Title	投資分析における利回り法の役立ちと限界 : その数学的および経済的分析
Sub Title	On the Effectiveness and Limitations-of-Rate-of-Return Method in Investment Analysis:A Mathematical and Economical Study
Author	伏見, 多美雄(Fushimi, Tamio)
Publisher	
Publication year	1972
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.15, No.1 (1972. 4) ,p.56- 74
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19720430-03958881

投資分析における利回り法の役立ちと限界

——その数学的および経済的分析——

伏見多美雄

はじめに

投資プロジェクトの優劣を判定する方式の一つとして「利回り」を指標にする方法（「利回り法」とか「DCF 法」などと呼ばれる）が広く採用されているが，この指標の利点と欠点をめぐって比較的古くから種々の議論がかさねられてきた。とくに，いわゆる「現価法」と対比して利回り法の欠点を指摘する主張が少なくないことは周知のとおりである。

ただ，それらの批判論の中には，利回りというものの性格についての理解があいまいであったり，本質をとり違えていたりするものが少なからず混っていたために，議論が不必要に混乱していたことは否めない。とくに，この種の議論では，利回り計算の数学的な構造と，それの基礎にある経済的選択のロジックとをはっきり関係づけて論じるという努力が不十分なことが多く，それが議論を錯綜させる原因の１つになっていたように思われる。

この論文は，この種の問題を整理するために，利回り法の基本的な構造を再吟味した上で，それはどのような条件のもとで有効な判定基準になりうるか，そして，どういう条件のときに適用不可能かというように，その役立ちと限界をはっきりさせることを目的にした研究のまとめである。

セクション１では，あとの諸節の分析に必要な若干の基礎的概念——たとえば，プロジェクトの概念，正味額流列の概念とそのパターンなど——を定義して，議論の枠組を限定する。

セクション２では，終価関数や現価関数を定義したのち，利回り (rate of return) の計算で実数根が１つだけ求まる場合を，正味額流列のパターンと関連づけて明確にする。次に，経済的に重要な３つのタイプの区別——貸手タイプ，借手タイプ，貸借複合タイプ——を定義し，各タイプはどういうパターンのプロジェクトの場合に生じるかという関係を明らかにする。

セクション３では，利回り法が有効に適用されるための条件を示したのち，この方法の役立ちの範囲を要約的に説明している。

セクション４では，利回り法の本質的な限界を，前の諸節の分析結果を応用しながら明確にする。

セクション5では，若干の実務的考慮として，複数の実数根が -1 から $+1$ の範囲で求まるようなプロジェクトはもともと魅力のない案であるのが常であること，および，利回り法の適用が不適当なパターンについては代用指標を利用する余地があること，を説明する。

〈付記〉 この研究は，日本オペレーションズ・リサーチ学会の設備投資研究部会（1970～1971年度）において筆者が分担したテーマであり，その大要は同学会の1971年春季研究発表会（同年6月）において報告した。

本稿の内容は，いくつかの場所に分散して執筆したものも含むが（文献 ［3］，［5］，［6］など），上述の観点から再検討を加え，一応の総括を試みたものである。なお，本稿をまとめるに当り，上記研究部会の主査・千住教授をはじめ，部会員諸氏から種々の有益な助言をいただいた。

1. 概念的基礎――議論の前提

1.1 プロジェクトと正味額流列

ある経済主体（ここでは企業を考える）の資本の在高に変化をもたらす方策の，はっきり意識された集まりを「プロジェクト」と呼ぶ。資本の変動は購買力の尺度で測定するのが普通であり，そのため，プロジェクトの効果は，それを採択することによって生じる（可変的な）資金の流れをとらえることによって測定される（ここでは，通常の投資分析の慣行にしたがって，そのような尺度で測定されるものに考察の範囲を限定する）。

その場合，可変的な資金の流れは，

(1) そのプロジェクトに固有のものと，

(2) 毎期の資金残高および資本の利率（ないし計算利率）の関数としてとらえられるもの，

に大別される。[1)]

前者の資金の流れは $n+1$ 個の実数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ として把握されるものとし，この実数の時系列を「正味額流列」と呼ぶ（なお，a_t を時点 t の「正味フロー」と呼ぶ）。ここで添字の0は方策の始点，n は方策の効果が及ぶ最終時点である。時点0，1，2，…，n は等しい間隔で区切られているものとする。以下，用語の便宜上，$a_t>0$ のときは時点 t の「収入」，$a_t<0$ のときはその絶対額を時点 t の「支出」と呼ぶ。a_0 と a_n はゼロでないものとする。

1.2 目的と制約

プロジェクトの有利さを判定する基準としてはいろいろなものを考えることができるが，ここではタイム・ホライズン（計画における最終時点）までの正味資本の増殖分を最大にすることが目的にさ

---

1) 詳細は，伏見〔4〕または〔5〕第1，2章を参照。

れるものとし，この目的は，全期間の正味終価（正味額流列の代数和に，資本の利子を加減した正味の利益――2.1の定義参照）の総和を最大にすることによって達せられるものと仮定する。というのは，利回り法と呼ばれる判定方式は，そのような仮定が成り立つようなケースに適用される手法の1つだからである。[2)]

次に，プロジェクトの制約条件は，いろいろありうるけれども，利回り法の適用が問題になるのは，初期投資に利用される資金量の制約を考慮すればよいように整理されている場合である。ここでも，そういう条件の場合に限定して考えることにする。

なお，正味額流列の予測は確実で，貨幣価値の変動はない（または実質価値に修正ずみの）ものと仮定する。[3)]

1.3 正味額流列のパターン

正味額流列は，支出と収入のタイミングによって，次の3種に分類しておくと，分析上便利である。

Ⅰ　すべての支出がすべての収入よりも時間的に先行するパターン（これを「投資型」または「先出型」と呼ぶ）

Ⅱ　上と逆に，すべての収入がすべての支出よりも先行するパターン（これを「調達型」または「先入型」と呼ぶ）。

Ⅲ　支出と収入のタイミングが途中の時点でまざるパターン（これを「混合型」と呼ぶ）。

投資型のプロジェクトは，これをさらに，支出または収入が一時点か複数時点かによって，次の4つのパターンに細分することができる（図1参照）。

Ⅰ-A型……支出も収入も一時点

Ⅰ-B型……一時点の支出と複数時点の収入

Ⅰ-C型……複数時点の支出と一時点の収入

Ⅰ-D型……支出も収入も複数時点

また，調達型のプロジェクトは，時間軸に対して図1と対称な4つのパターンⅡ-A型，Ⅱ-B型，Ⅱ-C型，Ⅱ-D型を想定することができる。

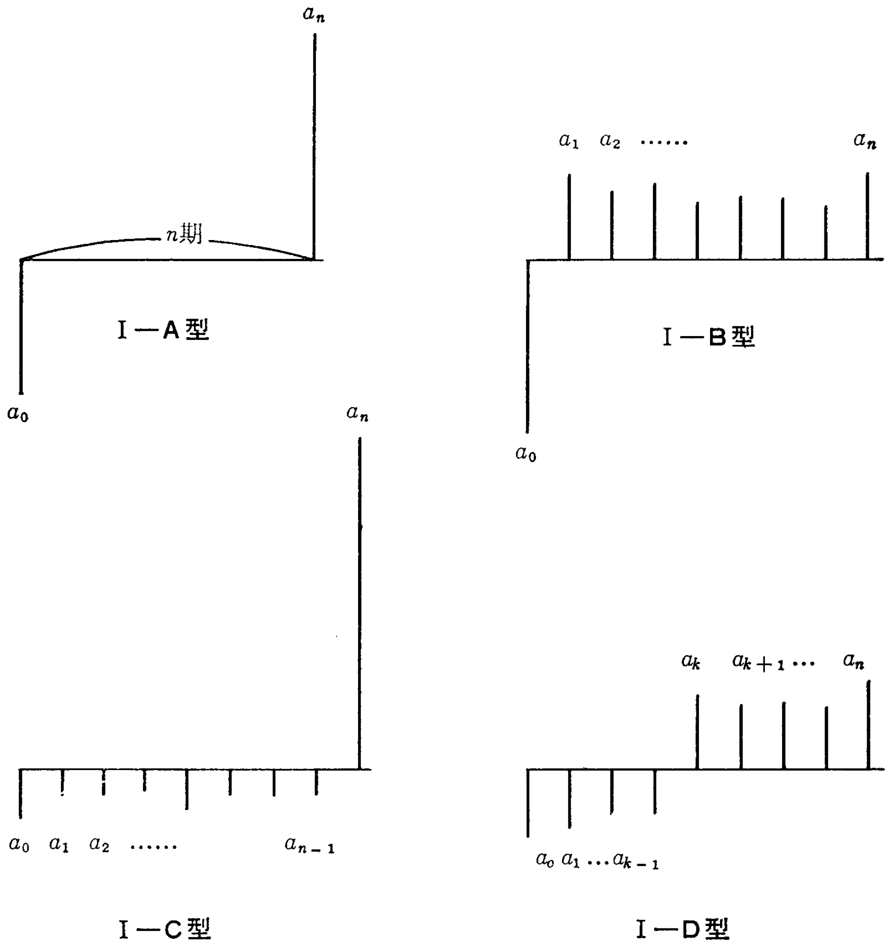
なお，実践上とくにひんぱんに見られるⅠ-B型の投資プロジェクトの場合は，$a_0<0$のフローを「初期投資」と呼んで$a_0=-C_0$と表わし，$a_t>0$ $(t=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$のフローを「報収（return）」と呼んで$a_t=R_t$と表わすこともある。

---

2)　この点の論証は，伏見〔5〕第4，5章を参照。

3)　貨幣価値の変動をおりこんで実質価値に修正する場合の基礎的な考え方については，伏見〔5〕第8章で詳論されている。

図1　投資型プロジェクトのパターン



2.　利回りの定義と根の性質

2.1　利回りの定義式

ある任意のプロジェクトの正味額流列が a_0, a_1, a_2, …, a_n であるとき(ただし，nはプロジェクトの寿命)，各時点の正味フローを利率 r で時点 n まで割増した値の総和を終価関数 $S(r)$, それを利率 r で時点0まで割引いた値の総和を現価関数 $P(r)$ と呼び，次式で定義する。

(1)　$$S(r)=a_0(1+r)^n+a_1(1+r)^{n-1}+a_2(1+r)^{n-2}+\cdots+a_n$$

(2)　$$P(r)=a_0+\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n}$$

そして，利回りとは，$S(r)=0$ または(同じことであるが) $P(r)=0$ を満足する r の値であると定義される。[4)] 以下，そのような特定の r を r^* であらわすことにしよう。

4)「利回り (rate of return)」という言葉は，通俗語としていろいろな内容のものを指すことがあるので，ここでの定義のようなものを「内部利回り (internal rate of return)」とか「DCF による利回り」というように呼び分けることもある(伏見[6]の 67 ページを参照)。以下単に「利回り」と呼ぶ。

実際には，任意の時点 $k(0<k<n)$ を選んで，時点 k の価値に換算した正味利益を

(3) $$V_k(r)=a_0(1+r)^k+a_1(1+r)^{k-1}+\cdots+a_k+\frac{a_{k+1}}{1+r}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^{n-k}}$$

と定義し，$V_k(r)=0$ ならしめる r の値を求めてもよいし，年価関数 $M(r)$ を

(4) $$M(r)=P(r)\cdot\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

と定義して，$M(r)=0$ を満足する r の値を求めても同じ解が得られる。[5] 以下，一般的にいうときは，便宜上 $S(r)=0$ で代表させることにする。

2.2 正味額流列のパターンと根の数との関係

利回りの計算は上述のように n 次式の根を求める問題であるから，一般的には n 個の実数根が求まる可能性がある。この問題は，すでに多くの論者によって利回り法の難点として論じられてきた問題であるが，議論の整理はいまだ十分とはいえないので，ここで基本的な性質をしらべておこう。[6]

ここでは，n 期間の問題の利回り計算で実数根が1つだけ存在する場合を，既述の正味額流列のパターンと結びつけて明確にしておく。

要約的にいえば，正味額流列が投資型のプロジェクトおよび調達型のプロジェクトでは，複数の実数根が生じることはなく，日常よく見られる若干の条件のもとで正の実数根を1つもつことがわかっている。

まず，最も代表的なI－B型のプロジェクトをとりあげる。[7] I－B 型，つまり，$a_0<0$ で $a_t\geqq0$ $(t=1, 2, \cdots, n-1)$，$a_n>0$ の流列ならば，$P(r)$ は $r>-1$ の範囲で単調減少であり，$P(r)=0$ ならしめる実数根 r^* を1つだけをもつ。そして，$\sum_{t=0}^{n}a_t>0$ ならば $r^*>0$ である（定理1）。

証明：(2)式を r について微分すると，

(5) $$\frac{dP(r)}{dr}=-\left\{\frac{a_1}{(1+r)^2}+\frac{2a_2}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{na_n}{(1+r)^{n+1}}\right\}<0$$

であるから，$P(r)$ は r $(r>-1)$ に関して単調減少である。[8] 一方，

$$\lim_{r\to-1+0}P(r)=+\infty$$
$$\lim_{r\to+\infty}P(r)=a_0<0$$

---

5) ここで，$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ は，利率 r，期数 n の資本回収係数であり，$crf(r, n)$ という略記号も併用される。

6) 利回り計算の数学的な構造についての分析は，Teichroew, Robichek and Montalbano〔15〕および〔16〕でかなりくわしく行なわれているが，経済的選択の方法と切り離して数学的にだけ検討されているためか，そこで導かれている定理の多くは，経済計算の上では余り有用性の大きいものとは言い難い。

7) このパターンについては，Teichroew ほか〔15〕でもかなりくわしく解析されている。

8) なお，$d^2P(r)/dr^2>0$ であるから，この関数は下に凸の単調減少関数である。

であるから，$P(r)$ は r 軸と一点でだけ交わる。また，定義により，$\sum_{t=0}^{n}a_t=P(0)$ であるから，$\sum_{t=0}^{n}a_t>0$ ならば根は正の値になる。

同様にして，II-B型の流列ならば，$P(r)$ は $r>-1$ の範囲で単調増加であり，$P(r)=0$ ならしめる実数根 r^* を1つだけもつ。そして，$\sum_{t=0}^{n}a_t<0$ ならば $r^*>0$である。[9]

次に，I-D型の一般的な投資型プロジェクトも，$r>-1$ の範囲で1つの実数根をもち，$\sum_{t=0}^{n}a_t>0$ のときの根は正の値である(定理2)。

証明：図1のI-D型のように，$a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}<0$ で $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n>0(k<n)$ というプロジェクトの利回りは，$P(r)$ や $S(r)$ の代りに (3)式をゼロにする r の値として求めることもできた。ところが，$r>-1$ について，

(6) $$\frac{dV_k(r)}{dr}=ka_0(1+r)^{k-1}+(k-1)a_1(1+r)^{k-2}+\cdots+a_{k-1}$$
$$+0-\frac{a_{k+1}}{(1+r)^2}-\cdots-\frac{(n-k)a_n}{(1+r)^{n-k+1}}$$

であるから単調減少である。[10] また，

$$\lim_{r\to-1+0}V_k(r)=+\infty$$
$$\lim_{r\to+\infty}V_k(r)=-\infty$$

であるから，$V_k(r)$ は r 軸と一点でだけ交わる。そして，$\sum_{t=0}^{n}a_t=V_k(0)>0$ のときの根は正である。

同様にして，II-D型(調達型の一般形)のプロジェクトは $r>-1$ の範囲で1つの実数根をもち，$\sum_{t=0}^{n}a_t<0$のときの根は正の値である。

これに対して，混合型のプロジェクトは，実数根が1つ以下であるという保証はない。ただし，混合型ならば必ず複数の根があるというのではなく，その可能性があるということにすぎないことはいうまでもない。[11]

2.3 貸手タイプ・借手タイプ・複合タイプ

たとえばお金を人に貸す場合は，(貸付けの) 利回りは大きい方が有利であるが，お金を借りる側にとっては，(借入れの) 利回りは小さい方が有利である。このような基本的な違いを経済計算的に定義し，数学的な構造と関係づけて分類をしておくと，後述のように，利回り法の適用の限界を見定める上で重要な手がかりになる。

いま，任意のプロジェクトの，時点 $t(t=0, 1, \cdots, n-1)$ までの「残価」$S_t(r)$ を，

(7) $$S_t(r)=\sum_{j=0}^{t}a_j(1+r)^{t-j}$$

---

9) I-A型とII-A型は，それぞれI-B型とII-B型の特別の場合とみなすことができるから，ここで述べたことがそのままあてはまる。また，I-C型とII-C型は，次に述べるI-D型，II-D型に関する定理でカバーされる。

10) ただし，2階の導関数の正負は不定であるから，I-B型のように下に凸になるとは限らない。

11) 混合型のプロジェクトが正の実数根を1つもつための十分条件については，中村〔9〕を参照せよ。

と定義すると，$S_t(r)$ をその正負に関して次の３つのタイプに分けることができる。

① $t=0, 1, \cdots, n-1$ で，$S_t(r) \leqq 0$

② $t=0, 1, \cdots, n-1$ で，$S_t(r) \geqq 0$

③ $t=0, 1, \cdots, n-1$ の間に，$S_t(r) \leqq 0$ のときと $S_t(r) > 0$ のときとがある

あるプロジェクトの利回り r^*，つまり $S(r)=S_n(r)=0$ ならしめる r を(7)式に代入した場合に，上記の①のタイプになるプロジェクトは，これを金融取引になぞらえると，全期間にわたって貸手の状態になっているから，これを「貸手タイプ」と呼ぶ。同様のアナロジーで②のタイプを「借手タイプ」と呼び，③を「貸借複合タイプ」(略して「複合タイプ」)と呼ぶ。[12)]

次に，このようなタイプの分類と既述の正味額流列のパターンとの関係をしらべておこう。

まず，正味額流列が投資型ならば，実数根 $r^*>-1$ をもつプロジェクトは，必ず貸手タイプになる(定理３)。

証明：$a_0<0,\ a_1, \cdots, a_{k-1} \leqq 0$ で，$a_k, \cdots, a_{n-1} \geqq 0,\ a_n>0\ (k<n)$ という投資型プロジェクトの利回りが r^* (ただし $r^*>-1$)であるとすると，

$$S_t(r^*)<0, \qquad t=0, 1, \cdots, k-1$$

であり，一方

$$S_n(r^*)=S_{n-1}(r^*)\cdot(1+r^*)+a_n=0$$

$$\therefore \quad S_{n-1}(r^*)<0$$

である。以下同様にして，次のようになる。

$$S_t(r^*)=S_{t-1}(r^*)\cdot(1+r^*)+a_t<0,$$
$$t=n-1,\ n-2, \cdots, k$$

同様のロジックで，実数根 $r^*>-1$ をもつ調達型のプロジェクトは，必ず借手タイプになる。

一方，混合型のプロジェクトについては，次の性質がある。

まず，複数の正の実数根をもつプロジェクトは必ず複合タイプになる (定理４)。

証明：いま，$a_0<0$ で期数 n の混合型プロジェクトがあって，２つの正の利回り r_j^*, r_k^* (ただし $r_j^* \lesseqgtr r_k^*$)をもつ，つまり $S_n(r_j^*)=0$ でかつ $S_n(r_k^*)=0$ であると仮定する。ここで，$S_t(r_j^*) \leqq 0 (t=0, 1, \cdots, n-1)$，つまり $r=r_j^*$ で貸手タイプになったとすると，$r \gtrless r_j^*$ なる r では $S_n(r) \lesseqgtr 0$ とならねばならない。これは，上述の $r_j^* \lesseqgtr r_k^*$ で $S_n(r_k^*)=0$ という仮定と矛盾する (符号同順)。したがって，このプロジェクトは貸手タイプにはなりえない。同様の論理で借手タイプにもなりえない。

次に，実数根 $r^*>-1$ を１つもつプロジェクトでも，a_0 と a_n が同符号の場合は，必ず複合タイプになる(定理５)。

証明：いま，$a_0<0,\ a_n<0$ の混合型プロジェクトが実数根 $r^*>-1$ を１つもつとすると，当然 $S_0(r^*)<0$ である。しかるに，

$$S_n(r^*)=S_{n-1}(r^*)\cdot(1+r^*)+a_n=0$$

であるから，

$$S_{n-1}(r^*)>0$$

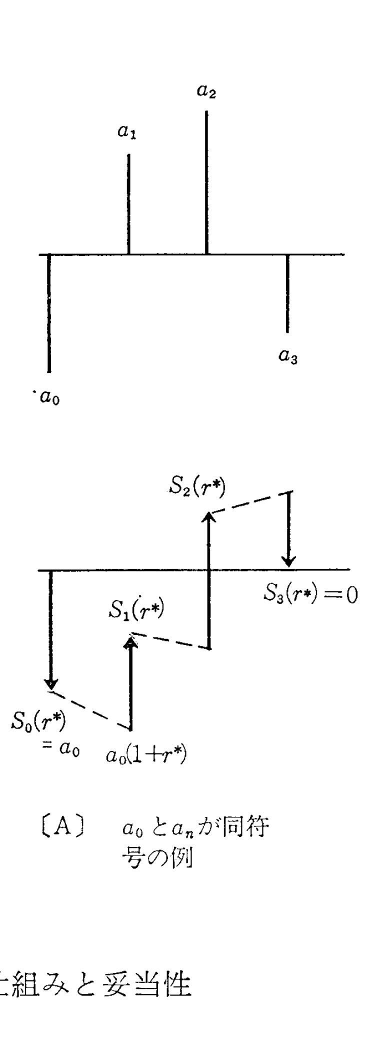
12) これと類似の説明は，Teichroew ほか〔15〕にもある。しかし，そこでは貸手タイプ・借手タイプに相当する概念を任意の r について定義し，本稿とはかなり違った分析の手段として使っている。

でなければならない。同様の論理で，$a_0>0$, $a_n>0$ のプロジェクトの場合は，$S_0(r^*)>0$ でかつ $S_{n-1}(r^*)<0$ であり，複合タイプになる。

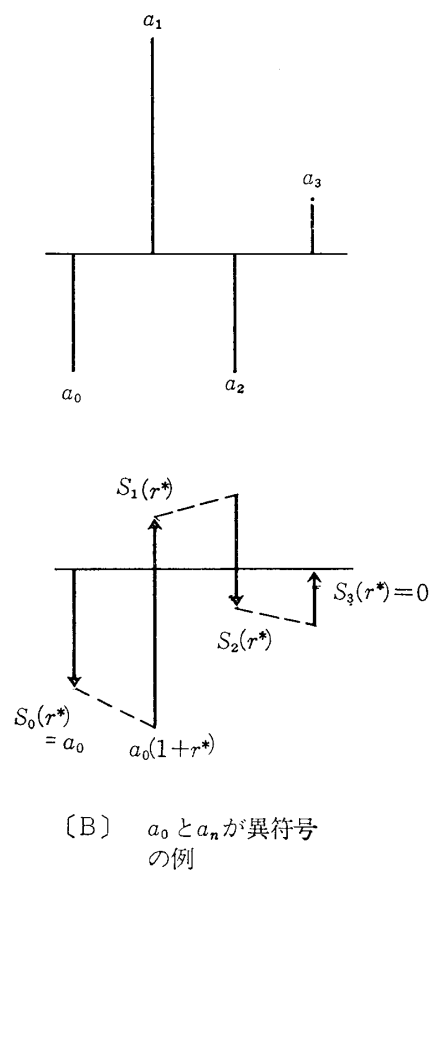
なお，a_0 とa_n が異符号であっても，混合型のプロジェクトであれば，複合タイプにならないという保証はもちろんない。

複合タイプになるプロジェクトの例を図解すると，図2のようになる(同図の上部は正味額流列を，下部はそのプロジェクトの $S_t(r^*)$ の推移を示す)。

図2　複合タイプになるプロジェクト



〔A〕　a_0 とa_nが同符号の例



〔B〕　a_0 とa_nが異符号の例

3. 利回り法の仕組みと妥当性

3.1 利回り法の根拠

利回り法という言葉で総称されている選択法の基本的な発想は，$S(r)=0$ ならしめる r の値（つまり利回りr^*）の大小はプロジェクトの「効率」をあらわすものであるから，これを尺度にしてプロジェクトの合否を判定したり，有利さの順位づけをしたりすることができるはずだ，というものである。

ところで，この種の方式が有用であるといえるのは，次のような場合である。

(イ) その方法を用いることによって，正味終価の総和が最大に（あるいは，実用的に許される程度の誤差で最大に近く）なるという保証があること。

(ロ) 他の方法(たとえば，現価法とか年価法といった「額」を指標にする方法）と比べて便利さが大きいこと。ここで便利さというのは次の２つに大別できよう。

(a) 計算の簡便さが比較的大きいこと。

(b) 単なる最適解のほかに，比較的有用な情報を得やすいこと(たとえば感度分析がしやすいなど)。

3.2 単一案の合否の判定

各プロジェクトが互いに独立で，一定利率の資金が十分にある場合には，個々の案ごとに採否を検討することができる。また，何らかのポリシーによって，少なくも正味利益(資本コスト差引後)が正の値なら合格にするという判定方式が採用される場合もある。

このような場合の利回り法の適用条件は，次のように要約することができる。

まず，投資型のプロジェクトならば，利回り r^* が資本の利率 i よりも大きければ，正味終価 $S(i)$ は正の値になり，逆に $r^*<i$ ならば，$S(i)<0$ になる。ただし，$r^*>-1$，$i>-1$ とする。[13)]

証明：2.2の定理1，2に示すように，投資型プロジェクトの $P(r)$，$V_k(r)$ は $r>-1$ の範囲で単調減少で，かつ実数根 r^* は1つである。したがって，$i\leqq r^*$ ならば $P(i)\geqq 0$（I-B型の場合）または $V_k(i)\geqq 0$（I-D型の場合）である(符号同順)。そして，定義により，

$$S(i)=P(i)\cdot(1+i)^n=V_k(i)\cdot(1+i)^{n-k}$$

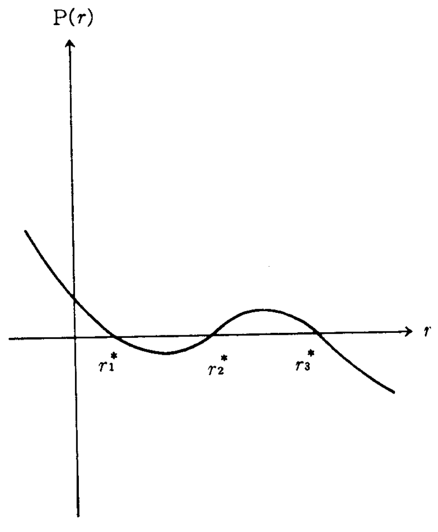
であるから，上の定理が成り立つ。

同様にして，調達型のプロジェクトの場合は，$r^*<i$ ならば $S(i)>0$ になり，$r^*>i$ ならば $S(i)<0$ になる。

したがって，プロジェクトが投資型か調達型ならば，利回り r^* と資本の利率 i との大小によって合否を判定することができる。

次に，混合型のプロジェクトの場合は，かりに実数根が1つであっても，$P(r)$ や $S(r)$ の関数形をしらべることなしに r^* と i との大小だけで一意的に合否の判定をすることはできない。また，複数の根をもつプロジェクトの場合は，たとえば図3のように関数形をしらべた上で，

図3 複数根をもつプロジェクトの合否の判定



13) 実践上は r^* も i も非負という場合が普通である。

$$i<r_1^* \text{ または } r_2^*<i<r_3^* \text{ ならば合格}$$

$$r_1^*<i<r_2^* \text{ または } r_3^*<i \text{ ならば不合格}$$

というような判定方式をとらねばならない。

さて，上述のように，プロジェクトのパターンが投資型（または調達型）ならば，$r^*>i$ なら合格（または $r^*<i$ なら合格）という判定の妥当性が保証されているけれども，一般的にいえば，r^* を求める計算よりも，$S(i)$ そのもの（またはその代用指標としての $P(i)$ や $M(i)$）の正負をしらべる方が簡単であるから，利回り法を使うメリットは小さい。ただ，資本の利率 i が不安定で，いろいろな可能性がある場合とか，有利さの程度を金利と対応させて判断するのには，この判定法が便利である。

3.3 複数のプロジェクトからの選択

複数のプロジェクトからの選択に利回り法を適用する場合に肝要なことは，各プロジェクトの相互関係をはっきり整理した上で，それに応じた使い分けをするということである。この使い分けの原則については別の場所で詳論しているので，ここではその要点だけを記すが[14]，結論的にいえば，各案が寿命の等しいⅠ－Ｂ型のプロジェクトで，報収が均等額，つまり，$a_1=a_2=\cdots=a_n=R$ というケース（以下これを「Ⅰ－B′型」と呼ぶ）ならば，利回り法を有効に応用することができる（実際上は，厳密にⅠ-B′型でなくても，報収の変化が余り大きくないⅠ－Ｂ型の諸案ならば，有効に適用できる場合が多い）。

〈付記〉 利回り法の適用が問題になるのは，制約条件として時点０の資金量だけ考慮すればよいようなケースである（既述）。したがって，$a_0>0$ のプロジェクトは，それが独立案ならばあらかじめ個別に採否の判定を下して，そこから生じる収入額を時点０の資金量に加算してよい。一般に，利回り法の適否に関する議論は，Ⅰ－Ｂ型のプロジェクト群からの選択問題を主として念頭においている場合が多い。

3.3.1 互いに独立な複数のプロジェクトから有利な組合せを選ぶ問題

互いに独立なプロジェクトが多数あって，㋑投資に利用できる資金の総量が制限されていたり，㋺資本の利率が投資総額に応じて逓増する場合（あるいは㋑と㋺の両方の場合）は，個々のプロジェクトを切り離して3.2の判定法を適用することは不合理である。

このような場合，投資利回りの高いプロジェクトから優先順位をつける方法によって，制約のある資金を合理的に配分することが考えられるが，各案が互いに独立なⅠ-B′型のプロジェクトであれば，この方法によって3.1であげた(イ)の条件がみたされるのが普通である。というのは，利回りの大きさが投資の効率（ここでは正味終価に対する貢献の割合）の順位づけの指標になるためには，任意の２案Ａ，Ｂが一定の資本の利率 i のもとで，

$$r_A^*<r_B^* \text{ ならば } \frac{S_A(i)}{C_{0A}}<\frac{S_B(i)}{C_{0B}}$$

14) くわしくは，伏見〔５〕第３，５章，千住〔11〕，〔12〕，千住・伏見〔13〕第３，５章を参照.

という条件をみたす必要があるが，I-B′ 型のプロジェクトならばこの条件が満足されるからである。ここで，$r_j^*(j=\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ はそれぞれA案とB案の利回りであり，$S_j(i)$ はそれぞれの正味終価，C_{0j} は初期投資額(a_0 の絶対値に相当する)である。

証明：$S_j(i)/C_{0j}$ の大きさの順位づけは，$M_j(i)/C_{0j}$ の大きさにおきかえて比較してもよい。ここで $M_j(i)$ $(j=A,\ B)$ は各案の正味年価((4)式参照)であって，

(8) $$M_j(i)=R_j-C_{0j}\times crf(i,\ n)$$

である(略記号 crf の説明は注5を参照)。一方，r_j^* は，

(9) $$C_{0j}\times crf(r_j^*,\ n)=R_j$$

の根であるから，(9)式を(8)式に代入すると，

(10) $$M_j(i)=C_{0j}\{crf(r_j^*,\ n)-crf(i,\ n)\}$$

となる。したがって，$r_A^*<r_B^*$ ならば必ず $M_A(i)/C_{0A}<M_B(i)/C_{0B}$ になるり，逆もまた真である。

実際には，報収が厳密に毎期一定でなくても，各期の変動が余り大きくなければ，上の条件がほぼみたされる場合も少なくない。そして，これがみたされる場合は，3.1 の(ロ)で指摘した有用性が発揮される。それを要約すると次のようである。

(a) 互いに独立なプロジェクトがm個あると，組合せの数は 2^m-1 とおりある。したがって，プロジェクトのありうる組合せをすべって作ってみて正味終価(または現価や年価)の総和を最大にする組合せを見付けるという方法は，mが大きくなると実用に適さない。これに対して，利回り法ではm回の利回り計算をすれば足りるから，はるかに簡便である。このことは，資本の利率に種々の可能性があったり，逓増的である場合はなおさらである。

(b) 利回りの大きさの順にプロジェクトを配列すると，投資の限界効率が示されることになるから，資金量の制約が変ったり資本の利率が変化した場合の最適解の変り方(追加採択または棄却の順位づけ)を容易に知ることができる。

3.3.2 互いに排反的な諸案から1つを選ぶ問題

互いに排反的なプロジェクトから最有利な案を1つ選び出す問題では，たとえI-B′ 型の諸案であっても，各案固有の利回りは有効な指標になりえない。というのは，任意のI-B′ 型の2案 j, k があって，その初期投資が$C_{0j}<C_{0k}$，報収が $R_j<R_k$，利回りが $r_j^*>r_k^*>i>0$ であるとすると，両案の正味現価 $P_j(i)$，$P_k(i)$ は，$0<i<r_k^*$ の範囲で交点をもつ（したがって，i のいかんによって優劣が逆転する）からである。

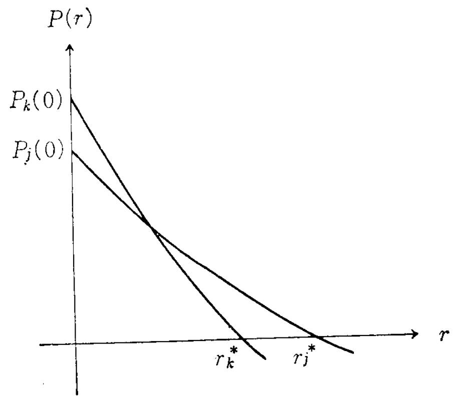
証明：I-B型のプロジェクトの現価関数 $P(r)$ の傾きは，(5)式を応用すると，

$$\frac{dP(r)}{dr}=-R\left\{\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{2}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{n}{(1+r)^{n+1}}\right\}$$

であるから，k案の方が(負の)傾きが大きい。一方，仮定により，$P_j(0)<P_k(0)$ であり，$r_j^*>r_k^*$ であるから，$P_j(r)$ と $P_k(r)$ は $0<r<r_k^*$ の範囲の一点で交わる(図4参照)。[15]

15) もし，$0<i<r_j^*<r_k^*$ であれば，$P_j(r)$ と $P_k(r)$ は$0<i<r_j^*$ の範囲で交わることはないから，利回の大きなk案の方が正味現価 $P(i)$ が(したがって正味終価 $S(i)$ も)大きくなる。

図4　排反的な2案の現価関数



上記のように，排反案からの選択に各案固有の利回りを指標にするのは不適当であるが，このことは利回り法自体の欠点というよりも，利回りの使い方のあやまりというべきである。排反案からの選択に利回り法を適用する場合には，投資効率の指標として，追加投資に対する追加報収の割合（これを「追加利回り」という）を用いねばならない。

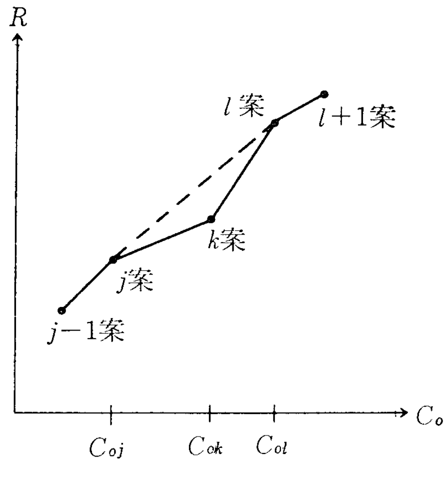
追加利回り法の適用原理については，別著において，1期間の投資問題のケースについて詳論しているので[16)]，ここでは，I－B型の諸案を前提にしてこの方法の大要を記しておく。

この方法の要点は，まず投資額の小さい案から順に並べて，追加利回りを求める。たとえば j, k, l という案があり，$C_{0j}<C_{0k}<C_{0l}$ であれば，「j 案から k 案への追加利回り」は，

$$\sum_{t=1}^{n}(R_{tk}-R_{tj})(1+r)^{-t}=(C_{0k}-C_{0j}) \tag{11}$$

を満足する r の値である（そのような特定の r を，以下 r_{jk}^* とあらわす）。「k 案から l 案への追加利回り」についても同様である。

図5　無資格案の例



この追加利回りが，もし投資総額に関して単調減少になっていない場合は，「無資格案」を除いて単調減少になるように整理する必要がある。ここで無資格案というのは，図5における k 案のようなもの，つまり，

$$r_{jk}^*<r_{kl}^*$$

になるようなプロジェクトをさす[17)]。この場合は，k 案を除き，図5の破線のように「j 案から l 案への追加利回り」r_{jl}^* が用いられる（ただし，$r_{jl}^*>r_{l,l+1}^*$ とする）。

このような操作をすると，追加利回りは（単調減少の）投資の限界効率を示すことになるから，もし資金量に制限がなければ，追加利回りが資本の利率よりも大きい状態から小さい状態に変る境い目の案を採ればよい。また，それ以前に資金量の制約がくる場合は制約になる直前の案を採ればよい。

16）伏見〔5〕第3章，千住・伏見〔13〕第3章を参照。

17）この図はI－B′型の諸案を想定して描いてあるが，一般的なI－B型（報収が均等でない）の場合は，このように幾何学的に無資格案を示すことはできないので，この図は概念図にとどまる。

この方法が合理的に成り立つためには少なくとも一定の資本の利率 i のもとでは，次の2つの条件がみたされることが必要である。

(1) 各追加利回りの大きさの順位は，各追加投資案の $\Delta S/\Delta C_0$ のそれと一致すること。ここで ΔS は任意の追加投資案から生じる正味終価，ΔC_0 はその追加投資額である。

(2) 図5の k 案のような性質の「無資格案」の正味終価は，i 案または l 案のいずれか一方の正味終価よりも必ず小さくなること。

これらの条件は，各排反案がⅠ-B′ 型であればみたされる。このうち，(1)の条件は，前項で独立案について述べた条件——r^* の大きさの順位と S/C_0 のそれとが一致するということ——と実質的に同種のものであるから，当然みたされる。次に，(2)の条件は，図5のような3つの案 j, k, l があって，$r_{jk}^*<r_{kl}^*$(したがって当然，$r_{jk}^*<r_{jl}^*<r_{kl}^*$)であるならば，$P_k(i)>P_j(i)$ でかつ $P_k(i)>P_l(i)$ ということはありえないことが証明されればよい。

証明: 仮定により，$P_j(0)<P_k(0)<P_l(0)$ であり[18]，また，定理1(または(5)式)より，各案の $P(r)$ はいずれも $r(r>-1)$ に関して単調減少で，$r>-1$ の任意の r について

$$\left|\frac{dP_j(r)}{dr}\right|<\left|\frac{dP_k(r)}{dr}\right|<\left|\frac{dP_l(r)}{dr}\right|$$

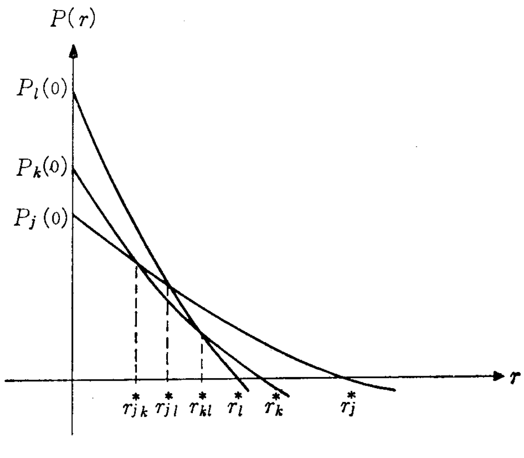
である。そこで，$r_{jk}^*<r_{jl}^*<r_{kl}^*$ ならば，

$$-1<r<r_{kl}^* \text{ では } P_k(r)<P_l(r)$$
$$r>r_{jk}^* \text{ では } P_k(r)<P_j(r)$$

となるから，「$P_k(r)>P_j(r)$ でかつ $P_k(r)>P_l(r)$」ということはありえない(図6参照)。

この方法は，最適解の付近の投資額のもとで資本の利率が急激に高くなるとか資金量が半端であるようなときには，例外的に最適な解をえられないこともおこるが，通常は最適な解がえられると考えてよい。

図6 無資格案を含む現価関数



追加利回りの計算は，正味終価(または現価や年価)を求めるよりもめんどうな場合が多い。したがって，資本の利率 i が一定の場合には，終価法などの「額」を指標にする方法の方が簡単である。しかし，追加利回り法は次のような利点をもっている。

(a) 資本の利率 i が不安定で，いろいろな可能性がある場合，終価法や現価法などによると，ありうる i についていちいち終価や現価を計算しなおさねばならないが，追加利回りをしらべて

18) もし $P_j(0)>P_k(0)$ であれば，k 案が j 案より不利であることは明らかであるから，この仮定をおいてある(注15を参照)。

あれば，i の数値に応じて直ちに最適解を知ることができる。また，資本の利率が総投資額に関して逓増するときは，報収が年金タイプの場合は追加利回り法で比較的簡便に最適案を知ることができる。

(b) 各案について，それが最有利であるための i の範囲を知ることができるから，i の変化に伴う最適案の変り方を知ったり，次善の案を知ったりするのに便利である。

3.3.3 混合案から有利な組合せを選ぶ問題

互いに独立な複数の案件があり，各案件はそれぞれ複数の排反案を含むという一般的な場合（われわれは，これを混合案からの選択と呼んでいる）は，上述の独立案および排反案の選択原理を組み合せて適用すればよい。これについては，すでに千住鎮雄氏によって，I-B′ 型の場合の合理的解法が提示されているし，われわれも別の場所で詳論しているので，ここではその要点だけを摘記しておこう（注 14 の文献を参照）。

① まず各案件ごとに追加利回りを求める。その際，無資格案を整理する必要があることは前項で述べたとおりである。

② もし一定利率の資金が十分に利用できる場合は，各案件を切り離して，それぞれ「排反案からの選択」の方法で最適案を１つずつ選び出せばよい。

③ 資金量に制約があるか，または資本の利率が総投資額に関して逓増する場合は，各案件ごとの追加利回りをひとまとめにして，それの高いものから順に並べていく。すると，投資の限界効率が単調減少の形に整理されるので，あとは，投資の限界効率が資本の利率よりも小さくなる直前か，それ以前に資金量の制約がくるならばそこまでの案を採ればよい。

この方法も一種の近以解法であるが，各案が I-B′ 型ならば，最適解またはそれに近い解を得ることができる。というのは，この方法は前の２つの項で述べた独立案および排反案の選択原理の合成であり，それらについての必要条件は，I-B′ 型の場合には満足されるからである。

なお，この方法の有用性としては，独立案および排反案について述べたのとほほ同じように，(a) 計算の簡便さ，および(b)感度分析のしやすさ，をあげることができる。

4. 利回り法の本質的な限界

利回りを指標にしてプロジェクトの経済性を判定する方法は，各案の相互関係をよく整理して使い分ければ，かなりの役立ちをもつ方法であるが，他方において種々の限界をもっていることも否定できない。ここではその最も本質的な限界をまとめておこう。

さて，既述のように利回り法の基本的な眼目は，複数のプロジェクトの効率を，複利の金融利子

率と同じ形で測定し，利率の高さによって資金投下の順位づけをするという点にある。ところで，ここでいう「効率」とは正味終価に対する貢献の度合というほどの意であるが，利回りが効率の尺度としての役割を果せなくなる場合をチェックする具体的な仕方としては，「資本の利率が一定で，初期投資と寿命の等しい2案があるとき，利回りの大きい方の案がそれの小さい案よりも正味終価が小さくなる（そして，その誤差が無視できない程度である)」のはどういう場合かをしらべればよい。

われわれはそのような本質的な限界として次の2つのケースをあげることができる。

(1) 貸借複合タイプになる場合

(2) 報収のパターンが不揃いの場合

〈付記〉 そのほかに，たとえば複数の制約条件のもとでは使えないとか，寿命の違う案の比較には不十分だとか，不確実性の扱いが不便だとか……，各種の批判がある。しかし，それらは利回り法に固有の本質的難点とはいい難い(たとえば終価法や現価法にもその種の批判はあてはまるであろう)。ここでの問題は，制約は初期投資だけで，寿命は等しく，予測は確実であるといった条件のもとでも，なお存在する限界は何かということである。

4.1 複合タイプのプロジェクト

すでに2.3でしらべておいたように，プロジェクトの経済的な性質を貸手タイプ，借手タイプ，(貸借) 複合タイプの3種に分類することができた。これらのうち，借手タイプになるのは，$a_0>0$ のプロジェクト（調達型と一部の混合型プロジェクト）であるから，3.3の〈付記〉で述べた理由で，これを除いて $a_0<0$ のタイプの諸案が選択の対象になる場合を想定しよう。

この場合，前述のような意味で利回りの大きさが「効率」の尺度としての機能を大幅に失うケースは，「複合タイプ」のプロジェクト(あるいは追加投資案が複合タイプになるケース)である。というのは，すでにしらべてあるように，複合タイプのプロジェクトは，これを銀行との取引にたとえれば，借越契約を結んでいる預金口座に相当し，預金残高が期によってプラス（貸している状態）になったりマイナス（借りている状態）になったりする口座と同様の性格をもっている。しかも，利回りの定義式の性質により，どちらの状態になっているときも同じ利率がその残高に掛けられることになる。

したがって，複合タイプの場合には，利回りが大きいほど有利とも，小さいほど有利とも，一意的にはいえない場合が多いのである。

小さな例をあげてみると，たとえば $a_0=-200$, $a_1=400$, $a_2=-150$ (万円) という2期間のプロジェクトは，実数根が1つで $r^*=50\%$ とかなり大きい。しかし，たとえば $i=10\%$ のときの正味終価は48万円であるが，200万円の預金をしてこれと同じ元利合計を得るには利回り20%で足りるのであって，上例の50%という利回りは，効率の程度を示す尺度として不適当であることがわかる。

次に，$r>-1$ で複数の実数根をもつプロジェクトについては，既述の定理4により，この種のプロジェクトは必ず複合タイプになるということが根本的な難点である。そこには，複数の根のどれ

を選んでよいかわからないという手続上の難点ではなくて，利回りが大きいほど有利とか，小さいほど有利という一意性が存しないという本質的な限界が横たわっているのである。

〈付記〉 a_0 と a_n だけが負値で，他の $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ は正値，そして，a_n の絶対値は相対的にごく小さいという例とか，最初に僅少の収入 a_0 があって，あとはI-B型と同様に $a_1<0, a_2, \cdots, a_n>0$ というようなプロジェクトの例を考えると，複合タイプであっても(定理5参照)効率の尺度としての利回りの信頼性が高い場合がないわけではない。しかし，これらの例は，実質的にはI-B型とほぼ同じ性質のプロジェクトなのであって，現価関数 $P(r)$ は，実用上考えられる r の範囲では単調減少になっているのが普通である。

これに対して，上述の例のように利回りの信頼性が低くなるような多くの複合タイプのプロジェクトは，実用的な r の範囲で $P(r)$ の単調性が失われている（そして，しばしば r 軸と複数の点で交わる)のである。

4.2 報収のパターンが不揃いの場合

以上の理由により，複合タイプになりやすい混合型のプロジェクトを除いて，投資型のプロジェクトだけを対象にする場合を考えてみよう。実践上は，そのような限定をしても適用範囲は十分にあるからである。

ところが，この場合でも，各案から生じる資金の流れが不揃いであると，利回りの大小が有利さの順位づけの尺度として機能しえなくなる場合が生じる。簡単な例をあげてみよう。

たとえば，3つの投資案 A, B, C があって，初期投資はいずれも120万円であるが，報収の生じ方は次のように相違するとしよう。

A: 7期後に一括して500万円受取る。

B: 毎期末に40万円ずつ7期間受取る。

C: 第1期末に60万円，第2期末に50万円，……というように毎期10万円ずつ減っていって，7期末にはゼロになる。

各案の利回りを求めてみると，A案22%，B案27%，C案30%となって，C案が最大である。各案とも投資額と寿命が同じであるから，もし報収のパターンが似かよっていればもちろんC, B, Aの順に有利といってよい。しかし，この例では，たとえば $i=10\%$ の場合の正味終価は，A案266万円，B案146万円，C案87万円となって順位は逆転し，しかもその差異は非常に大きい。

こういう逆転が生じるのは，各案の $P(r)$ の傾きは(5)式によりC案が最もゆるやかで，次にB, A案の順であるが，$P(0)$ の大きさは逆に A, B, C の順になっているため，$0<r<r_A^*$ の範囲で各案の $P(r)$ が交わるからである。そして，一般に，$0<i<r_A^*$ の範囲に資本の利率 i があるのが普通であるから，[19] $P(r)$ の傾きのゆるい案が $P(0)$ も大きいといった特別の場合を除けば，利回りの大き

19) この例で，最小の利回り r_A^* が，$i<r_A^*$ という関係にあると想定したのは，一般に，複数の案の優劣を比較する以前に，少なくも $i<r^*$ でなければ投資案が合格とならないからである(3.2参照)。

さと $P(i)$ の大きさとの順位が一致するという保証はないわけである。[20]

5. 実践上の考慮

以上のような利回り法の限界に関連して，考慮に値する二，三の問題を指摘しておこう。

5.1 複数の根をもつプロジェクトの扱い

2.3と4.1で述べたように，複数の根をもつプロジェクトは必ず複合タイプになるし，4.2で述べたようなパターンの不揃いによる欠陥も合せもつのが普通である。したがって，そのようなタイプのプロジェクトが多いと利回り法の適用は不可能のように思われる。

ところが，実際問題としては，複数の(あるいは多数の)利回りをもつようなプロジェクト(あるいは追加投資案)は，その正味利益の額が，支出や収入の規模と比べてかなり小さく，魅力のない(したがって，選択の候補から除いておいても大過ない)案であることが多いのである。簡単な数学を使ってこれを説明しよう。

いま，4時点(期間)の正味額流列 a_0, a_1, a_2, a_3 をもつプロジェクトが3つの実数根 r_1^*, r_2^*, r_3^* をもつ場合を想定しよう。この種の例は次式を満足するものとして自由に作ることができる(ただし，$1+r^*=x$ とする)。

$$S(r)=a\{(1+r)-x_1\}\{(1+r)-x_2\}\{(1+r)-x_3\}=0 \tag{12}$$

この式を展開すると次式が得られる。

$$S(r)=a\{(1+r)^3-(x_1+x_2+x_3)(1+r)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(1+r)-x_1x_2x_3\}=0 \tag{13}$$

したがって，次のように a_0, …, a_3 を決めれば，3つの根をもつ例は自由に作ることができるわけである。

$$a_0=a$$

$$a_1=a(x_1+x_2+x_3)$$

$$a_2=a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

$$a_3=-ax_1x_2x_3$$

---

20) この問題に関連して，利回り法の欠点は「報収がその案自体の利回りで再投資されるという仮定の上に成り立っている」ことにあると主張している文献が少なくない。この種の批判が的はずれのものであることについては，伏見〔3〕または〔5〕第5章を参照。

しかるに，$r=0$ のときの正味利益 $S(0)$ は，上式より次のようになる。

(14) $$S(0)=-ar_1{}^*r_2{}^*r_3{}^*$$

$$\therefore\ \left|\frac{S(0)}{a}\right|=\left|r_1{}^*r_2{}^*r^*\right|$$

以上の原理は，一般に n 期間のプロジェクトにもあてはまる。したがって，通常問題になるような，$-1<r^*<1$ の範囲で複数の実数根をもつような例では，$|S(0)/a|$ はごく小さく，魅力のないプロジェクトであるのが普通である。

5.2 代用指標の利用

パターンの不揃いなプロジェクトを比較するときには，利回りの大きさが有利さの順位づけに役立たなくなることをすでに述べた。ところで，もともと利回りを「効率」の尺度として使う方法は，r^* の大きい案ほど $S(i)/C_0$ が大きくなるという条件が成り立つことを前提にしていたのであるから，この条件が成り立たない場合には，r^* を使う代りに $S(i)/C_0$ そのもの（かりに「投資終価率」と呼ぶ）または，$P(i)/C_0$（投資現価率）や $M(i)/C_0$（投資年価率）を用いることによって，ある程度利回り法の利点を生かすことができる。

この指標のヴァリエーションとしては，I-B型の諸案を主として念頭において，$\sum_{t=1}^{n}R_t(1+i)^{n-t}/C_0(1+\rho)^n=0$ を満足する ρ や $\sum_{t=1}^{n}R_t(1+i)^{-t}/C_0$ を用いることもある。いずれを用いても，n が一定であれば順位づけは同じになる。

こういった代用指標によっても，プロジェクトが互いに独立的か，排反的か，それらの混合かに応じて適切に使い分ければ，3.1 で述べた(イ)および(ロ)の(a)の条件はかなりの程度みたされる。しかし，資本の利率が不安定の場合や逓増的の場合には計算の簡便さが損なわれるし，i の変化に伴う最適解の変り方（棄却や追加の順位づけ）を簡単に知るという利点が失われることは否定できない。

〈参考文献〉

〔1〕 Bierman Jr., H. and S. Smidt, *The Capital Budgeting Decision*, Macmillan, 1960.
〔2〕 Dean, J., *Capital Budgeting*, Columbia University Press, 1951.
〔3〕 伏見多美雄，「経済性指標としての『利回り』の性格」，企業会計，17, 11 (1965), 136-149.
〔4〕 ——，「資本コストと計算利率」，三田商学研究，9, 2 (1966), 53-78.
〔5〕 ——，『投資分析の基礎——経済計算の基礎的構造——』，中央経済社，1971.
〔6〕 ——，「"DCF 法" の適否をめぐる問題点——投資効率の考え方を中心に」，産業経理，32, 2 (1972).
〔7〕 Lutz, F. and V. Lutz, *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton University Press, 1951.
〔8〕 Mao, J. C. T., *Quantitative Analysis of Financial Decisions*, Macmillan, 1969.
〔9〕 中村善太郎，「投資プロジェクトの正味現価・正味終価関数と内部利回りの数について」，*I E Review*, 7, 4 (1966), 205-208.

〔10〕 Schneider, E., *Wirtschaftlichkeitsrechnung: Theorie der Investition*, J. C. B. Mohr, Tübingen, 1961; 島野卓爾訳,『経済計算論』, ダイヤモンド社, 1963.

〔11〕 千住鎮雄, "Methods of Selecting the Optimum Combination of Project". *Proceedings of the Faculty of Engineering, Keio University*, 19, 2 (1966), 51-61.

〔12〕 ——, *Criteria for Optimal Investment Decisions*, Association for Overseas Technical Scholarship, 1969.

〔13〕 千住鎮雄・伏見多美雄,『経済性工学』, 日本能率協会, 1969 (新版).

〔14〕 Solomon, E. (ed.), *The Management of Corporate Capital*, The Free Press of Glencoe, 1959.

〔15〕 Teichroew. D., A.A. Robichek and M. Montalbano, "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty", *Management Science*, 11, 3 (1965), 395-403.

〔16〕 ——, "An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty, *Management Science*, 12, 3 (1915), 151-179.

〔17〕 Weingartner, H. M., *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Prentice-Hall, 1963; Markham Publishing Co., 1967.