慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	逐次重回帰の計算プログラム : FORTRAN IIによる計算プログラム・シリーズ(2)
Sub Title	Stepwise regression analysis : FORTRAN II probram system (2)
Author	岩田, 暁一(Iwata, Gyoichi) 鳥居, 泰彦(Torii, Yasuhiko) 沓掛, 暁(Kutsukake, Akira)
Publisher	慶應義塾大学商学会
Publication year	1965
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.8, No.4 (1965. 10) ,p.巻末1- 巻末51
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19651000-0139

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

資　料

逐次重回帰の計算プログラム

FORTRAN II による計算プログラム・シリーズ (2)

岩田暁一
鳥居泰彦
沓掛　暁

目　次

0.　はじめに
1.　逐次線型重回帰——その機能と方法——
　1.1　最小自乗法のまとめ
　1.2　逐次線型重回帰
2.　統計学及び数値計算技術上の準備
　2.1　統計学的準備
　2.2　数値計算技術上の準備
3.　算法の詳細及び流れ図
　3.1　S-行列について
　3.2　プログラムの概要
　3.3　流れ図とその説明
4.　KOSW-1 の使用法と実例
　4.1　KOSW-1 の使用法
　　4.1.1　データーシートの作製
　　4.1.2　データーカードの作製
　　4.1.3　計算結果の見方
　4.2　逐次重回帰分析の実例
　　4.2.1　養畜生産函数の設計
　　4.2.2　養畜生産函数の逐次重回帰分析
参照分献
附録　I
附録　II

0. はじめに

通常の線型重回帰計算の電子計算機による algorithm については西川・黒田〔3〕に詳しく述べられている．これを承けて，逐次線型重回帰計算の手続を明らかにするのが我々の目的である．通常の重回帰と逐次重回帰との対比を概略するとすれば，前者は従属変数 y を説明する独立変数 x_i の組を予め定め，それぞれの観測値により回帰係数を計算するのに対して，後者は考えられる独立変数 x_i の中からその説明力に応じ逐次回帰式にとり入れ，また説明力が一定基準以下であるときには，それを回帰式からはずしていくということにあるといえる．第1節では，逐次重回帰について更に詳しく説明する．第2節に於ては数値計算技術的，統計学的な面からの準備を行う．第3節では流れ図の説明を兼ねて具体的な計算手続を明らかにする．第4節では KOSW 1 プログラム（逐次重回帰計算プログラム）の使用法，および使用実例を述べる．附録に FORTRAN 言語によるプログラムのコードを添えてある．専らこのプログラムによって計算を行うことに興味のある読者は第2,3節を省略して第1節，第4節（例題）と読み進まれるがよい．尚，そえられた計算流れ図，プログラムコード（附録 I）はわかり易さを第一としたもので，実際計算にもちいるそれ（附録 II）とは，計算能率向上の為等でかなり様相の異ったものになっている．本稿は岩田，鳥居，沓掛の討論に基づき，第1～第3節は沓掛が，第4節は鳥居がまとめた．したがって，万遺漏なきを期した心算ではあるが，誤りや，不充分な点があるとすればその責はそれぞれ両名に帰せられねばならない．本稿をまとめるにあたり Efroymson〔1〕に負う所が大きかった事を附記する．尚 KOSW 1 を更に改良した KOSW 2 を計画している．完成したいこれの使用法を発表する．

1. 逐次線型重回帰——その機能と方法——

初めに後で必要となる項目の定義をかねて通常の重回帰の簡単な復習を行い（1.1 項），次に逐次重回帰のより詳しい解説を行う（1.2 項）．

1.1 最小自乗法のまとめ〔Wilks〔4〕Ch. 10〕

確率従属変数 y と与えられた独立変数 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ の間に

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots\cdots+\beta_nx_n+u \tag{1.1}$$

なる関係があるとする．ここで u は平均 0，分散 σ^2 の確率分布に従う確率変数である．今，与えられた T 個 $(T>n)$ の独立変数の組 $(x_1^t, x_2^t, \cdots\cdots, x_n^t)$, $(t=1, 2, \cdots, T)$ について，それぞれに対応する y^t の読みが与えられているとする．この標本から β_i $(i=0, 1, \cdots, n)$ の推定量を最小自乗法によって求める．すなわち残差平方和

$$R=\sum_{t=1}^{T}u^t\cdot u^t=\sum_{t}^{T}(y^t-\hat{y}^t)^2=\sum_{t=1}^{T}(y^t-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_1^t-\cdots\cdots-\hat{\beta}_nx_n^t)^2 \tag{1.2}$$

を最小にする $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_n$ を求め，これらをそれぞれ $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ の推定量とするのである．R を最小にする $\hat{\beta}_i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ は

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{\beta}_i}=0 \qquad (i=0, 1, \cdots, n)$$

を解いて得られる．更に具体的には

$$\bar{y}=\frac{1}{T}\sum_t y^t$$

$$\bar{x}_i=\frac{1}{T}\sum_t x_i^t$$

とおき

$$s_{ij}=\sum_t(x_i^t-\bar{x}_i)(x_j^t-\bar{x}_j) \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

を要素とする $n\times n$ 行列，すなわち x_i の共分散行列を

$$S=(s_{ij})$$

その逆行列を

$$S^{-1}=(s^{ij})$$

とし，

$$s_{iy}=\sum_t(x_i^t-\bar{x}_i)(y^t-\bar{y})$$

$$s_{yy}=\sum_t(y^t-\bar{y})^2$$

とすれば，各一次係数 $\hat{\beta}_i$ および定数項 $\hat{\beta}_0$ は

$$\hat{\beta}_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}a_{jy} \qquad (i\geqq 1)$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}_1-\hat{\beta}_2\bar{x}_2-\cdots\cdots-\hat{\beta}_n\bar{x}_n$$

と表わされる．

このようにして求められた推定量 $\hat{\beta}_i$ は，β_i の不偏最小分散推定量である．また $\hat{\beta}_i$ $(i\geqq 1)$ の共分散行列は

$$\mathrm{S}^{-1}\cdot\sigma^2=(s^{ij}\cdot\sigma^2)$$

従って特に

$$\sigma^2(\hat{\beta}_i)=s^{ii}\cdot\sigma^2 \qquad (i\geqq 1)$$

である．$\hat{\beta}_0$ の分散は

$$\sigma^2(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{\mathrm{T}}+\sum_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_j s^{ij}\right)\cdot\sigma^2$$

で与えられる．また，自由度を $d\cdot f=\mathrm{T}-n$ とすると

$$\frac{\mathrm{R}}{d\cdot f}=\sum_t(y^t-\hat{y}^t)^2\Big/(\mathrm{T}-n)$$

が σ^2 の不偏推定量を与える．

u の分布について更にきつい条件，すなわち，

$$u\in\mathrm{N}(0,\ \sigma^2) \tag{1.3}$$

をつけるならば

$$(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \cdots,\ \hat{\beta}_n)\in\mathrm{N}((\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),\ (\mathrm{S}^{-1}\sigma^2))$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\sigma^2}\in\chi^2(\mathrm{T}-n)$$

$$(s_{yy}-\mathrm{R})/\sigma^2\in\chi^2(n)$$

が成立する．

ここで (1.2) 式の右辺を $\bar{y}=\bar{\hat{y}}$ に注意して展開し和をとることによって

$$\mathrm{R}=s_{yy}-\sum_{ij}\hat{\beta}_i s_{ij}\hat{\beta}_j$$

$$=s_{yy}-\sum_{ij}\hat{\beta}_i s_{ij}\left(\sum_k s^{jk}s_{ky}\right)$$

$$=s_{yy}-\sum_i\hat{\beta}_i\sum_{jk}s_{ij}s^{jk}s_{ky}$$

$$=s_{yy}-\sum_{ik}\hat{\beta}_i\delta_{ik}s_{ky}$$

$$=s_{yy}-\sum_i\hat{\beta}_i s_{iy}$$

を得る.

1.2 逐次線型重回帰

以降特記しないときは条件 (1.3) を仮定するものとする.

秤量の問題等のように y と x との関係が完全に明らかである場合もあるが, 一方我々のとりあつかうモデルに於ては, y を説明する因子として, ある特定の x がどれ程の有効さをもつか, 事前には確定した情報をもちあわさないことが少くない. このようなときに, 各 x_i について, それが y に対して説明力をもっているか否か, いいかえれば (1.1) 式に於て対応する係数 β_i が 0 であると見なし得るか否かを一々検定しながら回帰係数を求めていく方法が逐次重回帰計算の方法である.

いま少し具体的にその各単位操作を述べるならば, まず最初に x_i の中から最も説明力の大きい x, 例えば, x_{i_1} をえらび

$$y=b_0^{(1)}+b_{i_1}^{(1)}x_{i_1}$$

という回帰方程式を得る, 次に残りの x_i $(i\neq i_1)$ の中から最も大きい説明力をもつ x_{i_2} を選び

$$y=b_0^{(2)}+b_{i_1}^{(2)}x_{i_1}+b_{i_2}^{(2)}x_{i_2}$$

なる回帰方程式を得る. この様にして一般に $r-1$ 個の変数を回帰式にとり入れたときに第 r 回目の操作は, 第一に既に回帰式にとり入れられた変数 x_{i_α} $(\alpha=1, \cdots, r-1)$ のうち最も説明力のよわい変数 x_w, まだ回帰式にとり入れられていない x_i $(i\neq i_1, i_2, \cdots, i_{r-1})$ の中で最も説明力の強い変数 x_v を選び出すのである. 第2に x_v を回帰式にのこすべきかどうか, すなわち x_v の係数を β_v としたとき

(1.4) $$H_w:\ \beta_w=0$$

という帰無仮説を検定する．これが棄却できなければ我々は x_w を回帰式にとどめる必要なしとしてこれを回帰式から除く操作にうつらねばならない．若し帰無仮説 H_w が棄却されたならば，次に我々は x_s が回帰式に入る資格があるかどうか，すなわち β_s を x_s の係数とするときここでも

(1.5) $$H_s:\ \beta_s=0$$

という帰無仮説を検定することになる．この帰無仮説が棄却されたならば，我我は回帰計算を行って，$x_{i_r}=x_s$ とおき

$$y=b_0^{(r)}+b_{i_1}^{(r)}x_{i_1}\cdots\cdots\cdots\cdots+b_{i_r}^{(r)}x_{i_r}$$

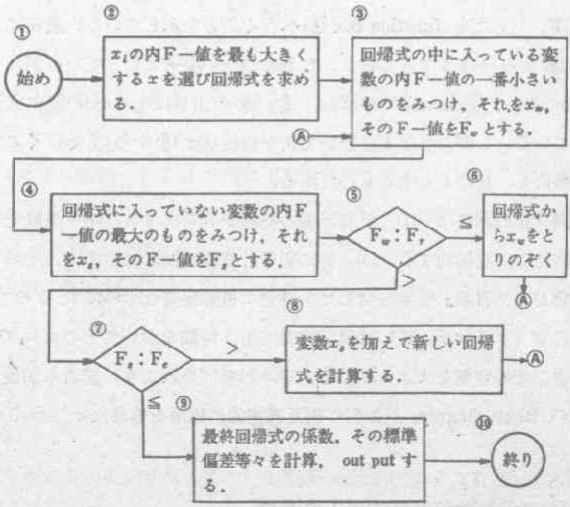
を得て，また次の $r+1$ 回目の操作にいくのである．帰無仮説 (1.4) が棄却され，帰無仮説 (1.5) が棄却されなかったとすると，すでに回帰式にとり入れられた x_i の内もっとも説明力の弱いものでも回帰式からははずし得ず，又回帰式に入っていない変数の内，最も説明力の強い変数でもその係数は 0 とみなして差支えないという時点に至ったということであるから，我々の計算はそこで終了する．実際には，そういう状態になるまで以上の計算をくり返すのである．

上に述べたようにこの逐次回帰の方法では一旦回帰式にとり入れられた変数でも，その後他の変数が回帰式に導入されたことによって，その回帰式に於ける意味がうすくなったものは『追出される』点に特色がある．

さて，(1.4)，(1.5) 等の仮説検定ということが述べられたが，この内容については 2 節に於て詳述するとして，そのあらましは次のようになる．すなわち，これらの仮説の下では，注目している変数を回帰式にとり入れることによって減少する残差平方和 R の減分 R_1 と，それまでに回帰式にとり入れた変数及び現在注目している変数を合わせた変数の組について回帰を行った場合の残差平方和 R_0 との比が F-分布をすることに注目して F-検定を行うのである．このために H_w 検定のための，いいかえれば，一旦回帰式に入った変数を除くための F の値 F_r，また H_s 検定のための，すなわち変数を回帰式にとり入れ

るための F の値 F_e をあらかじめ与えなければならない．この F-分布の自由度は，注目している変数をも含んで，現在回帰式にとり入れられている（或いは，これから入る）変数の個数を r とするならば $(1, T-r)$ であるから，F 表によって自由度 $\left(1, T-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 近辺の，計算者の必要によって 1% 或いは 5% 等の値を用いればよいであろう．ここで [ ] はその中の数値の整数部分をとることを意味するガウスの記号である．尚その意味からいって，当然 $F_e \geqq F_r$ であるべきことに注意する．最後に次のことに注意しておく．われわれの場合一時に回帰式から出し入れする変数の個数は 1 コ以内に限られている．この意味で得られた結果が最良のものではない．すなわち，本当に最良であるためには β_i のあらゆる組み合わせについてそれを 0 とする仮説を検定し棄却され得ぬものから，最も相関のよいものを選ぶべきであろうから．一時には 1 コの $\beta=0$ だけを検定する場合には，実は Student の t 検定で充分である．実際 $F \in F$

図 1.1



$(1, f)$ ならば$t=\sqrt{F}$ は $t \in t(f)$ である．しかし，若し同時にいくつかの $\beta=0$ を検定するときにはどうしても F 検定が必要となる．上に述べた理由から，われわれは将来の拡張にそなえ F 検定の考え方を用いようとしているのである．

これまでに述べて来た逐次重回帰の計算手続のあらましを図式化すると図 1.1 のようになる．この図式を Block diagram 等とよぶ．

これまでに述べた説明に照し合わせて見れば自から明らかではあろうが一応約束を説明する．①，⑩ 等の ○ は始め，終りを示す記号である．②，③ 等の □ はそこで或る一定の計算操作が行われることを示し function box といわれる．それらを結ぶ → は計算作業の流れを示す．⑤，⑦ 等の ◇は，decision box とよばれ，そこで判断，比較等が行われることを示し，その結果によって計算の流れが分岐することに注意していただきたい．これに対して前の function box は流れ込む矢は何本あってもかまわないが，出ていく矢は一本に限られている．⑤ から ⑥ へ行く矢印に $\leqq$ がついているのは⑤に於ける比較の結果 $F_w \leqq F$，だったら function box ⑥ へ行くことを示している．最後に f. box ⑥ 及び ⑧ から →Ⓐとなっており，f. box ③ へ Ⓐ→ となっているが，これは junction（或いは connector）と呼ばれ，⑥，⑧ の出口はそれぞれ ③ に入ることを示している．このようなとき強いて矢を直接 ⑥，⑧ から ③ へひくことは図式を煩雑にし，見にくくするものである．

この図式化の利益は (1) 計算手続の把握を容易にする．(2) 無駄を省き，誤りを防ぐことを援助する．(3) 特に電子計算機に関して言えば，そのプログラムは容易な『言語』をもってしても非常に複雑怪奇なものになるのであるが，他のプログラマが，或いは自分自身でも，時間をおいてそのプログラムを見るとき，その理解を大きく助ける，等々が挙げられよう．読者も前述の説明と，この Block diagram が如何に相互補完的に理解を容易ならしめるかを見られたい．

2. 統計学及び数値計算技術上の準備

2.1項では先に述べた F-検定の意味と根拠を明らかにするために統計学的議論を行い，2.2項では数値計算的に行列を逆転する際の理論と逐次重回帰に特有な重要性をもつ topics について解説する．

2.1 統計学的準備 (Graybill〔2〕Ch. 6)

ここでは 1.2 で述べた R_1 と R_0 の比，厳密にいえば

$$R_1 \Big/ \frac{R_0}{T-r}$$

が自由度 $(1, T-r)$ の F-分布に従うということの証明を与える．

まず最初に次の定理を掲げる．

定理 2-1

T 次元確率 vector y が平均 vector μ，分散行列 $\sigma^2 I$ の正規分布に従うとし，A_i $(i=1, \cdots, k)$ を $T \times T$ 行列としたとき

$$y'y = \sum_{i=1}^{k} y'A_i y$$

であるとする．このとき

(1) 各 $y'A_i y$ が自由度 f_i，非心パラメタ $\lambda_i = \mu' A_i \mu / 2\sigma^2$ の非心 χ^2-分布をする．

(2) $y'A_i y$，$y'A_j y$ は $i \neq j$ ならば互に独立である．

ための必要充分条件は，全ての A_i $(i=1, 2, \cdots, k)$ が冪等で，その階数がそれぞれ f_i であることである．

この定理の証明は与えないが，必要と思われる読者は Graybill〔2〕Ch. 4 を参照されたい．

さて今

$$y = X\beta + u \tag{2.1}$$

なる式を考える．ここで $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^T \end{pmatrix}$ は観測 vector x^t からなる $T \times p$ 行列，β，u はそれぞれ p 次元及び T 次元の vector で係数 vector，残差 vector とよば

れる．

$$u \in N(0, \sigma^2 I)$$

と仮定する．さて係数 β を，それぞれ q 次元 vector β_1 と，$p-q$ 次元 vector β_2 とに分割して

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

とする．ここで与えられた vector β_1^* をとって

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1^*$$

を尤度比を用いて検定する場合に次の定理がある．

定理 2-2

(2.1) において，$u'u$ を最小になるように β を定め，その最小値を R_0 とする．次に

$$y = X_1\beta_1^* + X_2\beta_2 + u$$

という式で $u'u$ を最小にするように β_2 を定め，このときの最小値を $R_0 + R_1$ とする．ここで X をそれぞれ $T \times q$, $T \times (p-q)$ 行列である X_1, X_2 に分割してある．すなわち

$$X = (X_1, X_2).$$

そうすると

$$F = \frac{R_1/q}{R_0/(T-p)}$$

は，非心 F-分布 $F'(q, T-p, \lambda)$ に従う．ここで

$$B = X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1$$

としたとき

$$\lambda = (\beta_1 - \beta_1^*)'B(\beta_1 - \beta_1^*)/2\sigma^2$$

である．特に B は正定値であるから，H_0 が真であるとき，すなわち $\beta_1=\beta_1^*$ のとき，またそのときに限り F は F-分布 $F(q, T-p)$ に従う．

〔証明〕 制限のない場合の尤度函数は

$$f(y, \beta_1, \beta_2, \sigma^2) \tag{2.2}$$
$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X_1\beta_1-X_2\beta_2)'(y-X_1\beta_1-X_2\beta_2)\right]$$

である．これを最大にする β の値 $\hat{\beta}$ は正規方程式

$$X'X\hat{\beta}=X'y \tag{2.3}$$

を解くことによって得られ

$$\hat{\beta}=S^{-1}X'y$$

で与えられる．ここで $S=X'X$ である．このとき $u'u$ は最小となりその値は

$$R_0=u'u=(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta}) \tag{2.4}$$

である．

次に $y=X_1\beta_1^*+X_2\beta_2+u$ の回帰を行うのであるが，z を

$$z=y-X_1\beta_1^* \tag{2.5}$$

とおくと (2.2) 式は

$$f(z, \beta_2, \sigma^2)$$
$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z-X_2\beta_2)'(z-X_2\beta_2)\right]$$

と書き直される．これを最大化する β_2 の値 $\hat{\beta}_2(\beta_1^*)$ は

$$\hat{\beta}_2(\beta_1^*)=(X_2'X_2)^{-1}X_2'z \tag{2.6}$$
$$=(X_2'X_2)^{-1}X_2'(y-X_1\beta_1^*)$$

で与えられ，このとき $u'u$ は最小値

$$R_0+R_1=u'u=(y-X_1\beta_1^*-X_2\hat{\beta}_2(\beta_1^*))'(y-X_1\beta_1^*-X_2\hat{\beta}_2(\beta_1^*)) \tag{2.7}$$

$$=(z-X_2\hat{\beta}_2(\beta_1^*))'(z-X_2\hat{\beta}_2(\beta_1^*))$$

をとる．

$$X'(I-XS^{-1}X')=0 \tag{2.8}$$

であるからこれを書きかえて

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix}(I-XS^{-1}X')=0$$

である．更にこれを書きなおすと，

$$\begin{aligned} X_1'(I-XS^{-1}X')&=0 \\ X_2'(I-XS^{-1}X')&=0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

の二式を得る．さて (2.7) に (2.6)，(2.5) を代入すると

$$R_0+R_1=(y-X_1\beta_1^*)'[I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'](y-X_1\beta_1^*)$$

となる．

(2.4) 式は (2.9) に注意すれば

$$R_0=(y-X_1\beta_1^*)'(I-XS^{-1}X')(y-X_1\beta_1^*)$$

と書けることがわかる．今

$$A=I-XS^{-1}X'$$

$$A_2=I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$$

とおくと

$$\begin{aligned} z'z&=z'Az+z'(A_2-A)z+z'(I-A_2)z \\ &=R_0+R_1+R_2 \end{aligned}$$

と表すことができる．ここで $\beta^*=\begin{pmatrix}\beta_1^* \\ 0\end{pmatrix}$ とすると，

$$E(z)=E(y-X_1\beta_1^*)$$

$$=X\beta-X_1\beta_1^*=X\beta-X\begin{pmatrix}\beta_1^*\\0\end{pmatrix}$$

であるから

$$z\in N(X(\beta-\beta^*),\ \sigma^2 I) \tag{2.10}$$

である．さて，行列 A，(A_2-A)，$(I-A_2)$ が冪等であることは容易にわかる．残っているのはA_2-A の階数がたしかに q になることである．A_2-A は冪等であるから

$$\rho(A_2-A)=\mathrm{tr}(A_2-A)=\mathrm{tr}\,A_2-\mathrm{tr}\,A$$
$$=T-(p-q)-(T-p)=q.$$

故に，定理 2-1 により次の結論が出る．

(1) $z'Az/\sigma^2=R_0/\sigma^2$ は χ^2 分布，$\chi^2(p-q)$ に従って分布する．非心パラメタ $E(z)'AE(z)/2\sigma^2=0$ なることは (2.8)，(2.10) より明らかである．

(2) $z'(A_2-A)z/\sigma^2=R_1/\sigma^2$ は非心 χ^2 分布 $\chi^2(q,\ \lambda)$ に従って分布する．ここで

$$\lambda=\frac{1}{2\sigma^2}E(z)'(A_2-A)E(z) \tag{2.11}$$

(3) R_0/σ^2，R_1/σ^2 は互に独立である．従って $R_1(p-q)/R_0q$ は非心 F 分布 $F'(q,\ p-q,\ \lambda)$ に従う．

さて最後に非心パラメタ λ は (2.11)，(2.10) から

$$\lambda=\frac{1}{2\sigma^2}(\beta-\beta^*)'X'(A_2-A)X(\beta-\beta^*)$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}[(\beta_1-\beta_1^*)'X_1'+\beta_2'X_2']\cdot[XS^{-1}X'-X_1(X_2'X_2)^{-1}X_2']\cdot[X_1(\beta_1-\beta_1^*)+X_2\beta_2]$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}(\beta_1-\beta_1^*)'[X_1'X_1-X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1](\beta_1-\beta_1^*)$$

ここで最後の等式には (2.9) を用いた．[　]の中は正定値であるから，$\beta_1=\beta_1^*$ のとき，すなわち，帰無仮説 H_0 が正しいときに限って $\lambda=0$，すなわち F は $F(q,\ p-q)$ に従う．　〔証終〕

さて，この定理を我々の場合にあてはめてみよう．

$$X_1'=(x_{i_r}^1,\ x_{i_r}^2,\ \cdots\cdots,\ x_{i_r}^T)$$

$$X_2'=\begin{pmatrix} x_{i_1}^1, & x_{i_1}^2, & \cdots\cdots, & x_{i_1}^T \\ x_{i_2}^1, & x_{i_2}^2, & \cdots\cdots, & x_{i_2}^T \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{i_{r-1}}^1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & x_{i_{r-1}}^T \end{pmatrix}$$

$$\beta_1'=(\beta_{i_r})$$

$$\beta_2'=(\beta_{i_1},\ \cdots\cdots,\ \beta_{i_{r-1}})$$

$$p=r-1$$

$$q=1$$

であって，仮説 H_0 は

$$H_0:\beta_1=0 \quad \text{すなわち} \quad \beta_{i_r}=0$$

である．検定に必要な統計量は

$$R_0=y'(I-XS^{-1}X')y$$

$$R_1=y'[XS^{-1}X'-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2']y$$

であるが，この R_0 はまた

$$R_0=y'y-\hat{\beta}'X'y$$

$$=s_{yy}-\sum_{\alpha=1}^{r}\hat{\beta}_{i_\alpha}a_{i_\alpha y}$$

と書ける．ここで $\hat{\beta}'X'y$ は $(x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_r})$ による残差平方和の減分である．さて，

(2.12) $$\hat{\beta}_2=(X_2'X_2)^{-1}X_2'y$$

とおくと

(2.13) $$R_1=\hat{\beta}'X'y-\hat{\beta}_2'X_2'y$$

とかける．ここで (2.12) の $\hat{\beta}_2$ の意味を見よう．正規方程式 (2.3) を次のように分割する．

$$\begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$

ここで $\beta_1=0$ とおいて，β_1 についてとけばその解 $\hat{\beta}_2$ として (2.12) のそれを得る．これによって見るように $\hat{\beta}_2$ は x_{i_r} を無視したときの回帰係数を与えるものである．従って (2.13) の R_1 の意味は変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}$ によって説明された変数 y に更に x_{i_r} を加えて説明するがために生ずる残差平方和の減分であるということができる．

2.2 数値計算技術上の準備

逐次回帰分析を計算技術の上から眺めるならば，その中心は行列 S の逆行列を算出する点にある．数値的に行列を逆転する方法は多数あるが，われわれは消去法或いは掃き出し法と呼ばれる方法が最も逐次重回帰計算に適しているので，これを用いることにする．この方法については西川・黒田〔3〕に解説されているが，一つにはこの方法を少し modify したこと，二つには，これがなぜ最も適当しているのかということを理解するために，以下幾分かの紙数をさいて解説を行う．行列の逆転の場合，通常最終結果の逆行列にのみ興味があるわけだが，われわれの場合は行列の逆転の過程で生み出される結果も重要である．というのは行列の或る一列を消去する度に，それまでに消去された列に対応する変数に関する部分的回帰式，ならびにそれに伴う種々な統計量を大きな困難なしに『逆転しかけた』中途の行列から得ることができ，またそれらをもって計算の流れを制御する情報とするからである．

われわれの逆行列計算 algorithm は次のようである：もとの $n\times n$ 行列を $S=S^0=(S^0_{ij})$ とする．ここで S は対称，すなわち $S_{ij}=S_{ji}$ とする．algorithm の第 1 step が行われた後の行列を $S^1=(S^1_{ij})$ と書こう．第 1 step で行われる操作は

$$
\left.\begin{aligned}
S^1_{ij} &= S^0_{ij} - \frac{S^0_{i1} \cdot S^0_{1j}}{S^0_{11}} && i \neq 1,\ j \neq 1 \\
S^1_{i1} &= \frac{S^0_{i1}}{S^0_{11}} && i \neq 1 \\
S^1_{1j} &= -\frac{S^0_{1j}}{S^0_{11}} && j \neq 1 \\
S^1_{11} &= \frac{1}{S^0_{11}}
\end{aligned}\right\} \mathrm{E}^1
$$

同様にして第 k 回目の step では

$$
\left.\begin{aligned}
(2.14)_{ij} \quad & S^k_{ij} = S^{k-1}_{ij} - \frac{S^{k-1}_{ik} \cdot S^{k-1}_{kj}}{S^{k-1}_{kk}} && i \neq k,\ j \neq k \\
{}_{jk} \quad & S^k_{ik} = \frac{S^{k-1}_{ik}}{S^{k-1}_{kk}} && i \neq k \\
{}_{kj} \quad & S^k_{kj} = -\frac{S^{k-1}_{kj}}{S^{k-1}_{kk}} && j \neq k \\
{}_{kk} \quad & S^k_{kk} = \frac{1}{S^{k-1}_{kk}}
\end{aligned}\right\} \mathrm{E}^k
$$

である．これを kk 要素を軸 (pivot) とする掃出しという．このようにして，$\mathrm{E}^1, \cdots, \mathrm{E}^k, \cdots, \mathrm{E}^n$ と n 回の操作を行うと $S^n = S^{-1}$ になるのである．このことを明らかにするために次の定理を用いる．

定理 2-3

A を実対称行列とし，これを，A_{11}，A_{22} が正方行列なるように分割して

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}
$$

としたとする．A_{11} 及び

$$
A_0 = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}
$$

が nonsingular ならば A の逆行列が存在して

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=B$$

ここで

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}A_0^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A_0^{-1}$$

$$B_{21}=-A_0^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$B_{22}=A_0^{-1}$$

である．

〔証明〕 実際に掛算を行って単位行列になることをたしかめればよいのだが，ここではより構成的な証明を試みる．さて

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

両辺の行列式をとると，A_{11}，A_0 は nonsingular だから

$$1\cdot|A|=|A_{11}|\cdot|A_0|\neq 0$$

故に A はたしかに逆行列をもつ．そこで $A^{-1}=B$ を A と同様に分割した上でその成分を求めよう．

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

から次の 4 式を得る．

(2.15)$_{11}$ $\quad A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I$

$_{12}$ $\quad A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0$

$_{21}$ $\quad A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=0$

$_{22}$ $\quad A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=I$

A_{11} が nonsingular だから $(2.15)_{12}$ 式が B_{12} について解けて

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \tag{2.16}$$

これを $(2.15)_{22}$ に代入すると

$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}=A_0^{-1}$$

が求められる．これを (2.16) に代入すれば B_{12} が出，$B_{21}=B_{12}'$，$A_{21}=A_{12}'$ に注意すれば B_{21} を得，それ等を $(2.15)_{11}$ に代入すると B_{11} が求められる．

〔証終〕

次にこの定理を用いて次の定理を証明する．

定理 2-4

実正定値対称行列 S に operation $E^1, E^2, \cdots, E^r$ を続けて行うと，S^r, S をそれぞれ

$$E^r\cdots E^1S=S^r=\begin{array}{c|cc} & r & n-r \\ \hline r & S_{11}^r & S_{12}^r \\ n-r & S_{21}^r & S_{22}^r \end{array}\Bigg),\quad S=\begin{array}{|c|c|} \hline S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \\ \hline \end{array}$$

と分割したとき（$S_{11}, \cdots, S_{22}$ はそのときの r によって内容が違ってくる．簡単のため同じ記号を使用したが混乱は起きないであろう）

$$S_{11}^r=S_{11}^{-1} \tag{2.17$_{11}$}$$

$$S_{12}^r=S_{11}^{-1}S_{12} \tag{2.17$_{12}$}$$

$$S_{21}^r=-S_{21}S_{11}^{-1} \tag{2.17$_{21}$}$$

$$S_{22}^r=S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} \tag{2.17$_{22}$}$$

$$(r=1, \cdots, n)$$

となる．

特に，この定理から，$E^nE^{n-1}\cdots E^1S=S^{-1}$ が導かれる．又後に用いることであるが，すでに掃き出しを行った部分とそうでない所の交叉する所，すなわち S_{12}^r は $(2.17)_{12}$ 式を見れば

$$S_{11}X=S_{12}$$

なる方程式の解になっている．もう一つ

$$S_{12}^{r}=-(S_{21}^{r})^{\gamma}$$

に注意しておく．この定理の証明に入る前に operation E^k を行列の言葉で書いておく．その為に S^{k-1} を次のように分割する．

$$(2.18)\qquad S^{k-1}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} & k-1 & 1 & n-k \\ \hline k-1 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline 1 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline n-k & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right)$$

$C=E^kS^{k-1}=S^k$ を同様に分割して

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

とすると，(2.14) の各式から C の各部は次のように表わされる．

$$(2.19)_{11}\qquad C_{11}=B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$$

$$_{12}\qquad C_{12}=B_{12}B_{22}^{-1}$$

$$_{13}\qquad C_{13}=B_{13}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{23}$$

$$_{21}\qquad C_{21}=-B_{22}^{-1}B_{21}$$

$$_{22}\qquad C_{22}=B_{22}^{-1}$$

$$_{23}\qquad C_{23}=-B_{22}^{-1}B_{23}$$

$$_{31}\qquad C_{31}=B_{31}-B_{32}B_{22}^{-1}B_{21}$$

$$_{32}\qquad C_{32}=B_{32}B_{22}^{-1}$$

$$_{33}\qquad C_{33}=B_{33}-B_{32}B_{22}^{-1}B_{23}$$

〔定理 2-4 の証明〕 帰納法による．

i） $r=1$： この場合，$S_{11}=(s_{11})$ は唯一の元 s_{11} よりなる行列で，$S_{11}^{h}=(s_{11}^{-1})=S_{11}^{-1}$ 及び E^k のはたらきから，容易に (2.17) の各式をためすこと

ができる．

ii） $r=k-1$: この時定理の条件が満たされているとする（帰納法の仮定）．すなわち（2.18）に於て

$$S_{11}^{k-1}=B_{11}=S_{11}^{-1}$$

$$S_{12}^{k-1}=(B_{12}B_{13})=S_{11}^{-1}S_{12}$$

$$S_{21}^{k-1}=\begin{pmatrix}B_{21}\\B_{31}\end{pmatrix}=-S_{21}S_{11}^{-1}$$

$$S_{22}^{k-1}=\begin{pmatrix}B_{22} & B_{23}\\B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}=S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$$

であると仮定する．これはSを更に細く分割することによって

$$S=\left(\begin{array}{c|c:c}
 & k-1 & 1 \quad n-k \\
\hline
k-1 & A_{11}=S_{11} & \begin{array}{c:c} A_{12} & \begin{matrix}S_{12}\\A_{13}\end{matrix}\end{array} \\
\hline
1 & A_{21} & \begin{array}{c:c} A_{22} & A_{23}\end{array} \\
\hdashline
n-k & \begin{matrix}S_{21}\\A_{31}\end{matrix} & \begin{array}{c:c} A_{32} & \begin{matrix}S_{22}\\A_{33}\end{matrix}\end{array}
\end{array}\right)$$

(2.20)$_{11}$ $$B_{11}=A_{11}^{-1}$$

$_{12}$ $$B_{12}=A_{11}^{-1}A_{12}$$

$_{13}$ $$B_{13}=A_{11}^{-1}A_{13}$$

$_{21}$ $$B_{21}=-A_{21}A_{11}^{-1}$$

$_{22}$ $$B_{22}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=A_0$$

$_{23}$ $$B_{23}=A_{23}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{13}$$

$_{31}$ $$B_{31}=-A_{31}A_{11}^{-1}$$

$_{32}$ $$B_{32}=A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$_{33}$ $$B_{33}=A_{33}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{13}$$

が成立すると仮定することと同じである．

iii) $r=k$: (2.20) を (2.19) に代入することによって，$C=E^kS^{k-1}$ の各部

(2.21)$_{11}$
$$C_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}A_0^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

12
$$C_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A_0^{-1}$$

13
$$C_{13}=A_{11}^{-1}A_{13}-A_{11}^{-1}A_{12}A_0^{-1}(A_{23}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{13})$$

21
$$C_{21}=-A_0^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

22
$$C_{22}=A_0^{-1}$$

23
$$C_{23}=A_0^{-1}(A_{23}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{13})$$

31
$$C_{31}=(A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12})A_0^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}-A_{31}A_{11}^{-1}$$

32
$$C_{32}=-(A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12})A_0^{-1}$$

33
$$C_{33}=A_{13}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{13}-(A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12})A_0^{-1}(A_{23}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{13})$$

を得る．さて

$$S=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} S_{11}^N & S_{12}^N \\ \hline S_{21}^N & S_{22}^N \end{array}\right) \end{array}$$

と分割したときに

(2.22)$_{11}$
$$S_{11}^k=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=(S_{11}^N)^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

12
$$S_{12}^k=\begin{pmatrix} C_{13} \\ C_{23} \end{pmatrix}=(S_{11}^N)^{-1}S_{12}^N=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix}$$

21
$$S_{21}^k=(C_{31}\quad C_{32})=-S_{21}^N(S_{11}^N)^{-1}=-(A_{31}\quad A_{32})\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

22
$$S_{22}^k=(C_{33})=S_{22}^N-S_{21}^N(S_{11}^N)^{-1}S_{12}^N=A_{33}-(A_{31}\quad A_{32})\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix}$$

となることをたしかめれば帰納法により定理の証明は完結するのであるが，$(2.22)_{11}$ は定理 2-3 及び $(2.21)_{11}\sim(2.21)_{22}$ を見れば明らかである．$(2.22)_{12}$ の $(S_{11}^{N})^{-1}$ に $(2.22)_{11}$ を代入すると，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}A_{0}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}A_{0}^{-1} \\ -A_{0}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{0}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}A_{13}+A_{11}^{-1}A_{12}A_{0}^{-1}A_{23}A_{11}^{-1}A_{13}-A_{11}^{-1}A_{12}A_{0}^{-1}A_{23} \\ A_{0}^{-1}A_{23}-A_{0}^{-1}A_{21}A_{11}A_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{13} \\ C_{23} \end{pmatrix}$$

以下 $(2.22)_{21}$，$(2.22)_{22}$ も同様に確かめられる．読者こころみられよ．

〔証終〕

次に $B=S^{k-1}$ に E^{k} を二度つづけて作用して見よう．$(E^{k})^{2}B=E^{k}(E^{k}B)=E^{k}C=D$ として D を C と同様に 9 コの部分行列に分割し，その各部を計算してみる．$E^{k}C=D$ だから D の各部は (2.19) の各式の C を D に，B を C に読みかえた式によって表わされる．そうしてできた式，たとえば，

$$(2.19)'_{11} \qquad D_{12}=C_{11}-C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}$$

に，$C=E^{k}B$ なのだから (2.19) の $_{11}$, $_{12}$, $_{21}$, $_{22}$ 式そのものを代入すれば D_{11} を B の各部で表現できる．

$$D_{11}=B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}-(-B_{12}B_{22}^{-1})(B_{22}^{-1})^{-1}(B_{22}^{-1}B_{21})=B_{11}$$

同様なことが全ての部分について言えて，結局

$$(2.23) \qquad E^{k}E^{k}B=B \quad \text{or} \quad E^{k}E^{k}=I$$

がわかった．尚上の議論を見ればわかるとおり $B=S^{k-1}$ である必要はなく，どんな行列に作用しても同じことである．

最後に $E^{k}E^{j}S$ と $E^{j}E^{k}S$ とはどれだけ違うかを調べておこう $(k\neq j)$．このためには

$$
S=\begin{array}{c|ccccc}
 & & j & & k & \\
\hline
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
j & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
k & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
\end{array}
$$

のように S を 25 コの部分に分割し，その各部についてしらべればよいのである．たとえば S_{kk} の行方を追って見よう．

$$
E^jE^k(S_{kk})=E^k(S_{kk})-\frac{E^k(S_{kj})E^k(S_{jk})}{E^k(S_{jj})}=\frac{1}{S_{kk}}-\frac{-\dfrac{S_{kj}}{S_{kk}}\cdot\dfrac{S_{jk}}{S_{kk}}}{S_{jj}-\dfrac{S_{jk}S_{kj}}{S_{kk}}}
$$

$$
=\frac{S_{jj}}{S_{kk}S_{jj}-S_{jk}S_{kj}}
$$

$$
E^kE^j(S_{kk})=\frac{1}{E^j(S_{kk})}=\frac{1}{S_{kk}-\dfrac{S_{kj}S_{jk}}{S_{jj}}}=\frac{S_{jj}}{S_{jj}S_{kk}-S_{kj}S_{jk}}
$$

同様にはなはだ面倒ではあるが，初等的な計算によって

(2.24) $$E^k(E^jS)=E^j(E^kS) \quad \text{or} \quad E^jE^k=E^kE^j$$

を得る．

以上をまとめて，次の定理が得られた．

定理 2-5

E^k は『冪等』である．すなわち (2.23) が成立する．また任意の E^k と E^j は交換する．すなわち (2.24) が成立する．

この定理を用いると

$$E^kE^1E^2\cdots E^k\cdots E^lS=E^1\cdots E^{k-1}E^{k+1}\cdots E^lS$$

がわかる．式の意味をくだいていえば，一旦 kk を軸として掃出した後，もう一度同じ kk を軸として掃出せば，その第一回目の掃出しの効果を消してしまうということである．すなわち 1, 2, …, l 行と 1, 2, …, l 列の交叉する部分行列はもとの S の同じ部分の逆行列になっていたものが，k 行及び k 列はもとの S の k 行及び k 列に E^1, …, E^{k-1}, E^{k+1}, …, E^l をほどこしたものにもどってしまい，1, …, $k-1$, $k+1$, …, l 行と同じ番号の列の交叉する所の逆行列のみが表われるということに注意する．

3. 算法の詳細および流れ図

算法 (Algorithm) の解説は即流れ図 (Flow-chart) の説明なのであるが，最初に 3.1 でわれわれの計算の核心である，S-行列の演算について若干の注意を行い，3.2 で計算プログラムの概要を説明する．最後に 3.3 に於て Flow-chart の提示と，その各段階の説明を行う．

3.1 S-行列について

S-行列の定義: われわれの S-行列は第 1 節にのべたものとは少々異っている．すなわち，後に示すように pivot の tolerance check のため，対角要素の絶対値の大きさを揃える必要があるし，F-検定のときに一々規準化する煩を避けるためにも積率行列そのものではなく，単純相関行列に直したものを用いる．具体的には $s_{ij}/\sigma_i\sigma_j$ を要素とする行列である点が第 1 である．これを以後同じ記号 $S=(s_{ij})$ で示す．第 2 にわれわれはこの S-行列を一まわり『大きく』する．すなわち，第 1 節の言葉でいうと

$$S^s=\left(\begin{array}{c|c} \overset{n}{S} & \overset{1}{S_y} \\ \hline S_y' & S_{yy} \end{array}\right)\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}$$

ここで $S'_y=(s_{1y}, \cdots, s_{ny})$ である．

第2節の言葉では

$$S^a=\left(\begin{array}{c|c} \overset{n}{\mathbf{X'X}} & \overset{1}{\mathbf{X'}y} \\ \hline \mathbf{y'X} & \mathbf{y'}y \end{array}\right)\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}$$

なる S^a を用いるのである．われわれは以降 $n+1$（独立，従属変数を合わせた全変数の個数）をあらためて n とし，独立変数の個数を $n-1$ として話をすすめることにする．従って S^a は $n\times n$ 行列，S は $(n-1)\times(n-1)$ 行列である．

いくつかの pivot について掃出しを行った行列の内容： Pivot として $S_{i_1i_1}$, $S_{i_2i_2}$, $\cdots$, $S_{i_ri_r}$, を取って掃出しをすませたとしよう．この行列を $\widetilde{S}^a$ とおき，S^a, $\widetilde{S}^a$ の $(i_1, \cdots, i_r)$ 行，$(i_1, \cdots, i_r)$ 列の交叉する要素を抜き出して作った $(r\times r)$ 行列をそれぞれ S^a_r, $\widetilde{S}^a_r$ とする．又 S_y, $\widetilde{S}_y$ の $(i_1, \cdots, i_r)$ 要素からできる vector をそれぞれ S_{yr}, $\widetilde{S}_{yr}$ とする．第2節，定理2-4によって

$$\widetilde{S}^a_r=(S^a_r)^{-1}$$

$$\widetilde{S}_{yr}=(S^a_r)^{-1}S_{yr}=(X'_rX_r)^{-1}X'_ry=\hat{\beta}_r$$

である．ここで X_r, $\hat{\beta}_r$ はそれぞれ X の $(i_1\cdots i_r)$ 行をとりだして作った行列，及び，x_{i_1}, $\cdots$, x_{i_r} に関する部分回帰式の推定係数 vector である．言葉を変えれば，変数 x_i を加えて回帰式を計算するのに一々最初から計算をするのでなく，第 ii 要素について掃出し計算を行えばよいということになる．更に便利なことは，同じ定理から

$$\widetilde{S}^a_{yy}=y'y-y'X_r(X'_rX_r)^{-1}X'_ry=y'y-\hat{\beta}_rX'_ry$$

がいえることである．これはそのまま x_{i_1}, $\cdots$, x_{i_r} に関する部分回帰式に対応する残差平方和 R_0 にほかならない．

掃出しの『二重性格』： 回帰式にとりいれる変数を増す仕方は上でわかった

が，一旦回帰式にとりいれた変数 x_j をとり除くにはどうすればよいか．ここで定理 2-5 を想起すれば，そのためには単に jj 要素を軸とした掃出しを行えばよいことがわかる．すなわち，掃出しは全く相反する二つの仕事（x_i が入っていれば抜き，入っていなければ入れる）をやる作用なのである．

R_1 および F-value: 今一つの変数 x_k を新たに回帰式に導入するとしよう．この際の S^0 行列の (n, n) 要素（すなわち，その時々の R_0 である）の減分 R_1 を考えて見よう．掃出し作用 E^k の定義（2.2 項）から

$$R_1=\frac{S_{nk}S_{kn}}{S_{kk}} \tag{3.1}$$

となる．これは，S_{kk} によって sweep out することによって $\hat{\beta}_k=S_{kn}/S_{kk}$ になることからも見易い．この場合の F-value を求めておこう．R_0 は検定すべき変数 x_k も含めた回帰式の残差であり，この sweep out する前の S_{nn} からはまだ引かれていないのだから（$x_{i_r}=x_k$ として），

$$F=R_1\Big/\frac{R_0}{d.f.}=R_1\Big/\frac{S_{nn}-R_1}{T-r}$$

である．

次に，すでに回帰式に入っている変数 x_j を『追出す』場合の R_0 の増分はどうなるかというと，やはり E^j の定義から

$$R_1=-\frac{S_{nj}S_{jn}}{S_{jj}} \tag{3.2}$$

である．今度は負号がついているが，掃出しが行われた行列については S_{jn}，S_{nj} が異符号になっていることから，実は正値であることがわかる．この掃出しが行われたときには異符号になるということが実は重要であって，x_j がすでに回帰式にくみこまれているか否かのテストに用いられ，プログラムの流れを制御するのである．(3.2) は，(3.1) のときのように，$\hat{\beta}_jS_{jn}$ と直接読みかえることは出来ないが，(3.2) 式の S_{ji} $(i=j, n)$ を掃出しの前のものに直して見れば（少々やっかいではあるが），やはり同様な結果を得る．このときの F-

value は，今度は，x_i がすでに回帰式に入っていることから

$$F=R_1\Big/\frac{R_0}{d.f.}=R_1\Big/\frac{S_{nn}}{T-r}$$

となる．

3.2 プログラムの概要

計算プログラムを大まかにみると，(1) データ読み込み・前準備ブロック，(2) R_1 の最大・最小を見出し対応する x_i が有意かどうかをしらべ，その結果によって，回帰式から出し入れするブロック，(3) 行列の逆転ブロック，(4) $\hat{\sigma}$ 等等の数値を計算し，出力するブロックに分けられる．これらの内 (2)，(3) 二つで一つの大きな loop をかたちづくり (2) に示す一定の条件を満すまで何回かまわる．

(1) 入力・前準備ブロック

変数の個数（y を含む）n，標本数 m（$=T$，以下この m をつかう），Fe(nter)，Fr(emove)，Tol（(3) で説明する），x_{it}，y_t（$i=1,\cdots,n-1$，$t=1,\cdots,m$）をよみこみ，平均，標準偏差，単純相関行列 S を計算し記憶する．

(2) 有意性検討ブロック

R_1 はまさに x の有効さを示す尺度に他ならない．そこですでに回帰式に入っている変数につきこの値の最小値 R_{1min} と対応する変数番号 N_{min}，未だとり入れられていないものにつき最大値 R_{1max} と対応する変数番号 N_{max} を見出す．それぞれの F-value F_{min}，F_{max} を計算する．まず F_{min} が Fr より小さければこれを除くためにブロック (3) へ行く．$F_{min}>Fr$ ならば，F_{max} と Fe を比べ有意ならば，これを回帰式にとり入れるためにブロック (3) へ行く．ここで $F_{max}\leqq Fe$ ならば，すでにとり入れられた変数は除き得ず，入っていない変数は有効でないことがわかったので，(2)，(3) で構成している大きな loop を終りブロック (4) へ行く．尚このブロック (2) は全部の変数をひとあたりしらべるという意味で一つの小さな（内側の）loop をなしている．

(3) 行列掃出しブロック

3.1 項で詳しく述べたので，pivot の tolerance についてのみ説明しておく．掃出し演算を行っていく間に，或る S_{ii} が 0 に近くなることがある．これは multicolinearity を示すものである．Multicolinearity とは x_i をとり入れることによって，それまでにとり入れられた x の組が一次従属に近くなることを表わす．この x_i を回帰式にとり入れることは意味がないばかりか，丸めの誤差により行列逆転の精度にまで致命的な影響を及ぼす．そこで，このようなときにはこれを pivot としてとることを回避しなければならない．その閾値を与えるのが pivot の tolerance (Tol) であり，a_{ii}<Tol ならばこれを pivot としてとらない．S の当初の対角要素は全て 1 であるから，10^{-2}～10^{-4} 位が適当であろうか．変数の個数が多い程きびしく (Tol を大きく) した方がよかろう．

(4) 出力ブロック

回帰係数 $\hat{\beta}_i$，その標準誤差 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$，定数項 β_0，回帰によって修正されたのちの y の標準誤差 $\hat{\sigma}_y$，相関係数 Cor を計算し output する．3.1 で述べたように，われわれの S 行列は相関行列であるために，これらは全て規準化されたそれが出てくるので，1.1 に述べた公式そのままではなく必要な修正を加えたものが output される．具体的には，

$$\hat{\sigma}_y=\sigma_n\sqrt{S_{nn}/d.f.}$$

$$\hat{\beta}_i=S_{in}\frac{\sigma_n}{\sigma_i}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}=\frac{\hat{\sigma}_y}{\sigma_i}\sqrt{S_{ii}}$$

$$Cor=\sqrt{1-S_{nn}}$$

等である．

尚，実用に供されるプログラムでは，他にも多種の有用な情報を output し，その output の仕方も最終段階のみでなく，必要なものは大きな loop ((2), (3) の) 一回毎に適宜 output されるようにできている．従って，この『ブロック』はプログラムの中に『バラまかれて』しまうことになる．その詳細は第 4 節に

述べる.

3.3 流れ図とその説明

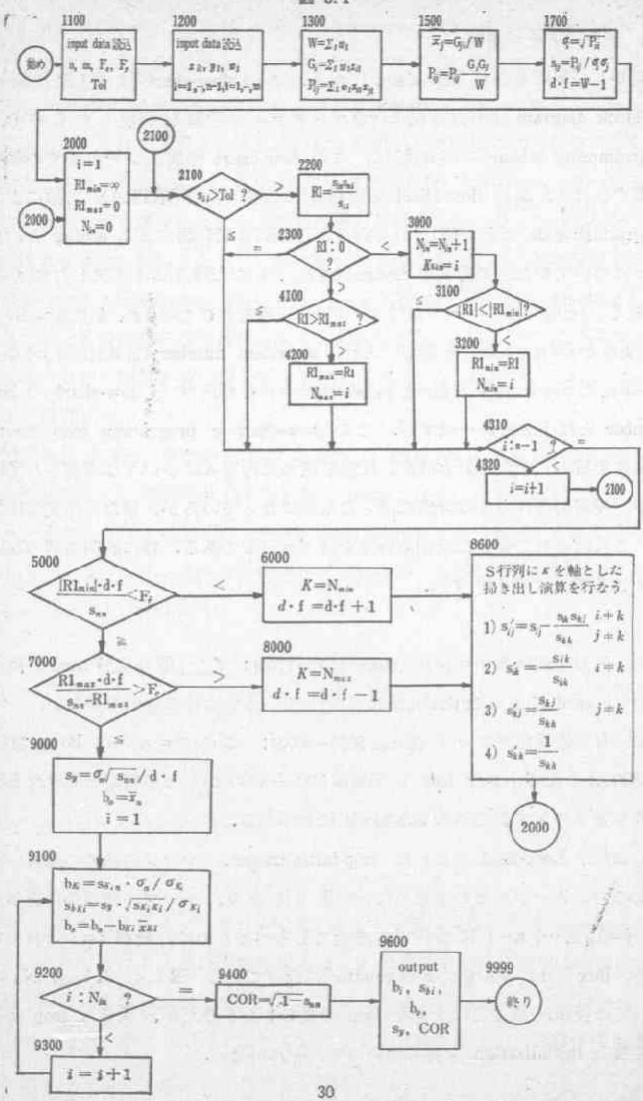
図3·1に掲げるのが flow-chart である. この flow-chart は第1節に掲げた block diagram よりは詳細に計算プログラムの手順を表現したもので, programming labour の内80%は, この flow-chart 作成及びそれまでの解析に費やされる. この flow-chart と附録 I に収載した FORTRAN 言語による programme code とを対照しつつみれば, FORTRAN 語による coding ということについてかなりの程度の image を持っていただけるよう工夫したつもりである. そのためにコードにはコメント (一番左の C で示され, 機械語へのほんやく過程では無視される) を豊富に入れ, statement number (計算機に対する命令の一単位につける名前一行頭にある四桁の数字—) と対応する flow-chart の box number とは上2桁が一致する. この flow-chart と programme code はわかり易さを旨としたため計算時間, 記憶装置の節約等々については考慮されていない. 実用のそれらとは非常に違ったものになっているが, 単なる作文ではなく, これはこれで完全に所期の計算を行うコードである. 特に説明の要のない Box は省略して前へすすむ.

(1) 入力・前準備ブロック (Boxes 1100—1700): ⌐¬ 型の箱が card の形を表わし, card による input/output を示している他は特に説明の要なし.

(2) 有意性検定ブロック (Boxes 2000—8000): このブロックは Boxes 2000—4320 よりなる小さな loop と Boxes 5000—8000 からなる判定と大きな loop の終りをテストする二つの sub-block にわかれる.

Box 2000; Loop-head あるいは loop-initialization. ループの始めに通常つけるもので, ループのまわり始めに一回限りとおり, ループの初期条件を与える. $i=1, 2, \cdots, n-1$ について x_i を全てしらべるために, 最初 $i=1$ とおくもので, Box 4310 とともに x の counter になっている. $R1_{min}$, $R1_{max}$, N_{in} については後出. 尚ここは大きな loop の頭でもあるのだが, 大きな loop はその性質上 initialization を要しないので, それがない.

図 3.1


始め
1100
input data 読込
n, m, F_x, F_y
Tol
1200
input data 読込
x_i, y_i, w_i
i=1, …, n-1, j=1, …, m
1300
W=Σ_i w_i
G_i=Σ_i w_i x_ij
P_ij=Σ_i w_i x_ij x_ij
1500
x̄_j=G_j/W
P_ij=P_ij − G_iG_j/W
1700
σ_i=√P_ii
s_ij=P_ij/σ_iσ_j
d·f=W−1
2000
i=1
RI_min=∞
RI_max=0
N_in=0
2100
s_ij>Tol ?
2200
RI=s_ij²/s_ii
2300
RI : 0 ?
3000
N_in=N_in+1
K_in=i
3100
|RI|<|RI_min|?
3200
RI_min=RI
N_in=i
4100
|RI|>RI_max ?
4200
RI_max=RI
N_ax=i
4310
i : n−1 ?
4320
i=i+1
5000
|RI_min|·d·f / s_nn < F_t
6000
K=N_min
d·f=d·f+1
7000
RI_max·d·f / (s_nn−RI_max) > F_x
8000
K=N_max
d·f=d·f−1
8600
S行列にkを軸とした
掃き出し演算を行なう
1) s'_ij=s_ij − s_ik s_kj / s_kk i≠k, j≠k
2) s'_ik = s_ik / s_kk i≠k
3) s'_kj = s_kj / s_kk j≠k
4) s'_kk = 1 / s_kk
9000
s_y=σ_y√(s_nn / d·f)
b_0=x̄_n
i=1
9100
b_Ki=s_i,n · σ_n / σ_Ki
s_kki=s_y · √(s_ii x_i / σ_xi)
b_n=b_n − b_Ki x̄_ni
9200
i : N_in ?
9300
i=i+1
9400
COR=√(1−s_nn)
9600
output
b_i, s_ki,
b_0,
s_y, COR
9999
終り

Box 2100; pivot の tolerance check.

Box 2300; $R1>0 \Rightarrow$ 未加入，$R1<0 \Rightarrow$ 既加入.

Box 3000; 既加入の変数は必ずここを通る．そこで，それをとらえ，後の必要のために，現在回帰式に入っている変数の個数 N_{in} と，それらの変数番号 $k_{N_{in}}$ とを記憶する．Box 2000 で $N_{in}=0$ とおき (initialize)，一回通る度に1加えて，個数を数えるというのは常套の手段である．

Boxes 3100—3200; 最小値をみつけるときに $R1_{min}$ を ∞ と initialize して (Box 2000) 自分より小さいものが来たらそれにおきかえおきかえしていく．これもまたありふれた routine である．

Boxes 4100—4200; Boxes 3100—3200 の dual.

Boxes 4310—4320; Loop tail. 独立変数全てについて調べたかどうかを check し，終っていたら次へ，まだならば i を1あげて次の x をしらべるために loop の『首』(Box 2100) へ行く．

Box 5000; 不等号の左辺は F_u (F_{min}) である．

Box 6000; pivot としてとられるべき変数番号 k は F_{min} に対応する N_{min} である．このとき回帰式から独立変数が1個落ちるのであるから自由度は1増加する．

Boxes 7000—8000; Boxes 5000—6000 の dual.

(3) 掃出しブロック

Box 8600; 1個の Box で表わされているが，実は，operation 1 は $i \neq k$, $j \neq k$ なる値をそれぞれ1から $n-1$ までとる全ての組み合わせの上を動く2重の loop, operation 2, 3 も同様に，それぞれ $i \neq k$, $j \neq k$ をまわる一重の loop になっている．この操作が終ると (大きな loop の終り) loop の頭 Box 2000 へもどって，再び検定を行う．

Box 9000; 所期の条件に達するとここへ流れ込む．係数計算 loop (Boxes 9000—9300) の head.

Box 9100; $b_0=\bar{y}=\bar{x}_n$ と initialize し (Box 9000)，次々と $b_{k_i}\bar{x}_{k_i}$ を引いて，$\bar{y}-\sum b_i\bar{x}_i$ を求めるという方法は，合計を求めるときの routine である．

Box 9600; 計算結果を印刷して,

Box 9999; われわれの計算は終る.

4. KOSW-1 の使用法と実例

本節では, KOSW-1 プログラムの使用法を簡単な例について解説し, 更に, 実際にこのプログラムを用いて分析を行った具体例を示す. KOSW-1 のプログラムコードは附録Ⅱに示してある.

4.1 KOSW-1 の使用法

4.1.1 データーシートの作製

いま, 変数 Y の説明変数として, X_1, X_2, X_3 の3種類の変数をあらかじめ用意してありこの3種類の中からどのような組み合わせをとり出すのがよいかを KOSW-1 によって分析する場合を想定しよう. Y, X_1, X_2, X_3 はそれぞれウェイトをもった 15 の観測点からなるデーターであるとする. ここでは一つの例として各観測点に 1, 2, 3, ……, 15 のウェイトを附けてある.

〔図 4.1〕では, 第1観測点 (標本) は, ウェイトが 1, Y の観測値は 15, X_1 の観測値は 32, X_2 の観測値は 48, X_3 の観測値は 54 という組み合わせであり, 第2観測点はウェイトが 2, Y が 16, X_1 は 36, X_2 は 33, X_3 は 19 というデーターからなっている. これらのデーターをデーターシートに記入する. データーの記入は〔図 4.1〕に例示したようにすればよい.

データーシートの第1行はヘッドカードを記入する為の行である. ヘッドカードに記入された数字によって電子計算機の内部での演算にコントロールを加えることができる. 第1行目 (ヘッドカード) は下記の規則に従って記入されたい.

第1〜第5桁: 計算委託者が任意に定めるケースナンバー. 英字でも数字でもよい. 最終計算結果に自動的にこのケースナンバーが附与される。図の例では TES 11 となっている.

第6〜第10桁: サンプルサイズ, 即ち観測点の数を記入する. 例ではサン

図 4.1

KEIO UNIVERSITY
HITA COMPUTING LABORATORY

1620 INPUT DATA FORM

PAGE OF

JOB NUMBER	MAIN PROGRAM NO.	KEYPUNCH RECORD DATE	NO. OF CARDS
PROBLEM	MODIFICATION	KEYPUNCHED BY	PRINT YES NO
CODED BY	DATE	VERIFIED BY	LIST YES NO

TE61	10001	504030	11451	0000	0.1	2.5	2.5
	01.	32.	48.	54.	15.		
	02.	36.	33.	19.	16.		
	03.	03.	28.	60.	14.		
	04.	12.	33.	53.	23.		
	05.	36.	34.	60.	24.		
	06.	24.	34.	53.	19.		
	07.	19.	42.	29.	13.		
	08.	20.	33.	55.	15.		
	09.	27.	36.	62.	23.		
	10.	15.	22.	33.	12.		
	11.	45.	46.	48.	25.		
	12.	09.	28.	42.	17.		
	13.	11.	32.	45.	12.		
	14.	33.	34.	39.	19.		
	15.	21.	45.	39.	18.		

ブルサイズは 15 であるから 00015 を記入.

第11～第12桁: 分析の対象となる変数の数. 例では, Y, X_1, X_2, X_3 の4系列であるから 04 を記入.

第13～第14桁: 独立変数の数. 例では, X_1, X_2, X_3 の3系列であるから 03 を記入.

第15～第16桁: 従属変数の数. 例では, Y の系列のみであるから 01 を記入.

第17～第20桁: 1451 を記入. プログラムの識別番号である.

第21～第22桁: ウェイトを付ける場合は 01, ウェイトを付けない場合は 00 を記入. 例ではウェイトを使用しない場合として 00 が記入されている.

第23～第24桁: 変数に対数変換をほどこす場合には 01 を記入. 対数変換をほどこさない場合は 00 を記入. 例では対数変換を行わないので 00 が記入されている.

第25～第34桁: トレランスレベル. 例では 0.1 を記入している.

第35～第44桁: FE を記入. 例では 2.5 を記入している.

第45～第54桁: FR を記入. 例では 2.5 を記入している.

データーの記入は下の規則に従う.

(イ) ヘッドカード (第1行目) の次の行から記入する.

(ロ) 7F 10.5 の FORMAT に従って記入する.

(ハ) データーは, 左から順に, W (ウェイト), X_1, X_2, X_3……X_n, Y_1, Y_2……Y_m の順で記入する.

(ニ) X_i の最大限は X_{10} まで, Y_j の最大限は Y_8 までである.

(ホ) 変数の数が7を越える時は次の行に続けて記入する.

(ヘ) 各行とも右側の10桁 (第71～第80桁) は自由に使ってよい. 例えばカードの識別番号を工夫して記入するのがよいであろう.

4.1.2 データーカードの作製

以上のような要領で記入したデーターシートを計算室に委託されれば, これ

に基いてデーターカードが作製される．データーカードは直接，電子計算機へのインプットとなる．〔図 4.2〕はデーターカードの内容を印刷したものである．

図 4.2

```
TES11000150403011451000 0                0.1        2.5        2.5
01.        32.        48.        54.        15.
02.        36.        33.        19.        16.
03.        03.        28.        30.        14.
04.        12.        33.        64.        22.
05.        36.        34.        60.        24.
06.        24.        36.        53.        19.
07.        19.        42.        29.        13.
08.        20.        33.        55.        15.
09.        27.        36.        62.        23.
10.        15.        22.        33.        12.
11.        45.        46.        68.        25.
12.        09.        28.        42.        17.
13.        11.        32.        45.        18.
14.        33.        34.        39.        19.
15.        21.        45.        39.        18.
```

4.1.3 計算結果の見方

〔図 4.2〕のデーターを KOSW-1 で処理すると，計算結果は，電子計算機から〔図 4.3〕のような形でアウトプットされる．

まずケースナンバー TES 11 では X_1 から X_3 までの 3 系列の独立変数が登録されたことが示される．次に回帰分析に先立って Y の分散は最初 4.0355586 であったことが示される．

図 4.3

```
CASE NO. TES11      REGISTERED VAR. ,  3
STANDARD DEVIATION OF Y  .40355586E+01

STEP      1      VARIABLE  3 ENTERED.
F-LEVEL    .18336007E+02      ST.DEVIAT.OF Y  .27556041E+01
CONSTANT   .84416410E+01      MULT.COR.COEF.  .56704610E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3      .20718985E+00      .50212107E-01

STEP      2      VARIABLE  1 ENTERED.
F-LEVEL    .30844942E+01      ST.DEVIAT.OF Y  .25784922E+01
CONSTANT   .72525550E+01      MULT.COR.COEF.  .65007290E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    1      .10274393E+00      .60889884E-01
    3      .18203831E+00      .49292525E-01

MAJOR DIAGONAL
 .11006450E+01
 .65760338E+00
 .11006451E+01
 .34992712E+00
```

第1ステップでは独立変数として X_3 が採用され，その結果Yの分散は 2.7556041 となりFレベルは 18.336007 であることが示され，続いて定数項が 8.4416410，相関係数が 0.56704610 であることが示される．X_3 の係数は 0.20718985，その標準誤差は 0.050212107 であることが示される．

第2ステップでは X_1 が採用されたことがわかる．その結果Fの水準は 3.0844942 まで下り，Yの分散は 2.5784922 に下っている．また，X_3 および X_1 の2つの説明変数を得たことによってYに対する重回帰平面の持つ重相関係数は 0.65007290 まで上った．定数項，係数等の表記は第1ステップと同様である．

この例では，X_2 は独立変数として採用されずに除外されたまま演算は終り，最後に計算機内部に記憶されていた行列の主対角要素をアウトプットして全作業が終る．

4.2 逐次重回帰分析の実例

4.2.1 養畜生産函数の設計

逐次重回帰分析法を実際に用いた例として生産函数の計測例を示そう．生産函数は経済分析の分野で常に最も基本的な分析用具として用いられる概念であって，経済主体の行動を規制している投入産出の技術的関係を示すものである．ここでは読者に逐次重回帰分析法の特性について充分考える機会を与える意味で幾分特殊な生産函数の計測例を示すこととする．その為，多くの生産函数計測の試みの中から，わが国農家の養畜生産の生産函数を選んで解説しよう．

養畜生産活動における投入要素としてどのような変数系列を考えたらよいかを決定するに際して二つの段階を踏むことにしよう．第一には，あらかじめ理論的に投入要素と考えられるものを列挙することである．しかしながら，多くの函数計測作業に共通に言えることであるが，我々は幾つかの説明変数を見落すかも知れないし，また逆に多重共線性を示す幾つかの変数を重複して採用するかも知れない．あるいはまた，説明変数としては不適当であるような変数を

不用意にも採用しているかも知れない．変数を見落してしまうというのは理論的考察の側の問題であって如何ともしがたいが，不適当な変数を除去したり不必要な重複を避けるために逐次重回帰分析法の力を借りることができる．この第2の段階のチェックは，従来，各変数系列をグラフに描いたり，単純相関行列，あるいは偏相関行列を算出するなどのかなり非系統的な方法で行われて来たものであるが，逐次重回帰分析法によってかなり（統計的には）系統的なチェックをすることが可能となったわけである．この二つの段階を踏むことによって，我々の研究作業からいわゆる勘にたよったりする場面が減じて行くことになる．

養畜生産函数における投入要素として次のような要素をあらかじめ想定することができよう．

(1) 労働投入：いわゆる生産活動には常に人間の労働力の投入が不可欠のものである．

(2) 動力・畜力投入：人間の労働の補助的なものとして，ないしは代替的なものとして動力，畜力の投入が考えられる．

(3) 農薬投入：農作業労働の中で除草，駆虫病害予防等の作業は農薬の使用によってかなりの程度まで代替可能である．

(4) 飼料投入：養畜生産では家畜の飼料は最も重要な投入要素であろう．

(5) 土地用役：農業生産に必要な資本財の中で最も本源的なものとして土地の用役を投入要素と考える．ここでは，田，畑，山林，経営土地合計の4者についてどれが有効な説明変数であるかを検討する．

(6) 建物用役：土地と同様の意味で建物の用役を投入要素と考える．特に養畜生産においては畜舎，納屋等の構築物が当然必要であろう．

これらのことを考えあわせて，ここでは下に示す投入概念をデーターとして登録し，これらの中からどのような組合わせで変数を選択するのがよいかを逐

次重回帰分析法によって検討する．なお，この分析手続きで不適当な変数が登録されている場合にはこれをある程度チェックすることができることを読者に示すために，養畜生産に直接関係しないと思われる肥料投入金額，宅地面積を追加登録しておく．結局次の 13 の変数を登録することにしよう。

1. 男子労働投入時間
2. 女子労働投入時間
3. 畜力使役時間
4. 動力使用時間
5. 肥料投入金額
6. 飼料投入金額
7. 農薬投入金額
8. 経営土地（除宅地）面積
9. 構築物（除住宅）面積
10. 田面積
11. 畑面積
12. 宅地面積
13. 山林面積

昭和 34 年の全国 10 農区，各 6 階層の農家からとられた標本級平均値をデーターとして用いる．〔表 4.4〕がデーター系列である．

4.2.2 養畜生産函数の逐次重回帰分析

〔表 4.4〕のデーターを KOSW-1 によって逐次重回帰分析した結果は〔図 4.5〕に示される通りである．

生産函数の形式はここでは

$$Y=a_0X_1^{a_1}\cdot X_2^{a_2}\cdots\cdots X_n^{a_n}$$

なるいわゆるダグラス型の生産函数を採用しよう．それ故，我々が計測すべき式は

$$\log Y=a_0+a_1\log X_1+a_2\log X_2+\cdots\cdots+a_n\log X_n$$

表 4.4

W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	Y
29.	236.	756.	1.	13.	4538.	1353.	997.	138.	6.	10.	10.	3.	116.	6592.
58.	716.	1039.	22.	21.	7702.	2857.	1348.	76.	7.	25.	13.	4.	36.	10464.
183.	1528.	1829.	51.	52.	14826.	7663.	3296.	183.	12.	45.	24.	5.	111.	22142.
136.	2451.	2578.	130.	119.	24681.	11577.	5063.	249.	20.	80.	36.	7.	127.	26892.
104.	2954.	3054.	179.	196.	34131.	9300.	5214.	297.	26.	118.	48.	9.	122.	27503.
168.	3976.	3548.	202.	338.	57615.	11605.	14984.	477.	41.	214.	61.	11.	191.	36560.
19.	500.	855.	5.	39.	5688.	1598.	985.	40.	7.	14.	7.	3.	16.	7629.
44.	628.	1107.	21.	56.	8570.	3644.	2362.	67.	8.	27.	7.	4.	30.	6666.
149.	1434.	1799.	33.	109.	14712.	8779.	3527.	160.	17.	54.	13.	5.	89.	21707.
78.	2594.	2486.	75.	209.	30527.	10941.	7616.	214.	25.	90.	20.	6.	99.	24205.
43.	3036.	3005.	111.	291.	42560.	15483.	13882.	226.	37.	148.	17.	8.	53.	36487.
26.	3085.	3520.	34.	466.	54039.	40319.	19768.	264.	41.	219.	7.	10.	28.	42745.
17.	555.	815.	21.	25.	4018.	15488.	965.	71.	9.	16.	7.	3.	46.	28308.
29.	1114.	1354.	53.	34.	9586.	16288.	3022.	106.	14.	27.	9.	4.	66.	39392.
107.	1938.	2101.	107.	73.	16782.	19368.	2965.	202.	23.	51.	16.	5.	131.	42242.
57.	3013.	2897.	140.	127.	25684.	35435.	5389.	438.	33.	83.	28.	7.	321.	85684.
24.	3651.	3509.	165.	175.	41788.	27366.	8786.	287.	40.	126.	29.	7.	125.	74818.
7.	4338.	4251.	154.	288.	68254.	21528.	15897.	701.	67.	166.	65.	12.	461.	98072.
31.	709.	829.	7.	8.	6343.	6100.	859.	26.	11.	8.	11.	3.	6.	11603.
66.	1101.	1221.	16.	26.	10572.	9024.	1533.	65.	11.	18.	19.	4.	25.	19555.
210.	2228.	2193.	39.	54.	20830.	17734.	2418.	122.	20.	30.	39.	6.	47.	45366.
139.	3113.	2784.	96.	108.	30557.	27508.	4593.	218.	33.	53.	59.	8.	99.	70601.
63.	3881.	3660.	108.	191.	43580.	31062.	8262.	301.	41.	84.	80.	9.	128.	75433.
50.	4189.	4138.	151.	249.	62875.	29810.	5379.	482.	60.	141.	111.	13.	218.	92930.
40.	413.	793.	4.	20.	6263.	7260.	569.	42.	8.	7.	11.	5.	17.	17645.
74.	640.	1307.	12.	38.	11950.	7054.	835.	86.	12.	13.	20.	6.	48.	19286.
229.	2017.	1972.	64.	92.	22974.	23567.	2108.	136.	18.	32.	32.	8.	64.	58737.
210.	3111.	2892.	108.	183.	41485.	24155.	3398.	192.	26.	52.	58.	10.	73.	54057.
119.	3398.	3380.	173.	199.	51844.	29883.	4640.	244.	34.	81.	79.	13.	78.	69861.
95.	4162.	3964.	185.	366.	83302.	31606.	7328.	352.	47.	126.	112.	16.	99.	64282.
46.	565.	920.	4.	35.	7444.	6828.	944.	38.	7.	11.	8.	3.	17.	12170.
91.	865.	1599.	9.	44.	11560.	15751.	1330.	76.	13.	21.	11.	5.	37.	29688.
238.	2129.	2258.	48.	70.	25942.	26393.	3686.	150.	20.	39.	29.	6.	77.	51770.
115.	2881.	2897.	106.	102.	38528.	51298.	5915.	214.	35.	68.	48.	6.	95.	91115.
50.	3295.	3132.	118.	231.	61122.	45471.	9738.	260.	41.	97.	63.	8.	93.	97856.
16.	5050.	4464.	227.	372.	85861.	36366.	25099.	355.	61.	112.	111.	10.	122.	86299.
45.	432.	578.	26.	16.	7560.	12101.	1403.	44.	10.	17.	3.	4.	21.	18605.
67.	989.	1269.	57.	28.	14010.	6324.	2520.	76.	14.	29.	7.	4.	36.	18100.
171.	2102.	1797.	118.	72.	29301.	18027.	5129.	147.	22.	56.	12.	5.	75.	46029.
66.	3813.	2644.	158.	148.	47999.	32440.	8812.	218.	36.	92.	23.	6.	98.	70228.
35.	4028.	3977.	189.	199.	67403.	22207.	12956.	389.	44.	134.	27.	7.	221.	64054.
15.	5288.	3580.	204.	309.	137183.	6313.	30163.	312.	57.	182.	49.	10.	72.	21370.
64.	769.	1212.	19.	21.	6973.	17220.	1286.	72.	10.	13.	9.	3.	48.	28085.
122.	1370.	1717.	52.	40.	12522.	13198.	2632.	129.	17.	26.	11.	4.	89.	25903.
289.	2367.	2457.	114.	87.	24054.	24855.	5510.	221.	27.	49.	21.	5.	146.	59735.
115.	3176.	3110.	177.	117.	39596.	34411.	8845.	357.	35.	85.	29.	6.	236.	78380.
69.	4270.	3616.	179.	216.	57268.	41741.	14187.	402.	44.	125.	40.	8.	230.	85630.
23.	4674.	3561.	128.	220.	95126.	18383.	17232.	327.	42.	125.	98.	8.	95.	73314.
43.	647.	1236.	32.	20.	7469.	1867.	1338.	60.	5.	13.	8.	3.	36.	5272.
79.	1216.	1618.	76.	34.	11724.	21207.	2159.	74.	11.	25.	13.	4.	33.	36165.
199.	2340.	2456.	152.	94.	20999.	12555.	4299.	127.	18.	50.	21.	5.	52.	33259.
148.	3197.	3106.	240.	119.	39531.	17224.	8256.	187.	25.	75.	40.	6.	66.	41264.
56.	3752.	3714.	293.	164.	52952.	17433.	8965.	260.	33.	118.	50.	8.	85.	42470.
41.	4304.	4252.	387.	258.	72523.	18033.	1500.	292.	34.	172.	54.	9.	57.	49036.
32.	618.	1237.	43.	21.	9489.	1808.	914.	59.	6.	10.	11.	3.	35.	9441.
60.	1583.	1925.	86.	22.	11131.	6216.	1992.	85.	11.	20.	18.	3.	45.	29024.
141.	2397.	2465.	161.	51.	21671.	9412.	3561.	138.	17.	36.	35.	5.	63.	42500.
72.	2826.	2911.	308.	78.	36037.	7284.	5742.	247.	25.	56.	64.	6.	122.	45794.
24.	4048.	3557.	322.	165.	56694.	5323.	12387.	263.	33.	99.	70.	8.	87.	32303.
25.	4252.	3894.	504.	160.	55798.	23078.	8088.	417.	33.	101.	134.	10.	172.	73980.

である．この対数変換の操作はヘッドカードの第23～第24桁目に 01 を記入しておけば電子計算機内部で自動的に行われることは既に述べた通りである．

〔図 4.5〕を順を追って解説する．ケースナンバーは APF 34 であり，登録データー系列は X_1 から X_{13} までの13系列，Y の分散は，はじめ 2.3637 であった．

第1ステップ

第6変数（飼料投入金額）が独立変数として採用された．

$$\log Y = 1.2553 + 0.7949 \log X_6$$

$$r = 0.8544 \qquad F = 346.4244$$

第2ステップ

第11変数（畑面積）が採用された．

$$\log Y = 1.3977 + 0.6902 X_6 + 0.2073 X_{11}$$

$$R = 0.9060 \qquad F = 31.79$$

第3ステップ

第3変数（畜力使用時間）が採用された．

$$\log Y = 1.4320 + 0.0893 \log X_3 + 0.6631 \log X_6 + 0.1444 \log X_{11}$$

$$R = 0.9190 \qquad F = 9.1743$$

第4ステップ

第12変数（宅地面積）が採用された．

$$\log Y = 1.3466 + 0.0887 \log X_3 + 0.7028 \log X_6 + 0.2764 \log X_{11}$$

$$- 0.3414 \log X_{12}$$

$$R = 0.9313 \qquad F = 10.0110$$

第5ステップ

第13変数（山林面積）が採用された．

$$\log Y = 1.3037 + 0.0675 \log X_3 + 0.6923 \log X_6 + 0.2689 \log X_{11}$$

図 4.5—1

```
CASE NO. APF34      REGISTERED VAR. . 13
STANDARD DEVIATION OF Y  .23637442E+01

STEP      1      VARIABLE  6 ENTERED.
F-LEVEL    .34642445E+03      ST.DEVIAT.OF Y   .90945992E+00
CONSTANT   .12553777E+01      MULT.COR.COEF.   .85447350E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    6       .79490112E+00     .43074559E-01

STEP      2      VARIABLE 11 ENTERED.
F-LEVEL    .31793904E+02      ST.DEVIAT.OF Y   .73731100E+00
CONSTANT   .13977434E+01      MULT.COR.COEF.   .90600100E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    6       .69020283E+00     .39627098E-01
   11       .20738736E+00     .37101109E-01

STEP      3      VARIABLE  3 ENTERED.
F-LEVEL    .91743332E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .69037772E+00
CONSTANT   .14320520E+01      MULT.COR.COEF.   .91903300E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .89355108E-01     .29762917E-01
    6       .66310691E+00     .38186518E-01
   11       .14449714E+00     .40566507E-01

STEP      4      VARIABLE 12 ENTERED.
F-LEVEL    .10011077E+02      ST.DEVIAT.OF Y   .64163056E+00
CONSTANT   .13466961E+01      MULT.COR.COEF.   .93131220E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .88733442E-01     .27662085E-01
    6       .70280649E+00     .37680860E-01
   11       .27645526E+00     .56501706E-01
   12      -.34141869E+00     .10888285E+00

STEP      5      VARIABLE 13 ENTERED.
F-LEVEL    .30894708E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .63008933E+00
CONSTANT   .13037255E+01      MULT.COR.COEF.   .93496540E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .67544972E-01     .29764388E-01
    6       .69235693E+00     .37486344E-01
   11       .26898338E+00     .55650998E-01
   12      -.34573675E+00     .10695308E+00
   13       .74466151E-01     .42756414E-01

STEP      6      VARIABLE 10 ENTERED.
F-LEVEL    .43693739E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .61173799E+00
CONSTANT   .13425789E+01      MULT.COR.COEF.   .93983370E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .11788648E+00     .37762626E-01
    6       .67748014E+00     .37096788E-01
   10      -.13885721E+00     .67052932E-01
   11       .22080105E+00     .58826899E-01
   12      -.16570271E+00     .13542660E+00
   13       .12224121E+00     .47491118E-01
```

図 4.5—2

```
STEP      7      VARIABLE 12 REMOVED.
F-LEVEL    .14971013E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .61454722E+00
CONSTANT   .13821785E+01      MULT.COR.COEF.   .93813420E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .13741482E+00      .34381224E-01
    6       .66064276E+00      .34608276E-01
   10      -.19152479E+00      .51648801E-01
   11       .16498501E+00      .37313937E-01
   13       .13945918E+00      .45566701E-01

STEP      8      VARIABLE  9 ENTERED.
F-LEVEL    .99327417E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .57009789E+00
CONSTANT   .16806620E+01      MULT.COR.COEF.   .94774580E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    3       .13909042E+00      .31898993E-01
    6       .55193270E+00      .47360086E-01
    9       .38719704E+00      .12430990E+00
   10      -.34331658E+00      .68257679E-01
   11       .11494765E+00      .38144835E-01
   13       .12328930E+00      .42586985E-01

STEP      9      VARIABLE  1 ENTERED.
F-LEVEL    .43999718E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .55305433E+00
CONSTANT   .12123920E+01      MULT.COR.COEF.   .95175130E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    1       .29809547E+00      .14347183E+00
    3       .80996545E-01      .41706019E-01
    6       .51430192E+00      .49385190E-01
    9       .31967703E+00      .12461441E+00
   10      -.40595568E+00      .72757083E-01
   11       .51465530E-01      .47988062E-01
   13       .14137361E+00      .42220713E-01

STEP     10      VARIABLE 11 REMOVED.
F-LEVEL    .11501815E+01      ST.DEVIAT.OF Y   .55383734E+00
CONSTANT   .10804758E+01      MULT.COR.COEF.   .95068410E+00
VAR.NO.     ST.DEVIATION
    1       .39506237E+00      .11079036E+00
    3       .67299336E-01      .39758547E-01
    6       .49534956E+00      .46180420E-01
    9       .33928567E+00      .12344033E+00
   10      -.43555756E+00      .67413498E-01
   13       .14680866E+00      .41974805E-01
MAJOR DIAGONAL
 .13297176E+02
 .60123618E-01
 .47773659E+01
 .10577900E+00
 .60990071E-01
 .30993937E+01
 .98584915E-01
 .19244194E-01
 .12520815E+02
 .73710798E+01
 .26117579E+00
 .30789089E+00
 .21369732E+01
 .49315936E-01
```

$$-0.3457 \log X_{12} + 0.0744 \log X_{13}$$

$$R = 0.9349 \qquad F = 3.0894$$

第6ステップ

第10変数（田面積）が採用された.

$$\log Y = 1.3425 + 0.1178 \log X_3 + 0.6774 \log X_6 - 0.1383 \log X_{10}$$
$$+ 0.2208 \log X_{11} - 0.1657 \log X_{12} + 0.1222 \log X_{13}$$

$$R = 0.9398 \qquad F = 4.3693$$

第7ステップ

第12変数（宅地面積）が除外された.

$$\log Y = 1.3821 + 0.1374 \log X_3 + 0.6606 \log X_6 - 0.1915 \log X_{10}$$
$$+ 0.1649 \log X_{11} + 0.1394 \log X_{13}$$

$$R = 0.9381 \qquad F = 1.4971$$

第8ステップ

第9変数（構築面積）が採用された.

$$\log Y = 1.6806 + 0.1390 \log X_3 + 0.5519 \log X_6 + 0.3871 \log X_9$$
$$- 0.3433 \log X_{10} + 0.1149 \log X_{11} + 0.1232 \log X_{13}$$

$$R = 0.9477 \qquad F = 9.9327$$

第9ステップ

第1変数（男子労働投入時間）が採用された.

$$\log Y = 1.2123 + 0.2980 \log X_1 + 0.0809 \log X_3 + 0.5143 \log X_6$$
$$+ 0.3196 \log X_9 - 0.4059 \log X_{10} + 0.0514 \log X_{11} + 0.1413 \log X_{13}$$

$$R = 0.9517 \qquad F = 4.3999$$

第10ステップ

第11変数（畑面積）が除外された.

$$\log Y = 1.0804 + 0.3960 \log X_1 + 0.0672 \log X_3 + 0.4953 \log X_6$$

$$\pm 0.3392 \log X_9 - 0.4355 \log X_{10} + 0.1468 \log X_{13}$$

$$R = 0.9506 \qquad F = 1.1501$$

結局，以上の分析では養畜生産額（Y）の説明変数として

X_1： 男子労働投入時間

X_3： 畜力使役時間

X_6： 飼料投入金額

X_9： 構築物床面積

X_{10}： 田面積

X_{13}： 山林面積

の6変数がえらばれ，宅地面積，肥料投入金額等が除外されたことがわかるであろう．

しかしながら逐次重回帰分析の手法は単なる統計的手続きに過ぎないことを忘れてはならない．この分析法によってえらばれた変数は統計的には有効な説明変数ではあっても時には経済理論の立場から容認できないものであるかも知れない．それ故，我々はもう一段のチェックをこれに加えるべきであろう．上の例について言えば，田面積は養畜生産の投入要素の一つとは考えがたいであろう．何故ならば養畜生産用飼料を田で栽培することはあまりないからである．また，人によっては養畜生産に家畜を使役することは少いから畜力使役時間は除外すべきだと考えるかも知れない．この種の再吟味はこの逐次重回帰分析の手法を用いる上で最も重要な点であるので改めて読者の注意を換起しておきたい．

参 照 文 献

〔1〕 Efroymson M. A.: "Multiple Regression Analysis," in Anthony Ralston & Herbert S. Wilf ed., *Mathematical Method for Digital Computers*, John Wiley, 1959.

〔2〕 Graybill F. A.: *An Introduction to Linear Statistical Models*, Vol. I, McGraw Hill, 1961.

〔3〕 西川俊作・黒田昌裕：「最小自乗回帰の計算プログラム」本シリーズ (1) 三田商学研究第8巻第2号 1965.

〔4〕 Wilks S. S.: *Mathematical Statistics*, John Wiley, 1962.

```
C       FORTRAN SOURCE PROGRAMME SW 0                                   SW001000
C                                                                       SW001050
C       KOSW NO. 0 / STEPWISE REGRESSION ANALYSIS / DEMO. VERSION       SW001100
C                                                                       SW001150
C       PROG. LIB. NO. 1450                                             SW001200
C                                                                       SW001250
C       BLOCK 0 ** ARRAY DEFINITIONS **                                 SW001300
C                                                                       SW001350
        DIMENSION W(50),X(10,50),G(10),S(10,10),XBAR(10),SIG(10),P(10,10),SW001400
     1      KAPP(10),B(10),SB(10)                                       SW001450
C                                                                       SW001500
C       BLOCK I ** DATA INPUT AND INITIALIZATIONS **                    SW001550
C                                                                       SW001600
C       BOX 1100 * READ HEADER *                                        SW001650
 1100   READ 1101,N,M,FE,FR,TOL                                         SW001700
 1101   FORMAT(2I5,3F10.5)                                              SW001750
        NM=N-1                                                          SW001775
C       BOX 1200 * READ WEIGHTS AND VARIABLES *                         SW001800
        DO 1210 IT=1,M                                                  SW001850
 1210   READ 1201,W(IT),(X(I,IT),I=1,N)                                 SW001900
 1201   FORMAT(7F10.5)                                                  SW001950
C       BOX 1300 * SUM AND SUM OF PRODUCTS *                            SW002000
        WT=0                                                            SW002050
        DO 1310 I=1,N                                                   SW002100
        G(I)=0.                                                         SW002150
        DO 1310 J=1,N                                                   SW002200
 1310   P(I,J)=0.                                                       SW002250
        DO 1320 IT=1,M                                                  SW002300
        WT=WT+W(IT)                                                     SW002350
        DO 1320 I=1,N                                                   SW002400
        G(I)=G(I)+X(I,IT)                                               SW002450
        DO 1320 J=1,N                                                   SW002500
 1320   P(I,J)=P(I,J)+X(I,IT)*X(J,IT)                                   SW002550
C       BOX 1500 * AVERAGES AND MOMENT MATRIX *                         SW002600
        DO 1510 I=1,N                                                   SW002650
        XBAR(I)=G(I) / WT                                               SW002700
        DO 1510 J=1,N                                                   SW002750
 1510   P(I,J)=P(I,J)-G(I)*G(J) / WT                                    SW002800
C       BOX 1700 * ST. DEV.* COM. MATRIX AND DEG. OF FREEDOM *          SW002850
        DO 1710 I=1,N                                                   SW002900
 1710   SIG(I)=SQRTF(P(I,I))                                            SW002950
        DO 1720 I=1,N                                                   SW003000
        DO 1720 J=1,N                                                   SW003050
 1720   S(I,J)=P(I,J) / (SIG(I)*SIG(J))                                 SW003100
        DF=WT-1.                                                        SW003150
C                                                                       SW003200
C       BLOCK II - IV ** FIND THE LARGEST FS AND THE SMALLEST FW **     SW003250
C                                                                       SW003300
C       BOX 2000 * INITIALIZE THE BLOCK *                               SW003350
 2000   I=1                                                             SW003400
        R1MIN=.99999999E50                                              SW003450
        R1MAX=0.                                                        SW003500
        NIN=0                                                           SW003550
C       BOX 2100 * TEST THE PIVOT FOR THE TOLERANCE *                   SW003600
 2100   IF(S(I,I)-TOL) 4310,4310,2200                                   SW003650
C       BOX 2200 * R1 = REDUCTION OF THE RESIDUAL SUM OF SQUARES *      SW003700
 2200   R1=S(N,I)*S(N,I) / S(I,I)                                       SW003750
C       BOX 2300 * CHECK WHETHER THE I-TH VAR.  IS IN REGRESSION *      SW003800
        IF(R1) 3000,4310,4100                                           SW003850
C       BOX 3000 * VAR. IN REGR. REGISTER THE VAR. NO. *                SW003900
```

```
 3000   NIN=NIN+1                                                    SW003950
        XAPPIN(N)=I                                                  SW004000
C       BOX 3100 * FIND MINIMUM R1 *                                 SW004050
        IF(ABSF(R1)-ABSF(R1MIN)) 3200,4310,4310                      SW004100
C       BOX 3200 * R1MIN CHANGED *                                   SW004150
 3200   R1MIN=R1                                                     SW004200
        NMIN=I                                                       SW004250
        GO TO 4310                                                   SW004300
C       BOX 4100 * FIND MAXIMUM R1 *                                 SW004350
 4100   IF(R1-R1MAX) 4310,4310,4200                                  SW004400
C       BOX 4200 * R1MAX ALTERED *                                   SW004450
 4200   R1MAX=R1                                                     SW004500
        NMAX=I                                                       SW004550
C       BOX 4310 * CHECK THE BLOCK ( LOOP ) END *                    SW004600
 4310   IF(I-NM) 4320,5000,5000                                      SW004650
C       BOX 4320 * COUNT I UP AND RETURN TO THE LOOP NECK *          SW004700
 4320   I=I+1                                                        SW004750
        GO TO 2100                                                   SW004800
C                                                                    SW004850
C       BLOCK V - VI ** IF  FW .LS. FR THEN REMOVE RESP. VAR. **     SW004900
C                                                                    SW004950
C       BOX 5000 * TEST IF FW .LS. FR *                              SW005000
 5000   FW=ABSF(R1MIN)*DF / S(N,N)                                   SW005050
        IF(FW-FR) 6000,7000,7000                                     SW005100
C       BOX 6000 * X(NMIN) SHOULD BE REMOVED. ADD 1 TO D.F. *        SW005150
 6000   K=NMIN                                                       SW005200
        DF=DF+1.                                                     SW005250
        GO TO 8600                                                   SW005300
C                                                                    SW005350
C       BLOCK VII - IIX ** IF FS .GR. FE THEN ENTER RESP. VAR. **    SW005400
C                                                                    SW005450
C       BOX 7000 * TEST IF FS .GR. FE *                              SW005500
 7000   FS=R1MAX*DF / (S(N,N)-R1MAX)                                 SW005550
        IF(FS-FE) 9000,9000,8000                                     SW005600
C       BOX 8000 * ENTER X(NMAX). SUBTRACT 1 FROM D.F. *             SW005650
 8000   K=NMAX                                                       SW005700
        DF=DF-1.                                                     SW005750
C                                                                    SW005800
C       BLOCK XXCVI ** SWEEP OUT THE S-MATRIX. S(K.K) AS THE PIVOT **SW005850
C         ** THIS BLOCK HAS TWOFOLD ROLE. HAVING OPPOSITE DIRECTION  **SW005900
C         ** IN ONE PROCEDURE.  I.E. ENTERING AND REMOVING A VARIABLE **SW005950
C                                                                    SW005975
C       BOX 8600 * SWEEPING OUT *                                    SW006000
C       $ OPERATION 1 $                                              SW006050
 8600   DO 8610 I=1,N                                                SW006075
        IF(I-K) 8620,8610,8620                                       SW006100
 8620   DO 8630 J=1,N                                                SW006150
        IF(J-K) 8640,8630,8640                                       SW006200
 8640   S(I,J)=S(I,J)-S(I,K)*S(K,J) / S(K,K)                         SW006250
 8630   CONTINUE                                                     SW006300
 8610   CONTINUE                                                     SW006350
C       $ OPERATION 2 $                                              SW006400
        DO 8650 I=1,N                                                SW006450
        IF(I-K) 8660,8650,8660                                       SW006500
 8660   S(I,K)=-S(I,K) / S(K,K)                                      SW006550
 8650   CONTINUE                                                     SW006600
C       $ OPERATION  3 $                                             SW006650
        DO 8670 J=1,N                                                SW006700
        IF(J-K) 8680,8670,8680                                       SW006750
 8680   S(K,J)=S(K,J) / S(K,K)                                       SW006800
```

```
 8670   CONTINUE                                                        SW006850
C       $ OPERATION 4 $                                                 SW006900
        S(K,K)=1. / S(K,K)                                              SW006950
C       * RETURN TO FS / FW SEARCHING BLOCK, BJX 2000 *                 SW007000
        GO TO 2000                                                      SW007050
C                                                                       SW007100
C       BLOCK IX ** CALCULATE REG. COEF. ETC. OUTPUT THEM **            SW007150
C                                                                       SW007200
C       BOX 9000 * STANDARD DEV. OF Y. INITIALIZE THE BLOCK *           SW007250
 9000   SY=SIG(N)*SQRTF(S(N,N)/DF)                                      SW007300
        B0=XBAR(N)                                                      SW007350
        I=1                                                             SW007400
C       BOX 9100 * CALCULATE REG. COEF., THEIR ST. ERR. AND CONST. *    SW007450
 9100   K=KAPP(I)                                                       SW007500
        B(I)=S(K,N)*SIG(N) / SIG(K)                                     SW007550
        SB(I)=SY*SQRTF(S(K,K)) / SIG(K)                                 SW007600
        B0=B0-B(I)*XBAR(K)                                              SW007650
C       BOX 9200 * TEST IF ALL THE VAR. IN REG. ARE PROCESSED *         SW007700
        IF(I-NIN) 9300,9400,9400                                        SW007750
C       BOX 9300 * COUNT I UP. RETURN TO BOX 9100 *                     SW007800
 9300   I=I+1                                                           SW007850
        GO TO 9100                                                      SW007900
C       BOX 9400 * MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT *                   SW007950
 9400   COR=SQRTF(1.-S(N,N))                                            SW008000
C       BOX 9600 * OUTPUT THE RESULTS *                                 SW008050
        PUNCH 9610,SY                                                   SW008100
 9610   FORMAT(27HST. DEV. OF Y AFTER REG. = ,E14.8)                    SW008150
        PUNCH 9620                                                      SW008200
 9620   FORMAT(42HVAR. NO.  REG. COEFFICIENT  STANDARD ERROR)           SW008250
        PUNCH 9630,(KAPP(I),B(I),SB(I),I=1,NIN)                         SW008300
 9630   FORMAT(I4,7X,E14.8,3X,E14.8)                                    SW008350
        PUNCH 9640,B0                                                   SW008400
 9640   FORMAT(11HCONSTANT    ,E14.8)                                  SW008450
        PUNCH 9650,COR                                                  SW008500
 9650   FORMAT(23HMULT. COR. COEFFICIENT ,E14.8)                        SW008550
C       BOX 9999 * OWARI OWARI OWARIII... *                             SW008600
        TYPE 9999                                                       SW008650
 9999   FORMAT( 6HE.O.C.)                                               SW008700
        PAUSE                                                           SW008750
C       * RETURN TO THE PROGRAMME HEAD TO CAL. ANOTHER CASE *           SW008800
        GO TO 1100                                                      SW008850
        END
```

```
C       STEPWISE OR PSEUDO-STEPWISE REGRESSION ANALYSIS,PASS A,COMPUTING
C       THE 1ST AND 2ND ORDER MOMENTS AMONG 19 INDEPENDENT AND 8 DEPEND-
C       ENT VARIABLES. EACH SET OF VARIABLES MAY BE ASSOCIATED WITH OPT-
C       IONAL WEIGHT. TRANSFORMATION INTO LOGARITHMS ALSO POSSIBLE.
C       PROG.LIB.1450,MITA COMPUTING LABORATORY,KEIO UNIVERSITY,TOKYO.

C       ICYCL     1451  OR  1452
        DIMENSION X(19),Y(8),SX(19),SY(8),AVX(27),AVY(8),SSX(19,19),SSY(8)
        DIMENSION SSXY(19,8),BOR(20,20),COR(19,8),SSXX(27),INDEX(20),COEFN
      1 (20),SIGCO(20)
    1   READ 100,NN1,NN2,NN3,NOBS,NVAR,NIV,NDV,ICYCL,NWEIT,LOGT,TOL,EFIN,
      1  EFOUT,K
        SW=0.0
        DO 50 I=1,NIV
        SX(I)=0.0
        DO 50 J=1,NIV
        SSX(I,J)=0.0
   50   CONTINUE
        DO 51 K=1,NDV
        SY(K)=0.0
        SSY(K)=0.0
   51   CONTINUE
        DO 52 I=1,NIV
        DO 52 K=1,NDV
        SSXY(I,K)=0.0
   52   CONTINUE
        DO 53 M=1,NOBS
        READ 101,W,(X(I),I=1,NIV),(Y(K),K=1,NDV)
        IF(LOGT)2,3,2
    2   DO 54 I=1,NIV
        IF(X(I)) 541,541,54
  541   X(I)=1.0
   54   X(I)=LOGF(X(I))*0.43429448
        DO 55 K=1,NDV
        IF(Y(K)) 551,551,55
  551   Y(K)=1.0
   55   Y(K)=LOGF(Y(K))*0.43429448
    3   IF(NWEIT)5,4,5
    4   W=1.0
    5   SW=SW+W
        DO 56 I=1,NIV
        SX(I)=SX(I)+X(I)*W
        DO 56 J=1,NIV
        SSX(I,J)=SSX(I,J)+X(I)*X(J)*W
   56   CONTINUE
        DO 57 K=1,NDV
        SY(K)=SY(K)+Y(K)*W
        SSY(K)=SSY(K)+Y(K)*Y(K)*W
   57   CONTINUE
        DO 58 I=1,NIV
        DO 58 K=1,NDV
        SSXY(I,K)=SSXY(I,K)+X(I)*Y(K)*W
   58   CONTINUE
   53   CONTINUE
        RW=1.0/SW
        DO 59 I=1,NIV
   59   AVX(I)=SX(I)*RW
        DO 60 K=1,NDV
   60   AVY(K)=SY(K)*RW
        DO 61 I=1,NIV
```

```
      DO 61 J=1,NIV
      SSX(I,J)=SSX(I,J)-AVX(I)*SX(J)
   61 CONTINUE
      DO 62 K=1,NDV
      SSY(K)=SSY(K)-AVY(K)*SY(K)
      DO 62 J=1,NIV
      SSXY(J,K)=SSXY(J,K)-AVX(J)*SY(K)
   62 CONTINUE
      NF=NOBS-1
      DO 66 I=1,NIV
      DO 66 J=I,NIV
      BOR(I,J)=SSX(I,J)/SQRTF(SSX(I,I)*SSX(J,J))
      BOR(J,I)=BOR(I,J)
   66 CONTINUE
      DO 67 I=1,NIV
      DO 67 K=1,NDV
      COR(I,K)=SSXY(I,K)/SQRTF(SSX(I,I)*SSY(K))
   67 CONTINUE
      NVAR=NIV+NDV
      DO 68 K=1,NDV
      J=K+NIV
   68 AVX(J)=AVY(K)
      DO 6 I=1,NIV
    6 SSXX(I)=SSX(I,I)
      DO 95 K=1,NDV
      J=K+NIV
   95 SSXX(J)=SSY(K)
  100 FORMAT(2A2,A1,I5,3I2,I4,2I2,3F10.5,21X,I5)
  101 FORMAT(7F10.5)
      PUNCH 90,NN1,NN2,NN3,NIV,KK
   90 FORMAT(9HCASE NO. ,2A2,A1,5X,16HREGISTERED VAR. ,I3,5X,19HINDEPEND
     1 ENT.VAR.NO.,3X,I2)
      DO 21 I=1,NVAR
   21 SSXX(I)=SQRTF(SSXX(I))
   27 DO 25 KK=1,NDV
      JJ=NIV+1
      DO 26 I=1,NIV
   26 BOR(I,JJ)=COR(I,KK)
      NVAR=NIV+1
      DO 7 J=1,NIV
    7 BOR(NVAR,J)=BOR(J,NVAR)
      BOR(NVAR,NVAR)=1.0
      NOENT=0
      NSTEP=-1
 1000 NSTEP=NSTEP+1
      SS =SSXX( NVAR)*SQRTF(BOR(NVAR,NVAR)/DF)
      IF(DF)1017,1017,1020
 1017 PRINT 91,NSTEP
   91 FORMAT(5HSTEP ,I5,5X,21HD.F. REDUCED TO ZERO.)
      GO TO 1580
 1020 VMIN=-.999999999999999999999999999E99
      VMAX=0.0
      NOMIN=0
      NOMAX=0
      NOIN=0
      DO 1050 I=1,NIV
      IF(BOR(I,I))1042,1050,1060
 1042 PRINT 92,NSTEP,I
   92 FORMAT(5HSTEP ,I5,5X,4HTHE ,I3,25H-TH DIAGONAL IS NEGATIVE.)
      GO TO 1580
```

```
1060    IF(BOR(I,I)-TOL) 1050,1050,1080
1080    VAR=BOR(I,NVAR)*BOR(NVAR,I)/BOR(I,I)
        IF(VAR)1100,1050,1110
1100    NOIN=NOIN+1
        INDEX(NOIN)=I
        COEFN(NOIN)=BOR(I,NVAR)*SSXX(NVAR)/SSXX(I)
        SIGCO(NOIN)=SQRTF(BOR(I,I))*SS/SSXX(I)
        IF(VMIN)1160,1170,904
 904    PRINT 93,VMIN
  93    FORMAT(18HVMIN. IS POSITIVE. ,E14.8)
        GOTO 27
1170    VMIN=VAR
        NOMIN=I
        GO TO 1050
1160    IF (VAR-VMIN) 1050,1050,1170
1110    IF (VAR-VMAX) 1050,1050,1210
1210    VMAX=VAR
        NOMAX=I
1050    CONTINUE
        IF(NOIN)903,1240,1250
 903    PRINT 930
 930    FORMAT(14HNOIN NEGATIVE.)
        PAUSE
        GOTO 27
1240    PUNCH 94,SSY
  94    FORMAT(24HSTANDARD DEVIATION OF Y ,E14.8)
        GO TO 1350
1250    CNST=AVX(NVAR)
        DO 1280 I=1,NOIN
        J=INDEX(I)
1280    CNST=CNST-COEFN(I)*AVX(J)
        M=1
1310    IF(NOENT)1311,1311,1313
1311    PRINT 63,NSTEP,K
        PUNCH 63,NSTEP,K
  63    FORMAT(5HSTEP ,I5,5X,9HVARIABLE ,I2,9H REMOVED.)
        GO TO 20
1313    PRINT 64,NSTEP,K
        PUNCH 64,NSTEP,K
  64    FORMAT(5HSTEP ,I5,5X,9HVARIABLE ,I2,9H ENTERED.)
  20    PUNCH 104,FLEVL,SS
 104    FORMAT(9HF-LEVEL   ,E14.8,5X,15HST.DEVIAT.OF Y ,E14.8)
        CR=1.0-BOR(NVAR,NVAR)
        PUNCH 96,CNST,CR
  96    FORMAT(9HCONSTANT  ,E14.8,5X,15HMULT.COR.COEF. ,E14.8)
        PUNCH 97
  97    FORMAT(7HVAR.NO.,2X,15H  ST.DEVIATION )
        DO 9 J=1,NOIN
   9    PUNCH 98,INDEX(J),COEFN(J),SIGCO(J)
  98    FORMAT(I5,5X,E14.8,3X,E14.8)
        GO TO (1320,1580),M
1320    FLEVL=ABSF(VMIN)*DF/BOR(NVAR,NVAR)
        IF(EFOUT-FLEVL) 1350,1340,1340
1340    K=NOMIN
        NOENT=0
        DF=DF+1.0
        GO TO 1391
1350    FLEVL=VMAX*DF/(BOR(NVAR,NVAR)-VMAX)
        IF (EFIN-FLEVL) 1370,1380,1380
1370    K=NOMAX
```

```
      NOENT=K
      DF=DF-1.0
 1391 IF (K) 1392,1392,1400
 1392 PRINT 69,NSTEP
   69 FORMAT(5HSTEP ,I5,5X,20HNO VARIABLE ENTERED.)
      PAUSE
      GOTO 27
 1400 DO 1410 I=1,NVAR
      IF (I-K) 1430,1410,1430
 1430 DO 1440 J=1,NVAR
      IF (J-K) 1460,1440,1460
 1460 BOR(I,J)=BOR(I,J)-(BOR(I,K)*BOR(K,J)/BOR(K,K))
 1440 CONTINUE
 1410 CONTINUE
      DO 1480 I=1,NVAR
      IF (I-K) 1500,1480,1500
 1500 BOR(I,K)=(-BOR(I,K))/BOR(K,K)
 1480 CONTINUE
      DO 1520 J=1,NVAR
      IF (J-K) 1540,1520,1540
 1540 BOR(K,J)=BOR(K,J)/BOR(K,K)
 1520 CONTINUE
      BOR(K,K)=1.0/BOR(K,K)
      GO TO 1000
 1380 PRINT 99,NSTEP
   99 FORMAT(5HSTEP ,I5,38HNO ADDITIONAL VARIABLE CAN BE ENTERED.)
      PUNCH 65
   65 FORMAT(14HMAJOR DIAGONAL)
 1580 CONTINUE
      DO 10 J=1,NVAR
   10 PUNCH 102,BOR(J,J)
  102 FORMAT(E14.8)
      PRINT 103,KK
  103 FORMAT(6HE.O.C.,3X,3HNO.,2X,I2)
   25 CONTINUE
      PRINT 1015
 1015 FORMAT(6HE.O.W.)
      GO TO 1
      END
```