Title	分布ラグと識別の問題
Sub Title	Distributed lag and Identification Problem
Author	蓑谷, 千凰彦(Minotani, Chiohiko)
Publisher	
Publication year	1968
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.11, No.4 (1968. 10) ,p.108- 118
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19681030-04049782

——資　料——

分布ラグと識別の問題

蓑 谷 千 凰 彦

ここで考察するのは，方程式

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + A_2 \Delta x_t + A_3 x_{t-1} + v_t \qquad (1)$$

$$(t=1,\ 2,\ \cdots,\ T,\ \ \Delta x_t = x_t - x_{t-1})$$

を推定したとき，(1)はハウタッカー・テイラーモデル，調整モデルなどの誘導形と考えることができるが，係数に課される制約条件，系列相関の有無の検定を行なわなければ，ある理論モデルにのみ関心があるからといって，誘導形(1)の係数から直ちに関心のある理論モデルの係数を識別することは誤まりとなることがありうることを示す。そしてIIで日本の消費時系列についての推定結果を示す。

I

方程式(1)は何らかの理論モデルから導き出されたものと考えることができる。いくつかの可能な理論モデルを考えてみよう。

(i)　$y_t = \alpha_1 x_t + u_t$ (2)

において，攪乱項 u は一階の系列相関をしているものとする。ラグ演算子をLとする。すなわち

$$x_{t-1} = Lx_t,\ \ x_{t-2} = Lx_{t-1} = L^2 x_t$$

とするとき，(2)の u は

$$(1-\rho L)\,u_t = v_t \qquad (3)$$

と書くことができる。ここで，ρ は系列相関係数で $-1<\rho<1$，v_t は平均 0，分散 σ_v^2 の確率誤差項である。(3)より

$$u_t = (1-\rho L)^{-1}\, v_t$$

を(1)に代入して

$$y_t=\alpha_1 x_t+(1-\rho L)^{-1} v_t$$

$$(1-\rho L) y_t=(1-\rho L)\alpha_1 x_t+v_t$$

$$\therefore \quad y_t=\alpha_1 x_t-\rho\alpha_1 x_{t-1}+\rho y_{t-1}+v_t$$

$x_t=\Delta x_t+x_{t-1}$ を代入して

$$y_t=\rho y_{t-1}+\alpha_1\Delta x_t+(1-\rho)\alpha_1 x_{t-1}+v_t$$

したがって，方程式(1)は，モデル(2)の攪乱項が一階の系列相関をしているときに生じうる。この場合，制約条件 $(1-A_1)\cdot A_2=A_3$ が課される。

(ii) t 期における y の増加量は，ある望ましい増加量 $y_t^*-y_{t-1}$ の一部分が調整されるように決定されるものとする。すなわち

$$y_t-y_{t-1}=\gamma(y_t^*-y_{t-1}) \tag{4}$$

ここで γ は調整係数であり，$0<\gamma<1$ である。望ましい水準 y_t^* は，次の方程式によって決定されるものとする。

$$y_t^*=\alpha_0+\alpha_1 x_t+u_t \tag{5}$$

(4)，(5)より

$$y_t=\gamma\alpha_0+(1-\gamma)y_{t-1}+\gamma\alpha_1\Delta x_t+\gamma\alpha_1 x_{t-1}+\gamma u_t$$

が得られ，(1) は調整モデル(4)，(5)からも生ずる。この場合，制約条件 $A_1>0$，$A_2=A_3$ が課される。

(iii) y は分布ラグ

$$y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_{t-i}+w_t \tag{6}$$

にしたがい，α_i は幾何級数的な分布

$$\alpha_i=\alpha\lambda^i \quad (0<\lambda<1) \tag{7}$$

をもつとすると，(6)，(7) より

$$y_t=\lambda y_{t-1}+\alpha\Delta x_t+\alpha x_{t-1}+w_t-\lambda w_{t-1} \tag{8}$$

が得られる。この場合， 元の方程式(6)の誤差項 w に系列相関がなくても，(8) においては誤差項に系列相関が生じている。(ii) と同様，この場合も，制約条件 $A_1>0$，$A_2=A_3$ が課される。

(iv) 次の理論モデルはハウタッカー・テイラーの共著〔1〕に基づくもので

ある。y_t は t 期における需要，s_t はストック，x_t は所得を示すものとし，次のモデルを考える。

$$y_t=\alpha+\beta s_t+\gamma x_t+u_t \tag{9}$$

s_t は t 期におけるストック変化率，w_t はストックの平均的な減価分とし，w_t は

$$w_t=\delta s_t$$

という定率減価償却（δ は定率の減価率）にしたがうものと仮定し，更に連続量を離散型で近似することによって

$$y_t=\frac{\alpha\delta}{1-\frac{1}{2}(\beta-\delta)}+\frac{1+\frac{1}{2}(\beta-\delta)}{1-\frac{1}{2}(\beta-\delta)}y_{t-1}+\frac{\gamma\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}(\beta-\delta)}\Delta x_t$$
$$+\frac{\gamma\delta}{1-\frac{1}{2}(\beta-\delta)}x_{t-1}+v_t \tag{10}$$

が得られる。(〔1〕訳書 30 頁)

したがって，(10)より，(1) を推定したときに (9) のパラメーター及び δ は次式によって求めることができる。

$$\begin{aligned}
\alpha&=\frac{2A_0\left(A_2-\frac{1}{2}A_3\right)}{A_3(A_1+1)}\\
\beta&=\frac{2(A_1-1)}{A_1+1}+\frac{A_3}{A_2-\frac{1}{2}A_3}\\
\gamma&=\frac{2\left(A_2-\frac{1}{2}A_3\right)}{A_1+1}\\
\delta&=\frac{A_3}{A_2-\frac{1}{2}A_3}
\end{aligned} \tag{11}$$

(v) 調整を連続型の変数で考え，

$$\begin{aligned}
Dy&=\theta(y^*-y)\\
y^*&=\alpha+\beta x+u
\end{aligned} \tag{12}$$

とする。ここで，Dは微分演算子$\left(=\frac{d}{dt}\right)$であり，$y^*$はある望ましい水準である。微分演算子Dを差分演算子Δで

$$\mathrm{D}y=\frac{1}{2}(\Delta y_t+\Delta y_{t-1})$$

と近似し，

$$\Delta y_t=\theta(y_t^*-y_t)$$

とすると，

$$y_t=\frac{\theta\alpha}{1+\frac{1}{2}\theta}+\frac{\left(1-\frac{1}{2}\theta\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\theta\right)}y_{t-1}+\frac{\frac{1}{2}\theta\beta}{1+\frac{1}{2}\theta}\Delta x_t+\frac{\theta\beta}{1+\frac{1}{2}\theta}x_{t-1}+v_t \qquad (13)$$

を導くことができる。(バーグストロムモデル)

したがって，(1)を推定したとき，(12)のパラメーター θ, α, β は次式より得られる。

$$\theta=\frac{2(1-\mathrm{A}_1)}{1+\mathrm{A}_1}$$
$$\alpha=\frac{\mathrm{A}_0}{1-\mathrm{A}_1} \qquad (14)$$
$$\beta=\frac{2\mathrm{A}_2}{1-\mathrm{A}_1}$$

バーグストロムモデルにおける係数の制約条件は $\mathrm{A}_3=2\mathrm{A}_2$ である。

勿論，(i)～(v) 以外にも誘導形として(1)をもたらすような理論モデルを考えることができるが，ここでは一応 (i)～(v) の場合について考察することにする。上述したことから，方程式(1)を推定したとき，

(1) $(1-\mathrm{A}_1)\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_3$ ならば，(2)で系列相関が生じていた，つまり(2)はミス・スペシフィケーションであったと解釈できる。

(2) $\mathrm{A}_1>0$, $\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_3$ かつ誤差項に一階の系列相関なしと判断されるならば調整モデル，一階の系列相関ありと判断されるならば，幾何級数的分布ラグのモデル

(3) $\mathrm{A}_3=2\mathrm{A}_2$ ならばバーグストロムモデル

(4) (1)～(3)が拒否されたとき，ハウタッカー・テイラーモデル

と判断することができる。

こうした識別の問題は，ラグ付内生変数を説明変数として含む方程式を推定したときにはいつも生ずる。次の方程式を考えてみよう。

$$y_t=a_0x_t+a_1x_{t-1}+c_1y_{t-1}+c_2y_{t-2}+u_t \tag{15}$$

前と同様にラグ演算子をLとする。

$$\mathrm{T}(\mathrm{L})=1-c_1\mathrm{L}-c_2\mathrm{L}^2$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{L})=a_0+a_1\mathrm{L}$$

とすれば，(15)は

$$\mathrm{T}(\mathrm{L})\,y_t=\mathrm{A}(\mathrm{L})\,x_t+u_t \tag{16}$$

と書くことができる。

ここで

$$\mathrm{W}(\mathrm{L})=\mathrm{T}(\mathrm{L})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{L})$$

$$v_t=\mathrm{T}(\mathrm{L})^{-1}u_t$$

とすると，(16)は

$$y_t=\mathrm{W}(\mathrm{L})\,x_t+v_t \tag{17}$$

となる。つまり方程式(15)は真の分布ラグのモデル(17)から生ずる。このとき，(17)で v に系列相関がなくても(15)の u には系列相関が生じ，(15)の u に系列相関がない場合には(17)の v に系列相関が生ずることになる。

次に

$$y_t=\frac{1}{1-\gamma\mathrm{L}}\alpha x_t+\frac{v_t}{(1-\rho\mathrm{L})(1-\gamma\mathrm{L})} \tag{18}$$

というモデルを考えてみる。(18)を書き直すと，

$$(1-\gamma\mathrm{L})(1-\rho\mathrm{L})\,y_t=(1-\rho\mathrm{L})\,\alpha x_t+v_t$$

$$\therefore\quad y_t=\alpha x_t-\alpha\rho x_{t-1}+(\gamma+\rho)\,y_{t-1}-\gamma\rho y_{t-2}+v_t$$

また

$$\frac{v_t}{(1-\rho\mathrm{L})(1-\gamma\mathrm{L})}=\mathrm{e}_t$$

とおくと

$$v_t=\mathrm{e}_t-(\gamma+\rho)\,\mathrm{e}_{t-1}+\gamma\rho\mathrm{e}_{t-2}$$

このとき，(18)は

$$y_t=\alpha x_t+\gamma y_{t-1}+e_t \tag{15}$$

となるから，方程式(15)は，(19)においてe_tが二階の系列相関にしたがうときにも生じうる。

再び方程式(1)に戻ると，上記の検定によって方程式(1)をもたらした理論モデルが，幾何級数的分布ラグあるいはハウタッカー・テイラーモデルであると判断された場合には，理論モデルの誤差項に系列相関がなくても，(1)の誤差項には系列相関が生じている。したがって，この場合には(1)に通常の最小自乗法を適用したのでは，正の系列相関がある限り，A_1の最小自乗推定量$\hat{A}_1$はA_1を過大推定することになる。(〔2〕68 頁)

ラグ付内生変数を含んでいる方程式を推定するとき，通常の最小自乗法に代る推定法としては，テイラー・ウイルソンによって開発された三回最小自乗法〔3〕，ワリスによって提唱された推定法〔4〕，操作変数法などがあるがここでは取り上げない。

次に，(1)は調整モデルからの誘導形であると判断されたとき，調整係数γは$1-A_1$から求めることができる。但し，ここで注意すべきことがある。(1)を年データによって推定したとする。もし，調整が年を単位として(4)によって行なわれているならば，一期前の内生変数を説明変数として含めることは正しいモデルである。しかし，調整が年を単位としてではなく，もっと短かい期間，半年，四半期，月，週などを単位としてなされるならば，年データで定式化された(1)の係数A_1は，調整速度及び調整がなされる単位期間に依存する。そして調整速度が速ければ速い程，あるいは調整の行なわれる期間が短かければ短かい程，年モデルにラグ付内生変数を含めることは間違ったスペシフィケーションを行なっていることになる。(マンドラック〔5〕)

上に述べたことを式によって明らかにしておこう。調整期間は月を単位として行なわれるものと仮定する。調整モデルは

$$q_{tj}-q_{t,j-1}=\gamma(q_{tj}{}^*-q_{t,j-1}) \tag{20}$$

ここでtは年，jは月を示すものとし，

$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k,\qquad q_{t,0}=q_{t-1,k}$$

とする。$k=12$ ならば，調整は月ごとに，$k=4$ ならば四半期ごとに行なわれることを意味する。t 年 j 期の q の望ましい水準 $q_{t,j}^*$ は

$$q_{t,j}^*=\alpha_0+\alpha_1 x_{t,j}+u_{t,j} \quad . \tag{21}$$

によって決定されるものとし，年データを

$$Q_t=\sum_{j=1}^{k} q_{t,j}, \qquad Q_t^*=\sum_{j=1}^{k} q_{t,j}^* \tag{22}$$

とする。

(20)，(21)より

$$q_{tj}=\alpha_0\gamma+(1-\gamma)q_{t,j-1}+\alpha_1\gamma x_{t,j}+\gamma u_{t,j} \tag{23}$$

を得るが，年データによって，調整モデルを考えているものとしよう。(23)を j について1から k まで和をとって整理すると

$$Q_t=k\alpha_0-\frac{1-\gamma}{\gamma}(q_{t,k}-q_{t-1,k})+\alpha_1 X_t+v_t \tag{24}$$

ここで $X_t=\sum_{j=1}^{k} x_{t,j}$，$v_t=\sum_{j=1}^{k} u_{tj}$

(20)より

$$q_{t,j}=(1-\gamma)^j q_{t-1,k}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\sum_{i=1}^{j}(1-\gamma)^i q^*_{t,j-(i-1)} \tag{25}$$

$$\therefore \quad q_{t,k}=(1-\gamma)^k q_{t-1,k}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\sum_{i=1}^{k}(1-\gamma)^i q^*_{t,k-(i-1)}$$

$k-(i-1)=j$ とおくと，上式は

$$q_{t,k}=(1-\gamma)^k q_{t-1,k}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\sum_{j=1}^{k}(1-\gamma)^{k+1-j} q_{t,j}^* \tag{26}$$

となる。

(26)を(24)に代入して

$$Q_t=k\alpha_0+\alpha_1 X_t-\sum_{j=1}^{k}(1-\gamma)^{k+1-j} q_{t,j}^*+\Gamma Q_{t-1,k}+v_t \tag{27}$$

ここで

$$Q_{t-1,k}=kq_{t-1,k}, \quad \Gamma=\frac{1-\gamma}{k\gamma}[1-(1-\gamma)^k] \tag{28}$$

$q_{tj}^*=\lambda_{tj}q_t^*$，$q_t^*=Q_t^*/k$ とすると $\sum_{j=1}^{k}\lambda_{tj}=k$

したがって，(27)は

$$Q_t=(1-C_t)(k\alpha_0+\alpha_1 X_t)+\Gamma Q_{t-1}+\Gamma d_{t-1}+v_t \tag{29}$$

ここで
$$C_t=\sum_{j=1}^{k}(1-\gamma)^{k+1-j}\lambda_{tj}/k,$$
$d_{t-1}=Q_{t-1,k}-Q_{t-1}$

(28), (29)から，年データによる調整モデルのラグ付内生変数の係数 Γ は，γ と k に依存し，
$$\lim_{\gamma\to 1}\Gamma=0,\ \lim_{k\to\infty}\Gamma=0$$
であることが分る。

以上のことから，年データで(1)の係数 A_1 が 0.1 と推定されたとき，調整期間が年である場合には，調整係数は0.9であるが，$A_1=0.1$ という値は，(28)より $\gamma=0.7$, $k=4$ のとき，すなわち調整期間が四半期で各四半期ごとの調整係数が0.7のときにも生じ得る。それゆえ，調整モデルを考えているときには，調整の行なわれる単位期間についても常に考慮が払われねばならない。

II

〔表-1〕は方程式(1)を，日本の9品目の消費時系列について推定したものである。計算はすべて黒田昌裕氏（慶応大学）によって行なわれたものである。

従属変数 y の費目は 1. 食料費，2. 被服費，3. 住居費，4. 光熱費，5. 保健衛生費，6. 交通費，7. 通信費，8. 交際費，9. 教養・娯楽費その他である。x は総個人消費支出であり，x, y_i $(i=1,\cdots\cdots,9)$ とも1人当たり額表示であり，不変価格で扱っている。推定期間は 1875 年から 1940 年までで，年データを使用し，推定法は通常の最小自乗法である。

Iで述べた方針にしたがって，モデルを識別していこう。まず，第1に(1)を推定して有意な結果が得られたのは，(2)で誤差項に一階の系列相関があっただけに過ぎないのかも知れないという可能性は，〔表-1〕の一番下の行と A_3 の値を比較することによって検討できる。これより九つの費目とも，(3)のモデルの系列相関に帰することはできない。

調整モデルあるいは幾何級数的分布ラグの可能性は費目9において生じている。(4), (5)の調整モデルを考えると，調整係数 γ は0.39，(5)のパラメーター $\alpha_0=-7.0$, $\alpha_1=0.15$ となる。このとき，望ましい水準 y_t^* を決定する式は

〔表 1〕

費目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_0	4. 3520	−6. 143	−0. 8013	−0. 2811	−0. 8636	0. 5441	−0. 0753	1. 3178	−2. 744
A_1	0. 8701 (0. 0713)	0. 5753 (0. 1074)	0. 8365 (0. 0753)	0. 9533 (0. 0324)	0. 8503 (0. 0723)	1. 1753 (0. 0548)	0. 9438 (0. 0331)	0. 8967 (0. 0718)	0. 6087 (0. 0996)
A_2	0. 5259 (0. 0532)	0. 2864 (0. 0514)	0. 05877 (0. 02573)	0. 0088 (0. 0039)	0. 03413* (0. 01906)	0. 00011* (0. 00748)	0. 0011* (0. 0009)	0. 05766 (0. 02416)	0. 05271 (0. 01351)
A_3	0. 04145* (0. 03069)	0. 07706 (0. 02198)	0. 02586 (0. 00967)	0. 0043 (0. 0021)	0. 01262 (0. 00557)	−0. 0060* (0. 0037)	0. 00089 (0. 00038)	−0. 0037* (0. 0047)	0. 04545 (0. 01148)
$\overline{R}$	0. 980	0. 919	0. 955	0. 996	0. 927	0. 987	0. 992	0. 849	0. 984
$\overline{S}$	2. 156	2. 075	1. 032	0. 153	0. 775	0. 303	0. 038	0. 932	0. 537
d	2. 436	1. 828	1. 759	1. 843	1. 866	0. 581	1. 313	2. 117	1. 684
$(1-A_1)A_2$	0. 0683	0. 1216	0. 0096	0. 0004	0. 0511	−0. 0002	0. 00006	0. 0060	0. 02063

(1) A_i の下の（ ）内の数字は，標準偏差を示す．

(2) $\overline{R}$ は自由度修正済重相関係数，$\overline{S}$ は残差の標準偏差，d はダービン・ワトソン比である。

(3) ＊印のついた係数は有意水準 5% で有意でないもの。

〔表 2〕

費目	1	2	3	4	5	6	7	8
α	69. 18	−25. 090	−1. 547	−0. 4451	−2. 0578	−160. 85	−0. 0570	−22. 343
β	0. 3663	−0. 2283	0. 3860	0. 5988	0. 2918	−1. 768	1. 3009	−0. 1691
γ	0. 5403	0. 3147	0. 0499	0. 0068	0. 0300	0. 00286	0. 00067	0. 06275
δ	0. 0820	0. 3109	0. 5641	0. 6466	0. 4536	−1. 929	1. 3588	−0. 0622

$$y_t^* = -7.0 + 0.15x_t$$ となる。

幾何級数的分布ラグと考えた場合には，(7) の $\lambda = 0.61$，$\alpha \fallingdotseq 0.5$ となるから，

$$y_t = 0.5x_t + 0.31x_{t-1} + 0.19x_{t-2} + 0.12x_{t-3} + \cdots\cdots$$

という分布ラグモデルとなる。統計的観点からだけでは費目 9（教養・娯楽費その他）が調整モデルにしたがっているのか，幾何級数的分布ラグのモデルにしたがっているのかを決める決定的な基準は何もない。更に，調整モデルと判断された場合にも，$\gamma = 0.39$ という値は，調整期間が 1 年ではなく，四半期単位で行なわれ，調整係数が 0.2 のときにも得られるから，調整期間については市場条件などが考慮されなくてはならない。

費目 1～8 について係数の統計的有意性を無視して，(11)にしたがって，方程式(9)の係数及び定率減価率 δ を求めると〔表-2〕のようになる。ストック係数 β は正ならば習慣形成的，負ならばストック調整原理が働いているものと解釈できる。

習慣形成的要因が作用する典型的なものとして食料品，ストック調整効果があるものとして被服を考えることができるが，予想通りの結果が得られている。食料品の減価率 δ は 0.082 と非常に小さいが，これは個人消費支出の変化が食料品に与える効果($A_2 = 0.5259$)は，一期前の個人消費支出の効果($A_3 = 0.04145$)の約 13 倍ということからも説明できる。

費目 6（交通費），7（通信費）については，誤差項の系列相関の処理が残っているが，係数 A_2，A_3 の有意性から考えて，ハウタッカー・テイラーのモデルを適用することは無理であると考えられる。費目 8（交際費）についても，係数 A_3 の有意性から考えて，やはりハウタッカー・テイラーのモデルで説明することには困難があるようである。

III

これまで述べてきたこと及び問題点をまとめておくと次の通りである。

(1) 誘導形として得られたラグ付内生変数を含むモデルから，構造方程式を識別する際には関心のある構造方程式にのみ考慮を払うべきではなく，係数の

制約条件を判断の基準とすることによって識別すべきである。

(2) 係数の制約条件から判断する際には，係数自身の偶然変動をも考慮に入れるべきであるが，IIにおいてはこれをしなかった。ラグが一期ぐらいであれば，係数の制約条件を導くのは簡単であるが，二期，三期のラグが入ってくると定差方程式の特性根と係数の関係が入ってきて，制約条件が複雑になってくる。

(3) 構造方程式の誤差項に系列相関がなくても，誘導形の誤差項に系列相関が生ずる場合が多く，このとき，誘導形の推定にあたって通常の最小自乗法を用いることは適当でない。逆に，誘導形の誤差項に系列相関がないという仮定の下では，構造方程式の誤差項に系列相関がある場合が生じ，系列相関の有無に関してはどのモデルの段階で生じているのか先験的に決められない。

(4) 調整モデルにおいては，時間に関する集計によって，ミスリーディングな結論を得ることがあり，調整期間とモデルの単位期間とが一致しているかどうかを考慮しなければならない。

参考文献

〔1〕 H. S. Houthakker and L. D. Taylor; Consumer demand in the United States, 1929–1970, Harvard University Press, 黒田・西川・辻村共訳「消費需要の予測」，勁草書房

〔2〕 Zvi Griliches; A note on serial correlation bias in estimates of distributed lags, Econometrica. Vol. 29, 1 (January 1961)

〔3〕 L. D. Taylor and T. A. Wilson; Three-pass least squares: a method for estimating models with a lagged dependent variable, The Review of Economics and Statistics, November 1964

〔4〕 K. F. Wallis; Lagged dependent variables and serially correlated errors: A reappraisal of three-pass least scquares, The Review of Economics and Statistics, November 1967

〔5〕 Y. Mundlak; Aggregation over time in distributed lag models, International Economic Review Vol. 2, No. 2, May, 1961

〔6〕 Zvi Griliches; Distributed lags: a survey, Econometrica, Vol. 35, No. 1 (January, 1967)