{Y}{K} \tag{93}$$

を得る。時間に関して微分すれば，

$$\dot{k}=k(y-k)$$

再び (65) を代入して，

$$\dot{k}=k[I-(1-\alpha)(k-n)] \tag{94}$$

(78) を代入すれば，

$$\dot{k}=k(1-\alpha)\left[a(\alpha)+\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)-(k-n)\right] \tag{95}$$

α^* と k^* が正なるとき，$\dot{k}=\dot{\alpha}=0$ なる均衡成長が実現し，又，

$$a(\alpha)-b(\alpha)-(k-n)=0$$

及び

$$a(\alpha)+\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)-(k-n)=0$$

を得るから，これより均衡点 (α^*, k^*) は次のように定まる。

$$k^*=a(\alpha^*)-b(\alpha^*)+n \tag{96}$$

$$k^*=a(\alpha^*)+\frac{\alpha^*}{1-\alpha^*}b(\alpha^*)+n \tag{97}$$

(96) (97) が同時に成立つためには，

$$b(\alpha^*)=0 \tag{98}$$

$$k^*=a(\alpha^*)+n=h[b(\alpha^*)]=a^++n \tag{99}$$

即ち資本使用の増加を促す技術変化は零になる必要がある。この均衡が安定するためには，(91) から

$\alpha=0$ に対して

$$k=a(\alpha)-b(\alpha)+n\equiv g(\alpha) \tag{100}$$

$\dot{\alpha}$ に関して微分すれば，

$$\frac{dk}{d\alpha}=g'(\alpha)=a'(\alpha)-b'(\alpha) \tag{101}$$

(85) から

$$0<\alpha<1 \text{ の区間で } g'(\alpha)<0 \tag{102}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0} g(\alpha)&=\lim_{\alpha\to 0}[a(\alpha)-b(\alpha)+n]\\ &=a-(-\infty)+n=+\infty\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1} g(\alpha)&=\lim_{\alpha\to 1} a(\alpha)-\lim_{\alpha\to 1} b(\alpha)+n\\ &=-\infty-b+n=-\infty\end{aligned} \tag{104}$$

この式は第5図 $\alpha=0$ のなる曲線によって表わされる。$\dot{k}=0$ 曲線は $k=$一定としたときの点 (α, k) の軌跡である。(95) から $\dot{k}=0$ に関し，

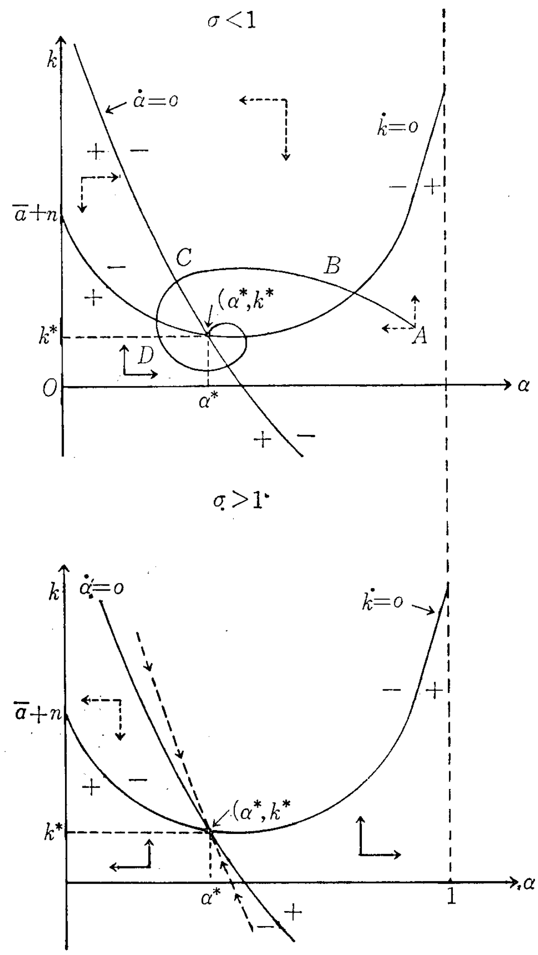
$$k=a(\alpha)+\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)+n\equiv j(\alpha) \tag{105}$$

(105) を α に関して微分すれば，$0<\alpha<1$ の区間において，

$$\begin{aligned}\frac{dk}{d\alpha}&=j'(\alpha)=a'(\alpha)+\frac{\alpha}{1-\alpha}b'(\alpha)+\frac{b(\alpha)}{(1-\alpha)^2}\\ &=\frac{b(\alpha)}{(1-\alpha)^2}\end{aligned} \tag{106}$$

再び (85) を代入して (98) と結合すれば，

第1図



$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\alpha^* \text{ のとき } j'(\alpha)=0 \\ 0<\alpha<\alpha^* \text{ のとき}, \lim\limits_{\alpha^*>\alpha\to 0} b(\alpha)=-\infty \\ \text{であるから } j'(\alpha)<0 \\ \alpha^*<\alpha<1 \text{ のとき } \lim\limits_{\alpha^*<\alpha\to 1} b(\alpha)=\bar{b} \\ \text{であるから } j'(\alpha)>0 \end{array}\right\} \qquad (107)$$

$a(\alpha^*)=a^+>0$ であるから

$$j(\alpha^*)=a(\alpha^*)+n>0 \qquad (108)$$

$$\lim_{\alpha\to 0} j(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\left[a(\alpha)+\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)+n\right]$$

$$=\lim_{\alpha\to 0} a(\alpha)+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)+n$$

$$=\bar{a}+n>0 \qquad (109)$$

$$\lim_{\alpha\to 1} j(\alpha)=\lim_{\alpha\to 1} a\ (\alpha)+\lim_{\alpha-1}\frac{\alpha}{1-\alpha}b(\alpha)+n$$

$$=+\infty \qquad (110)$$

最後に

$$g(\alpha)-j(\alpha)=-\frac{b(\alpha)}{1-\alpha} \qquad (111)$$

であるから，$0<\alpha<1$ より，

$$b(\alpha)\gtreqless 0 \text{ ならば } g(\alpha\gtreqless)j(\alpha) \qquad (112)$$

である。(102)(103)(104)から $\dot{\alpha}=0$ 曲線の性格を知ることができる。同様に(107)～(110)から，$\dot{k}=0$ 曲線の性格を知ることができるから，$\dot{k}=0$ 曲線は下降傾斜をとる限り，$\dot{\alpha}=0$ の下方にあり，α^* 点において $\dot{\alpha}=0$ 曲線と交叉する。又，α が零又は1に接近するにしたがって，$g(\alpha)-j(\alpha)$ は無限大となる。これにより均衡点 $(\alpha^*.\ k^*)$ の存在が確認され，$k(t)=k^*(t)>0$, $\alpha(t)=\alpha^*$, $0<\alpha^*<1$ において steady な均衡径路が得られる。

この均衡径路において，$a(\alpha^*)>0$, $b(\alpha^*)=0$ であるから，Harrod 的中立均衡が成立する。(86)(87)から，

$$p=b-\frac{1-\alpha}{\sigma}(b-a)=\frac{1-\alpha}{\sigma}a \qquad (113)$$

$$q=a+\frac{\alpha}{\sigma}(b-a)=\frac{\sigma-\alpha}{\sigma}a \qquad (114)$$

(73)より，

$$I=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)a+\frac{(1-\alpha)(\sigma-\alpha)}{\sigma}a$$

$$=\frac{(1-\alpha)\sigma}{\sigma}a=p\sigma \qquad (115)$$

即ち均衡において Harrod の中立的発明が実現するためには，生産函数が，$Y(t)=F〔K(t),\ A(t),\ L(t)〕$ なる形をとる必要があり，$K(t)$ は $a(\alpha^*)+n$ の割合で成長し，$L(t)$ は n なる割合で成長するし，$A(t)$ の成長率は $a(\alpha^*)$ であるから，労働供給と生産性の積 $A(t)L(t)$ は $a(\alpha^*)n+$ となり，steady growth が成立するためには，$k=y=a(\alpha^*)+n$ が充されねばならない。この場合，資本係数は一定で，その均衡値は $s/〔a(\alpha^*)+n〕$ となる。そして均衡が成立する限り，その安定性は保証される。しかし，この新古典派の分析には次の限界がある。(1)現在の技術変化率を最大にすると云う決定に際して，将来の発明の可能性を無視していること。これは発明の可能性について stationary state を仮定することになる。(2)誘引された発明モデルの中では，発明の費用が零であると仮定していること。

以上が本書の大要である。Hamberg 自身も云っているように，"advanced textbook" であるから，特に新らしい理論を創造したと云う merit はないが，今までの成長理論を整理した点と，貯蓄率の変化が及ぼす影響と云う形で有効需要の原理を導入しようとした努力の跡は見られるが，Keynes の問題とした一般的過剰生産の回避と云う形での有効需要の原理は導入されていない。それに Duesenberry の "Business Cycle and Economic Growth" について述べられていないのが足りない点であろう。〔鈴木 諒一〕