Title	技術進歩と生産函数に関する一考察
Sub Title	A Study on Technical Progress and Production Function
Author	高橋, 房二(Takahashi, Fusaji)
Publisher	
Publication year	1964
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.7, No.2 (1964. 6) ,p.46- 95
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19640630-04046135

技術進歩と生産函数に関する一考察

高橋房二

一、まえがき

技術進歩は資本畜積との関連のもとに経済発展、或は経済進歩において枢要な意義をもち、そしてそのパターンは分配率の推移に規定的影響をもつものとして伝統的に議論されてきた。技術進歩に関する近代分析において、ヒックスを先達としてハロッド、ロビンソン等はそれぞれの立場のもとで技術進歩に関する概念規定を行なったが、しかし特に明示的に生産函数と関連して技術進歩を導入する試みはなされていない。周知のように、ソロー（1. p. 316）は生産函数との関連のもとで技術進歩の中立性に関して概念規定を行ない、またその導入を試みた。更に、カルドア（2. pp. 595~96）は技術進歩函数として技術進歩と資本畜積の相互関係を分析した。なかんずく、ソロー（1. pp. 315~20）は先駆的に米国経済（1909~49）に関して統計的分析を試み、技術進歩率の測定、及び技術進歩のパターンの判定を行ない、生産性増加に対する技術進歩の寄与は約87％であるという注目すべき結論を導いた。この技術進歩の重要性はマッセル（3. pp. 182~88）のソロー手法による同製造業部門に関する分析によっても強調されるところである。技術進歩のパターンに関して述べるならば、ソローの上述の検証に対し

て、最近のブラウン、ポプキン(4. pp. 402～11)、及びレゼック(5, pp. 55～6)の統計的分析により長期的には技術的エポック、或は非中立的技術進歩の存在が指摘された。これらの分析はソローの検証に対する反証となるものであり、後にとりあげられる問題である。この様な情報をもつ以上、われわれは技術進歩のパターンの判定法の問題と同時に単に中立的技術進歩に留まらず、非中立的技術進歩をいかに生産函数との関連において取扱うかを検討する必要性をもつものである。そこで、小稿においては第一節で技術進歩に関して、資本労働比率に対する要素の限界代替率の関係で示される技術的関係が不変に維持されるというソローの中立性公準のもとでそれぞれのC.E.S. 生産函数について考察する。第二節においては非中立的技術進歩に関して生産函数における上述の技術的関係が変化するものとして新古典派のヒックスとミードの非中立的技術進歩の定義を援用し、ソロー的に生産函数との関連のもとで再定義し、非中立的技術進歩が要素間の代替弾力性、要素の分配率、及び技術進歩率に及ぼす効果を中立的技術進歩の場合との関連において理論的に考察する。

以下の分析に関して全体を通じておかれる前提について付言しよう。生産物は資本と労働という二要素の技術的結合によって生産され各量はそれぞれの測定タームによって可測的であり、又その技術的関係は生産函数によって把捉され、それぞれの生産函数は一次同次性をもつものとする。生産函数の代替弾力性は非負であり、従って生産物等量曲線は原点に非凹であるものとする。

二、中立的技術進歩

ソローの定義によれば中立的技術進歩は資本労働比率が一定の場合、要素間の限界代替率を不変とする技術進歩である。所与の生産函数は上の技術的関係を不変に維持しつつ時間を通じてシフトする。中立的技術進歩はこのような関係における生産函数の純粋なスケール変化として把捉される。そして以上の様な変化が「生産能率の変化」、「全体生産性の変化」又ド

ーマー (6.p.709) により「残差」、そしてソローによって「技術変化」と呼ばれる。そこで、技術進歩率は生産物か、生産性のタームで測定されるものとされる。

一方、**A.C.M.S.** (7.pp.227~31) は生産性と賃金率に関して19ヵ国24業種のクロス・セクション分析による計測結果について統計的、経済的有意性を確認し、あわせて生産性の賃金弾力性は一次同次性のもとで要素間の代替弾力性に一致する(1)という関係を導き、それらの関係を基礎として一生産物、二要素に関して次のような一次同次の**C.E.S.** 生産函数の定式化を行った。

$$V_t=\gamma[\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \quad \cdots\cdots(1)$$

（V: 付加価値, K: 資本ストック, L: 雇用量）

ここで、γ はその推移が生産効率の変化を表すので、効率パラメーターとよばれ、$\gamma>0$ である。δ は代替弾力性の一変形であり、代替パラメーターとよばれるが、いま生産函数 $V_t=\gamma\cdot f(K_t, L_t)$ の生産物等量曲線の非凹性(対原点)を仮定すれば $-1\leqq\rho\leqq\infty$ である。δ はある所与の ρ に関して機能的に所得分配を決定するので分配パラメーターとよばれ、$0<\delta<1$ である。そこで、(1)で示される **C.E.S.** 生産函数に関して若干の考察を行なうことにしよう。**C.E.S.** 生産函数は0から∞にいたるあらゆる恒常代替弾力性値をもつ生産函数を包括する一般的生産函数である。前提にしたがって各要素の限界生産力は正 $(f_K', f_L'>0)$ であり、又 $-1<\rho<\infty$ ならば限界生産力逓減法則 $(f_K'', f_L''<0)$ が充足される(2)。この **C.E.S.** 生産函数は **A.C.M.S.** と独立にブラウンとデ・カニ (8,p.388) によってもまた導かれており、次のように示される。

$$V_t=\gamma_1[K_t^{-\rho}+\gamma_2 L_t^{-\rho}]^{-\frac{S}{\rho}} \quad \cdots\cdots(1)'$$

ここでSは規模に関する収益性を示すパラメーターであり、$S=1$, $\gamma_1=\gamma\delta^{-\frac{1}{\rho}}$, そして $\gamma_2=\frac{1-\delta}{\delta}$ とおけば(1)と全く一致する。よって、択一的に次の形態で示すことが出来る。

$$V_t=\gamma\left[\frac{k}{s}K_t^{-\rho}+\frac{j}{s}L_t^{-\rho}\right]^{-\frac{s}{\rho}}$$ 或は $$V_t=\gamma\left[\frac{k}{s}K_t^{-\rho}+\left(1-\frac{k}{s}\right)L_t^{-\rho}\right]^{-\frac{s}{\rho}}\cdots\cdots\cdots(1)''$$

（ここで、$k+j=s$）A.C.M.S. による定式は自明のように(1)''において $s=1$, $k=\delta$ の場合である。一次同次性は以後の分析で重要な前提となるものであり、その仮定により、要素比率と要素の生産性（又は生産係数）との関係、競争的均衡における要素の分配率の問題、及び要素価格と要素の生産性（又は生産係数）等の関係を分析することが可能となる。

(1)に関して $\rho\to 0$ ならば L'Hôpital's Rule により $V_t=\gamma\lim_{\rho\to 0}[\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}=\gamma K_t^{\delta}L_t^{1-\delta}\cdots(2)$ であり、コブ・ダグラス生産函数となる。$\rho=0$ ならば $V_0=\gamma[\delta K_t+(1-\delta)L_t]\cdots(3)$ であり、線型生産函数である。更に、$\rho\to -1$ ならば $V_t=\gamma\lim_{\rho\to\infty}[\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}=\gamma\min(K_t, L_t)\cdots(4)$ となり固定比率生産函数となる。いま、それぞれ γ が時間に関して指数的（又は複利的）に一定率で増加するとすれば連続的（離散的）な場合 $\gamma_t=\gamma_0 e^{gt}$（又は $\gamma_t=\gamma_0\lambda^t$）とおくことによって $f(K, L)$ の技術的関係を不変とする体化されないタイプ (Disembodied type) のソローの中立的技術進歩が導入される。(1)～(4)を生産性の関係として表現すれば、上の中立的技術進歩（連続的な場合）においては次の通りとなる。(1)の一般的な場合 $l_t=\gamma_0 e^{gt}[\delta r_t^{-\rho}+(1-\delta)]^{-\frac{1}{\rho}}\cdots(5)$ (2)は $l_t=\gamma_0 e^{gt}r_t^{\delta}\cdots(6)$ (3)は $l_t=\gamma_0 e^{gt}[\delta r_t+(1-\delta)]\cdots(7)$ (4)は $l_t=\gamma_0 e^{gt}\min(r_t, 1)\cdots(8)$。（ここで、それぞれ $l_t=\frac{V_t}{L_t}$, $r_t=\frac{K_t}{L_t}$ である。）

(4)の固定比率生産函数において、そこでハロッドの成長モデル (9. pp. 89～134) に即して彼の中立的技術進歩における資本係数 $\frac{K_t}{V_t}\left(=\frac{I}{C}\right)$ 一定を導入すれば次の通りとなる。$l_t=\gamma_0 e^{gt}\min\left(\frac{C}{\gamma^0 e^{gt}}r_t, 1\right)$ 或は $l_t=\min(Cr_t, \gamma_0 e^{gt})\cdots(9)$ この関係は宇沢氏 (10. p. 191) による $V_t=G(K_t; B_{(t)}L_t)\cdots(10)$ が一次同次である場合、それを変形して得られる $l_t=G(r_t, B_{(t)})\cdots(10)'$ と対比される。(9)において $r_t<\frac{\gamma_0 e^{gt}}{C}$ ならば、$\frac{\partial l}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial K}=C$ であり、限界生産力説のもとで利子率一定を意味する。(10)の定式においてGの一次同次性が仮定されるならば、同様に一定の $\frac{\partial V}{\partial K}$ に対して $\frac{K}{V}$ は不変である。

(5)～(8)をそれぞれ対数に展開し、時間に関して微分すれば、いずれの場合も生産性の相対的変動率は資本労働比率のそれ

と技術進歩率という相互に独立した要因によって規定される。

(5)は $\dfrac{\dot{l}}{l}=g+\dfrac{1}{1+\dfrac{1-\delta}{\delta}r^{-\rho}}\dfrac{\dot{r}}{r}$ ……(5)′ （・は時間に関する微分を示す）

(6)は $\dfrac{\dot{l}}{l}=g+\delta\dfrac{\dot{r}}{r}$ ……………(6)′

(7)は $\dfrac{\dot{l}}{l}=g+\dfrac{1}{1+\dfrac{1-\delta}{\delta}r^{-1}}$ 或は $\dfrac{\dot{l}}{l}=g+\dfrac{\dot{r}}{r+\dfrac{1-\delta}{\delta}}$ ……(7)′

(8)は $0<r<1$ ならば $\dfrac{\dot{l}}{l}=g+\dfrac{\dot{r}}{r}$ ……(8)′ であり

$1\leqq r$ ならば $\dfrac{\dot{l}}{l}=g$ ………(8)″ である。

同様にして(9)を展開すれば

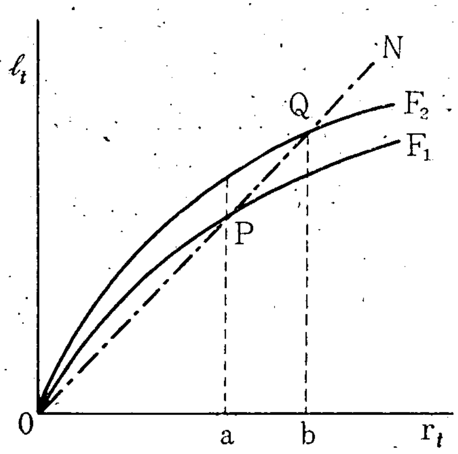
$r<\dfrac{\gamma_0 e^{gt}}{C}$ ならば $\dfrac{\dot{l}}{l}=\dfrac{\dot{r}}{r}$ ………(9)′ であり

また、$r\geqq\dfrac{\gamma_0 e^{gt}}{C}$ ならば $\dfrac{\dot{l}}{l}=g$ （或は $\dfrac{\dot{Y}}{Y}=g+\dfrac{\dot{L}}{L}$ であり、$\dfrac{\dot{Y}}{Y}$ はハロッドの G_n に対応する）である。

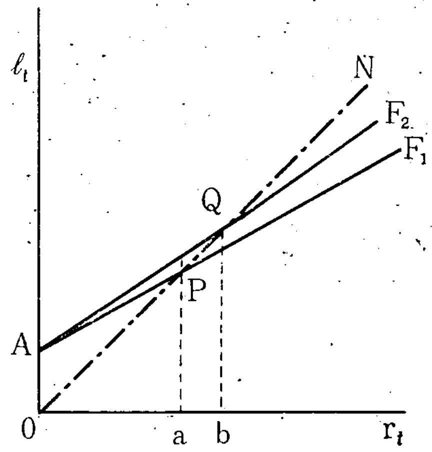
これらの関係を図解的に示すならば、第一図～第八図の通りとなる。

第一～第三図においては(5)～(8)の生産力曲線 F_1 ($\gamma_t=\gamma_0$) がソローの中立的技術進歩により生産力曲線 F_2 にシフトするものとして表わされ、第四図においては(9)にハロッドの中立的技術進歩を導入した場合の生産力曲線のシフトを示す。第五～第八図はそれらの生産性と資本労働比率の相対的変動の関係を示す。

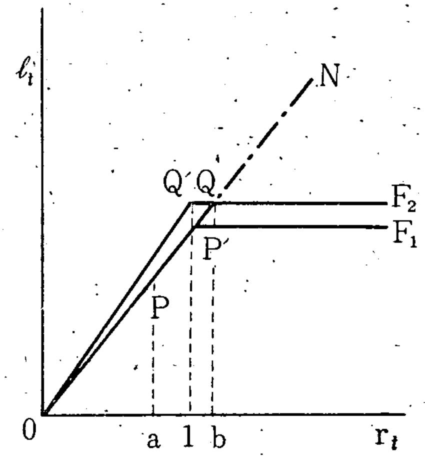
第一図



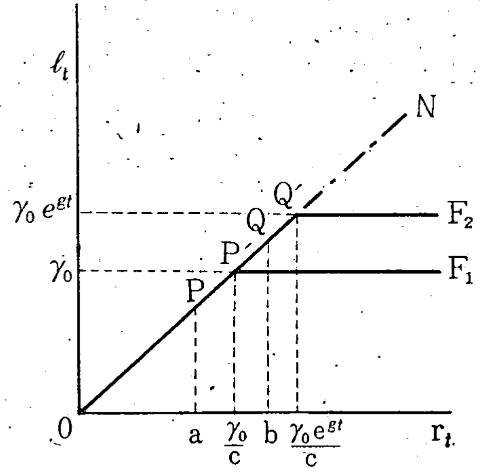
第二図



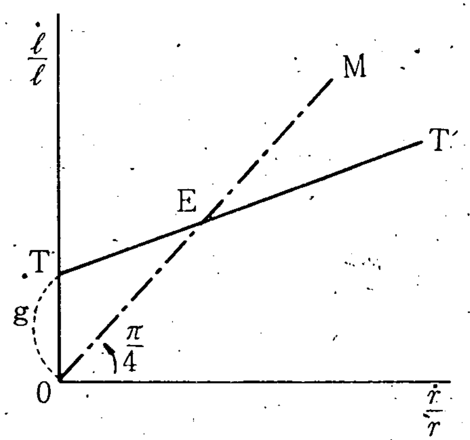
第三図



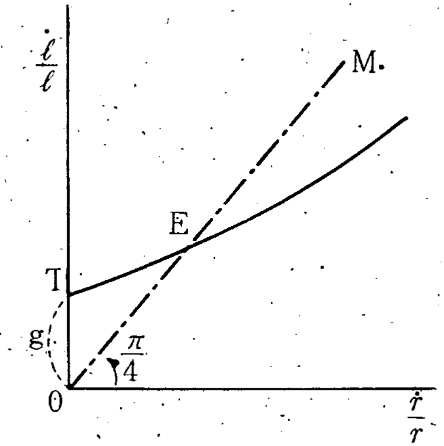
第四図



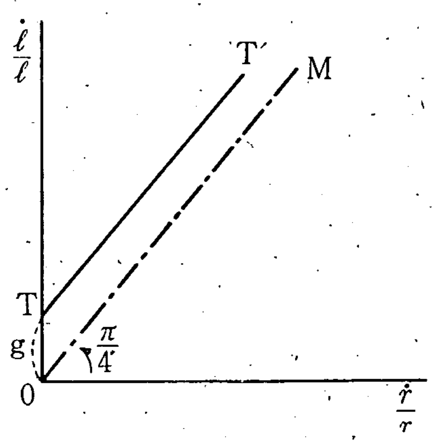
第五図



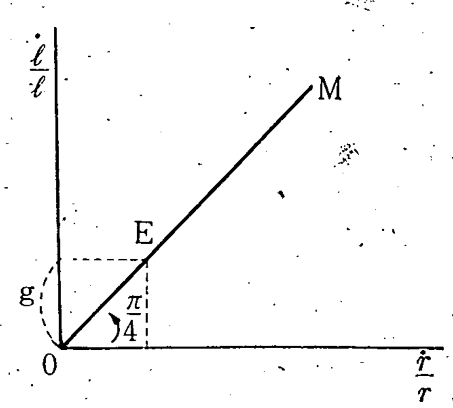
第六図



第七図



第八図



第一図～第四図において各生産力曲線の勾配は資本の限界生産力を示すが、それは実質利子率（以下、利子率とよぶ）に、そして利潤極大化をはかる企業者均衡において利潤率に均等する。又、上の各図において生産力曲線上の一点と原点を結んで得られる動径の勾配の逆数は資本係数を示す。F_1曲線上の一点Pと原点を結ぶ直線を延長し、F_2曲線との交点をQとすれば、それぞれ資本係数は不変であるが、Q点の切線の勾配（均衡における利潤率）はP点のそれに対して、第一図の場合後に示されるように不変であり、そして第二図の場合はより大である。第三図の場合はQ点の勾配（利潤率）は0に低下する。よって、資本係数と利潤率の相乗積である資本の分配率はダグラス函数の場合、資本労働比率の増加と独立に一定であり、そしてまた線型生産函数においては資本労働比率の増加に伴って増加する。一方、固定比率生産函数においては資本の分配率はいずれの点に関しても有意に決定されない。ハロッドの中立的技術進歩を導入した(9)で表される固定比率生産函数の場合は第四図で示されるようにP点がOP′線上$\left(r<\frac{\gamma_0}{C}\right)$にあり、そしてQ点がP′Q′線上$\left(\frac{\gamma_0}{C}<r<\frac{\gamma_0 e^{gt}}{C}\right)$に位置する限り、両点の資本係数と（正の）利潤率の均等が成立するが、いずれにおいても資本の分配率は経済的に有意に決定されない。なぜならば、利潤率と資本係数は相互に逆数の関係におかれるので、それらの積である資本の分配率は1となるからである。要素市場の競争均衡の仮定のもとでは資本の分配率は第五図～第八図で示される生産性と資本労働比率の相対的変動率の関係を示す曲線（又は直線）においてそれぞれの勾配によって示される。ダグラス函数の場合は第五図で示されるように上の関係は1以下の勾配をもつTT′直線で示され、そこで資本の分配率は不変である。線型生産函数の場合は第六図で示されるように逓増的な1以下の勾配（上方に凹）のTT′曲線で示され、そこで資本の分配率は資本労働比率の増加によって増加する。(8)′(9)で与えられる固定比率生産函数の場合は $0<r<1$ $\left(0<r<\frac{\gamma_0 e^{gt}}{C}\right)$ ならば、1の勾配をもち、gの切片を有する（原点通過の）TT′直線、そして $1<r$ $\left(\frac{\gamma_0 e^{gt}}{C}<r\right)$ ならば、T点（E点）上に体系が位置することになり、限界生産力説による資本の分配率は経済的に有意に決定されない。

第五図、第八図で示されるTT′線の直線性、及び曲線関係はブラック（11. p. 168）によれば、資本係数が先決されるものとして、資本の限界生産力が資本の時間的増加と独立であるか、従属であるかによって結果するものとされる。一次同次性のもとでは $\frac{\partial l}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial K}=\frac{\partial f}{\partial r}$ であるので、上の関係は資本の限界生産力と資本労働比率の時間的増加との関係に置き換えて議論することが可能である。資本の限界生産力が資本労働比率の時間的増加と独立である場合においても中立的技術進歩に関して所与の資本係数に対して資本の限界生産力が可変的であるならば、TT′線は曲線関係として示される。(4) ダグラス生産函数の場合はそこで資本の限界生産力が不変であることによって直線関係として示されるのである。中立的技術進歩を伴う一次同次生産函数の体系においてはC.E.S. 生産函数の ρ が $-1<\rho<0,\ 0<\rho<\infty$ の場合に関してTT′線は曲線となるのである。

TT′線と原点通過の45度線との交点Eは長期均衡点を示すものであり、体系が持続的にこれらのE点に位置するならば、新古典派におけるソロー（11: pp. 69～82）等の成長モデルの体系においても、又カルドア（2. pp. 609～24）の体系においても資本係数、利潤率、及び分配率は不変に維持される。これは同時にハロッド（9. p. 25）の中立的技術進歩に対応するものであることは自明である。

カルドア（2. pp. 597～98）は技術進歩のパターンについてハロッド的に資本係数という技術係数を中心として類別するので、TT′曲線（彼は技術進歩函数とよび、上方に凸の曲線を仮定する）と45度線との交点Eの左（右）に体系が位置すれば、技術進歩は資本節約的（資本使用的）であるとされる。これに対してソローの定義によれば、体系が所与のTT′曲線上に位置することによって技術進歩は中立的であり、非中立的技術進歩はTT′線の変化を意味することになる。交点Eは前述の通り長期均衡点であり、もし体系がE点の左(右)に位置すれば、資本係数の増加(減少)を通じて新古典派、及びカルドアの成長模型のいずれに関しても均衡点Eへの収斂、或は求心力の作用が示される。しかし、新古典派の体系は限界生産力説のもとで資本係数が利子率（均衡で利潤率）の減少函数であるとみるのに対してカルドアの（2. p. 600）体系では資本係数は利潤率の増加函数とされ

る。したがって、体系の運動、又は企業者の投資行動において対照的な関係におかれる。

次に技術進歩の中立性に関してハロッドとソローの定義について比較検討すれば次の通りとなる。

ソローの中立的技術進歩は資本労働比率と要素の限界代替率間の技術的関係が時間を通じて不変に維持され、生産物等量曲線はそのパターンを変化することなく時間軸に関してシフトするものとされる。一般に資本労働比率の変化に伴って、資本係数、利潤率は可変的であり、従って資本の分配率は可変的（ρが0の場合のみ不変）である。そして、技術進歩率は資本労働比率の変動と独立である。ハロッドの場合は利子率が一定のもとで資本係数という技術係数の時間的な不変性が必要とされる。そこでまた、利潤率は一定であり、そのかぎり、資本の分配率は不変である。そして、技術進歩率は資本（又は一次同次性のもとで資本労働比率）の変動率それ自体によって与えられるのである。そこで、ソローとハロッドの中立的技術進歩は生産性と資本労働比率の相対的変動率の相互関係において次のような関係になる。ソローの中立的技術進歩においては、生産性と資本労働比率の相対的変動率を示す曲線は一次同次のC.E.S.生産函数においていずれも正の切片（技術進歩率を示す）をもち、そのρが $-1<\rho<0$（$0<\rho<\infty$）ならば、逓増（逓減）的な1以下の勾配をもつ曲線、ρが0ならば、1以下の一定の勾配、また$\rho=\infty$ならば、資本労働比率が1以下において1の勾配をもつ直線として示される。これに対してハロッドの場合はここでは(9)という固定比率生産函数で把捉されたが、上の関係は資本労働比率がある値以下$\left(r<\frac{\gamma_0 e^{gt}}{C}\right)$の場合、原点を通過する1の勾配をもつ直線として示され、それ以上ならばその直線上の一点$E(g \cdot g)$で与えられる。

次にここで資本係数を中心として限界生産力説のもとで利子率、及び分配の問題を若干のC.E.S.生産函数に関して検討しておこう。まず、資本係数と利子率との間の関係を生産函数 $V_t=\gamma f(K_t L_t)$ との関連においてベーター（13. pp. 87〜92）をもととして検討する。fが一次同次函数であるならば

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t}=f'_K\left(1,\ \frac{L_t}{K_t}\right)=i_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$ （i_t: 生産物をニューメレールとする利子率）

$$\frac{V_t}{K_t}=f\left(1,\ \frac{L_t}{K_t}\right)\qquad\cdots\cdots(12)$$

一次同次函数の第一次微係数は0次同次である。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_t}{\partial K_t}\right)=f_{KL}''\frac{d}{dt}\left(\frac{L_t}{K_t}\right)\qquad\cdots\cdots(13)$$

一方

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)=f_L'\frac{d}{dt}\left(\frac{L_t}{K_t}\right)\qquad\cdots\cdots(14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)=\frac{f_L'}{f_{KL}''}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_t}{\partial K_t}\right)\qquad\cdots\cdots(15)$$ [5]

従って、(15)において f_L', $f_{KL}''>0$ であるならば、資本の平均生産性（その逆数の資本係数）と資本の限界生産力、又は利子率の時間的変動は比例的（逆比例的）関係におかれる。このように資本係数と利子率との時間的変動関係は生産函数の一次同次性と f に関して f_L', $f_{KL}''>0$ という条件において逆変関係が成立する。そこで、一次同次性をもつ **C.E.S.** 生産函数においては

$$\frac{\partial f}{\partial L_t}=\gamma(1-\delta)[\delta r_t^{-\rho}+(1-\delta)]^{-\frac{1}{\rho}-1}\qquad\cdots\cdots(16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K_t\partial L_t}=\gamma\delta(1-\delta)(\rho+1)[\delta r_t^{-\rho}+1-\delta]^{-\frac{1}{\rho}-2}r_t^{-\rho}K_t^{-1}\qquad\cdots\cdots(17)$$

（ここで、$f_L'>0$, であり、又 $-1<\rho<\infty$ ならば $f_{KL}''>0$ である。）

(15)は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)=\frac{1}{\delta(\rho+1)}[\delta+(1-\delta)r_t^{\rho}]K_t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_t}{\partial K_t}\right)\qquad\cdots\cdots(15)'$$

又、利子率と資本係数の間の相互関係は択一的に次のように示すことが出来る。

$$i_t\left(=\frac{\partial V_t}{\partial K_t}\right)=\delta\gamma_t^{-\rho}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)^{\rho+1} \cdots\cdots (18)$$

そこで、ρが0（ダグラス生産函数）の場合は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)=\frac{K_t}{\delta}\frac{d}{dt}i_t \cdots\cdots (19), \qquad i_t=\delta\left(\frac{V_t}{K_t}\right) \cdots\cdots (19)'$$

よって、資本係数は利子率と逆比例関係におかれる。ρが∞（固定比率生産函数）の場合、(15)′と(18)はいずれも不定形となり、資本係数と利子率との間には一意的関係は存在しない。ρが−1（線型生産函数）の場合、(15)′は不能であり、また(18)′は$i_t=\delta\gamma_t$…(20)であるので、利子率と資本係数は相互に独立である。利子率は中立的技術進歩が存在しない場合、一定であるが、中立的技術進歩が行なわれる場合、技術進歩率に応じて時間を通じて変動する。

次にC.E.S.生産函数の体系において中立的技術進歩が要素の分配率に対して及ぼす効果について検討しよう。

(18)より

$$\frac{K_t\dfrac{\partial V_t}{\partial K_t}}{V_t}=\delta\cdot\gamma_t^{-\rho}\left(\frac{V_t}{K_t}\right)^{\rho} \cdots\cdots (18)'$$

(18)′は一次同次性と要素市場の競争均衡のもとにおいて限界生産力説による分配理論にしたがう資本の分配率を示すものである。

(18)′は択一的に

$$\tilde{d}_K=\delta\left(\gamma_t\frac{K_t}{V_t}\right)^{-\rho} \cdots\cdots (21) \quad (\tilde{d}_K\text{：中立的技術進歩における資本の分配率})$$

ここで、ρが0の場合、$\tilde{d}_{K_t}=\delta$であり、資本の分配率は技術進歩率、及び資本係数と独立に不変に維持される。ρが∞の

場合、(21)による新古典派的分配公準は適用されえない。ρが-1の場合、資本の分配率は技術進歩率と資本係数が大(小)である程、大(小)である。一般的に、$-1\leqq\rho<0$ の場合において上と同様な関係が成立する。又、$0<\rho<\infty$ の場合、資本の分配率は技術進歩率、及び資本係数が大(小)である程小(大)である。このように $-1\leqq\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ において技術進歩率、及び資本係数の資本の分配率に及ぼす効果は相反的であり、又、$|\rho|$が大(小)である程それぞれの効果は強(弱)いという関係におかれる。上の考察において、資本の分配率は、$-1\leqq\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の場合、技術進歩率と資本係数によって説明されたが、その説明変数間の相互関係は(22)によって示される。

(1)より、

$$\frac{V_t}{K_t}=\gamma_t\left[\delta+(1-\delta)\left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \cdots\cdots (22)$$

よって、

$$\gamma_t\frac{K_t}{V_t}=[\delta+(1-\delta)\gamma_t^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \cdots\cdots (22)'$$

(22)'を(21)に代入して

$$\bar{a}_{K_t}=\frac{\delta}{\delta+(1-\delta)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}=\frac{1}{1+\mu r_t^{\rho}} \cdots\cdots (21)' \quad \left(\text{ここで、}\mu=\frac{1-\delta}{\delta}>0\right)$$

(21)'において、技術進歩が中立的であるならば、μは時間を通じて一定である。従って、中立的技術進歩における資本の分配率は $-1\leqq\rho<\infty$ に関してρの値のいかんにかかわらず資本労働比率が時間を通じて1に留まる場合、(23)で示される関係によって一定(δ)である。

$$\bar{a}_{K_t}=\frac{1}{1+\mu}=\delta \cdots\cdots (23)$$

又、$-1<\rho<0$, と $0<\rho<\infty$ において資本労働比率が一定ならば、それぞれの生産函数に関して資本の分配率は一定であ

り、資本労働比率が1より大であるならば、ρが大(小)（要素間の代替弾力性が小(大)であることを意味する）である程小(大)である。これに対して、体系の資本労働比率が1より小であるならば、ρが大(小)である程、資本の分配率は大(小)となる。以上のように、中立的技術進歩においてμ、及び資本労働比率が同一であるとしても生産函数のρの大小により資本の分配率は相違する。以上の考察は(21)′において資本労働比率が一定である場合に関するものであるが、次にそれが変化する場合について検討しよう。

(21)′より資本労働比率が時間を通じて変化するならば、$-1\leqq\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の場合に関して

$$\frac{\dot{\tilde{d}}_K}{\tilde{d}_K}=-\frac{\rho\frac{\dot{r}}{r}}{(\mu r\rho)^{-1}+1}=-\rho\tilde{d}_L\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$ （$\tilde{d}_L$: 中立的技術進歩の場合の労働の分配率）

(24)において、μとrは正であるのでその分母は正であり、資本の分配率はρを所与とすれば資本労働比率の変動によって規定される。

$-1\leqq\rho<0$ の場合

$\frac{\dot{r}}{r}>0$ ならば $\frac{\dot{\tilde{d}}_K}{\tilde{d}_K}>0$

$\frac{\dot{r}}{r}<0$ ならば $\frac{\dot{\tilde{d}}_K}{\tilde{d}_K}<0$

$0<\rho<\infty$ の場合

$\frac{\dot{r}}{r}>0$ ならば $\frac{\dot{\tilde{d}}_K}{\tilde{d}_K}<0$

$\frac{\dot{r}}{r}<0$ ならば$<\frac{\dot{\tilde{d}}_K}{\tilde{d}_K}>0$

よって、$-1 \leqq \delta < 0$ である場合において、資本の分配率は資本労働比率の増加（減少）によって増加（減少）し、又 $0 < \rho < \infty$ の場合それは資本労働比率の増加（減少）によって減少（増加）する。

これらの関係は生産性と資本労働比率の相対的変動率の関係を示す図においてその曲線の勾配が資本労働比率の変化に伴って変化（ρ が0の場合は一定）する関係と整合的である。

(5)′と(21)′よりソローの定式 (1. p. 313) が得られる。

$$\frac{\dot{l}}{l} = g + \bar{d}_K \frac{\dot{r}}{r} \quad \cdots\cdots (5)''$$

$$\bar{d}_K = \frac{d\left(\dfrac{d}{dt}\log l\right)}{d\left(\dfrac{d}{dt}\log r\right)}$$

中立的技術進歩の場合、資本の分配率は生産性の相対的変動率の資本労働比率のそれによる微分（(5)′の勾配）として把捉される。$-1 \leqq \rho < 0$ $(0 < \rho < \infty)$ における資本労働比率の増加に伴う資本の分配率の増加（減少）は(5)′の曲線の上方に凹（凸）で示される—勾配の増加（減少）として表わされるのである。(24)において、中立的技術進歩における資本の分配率の相対的変動率は資本労働比率の相対的変動率の函数として示されたが、これに関して若干の考察を行うことにする。資本の分配率の変動は前述のように資本係数と利潤率の変動の合成的な結果として規定される。

そこで、資本係数の相対的変動率と利潤率のそれは(22)′と(18)を時間に関して微分することにより(25)′と(26)′で示される関係として表わされることになる。

仮定により $\gamma_t = \gamma_0 e^{\rho t}$ とおかれるので

$$\frac{\dot{c}}{c}=-g+\frac{1}{(\mu r^{\rho})^{-1}+1}\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(25)\quad\left(\text{ここで、}c=\frac{K}{V}\right)$$

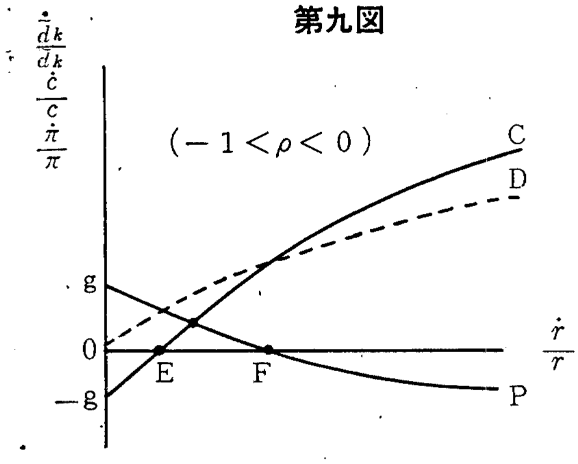
また、$\frac{1}{(\mu r^{\rho})^{-1}+1}=\tilde{d}_L$（$\tilde{d}_L$：中立的技術進歩における労働の分配率）であるので $\frac{\dot{c}}{c}=-g+\tilde{d}_L\frac{\dot{r}}{r}$……(25)′　均衡において $i=\pi$（π 利潤率）であるので(18)より

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi}=-\rho g-(\rho+1)\frac{\dot{c}}{c}\cdots\cdots(26)\quad\text{或は}\quad\frac{\dot{\pi}}{\pi}=g-(\rho+1)\tilde{d}_L\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(26)'$$

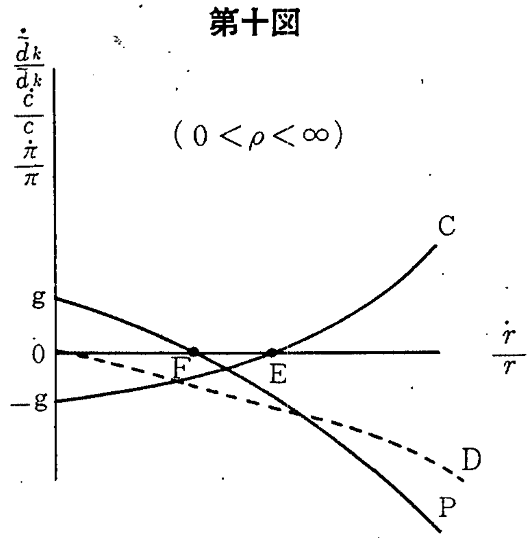
そこで、上の関係にもとづいて図解的に資本の分配率の変動を検討しよう。第九～第十二図は縦軸に資本係数、利潤率の相対的変動率とその和としての資本の分配率のそれを、又横軸に資本労働比率の相対的変動率をとるものとする。

第九図と第十図において c 曲線は(25)′で示される資本係数の相対的変動率を示すものであり、$-1<\rho<0$（$0<\rho<\infty$）において $\tilde{d}_L$ は資本労働比率の増加に伴って減少（増加）するので1以下の逓減（逓増）増加の（或は、上方に凸(凹)である）曲線として示される。P曲線は(26)′によって示される均衡における利潤率の相対的変動率の変化を示すものであり、$-1<\rho<0$（$0<\rho<\infty$）に関して逓減(逓増)減少の（或は、上方に凹(凸)である）曲線として示される。上のようにC曲線とP曲線の勾配は

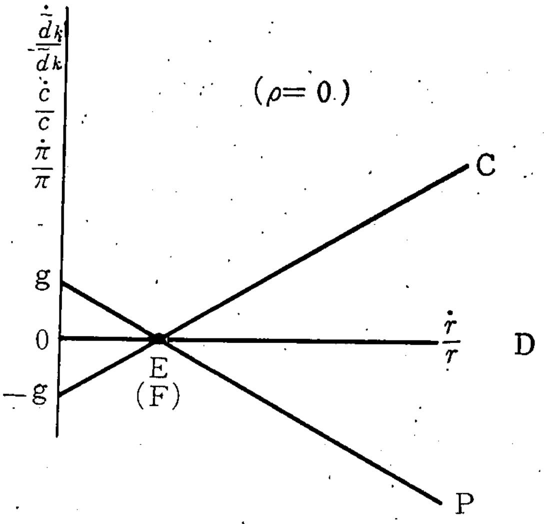
第九図



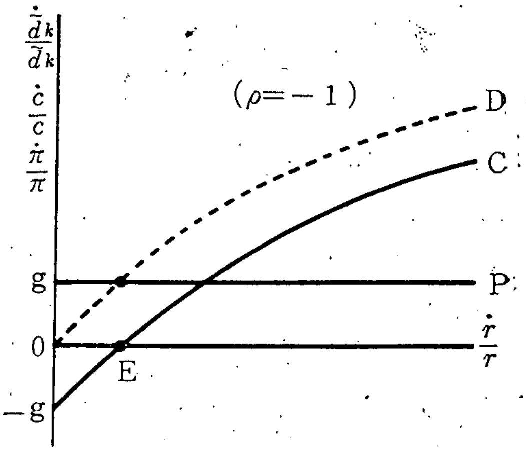
第十図



第十一図



第十二図



逆であるが、C曲線に対するP曲線の傾斜は $-1<\rho<0$ $(0<\rho<\infty)$ に関してより小(大)である。これらのC曲線とP曲線を単純に合成することによって資本の分配率の相対的変動率の変化を示すD曲線が得られる。このようにして資本の分配率は資本労働比率の増加によって、$-1<\rho<0$ $(0<\rho<\infty)$ に関して増加(減少)する関係が図解的に示される。第九図と第十図においてE点とF点はそれぞれ資本係数と利潤率が一定である点であり、上の $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ に関して一致しない。$-1<\rho<0$ $(0<\rho<\infty)$ に関して資本係数を一定とする資本労働比率の相対的変動率は利潤率を一定とするそれよりも小(大)である。このようにE点とF点の不一致は同時にハロッド的な中立的技術進歩(利潤率一定のもとで資本係数一定)が存在しないことを意味する。

次に、ρが0(ダグラス生産函数)の場合、上の関係は第十一図で示され、ρが−1(線型生産函数)の場合は同様にして第十二図で示される。

ρが0の場合、第十一図で示されるようにC曲線とP曲線は同一の勾配をもち、その方向を異にする直線で示され、E点とF点は $\left(\frac{g}{d_L}, 0\right)$ 点で一致する。C曲線とP曲線より合成されるD曲線は横軸と一致し、そこで資本労働比率と独立に資本の分配率は一定である。ρが−1の場合、第十二図で示されるように、C曲線は $-1<\rho<0$ と同様であ

るが、P曲線は資本労働比率の変動と独立であり、利潤率の相対的変動率は一定であるので、gの切片をもつ横軸に平行な直線として示され、F点は存在しない。従って、この場合も $-1<\rho<0$, $0<\rho<\infty$ と同様にハロッド的な中立的技術進歩は存在しない。資本の分配率の変動はD曲線で示されるように資本労働比率の増加に伴って増加する。

次に、ソローにおける技術進歩の中立性公準がC.E.S.生産函数においていかに把捉されるかを代替弾力性との関連において検討しよう。

(16)より

$$\frac{\partial V_t}{\partial L_t}=\gamma_t^{-\rho}(1-\delta)\left(\frac{V_t}{L_t}\right)^{\rho+1} \quad \cdots\cdots(16)'$$

(16)'と(18)より

$$\frac{\partial V_t}{\partial L_t}\Big/\frac{\partial V_t}{\partial K_t}=\frac{\partial K_t}{\partial L_t}=\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho+1} \quad \cdots\cdots(27)$$

$$R_t=\mu r_t^{\rho+1} \quad \cdots\cdots(27)'$$

$\left(\text{ここで}\ R_t=\frac{\partial K_t}{\partial L_t}\right)$

(27)'においてρは生産函数を特性づける指標であるので所与であるとし、又μが時間に関して独立であるとすれば、資本労働比率が一定である限り、要素の限界代替率は一定に維持されるのでソローにおける技術進歩に関する中立性公準を充足する。(27)'におけるμが時間を通じて不変であるとして、(27)'を対数に展開し時間に関して微分すれば

$$\frac{\dot{R}}{R}=(\rho+1)\frac{\dot{r}}{r} \quad \cdots\cdots(28)$$

一方、要素間の代替弾力性は資本労働比率と要素間の限界代替率の相対的変動率の相対比であるので

$$\sigma=\frac{dr/r}{dR/R}=\frac{d\log r}{d\log R} \quad \cdots\cdots(29)$$

（σ：要素間の代替弾力性）

或は
$$=\frac{\dfrac{\partial V}{\partial K}\dfrac{\partial V}{\partial L}}{V\dfrac{\partial^2 V}{\partial K\partial L}}\cdots\cdots(29)'$$

よって、(28)と(29)より

$$\tilde{\sigma}=\frac{1}{1+\rho}\cdots\cdots(29)''$$ [6]（$\tilde{\sigma}$：中立的技術進歩における代替弾力性）

又、(27)で示されるように、要素間の限界代替率は両要素の限界生産力の比であるので、限界代替率の相対的変動率は両要素の限界生産力の相対的変動率の差に等しい。

$$R=\frac{f_L'}{f_K'}\quad\left(f_L'=\frac{\partial V}{\partial L},\ f_K'=\frac{\partial V}{\partial K}\right)$$

よって、

$$\frac{\dot{R}}{R}=\frac{(\dot{f}_K'/f_K')}{(\dot{f}_L'/f_L')}=\frac{\dot{f}_L'}{f_L'}-\frac{\dot{f}_K'}{f_K'}\cdots\cdots(30)$$

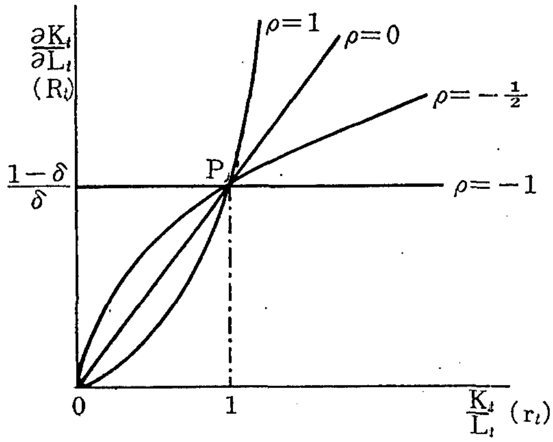
(28)と(30)より

$$\frac{\dot{f}_L'}{f_L'}-\frac{\dot{f}_K'}{f_K'}=(\rho+1)\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(28)'$$

ここで、$\dfrac{\dot{r}}{r}=0$ ならば $\dfrac{\dot{f}_L'}{f_L'}=\dfrac{\dot{f}_K'}{f_K'}$ である。(27)は択一的に、$\dfrac{\partial V_t}{\partial L_t}=w_t$, $\dfrac{\partial V_t}{\partial K_t}=i_t$（$w$, iは生産物をニューメレールとする賃金率，利子率）より、$-1<\rho<\infty$ に関して $\dfrac{w_t}{i_t}=\mu r_t^{\rho+1}\cdots\cdots(31)$ 或は $r_t=\left(\mu^{-1}\dfrac{w_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}\cdots\cdots(31)'$ (31)と(31)'は資本労働比率と要素の相対価格の相互関係を示す。(31)より $\left(\dfrac{\dot{w}}{\dot{i}}\right)\Big/\left(\dfrac{w}{i}\right)=(\rho+1)\dfrac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(32)$ (32)と(5)''において $\dfrac{\dot{r}}{r}=0$ とおけば $\dfrac{\dot{w}}{w}=\dfrac{\dot{i}}{i}$, $\dfrac{\dot{l}}{l}=g$ である。

一方、(16)′より $\frac{\dot{w}}{w}=-\rho g+(\rho+1)\frac{\dot{l}}{l}$……(33) よって、$\frac{\dot{w}}{w}=g$ である。均衡において利潤率は利子率に等しい [$i=\pi$ (π: 利潤率)] ので、結局 $\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{\pi}}{\pi}=g$……(34) である。$\frac{\dot{w}}{w}$と$\frac{\dot{\pi}}{\pi}$の関係は択一的に(33)に(5)″を代入して得られる $\frac{\dot{w}}{w}=g+(\rho+1)\bar{d}_K\frac{\dot{r}}{r}$……(33)′と(26)′より次の関係におかれる。$g=\bar{d}_K\frac{\dot{\pi}}{\pi}+\bar{d}_L\frac{\dot{w}}{w}$……(35) 或は $\frac{\dot{w}}{w}=\frac{1}{\bar{d}_L}\left(g-\bar{d}_K\frac{\dot{\pi}}{\pi}\right)$……(35)′ ここで、$\frac{\dot{\pi}}{\pi}=\frac{\dot{w}}{w}$ とおくことによって(34)が得られる。したがって、資本労働比率が一定の場合、利潤率は賃金率と同率(g)で増加する。また、(28)′において資本労働比率が不変の場合、両要素の限界生産力の増加率は均等である。これはヒックス (14. pp. 121~22)、ミード (15. p. 26)、及びソロー (2. p. 316) の新古典派における中立性公準の内面的一致を示すものである。ソローは特に生産函数との関連のもとで技術進歩の中立性に関して明示的規定を行なったが、そこでは ρ を所与とすれば、(27)′における μ (又は δ) が時間を通じて不変であることが中立的技術進歩において必要条件である。そして、規模に関する収益性いかんを問わず、μ が異時点間で一定であるならば、資本労働比率と要素の限界代替率の間の技術的関係が一定に維持されるのである。又、(29)″において ρ が与えられることによって要素間の代替弾力性が決定され、中立的技術進歩においてそれは時間を通じて不変に維持される。

第十三図



第十三図はそれぞれ ρ の値を所与とする C.E.S. 生産函数において技術進歩が中立的な場合、資本労働比率と要素間の限界代替率がいかなる関係におかれるかを示すものである。ここでは経験的に観察される $0<\delta<1-\delta$ という関係をもとし ρ がそれぞれの値をとる場合、資本労働比率と要素の限界代替率との間の技術的関係が示される。$\rho=0(\sigma=1)$ のダグラス函数の場合は原点通過の半直線で示さ

れ、$\rho=1\left(\sigma=\frac{1}{2}\right)$ の場合は縦軸を対称軸とする二次曲線の一部として示され、また $\rho=-1$ $(\sigma=\infty)$ の線型生産函数の場合は要素の限界代替率は凡ゆる資本労働比率のもとで一定であるので、$\left(0,\ \frac{1-\delta}{\delta}\right)$ を切片とする横軸に平行な直線の一部として示される。ρ を所与とするそれぞれのC.E.S.生産函数において中立的技術進歩の場合、資本労働比率と要素の限界代替率との間の技術的関係を時間を通じて不変に維持するということは、第十三図で示されるそれぞれの線上に体系が持続的に位置されねばならないことを意味するものである。第十三図において ρ が0の場合、前述のように原点通過の半直線で示されるが、その勾配は $\frac{R}{r}$ で一定(μ)であり、また(21)′より $\bar{d}_K=\frac{1}{1+R/r}$……(21)″ であるので、それは資本の分配率の不変であることに対応するものである。更に、それぞれの ρ に関して与えられる各曲線が分配率一定を意味する上の半直線上の一点 $P\left(1,\ \frac{1-\delta}{\delta}\right)$ と交わることは(23)において資本労働比率が1であるならば、資本の分配率はあらゆる代替可能な生産函数に関して一定(δ)であるということに対応する。また、上図において $-1\leqq\rho<0$ の場合、各曲線は $0<r<1$ $(1<r)$ に関して ρ が0の場合よりも上(下)に位置するので資本の分配率は δ より小(大)である。$0<\rho<\infty$ の場合、逆に各曲線は $0<r<1$ $(1<r)$ に関して ρ が0の場合より下(上)に位置するので資本の分配率は δ より大(小)であることを意味する。

資本の分配率と要素間代替弾力性の関係は(24)と(29)″より

$$\frac{\dot{\bar{d}}_K}{\bar{d}_K}=-\frac{\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\frac{\dot{r}}{r}}{(\mu r^{\rho})^{-1}+1}=\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\bar{d}_L\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(24)'$$

である。

よって、

$0<\sigma<1$ の場合　$\frac{\dot{r}}{r}>0$ ならば $\frac{\dot{\bar{d}}_K}{\bar{d}_K}<0$

$\frac{\dot{r}}{r}<0$ ならば $\frac{\dot{\bar{d}}_K}{\bar{d}_K}>0$

$\tilde{\sigma}=1$　の場合　$\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}=0$

$1<\tilde{\sigma}\leqq\infty$　の場合　$\frac{\dot{r}}{r}>0$　ならば　$\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}>0$

$\frac{\dot{r}}{r}<0$　ならば　$\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}<0$

そして $0<\tilde{\sigma}\leqq\infty$ に関して $\frac{\dot{r}}{r}=0$ ならば $\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}=0$ である。

周知の通り、代替弾力性が1の場合、資本労働比率の変・不変にかかわらず分配率は一定である。$0<\tilde{\sigma}<1$ の場合は資本労働比率が増加(減少)するにしたがって資本の分配率は減少(増加)し、また$0<\tilde{\sigma}\leqq\infty$ の場合は上の逆の関係となる。そして代替可能生産函数においてはいずれも資本労働比率が一定ならば分配率は不変となる。

以上、一次同次性をもつC.E.S.生産函数を中心としてソローの中立的技術進歩に関する問題について理論的考察を試みたが、以下においてそれに関する問題点を述べよう。既に明らかなように中立的技術進歩に関するヒックスの公準は生産函数との関連において規定されるソローの公準とコンシステントである。ソローの中立的技術進歩においては(1)の生産函数を特性づけるρを所与とすれば、μ（又はδ）が時間と独立に一定であることが(27)′によって明白であり、技術進歩率の時間的パターンと独立である。

まず、技術進歩の中立性の判定について述べるならば、ソローは生産函数 $V_t=F(K_t, L_t, t)$ において中立的技術進歩の場合、$V_t=A_t\cdot f(K_t, L_t)$ に関して、資本労働比率に対する $\frac{\Delta A}{A}$ の分散を用いる方法を提示する。ソローの方法においては技術進歩率と利用される資本労働比率との関係の独立性のみが対象とされ、$f(K_t, L_t)$の資本労働比率と限界代替率の関係で把捉される技術的関係の不変性に関して分析されない。従って、この方法は非中立的技術進歩と中立的技術進歩を明確に区別

することが出来ない。

次に、技術進歩率は一般的に恒常率で与えられるが、γの時間形態として筑井氏(16. pp. 35~9)はそれが周期的に変動するものと仮定して技術進歩が体系の運動に及ぼす効果を分析した。技術進歩率に関するソロー(2. p. 315)の1909~49における分析結果によれば各年の$\frac{\Delta A}{A}$はランダムな変動を示し、時間的な規則変動はみられず、それは収益規模、非中立的技術進歩によるバイアスを含んでいるかも知れないのである。技術進歩率の変動は生産函数の立場から云えば、$f(K, L)$に関して資本労働比率と要素の限界代替率間の技術的関係を不変とする中立的技術進歩において技術進歩率の特定の時間形態によるばかりでなく、その技術的関係を可変的とする非中立的技術進歩によっても後段で示されるように現われる。

更に、技術進歩という概念に関してソローが述べるように労働力の教育の改善、その他の要因が内包され、生産函数の時間軸に関するシフトとして取扱われる。したがって技術変化は$f(K_t, L_t)$と独立である時間的な規則的変動要因を包括する。もし、ある生産弾力性をもつ第三の投入要素が存在した場合、それが生産函数に陽表化されないならば、その時間的変動のパターンのみが技術進歩として含まれることになるのである。ソローの技術変化は外部経済、経営の改善、生産物構成等の変化等の諸要因を包摂するものであり、前述のように残差とよばれる。この残差はレヴィン(17. pp. 226~8)の指摘するようにすべてのインタラクションを含むものであり、それの効果が技術進歩に帰属されるという理由は存在しないのである。以上のようにソローの技術変化は量的、質的諸要因を内包するものであり、総体的な意味での生産効率の変化を示す。

ソローの中立的技術進歩の概念規定は資本労働比率が一定の場合、要素の限界代替率を不変に維持しつつ、生産函数の純粋なスケール変化をもたらす技術変化である。よって、生産物等量曲線はその曲率を変化することなく時間軸に関して上方にシフトする。そこで、資本労働比率が一定の場合、資本と労働の限界生産力、或は均衡における利潤率と賃金率は同時(g)に上昇し、分配率は不変に維持される関係を内包する。このような$f(K_t, L_t)$に関する技術的関係の不変性、技術進歩と

$f(K_t, L_t)$ の技術的関係の独立性、或は所与の資本労働比率における両要素の限界生産力の増加率の均等性が長期的に持続されるかどうかは問題であり、もし維持されるとするならば、その保証がいかにして与えられるかが問題であろう。

注(1)　生産函数 $V=F(K,L)$ が一次同次性をもち、要素市場が競争均衡におかれているものとすれば、A.C.M.S. (7. pp. 227～8) により、$\dfrac{w}{l}\cdot\dfrac{dl}{dw}=-\dfrac{\dfrac{\partial V}{\partial K}\dfrac{\partial V}{\partial L}}{\dfrac{K}{L}V\dfrac{\partial^2 V}{\partial K^2}}$ (w：賃金率　l：生産性) が与えられる。オイラー定理により $\dfrac{\partial^2 V}{\partial K\partial L}=-\dfrac{K}{L}\dfrac{\partial^2 V}{\partial K^2}$ であるので $\dfrac{w}{l}\dfrac{dl}{dw}=\dfrac{\dfrac{\partial V}{\partial K}\dfrac{\partial V}{\partial L}}{V\dfrac{\partial^2 V}{\partial K\partial L}}$ となり、アレン等による代替弾力性の定義と一致する。したがって択一的に上の条件のもとで、資本係数の利子弾力性が同様にして代替弾力性を表わすことは本文の(26)と(29)''より明らかである。

(2)　$\dfrac{\partial V}{\partial L}$, $\dfrac{\partial V}{\partial K}>0$ であることは本文の(16)と(18)より導かれる。又 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial L^2}=-\gamma^{-\rho}(\rho+1)(1-\delta)V^{\delta+1}L^{-\rho-2}$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial K^2}=-\gamma^{-\rho}(\rho+1)\delta V^{\rho+1}K^{-\rho-2}$ によって、$-1<\rho<\infty$ ならば $f_L''<0$, $f_K''<0$ である。

(3)　(2)を(1)''より導くならば次の通りとなる。$\exp\left(\dfrac{\rho}{s}\log\dfrac{V}{\gamma}\right)=\dfrac{k}{s}\exp(-\rho\log K)+\dfrac{j}{s}\exp(-\rho\log L)$ L'Hopital's Rule により $1-\dfrac{\rho}{s}\log\dfrac{V}{\gamma}+O(\rho^2)=1-\dfrac{k}{s}\rho\log K-\dfrac{j}{s}\rho\log L+O(\rho^2)$　両辺に $\dfrac{s}{\rho}$ を乗じ、$\rho\to 0$ とすることによって $\log\dfrac{V}{\gamma}=k\log K+j\log L$　$\dfrac{V}{\gamma}=K^kL^j$, $k=\delta$ とおき、一次同次性を仮定すれば $V=\gamma K^\delta L^{1-\delta}$ となり(2)が導かれる。

(4)　これらの曲線の勾配 η は次のように表わされる。$\eta=d\left(\dfrac{\frac{dl}{dt}}{l}\right)\Big/d\dfrac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{r}$　l と r が任意の時点で先決されるものとすれば、$\eta=\dfrac{r}{l}d\left(\dfrac{dl}{dt}\right)\Big/d\left(\dfrac{dl}{dt}\right)$　ここで $\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{dl}{dr}\dfrac{dr}{dt}$　よって $\dfrac{dl}{dr}$ が $\dfrac{dr}{dt}$ と独立であれば、$\eta=\dfrac{r}{l}\dfrac{dl}{dr}$ である。$\dfrac{r}{l}=\dfrac{K}{V}$ 又一次同次のもとで $\dfrac{dl}{dr}=\dfrac{\partial V}{\partial K}$ であるので η は $\dfrac{K}{V}$ が一定の場合 $\dfrac{\partial V}{\partial K}$ が中立的技術進歩において可変的であれば変化し、TT′線は曲線となる。ダグラス函数においては所与の $\dfrac{K}{V}$ に関して $\dfrac{\partial V}{\partial K}$ が不変であることによって η は一定であり、TT′線は直線となる。

(5)　$V=\gamma f(K,L)$ に関して γ が時間的に変動するならば(15)の関係は次の通りとなる。$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V}{K}\right)-\dfrac{\dot{\gamma}}{\gamma}\dfrac{V}{K}=\dfrac{f_L'}{f_{KL}''}\left(\dfrac{d\partial V}{dt\partial K}-\dfrac{\dot{\gamma}\partial V}{\gamma\partial K}\right)$　よって $\dfrac{d\partial V}{dt\partial K}>\dfrac{\dot{\gamma}\partial V}{\gamma\partial K}$ ならば利子率と資本係数の相反関係が同様にして成立する。

(6) [29]”より ρ=−1 ならば σ=∞ であり、生産物等量曲線は直線(曲率0) ρ=∞ ならば σ=0 等量曲線の曲率は∞となり、この点で直角にキンクする。

三、非中立的技術進歩

ヒックス(14. p. 134)は先進経済におけるように資本が労働よりも急速に成長する経済において要素間の代替弾力性は1以下に低下する傾向があることを示唆した。ハンバーグ(18. p. 241)、フェルナー(19. p. 425)はこの見解を進めて同じ新古典派的な立場から代替弾力性の低下に伴う資本の分配率の低下を回避するには労働節約的技術進歩が必要であると主張した。ヴァフヴァニス(20. pp. 208~11)は資本と労働の対数微分の比率で定義した代替弾力性の低下傾向を認め、又クレーヴィス(21. pp. 917~47)は資本労働比率の上昇傾向と要素の相対価格の低下にともなう長期的な要素間の代替弾力性の低下を観察し[7]、更に**A.C.M.S.** (7. p. 227, p. 244)は生産性に対する賃金弾力性として把捉された要素間の代替弾力性が国際間におけるクロス・セクション分析、及び米国経済に関する時系列分析によっていずれも1以下である事を統計的に有意に導き出した[8]。

一方、筆者(22. pp. 54~63)は**A.C.M.S.**によって定義された上の関係で示される要素間の代替弾力性値について日本経済における製造業の中の若干の業種を対象として1953~59にわたる各年度に関してクロス・セクション分析による最小自乗推定を試みた[9]。そこで要素間の代替弾力性は択一的なモデルに関して各業種、各対象年度にわたって殆んど1以上であることが見出され、又要素間の代替弾力性の推定値は一般的に各業種に関して対象とされた期間の中においてもかなり不安定的である事が見出された。又、生産性に対する賃金の弾力性という関係によって代替弾力性を推定する方法はミーナジアン(23. pp. 261~70)、ファーガソン(24. pp. 309~13)により「製造業センサス」を用いてクロス・セクション分析が行なわれた。前者においては1954~57に関して14業種の中、2業種を除いて代替弾力性は1より有意に異なるという関係[10]、後者においては1947,

54, 58の全体に関して、11業種、129の標本についてその41%が統計的に有意に代替弾力性は1から異ならないという関係[11]とその不安定性が確認されている。

次に、技術進歩のパターンに関してソロー(1. p. 315)は1909~49の米国経済の非農業部門について平均的に中立的であったと結論し、又技術進歩率が変動的であることを指摘した。マッセル(3. pp. 182~88)はこのソローの手法に従い、より改良された資料を用いて同製造業部門における技術進歩に関して分析を試み、同様に技術進歩の重要性を強調した。一方、ブラウン、ポプキン(4. pp. 402~11)は1890~1958の米国経済の非農業部門に関して、この期間において若干の技術的エポックの存在することを指摘した。そして、上の観察期間に関して若干の期間区分を行い、各期間別に中立的技術進歩を導入した一般的ダグラス函数を適用して時系列分析を試みた。この分析結果においては収益規模の低下傾向と要素の偏生産弾力性値の不安定性が観察される。この要素の偏生産弾力性の変化は資本労働比率に対する要素の限界代替率の技術的関係が長期的に不変でないことを示唆する。レゼック(5. pp. 57~63)はソローにおける中立性の判定法が資本労働比率に対する産出高の相対的変動率の相関によって導かれる事は不満足であるとし、要素の相対価格を用いて導かれた要素の限界代替率と資本労働比率を直接使用して1919~59の米国経済について技術進歩のパターンを検討し[12]、その非中立性を見出した。このような代替弾力性の低下、及び技術進歩のパターン等に関する理論的、経験的考察は生産函数 $V_t=\gamma f(K_t, L_t)$ の技術的関係が時間的に不変であるという前節においておかれた仮定に基づく結果と相容れないものである。上の様な諸観察事実を考慮するならば、われわれは単に中立的技術進歩を問題とするに留まらず、更に非中立的技術進歩に関する考察を必要とするであろう。そこで、本節においてはρを所与とする生産函数において、一次同次性のもとで非中立的技術進歩が要素間の代替弾力性、要素の分配率、及び技術進歩率に関して与えるそれぞれの効果を理論的に考察することにする。

中立的技術進歩においては(27)′の μ が時間と独立であることによってソローとヒックス、又はミードの定義に関して内容的

にコンシステントであることが示された。次に、非中立的技術進歩に関して生産函数との関連のもとにおいていかなる規定が適当であろうか。非中立的技術進歩においては ρ を所与とする生産函数において資本労働比率が一定であるとしても、限界代替率は異時点間において変化するとみるべきであろう。そこで、(27)′における μ が時間に関して従属であるとして取扱うのが適当であろう。

(27)′は
$$R_t=\mu(t)(r_t)^{\rho+1} \quad\cdots\cdots(27)''$$

(27)″より
$$\frac{\dot{R}}{R}=\frac{\dot{\mu}}{\mu}+(\rho+1)\frac{\dot{r}}{r} \quad\cdots\cdots(36)$$

ここで、$\frac{\dot{r}}{r}=0$ ならば $\frac{\dot{R}}{R}=\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ である。

(36)より資本労働率が不変であるとすれば、$\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ が正(負)であることにより限界代替率は増加(減少)する。よって、非中立的技術進歩の各パターンを生産函数との関連で規定する場合においては資本労働比率を一定とした時、要素の限界代替率の時間的増減、或は(36)における $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ の正負によって類別することが適当である。これと択一的に福岡氏(25. p. 4)における同様な動学的関係より $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_L'}{f_K'}\right)\gtrless 0$ (すべての t と r に関して)を基準とする分類、及び宇沢氏等(26. pp. 68~70)の生産函数 $x=\varphi(v_1\cdots v_n;t)$ に関する $S_{ij}=\frac{1}{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\gtrless 0$ を基準とする分類等があげられる。これらは結局同一の関係を表わすものであるが、そのうち筆者の定式は以下に示されるように技術進歩のパターンを類別するばかりでなく、非中立的技術進歩におけるそのバイアスの程度をも表すことになるのである。そこで、非中立的技術進歩に関して(36)より資本労働比率(又は要素供給)一定の場合、要素の限界代替率の時間的増加、又は $\frac{\dot{\mu}}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\log\mu\right)$ が正である場合に資本節約的とよび、要素の限界代替率の時間的減少、又は $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ が負である場合に労働節約的であると規定しよう。これは以下に示されるように新古典派のヒックス、又はミードの技術進歩に関する定義と整合的である。

(30)に(36)を代入して

$$\frac{\dot f_L'}{f_L'}-\frac{\dot f_K'}{f_K'}=\frac{\dot\mu}{\mu}+(\rho+1)\frac{\dot r}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)'$$

ここで、$\frac{\dot r}{r}=0$ であるならば

$$\frac{\dot f_L'}{f_L'}-\frac{\dot f_K'}{f_K'}=\frac{\dot\mu}{\mu}$$ である。

そこで、

$\frac{\dot\mu}{\mu}>0$ ならば $\frac{\dot f_L'}{f_L'}>\frac{\dot f_K'}{f_K'}$

$\frac{\dot\mu}{\mu}<0$ ならば $\frac{\dot f_L'}{f_L'}<\frac{\dot f_K'}{f_K'}$

$\left(\frac{\dot\mu}{\mu}=0\right.$ ならば $\left.\frac{\dot f_L'}{f_L'}=\frac{\dot f_K'}{f_K'}\right)$

よって、$\frac{\dot\mu}{\mu}>0\left(\frac{\dot\mu}{\mu}<0\right)$ ならば、労働の限界生産力の増加率は資本の限界生産力の増加率よりも大（小）であるので、ヒックス又はミードの定義より技術進歩は資本節約的（労働節約的）である。$\frac{\dot\mu}{\mu}=0$（μ一定）ならば、技術進歩により労働と資本のそれぞれの限界生産力は同率で高められるので前述の中立的技術進歩である。この中立的技術進歩においては前節で説明されたように同時に賃金率と利潤率が所与の資本労働比率のもとで技術進歩率と同率で増加する関係として示された。非中立的技術進歩において賃金率と利潤率との間の関係は資本労働比率一定のもとでつぎの関係におかれる。

(1)より、非中立的技術進歩において

$$\frac{\partial V_t}{\partial L_t}=e^{g't}(1-\delta_t)[\delta_t r_t^{-\rho}+1-\delta_t]^{-\frac{1}{\rho}-1} \quad \cdots\cdots\cdots(37)$$

(37)に $\frac{\partial V_t}{\partial L_t}=w_t$ （w＝生産物をニュメレールとする賃金率）を代入して対数に展開し次に時間に関して微分すれば

$$\frac{\dot{w}}{w}=g'-\frac{\dot{\delta}}{1-\delta}+(\rho+1)d_K\frac{\dot{r}}{r}-\frac{\rho+1}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta} \quad \cdots\cdots(38)$$

又、一方非中立的技術進歩において資本の限界生産力は

$$\frac{\partial V_t}{\partial K}=e^{g't}\delta_t[\delta_t+(1-\delta_t)r_t^{\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1} \quad \cdots\cdots\cdots(39)$$

均衡において資本の限界生産力は利潤率に等しいので(39)は(38)と同様な操作により

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi}=g'+\frac{\dot{\delta}}{\delta}-(\rho+1)d_K\frac{\dot{r}}{r}-\frac{\rho+1}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta} \quad \cdots\cdots\cdots(40)$$

資本労動比率が一定のもとで(38)と(40)の第二項は０となるが、両式を辺々相減ずることにより

$$\frac{\dot{w}}{w}-\frac{\dot{\pi}}{\pi}=-\left(\frac{\dot{\delta}}{1-\delta}+\frac{\dot{\delta}}{\delta}\right)=\frac{\dot{\mu}}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots(41)$$

(41)の関係は(36)′より同様にして導かれる。中立的技術進歩においては資本労動比率が一定のもとで前述の通り賃金率の増加率と利潤率の増加率は技術進歩率と同率で一定（g）である。非中立的技術進歩においては(41)で示されるように両者の間に $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ の差が存在し、前述の定義にしたがって資本節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$）技術進歩において利潤率の相対的変動率は賃金率のそれよりも μ の相対的変動率だけ高（低）いのである。レーニス（27. p. 307）は非中立的技術進歩における革新のバイアスを測る指標として次のように定式化する。 $B_L\equiv H_L-J$ ……(42)，$B_K\equiv H_K-J$ ……(43)　ここで $B_L(B_K)$ は労働使用的（資本使

用的)バイアスを示し、又 $H_L(H_K)$ は労働(資本)の限界生産力の増加率を示し、そして J は $\dfrac{\partial f}{\partial t}\Big/Y$ すなわち技術進歩率を表わす。したがって、(42)と(43)を相減すれば、$B_L-B_K=H_L-H_K$ となり、H_L-H_K は(41)に関して $\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}$ を意味するので、$\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}$ はレーニスの概念でいうならば、要素使用的バイアスの差を意味することになる。

また、資本労働比率が一定の場合、賃金率と利潤率の変動率は(38)と(40)において $\dfrac{\dot{r}}{r}=0$ とおいた関係によって示される。上述のようにヒックスとミードの技術進歩の定義と整合的に生産函数との関連（ここでは $f(K_t, L_t)$）において非中立的技術進歩を規定することが出来る。そこで、まず非中立的技術進歩の要素間の代替弾力性に対する効果より検討を試みよう。

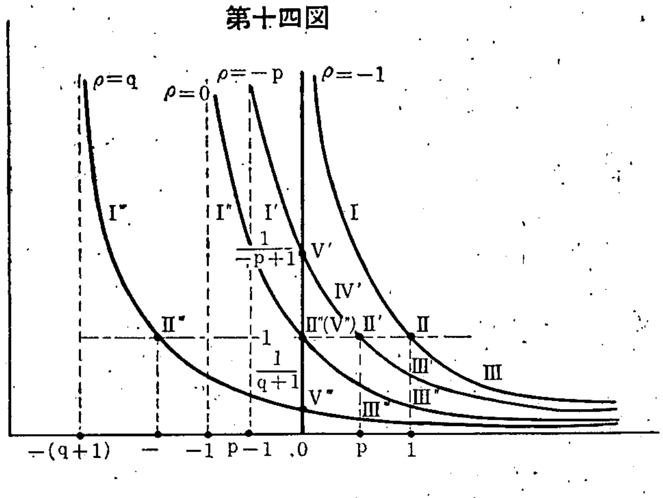
(29)に(36)を代入して

$$\sigma=\frac{\dfrac{\dot{r}}{r}}{\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}+(\rho+1)\dfrac{\dot{r}}{r}}=\frac{1}{\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}\Big/\dfrac{\dot{r}}{r}+\rho+1}=\frac{1}{\dfrac{d\log\mu}{d\log r}+\rho+1}\quad\cdots\cdots(44)$$

(44)より要素間の代替弾力性は ρ を所与とすれば資本労働比率と μ の相対的変動率の比（或は μ に対する r の弾力性）によって規定される。ρ を所与とする生産函数において資本労働比率が増加しつつあり、技術進歩が資本節約的 $\left(\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的 $\left(\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$）であれば、要素間の代替弾力性は $\dfrac{1}{\rho+1}(=\bar{\sigma})$ よりも低下（増加）する。この場合、資本労働比率が減少しているならば、上の関係は逆となる。第十四図は縦軸に代替弾力性、横軸に μ と r の相対的変動率の比率をとり、それぞれ ρ を所与とする生産函数の代替弾力性と μ と r の相対的変動率の比との関係を示すものである。

第十四図で明らかなように、それぞれ ρ を所与とすれば、各曲線は $\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}\Big/\dfrac{\dot{r}}{r}=-(\rho+1)$ と横軸を漸近線 $\left(\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}\Big/\dfrac{\dot{r}}{r}\right)$ とする双曲線で示される。ρ が -1 の場合にはこの漸近線は縦軸と一致し、ρ がそれよりも大である程、漸近線は縦軸より左方に位置する。技術進歩の全パターンにおいて ρ を所与とする生産函数が一定の漸近線をもち、横軸の上方に位置する双曲線で示さ

第十四図



（第14図において $0<p<1, 0<q<\infty$ であるとされる。）

れることは生産物等量曲線が原点に関して非凹であり、又非中立的技術進歩において μ と r の相対的変動率の比が $-(\rho+1)$ 以下になりえないという条件をもつものであることを意味する。一般的に非中立的技術進歩における μ の変動（同時に δ のそれと逆方向の変動）は上述の通り代替弾力性の変化をもたらすが、それは生産物等量曲線の曲率の変化を結果する。(13) 非中立的技術進歩による μ の増加（減少）或は δ の減少（増加）は資本労働比率が増加しつつあるならば、代替弾力性を減少（増加）させ、同時に等量曲線の曲率を増加（減少）させる。そこで、資本労働比率が減少しつつあるならば、代替弾力性を増加（減少）させ、又等量曲線の曲率を減少（増加）させる。従って、非中立的技術進歩 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}\neq 0\right)$ において $-(\rho+1)>\frac{\dot{\mu}/\mu}{\dot{r}/r}$ であるならば、生産物等量曲線は上方に凸となり、経済的に有意性をもたない誤まった曲率（同時に負の代替弾力性）をもつことになる。対象とされる生産函数はその生産物等量曲線の曲率が0から $+\infty$ までの値をとる場合であり、それは等量曲線が直線で示される場合から、上方に直角にキンクするに至るまでの場合に限られることに対応し、（同時に代替弾力性が $+\infty$ から0までの値をとる場合に限られることを意味し）、これらの範囲の中で問題となるのである。第十四図で示される様に ρ を所与とする生産函数の代替弾力性は技術進歩の全パターンにおいて $-(\rho+1)$ の漸近線をもつ双曲線で表わされる。これは同時に μ と r の相対的変動率に一定の限界があることを示すものであった。従って、そこで技術進歩のパターンが一定の制約を受ける場合が生ずることがある。例えば ρ が -1 の場合、生産物等量曲線の非凹性を維持するためには、第十四図で明らかなように技術進歩のパターンは μ と r の相対的変動率の比が正でなければならないので、資本労働比

率の増加（減少）において非中立的技術進歩は資本節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$）と対応せねばならない。第十四図において ρ を所与とする生産函数の代替弾力性の変化を示す各双曲線と縦軸との交点はそれぞれ中立的技術進歩 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}=0\right)$ を示すものである。非中立的技術進歩において代替弾力性は中立的技術進歩の場合の $\frac{1}{\rho+1}$ に対して増減するが、その変化は μ と r の変動率の比が相対的に大（小）である程、一般的に小（大）である。又、そこで $\frac{\dot{\mu}}{\mu}=-\rho\frac{\dot{r}}{r}$ であるならば、

(44)より

$$\sigma=\frac{1}{\frac{\dot{\mu}}{\mu}\Big/\frac{\dot{r}}{r}+\rho+1}=1$$

である。この場合においては ρ の値のいかんを問わず代替弾力性は1であり、中立的技術進歩におけるダグラス生産函数の示す値と一致する。このような関係に体系がおかれるならば、要素の分配率は不変に維持されることは(24)′より明らかである。

次に、非中立的技術進歩が要素の分配率に及ぼす効果について考察することにしよう。一次同次性と要素市場の競争均衡を前提とすれば、μ（或は δ）を時間の函数とする非中立的技術進歩において資本の分配率は(21)と同様にして次の通りとなる。

$$d_{K_t}=\delta_t\left(\gamma_t\frac{K_t}{V_t}\right)^{-\rho}\cdots\cdots(45)$$ （d_{K_t}：非中立的技術進歩における資本の分配率）

(45)において非中立的技術進歩による δ_t の変化、及び技術進歩率と資本係数の変化という三者の変化の関係を検討することによって資本の分配率の変化を説明することが出来よう。しかし、(45)を(21)′と同様に変形することによって、より直接的に資本の分配率に対する非中立的技術進歩の及ぼす効果を考察することが出来る。

$-1\leqq\rho<8$ に関して $d_{K_t}=\frac{1}{1+\mu_t\gamma_t^{\rho}}\cdots\cdots(46)$　ここで、ρ が0ならば $d_{K_t}=\frac{1}{1+\mu_t}=\delta_t\cdots\cdots(46)'$　である。

よって、ρが0である場合、技術進歩が資本節約的$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$$\left(労働節約的\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$であるならば、(46)′において分母は増加（減少）するので資本の分配率は減少（増加）する。この場合、資本の分配率は資本労働比率の変動と独立である。又、$-1\leqq\rho<0$と$0<\rho<8$の場合において、資本労働比率が1ならば、資本の分配率は上と同様に(46)′によって規定される。よって、$r=1$ならば、所与の生産函数のρの値のいかんを問わず資本の分配率はδ_tの変化に一致して変化する。$r\neq 1$ならば、資本の分配率は一意的にδ_tの変化によってのみ規定されず、資本労働比率の変動によって変化する。$-1\leqq\rho<0$ $(0<\rho<8)$ならば、資本労働比率の増加は資本の分配率の減少（増加）を、又その減少は資本の分配率の増加（減少）をもたらす。そして、資本の分配率は資本労働比率が1より大ならば、ρが大（小）である程、小（大）であり、それが1より小ならばρが大（小）である程、大（小）である。

$$\frac{\partial d_{Kt}}{\partial\rho}=-\frac{\mu_t r_t^{\rho}\log r_t}{(1+\mu_t r_t{}^{\rho})^2}\cdots\cdots(47)$$

或は

$$\frac{\frac{\partial d_{Kt}}{\partial\rho}}{d_{Kt}}=-\frac{\log r_t}{(\mu_t r_t{}^{\rho})^{-1}+1}=-d_L\log r_t\cdots\cdots(47)'$$

よって、

$r>1$　ならば　$\frac{\partial d_{Kt}}{\partial\rho}<0$

$0<r<1$　ならば　$\frac{\partial d_{Kt}}{\partial\rho}>0$

上で示されたようにそこで、もしも技術進歩が資本節約的（労働節約的）ならば、資本の分配率は減少（増加）するが、又それは資本労働比率の変化によって変化する。

(46)′より　$-1\leqq\rho<8$　において

$$\frac{\dot{d}_K}{d_K}=-\frac{r^{\rho-1}(\dot{\mu}r+\rho\mu\dot{r})}{1+\mu r^{\rho}}=-\frac{\frac{\dot{\mu}}{\mu}+\rho\frac{\dot{r}}{r}}{(\mu r^{\rho})^{-1}+1}=-\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}+\rho\frac{\dot{r}}{r}\right)d_L\cdots\cdots(48)$$

(48)において μ 及び r（又は d_L）は正であるので、資本の分配率の変動は次の関係によって規定される。

(a) $\frac{\dot{\mu}}{\mu} > -\rho\frac{\dot{r}}{r}$ ならば $\frac{\dot{d}_K}{d_K} < 0$

(b) $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\rho\frac{\dot{r}}{r}$ ならば $\frac{\dot{d}_K}{d_K} = 0$

(c) $\frac{\dot{\mu}}{\mu} < -\rho\frac{\dot{r}}{r}$ ならば $\frac{\dot{d}_K}{d_K} > 0$

そこで、これらの関係を(44)に適用すれば次の通りとなる。(a)の場合、$\frac{\dot{r}}{r}>0\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$ならば、$\sigma<1$（$\sigma>1$）であり、(b)の場合、$\frac{\dot{r}}{r}$の正負をとわず $\sigma=1$ であり、又(c)の場合、$\frac{\dot{r}}{r}>0\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$ならば、$\sigma>1$（$\sigma<1$）である。以上の関係より生産函数の ρ の値のいかんをとわず、(a)の場合、$\frac{\dot{r}}{r}>0\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$ならば、代替弾力性は1以下（以上）であり、資本の分配率は低下する。(b)の場合、代替弾力性は1であり、資本の分配率は不変である。(c)の場合、$\frac{\dot{r}}{r}>0\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$ならば、代替弾力性は1以上（以下）であり、資本の分配率は増加する。資本の分配率と代替弾力性の関係は(24)′の $\bar{d}_K$ に d_K と置換えることによって得られる。

次に $\rho=-1$, $-1<\rho<0$, $\rho=0$, $0<\rho<8$ 等のそれぞれの場合について非中立的技術進歩と資本の分配率、及び代替弾力性の関係を検討しよう。以下においては生産函数の ρ を所与とし、生産物等量曲線は非凹性（又は、代替弾力性は非負性）をもつという事を制約条件として説明される。

そこで、まず ρ が -1 である場合、技術進歩が資本節約的$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$）であり、資本労働比率が増加$\left(\frac{\dot{r}}{r}>0\right)$（減少$\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$）する場合において、$\mu$ と r の相対的変動率の比が0より大で1より小ならば、第十四図の中でⅠの部分で示され、代替弾力性は1以上であり、資本の分配率は増加（減少）しつつある。そこで、μ と r の相対的変動率の比が1であるな

らば、第十四図においてⅡの点で示され、代替弾力性は1であり、資本の分配率は不変である。又、その比が1より大であるならば、第十四図においてⅢの部分で示され、代替弾力性は1以下であり、資本の分配率は減少（増加）しつつある。$-1<\rho<0$ の場合、いま ρ がその範囲の中で $-p\ (0<p<1)$ の値をとるものとする。いま、技術進歩が資本節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的 $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$）であり、資本労働比率が減少（増加）する場合において、μ と r の相対的変動率の比が $p-1$ より大で0より小であるならば、第十四図においてⅠ′の部分で示され、代替弾力性は $\frac{1}{-p+1}(>1)$ よりも大であり、資本の分配率は減少（増加）しつつある。技術進歩が資本節約的（労働節約的）であり、資本労働比率が増加（減少）する場合、そこで μ と r の相対的変動率の比が0よりも大で p よりも小であるならば、第十四図においてⅣ′の部分で示され、代替弾力性は1より大で $\frac{1}{-p+1}$ よりも小であり、資本の分配率は増加（減少）しつつある。又、その比が p であるならば、第十四図においてⅡ′の点で示され、代替弾力性は1であり、分配率は不変である。更に、その比が p よりも大であるならば、第十四図においてⅢ′の部分で示され、資本の分配率は減少（増加）しつつある。第十四図においてⅤ′の点は中立的技術進歩に対応するものであり、資本の分配率は資本労働比率の増加（減少）によって増加（減少）する事は既に説明された。ρ が0である場合、資本の分配率は資本労働比率と独立であるが、生産物等量曲線の非凹性により μ と r の変動率の比は -1 より大でなければならない。技術進歩が資本節約的（労働節約的）であるならば、第十四図においてⅢ″(Ⅰ″)の部分と対応し、代替弾力性は1より減少（増加）し、従って資本の分配率は減少（増加）しつつある。この場合の非中立的技術進歩における資本の分配率の相対的変動率は(48)′によって与えられる。

$$\frac{\dot{d}_K}{d_K}=-\frac{\dot{\mu}}{\mu^{-1}+1}=\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots(48)'$$

第十四図におけるⅡ″の点は中立的技術進歩の場合に対応する点であり、代替弾力性は凡ゆる資本労働比率で1であり、分

配率は不変である。$0<\rho<\infty$ の場合は全く上と同様にして考察することが出来る。[14]

資本の分配率の変動率が中立的技術進歩の場合と比較して非中立的技術進歩の場合いかなる関係におかれるかを検討しておこう。非中立的技術進歩における資本の分配率の変動率は(48)で示され、又中立的技術進歩におけるそれは(24)で示されるが、$-1\leqq\rho<\infty$に関して、もしも技術進歩のパターンが非中立的であるとすれば、資本の分配率の相対的変動率と中立的技術進歩におけるそれとの相対関係は次のように示される。(48)と(24)より

$-1\leqq\rho<\infty$ に関して

$$\frac{\dot{d}_K}{d_K}-\frac{\dot{\bar{d}}_K}{\bar{d}_K}=\frac{-\rho\left(\frac{\mu_t-\mu}{\mu_t}\bar{d}_K\right)\frac{\dot{r}_t}{r_t}-\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t}}{1+(\mu_t r_t^{\rho})^{-1}}=-\left[\rho\left(\frac{\mu_t-\mu}{\mu_t}\bar{d}_{Kt}\right)\frac{\dot{r}_t}{r_t}+\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t}\right]d_{Lt}\cdots\cdots(49)$$

或は

$$=-\left[\rho\frac{\dot{r}}{r}\left(\frac{d_L-\bar{d}_L}{d_L}\right)+\frac{\dot{\mu}}{\mu}\right]d_L\cdots\cdots\cdots\cdots(49)'$$

ρが0の場合、$\frac{\dot{d}_K}{d_K}-\frac{\dot{\bar{d}}_K}{\bar{d}_K}=-\frac{\dot{\mu}}{\mu}d_L=\frac{\dot{\delta}_t}{\delta_t}\cdots\cdots(49)''$ ここで、等量曲線の非凹性よりμとrの変動率の比が-1より大なる場合、技術進歩が資本節約的（労働節約的）ならば、非中立的技術進歩における資本の分配率の相対的変動率は中立的技術進歩におけるそれよりも小（大）である。生産物等量曲線の原点に対する非凹性によりμとrの相対的変動率の比が $-(\rho+1)$ よりも大であるという制約条件のもとで以下、$-1\leqq\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の各場合に関して同様に検討することにする。$-1\leqq\rho<0$ において技術進歩が資本節約的（$\rho=-1$ を除く）（労働節約的）であり、資本労働比率が減少しつつあれば、(49)の分子の第一、第二項はいずれも負（正）、分母は正であるので資本の分配率の変動率は中立的技術進歩の場合のそれよりも小（大）である。又そこで、技術進歩が資本節約的（労働節約的〔$\rho=-1$の場合を除く〕）であり、資本労働比率が増加しつつあるならば(40)の分子の第一項と第二項は相反する符号をもつので、それらの相対関係によって中立的技術進歩の場合との関係が規定される。[15]
$0<\rho<\infty$ において、技術進歩が資本節約的（労働節約的）であり、資本労働比率が増加しつつあるならば、資本の分配率の

相対的変動率は中立的技術進歩のそれより小（大）である。資本労働比率が減少する場合、前と同様な相対関係によって規定される。

次に、非中立的技術進歩と技術進歩率の相互関係を検討しよう。ソローの中立的技術進歩においては生産函数 $V_t=A_t\cdot f(K_t, L_t; a)$（$a$は技術的特性を示すパラメーター）において資本労働比率と要素の限界代替率間の技術的関係は時間を通じて不変（aは一定）であり、又シフト要因A_tは $f(K_t, L_t; a)$ と独立であるという関係におかれる。よって中立的技術進歩における技術進歩率 g は f が一次同次ならば

$$g=\frac{\dot{A}}{A}=\frac{\dot{l}}{l}-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r}}{f} \cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial r}r}{f}=d_K$ (16) であるので

$$g=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)''$$

が成立する。

非中立的技術進歩の場合においては生産函数に関して資本労働比率と要素の限界代替率間の技術的関係が時間を通じて可変的であり、そして生産函数はこのような関係を伴いつつシフトするものと考えられる。そこで、非中立的技術進歩においては生産函数を $V_t=A'_{(t)}\psi(K_t, L_t; a_t)$ と表わそう。よって生産物量等曲線はその曲率を変化しつつ時間軸に関して上方にシフトするものとされる。

一次同次生産函数 $V=\gamma[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$ に関して非中立的技術進歩の場合は中立的技術進歩の場合におけるδ、及

びρの時間的恒常性に対してδ、及びρが時間的に変化するものとみられる。ρは生産函数を特性づけるものであり、生産函数の型を決定するものである。よってρが時間的に変化するならば、生産函数は不断にそのパターンを変化することを意味する。しかし、小稿では同一のパターンをもつ生産函数が非中立的技術進歩によっていかなる影響を受けるかを考察するためにρを時間的に不変であるとして取扱うことにする。このような条件において技術進歩率は(51)で与えられる。

$$g' = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\frac{\partial\psi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial\psi}{\partial a}\dot{a}}{\psi} \quad \cdots\cdots (51)$$

$$= \frac{\dot{l}}{l} - d_K\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\partial}{\partial a}(\log\psi)\dot{a} \quad \cdots\cdots (51)'$$

(51)′において $a_t = \delta_t$ であり、又 $\dfrac{\frac{\partial\psi}{\partial\delta}}{\psi} = \dfrac{\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\delta}}{\psi}$ であるので択一的に

$$g' = \frac{\dot{l}}{l} - d_K\frac{\dot{r}}{r} - \frac{d_K}{r}\frac{\partial r}{\partial\delta}\frac{\dot{\delta}}{\delta} \quad \cdots\cdots (51)''$$

で表わされる。

非中立的技術進歩の場合(5)は $l_t = e^{g't}[\delta_t r_t^{-\rho} + (1-\delta_t)]^{-\frac{1}{\rho}} \cdots\cdots$ (52) である。(52)を対数に展開し、時間に関して微分すれば

$$g' = \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\delta r^{-\rho-1}\dot{r} - \frac{1}{\rho}(r^{-\rho}-1)\dot{\delta}}{\delta r^{-\rho} + (1-\delta)}$$

$$= \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\frac{\dot{r}}{r} - \frac{1}{\rho}(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta}}{1 + \frac{1-\delta}{\delta}r^{\rho}} \quad \cdots\cdots (53)$$

よって、

$$=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r}+\frac{d_K}{\rho}(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta}\text{[17]}\cdots\cdots(53)'$$

又、$\mu_t=\dfrac{1-\delta_t}{\delta_t}$ より $\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}=-\dfrac{1}{1-\delta}\dfrac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots(54)\cdots\left(\text{或は}\ \dfrac{\dot{\delta}}{\delta}=(\delta-1)\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}\cdots\cdots(54)'\right)$

(54)において $0<\delta<1$ であるので、$\dfrac{1}{1-\delta}>0$ であり、$\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}>0\left(\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$ ならば $\dfrac{\dot{\delta}}{\delta}<0\left(\dfrac{\dot{\delta}}{\delta}>0\right)$ である。(53)′と(54)より g' は択一的に

$$g'=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r}-\frac{1-\delta}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\mu}}{\mu}\cdots\cdots(55)$$

ρ が０の場合は $d_{K_t}=\delta_t$ であるので

$$g'=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r}-\dot{\delta}\log r=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r}-\dot{d}_K\log r\cdots\cdots(56)$$

(55)において $-1<\rho<0$ の場合、$r<1$ であり、資本労働比率が増加しつつあれば、資本節約的 $\left(\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$（労働節約的 $\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}<0$）技術進歩は d_K を $\bar{d}_K$ より低(高)め、第二項に関して(5)‴の中立的技術進歩の場合のそれに対して技術進歩率を高(低)める効果をもち、又第三項は $1-\delta>0$ であり、前提によって技術進歩率に負(正)の効果を示す。$r>1$ であり、資本の労働比率が減少すれば資本節約的（労働節約的）技術進歩は(55)の第二項に関して(5)‴のそれより技術進歩率を低(高)め、又第三項は正(負)となるでそれを高（低）める効果をもつものである。$0<\rho<\infty$ に場合に関しても、$r<1$ であり、資本労働比率が増加しつつある場合、又 $r>1$ であり資本労働比率が減少しつつある場合において上と同様に非中立的技術進歩は第二項、第三項に関して相反する効果を与えるので、技術進歩率に関する中立的技術進歩の場合との相対関係はそれらの相反効果の大小によって規定されよう。

一般的に $-1 \leqq \rho < 0$, $0 < \rho < \infty$ である場合において(5)'''、及び(55)より、

$$g-g'=(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}+\frac{1-\delta}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\mu}}{\mu}\cdots\cdots(57)$$

或は

$$=(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}-\frac{1}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots\cdots(57)'$$

従って

$$(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless-\frac{1-\delta}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\mu}}{\mu}\cdots\cdots(58)$$

であるか、或は

$$(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless\frac{1}{\rho}d_K(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots\cdots\cdots(58)'$$

によって $g \gtreqless g'$（符号同順）である。従って、(58)、(58)'を変形して、

$$(1-r^{\rho})^{-1}\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless\frac{1-\delta}{\rho}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{\dot{\mu}}{\mu}\cdots\cdots(59)\quad 或は、(1-r^{\rho})^{-1}\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless\frac{1}{\rho}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots(59)'$$

によって非中立的技術進歩と中立的技術進歩の場合の技術進歩率の相対関係が規定される。ここで、$r=1$ の場合は $g-g'=(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}\cdots\cdots(57)''$ であり $(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless 0$ によって同様に規定される。(59)および(59)'より非中立的技術進歩の場合の技術進歩率 g' を中立的技術進歩の場合の技術進歩率 g に均等させる資本労働比率が存在するであろう。そこで、$-1 \leqq \rho < 0$ と $0 < \rho < \infty$ の場合に関して(59)'を均等とおいて、〔$r^{\rho}>1$ の場合〕

$$(r^{\rho}-1)^{-1}\frac{\dot{r}}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(59)''$$

(59)'を積分して

$$\int\frac{dr}{(r^{\rho}-1)r}+\frac{1}{\rho}\int\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{d\delta}{\delta}=C_1\quad(C_1:\ 積分定数)$$

$$\int \frac{r^{\rho-1}}{r^{\rho}-1}dr-\int \frac{dr}{r}+\frac{1}{\rho}\int \frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{d\delta}{\delta}=C_1$$

$$\frac{1}{\rho}\log(r^{\rho}-1)-\log r+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta-\int \frac{d}{dt}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta\cdot dt\right\}=\frac{1}{\rho}\log\beta$$

$$\left(ここで\quad C_1=\frac{1}{\rho}\log\beta\right)$$

$$\log(r^{\rho}-1)-\rho\log r+\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta-\int \frac{d}{dt}\left(\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\right)\log\delta\cdot dt=\log\beta$$

$$\log\beta-\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta+\int \frac{d}{dt}\left(\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\right)\log\delta\cdot dt=\varepsilon$$ とおく

$$\log\frac{r^{\rho}-1}{r^{\rho}}=\varepsilon$$

$$\bar{r}_{\rho}=\left(\frac{1}{1-e^{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\rho}}\cdots\cdots(60)$$

〔$r^{\rho}<1$ の場合〕

$$(1-r^{\rho})^{-1}\frac{\dot{r}}{r}=\frac{1}{\rho}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots\cdots(49)'''$$

上と同様にして解き、$C_1'=\frac{1}{\rho}\log\beta'$, $\log\beta'+\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta-\int \frac{d}{dt}\frac{d_K}{d_K-\tilde{d}_K}\log\delta\cdot dt=\varepsilon'$ とおく

$$\log\frac{r^{\rho}}{1-r^{\rho}}=\varepsilon'$$

$$\bar{r}_{\rho}'=\left(\frac{1}{1+e^{\varepsilon'}}\right)^{\frac{1}{\rho}}\cdots\cdots(60)'$$

又、ρが0である場合、(56)と(5)'''より

$$(d_K-\tilde{d}_K)\frac{\dot{r}}{r}=-\dot{d}_K\log r \cdots\cdots(61)\qquad 或は\qquad (\delta-\tilde{\delta})\frac{\dot{r}}{r}=-\dot{\delta}\log r\cdots\cdots(61)'$$

（$\rho=0$ の場合、$\tilde{d}_K$、$\tilde{\delta}$は一定である）

(61)'より

$$(\log r)^{-1}\frac{\dot{r}}{r}=-\frac{\dot{\delta}}{\delta-\tilde{\delta}}\cdots\cdots(61)''\quad (\delta>\tilde{\delta}\text{ の場合})$$

或は

$$(\log r)^{-1}\frac{\dot{r}}{r}=\frac{\dot{\delta}}{\tilde{\delta}-\delta}\cdots\cdots(61)'''\quad (\tilde{\delta}>\delta\text{ の場合})$$

(61)''、(61)'''において$r>0$であり、又$r\neq1$である。(61)''を積分し

$$\int\frac{d(\log r)}{\log r}+\int\frac{d\delta}{\delta-\tilde{\delta}}=C_2\quad (C_2:\text{積分定数})$$

$$\log(\log r)+\log(\delta-\tilde{\delta})=\log\alpha\quad (C_2=\log\alpha\text{ とおく})$$

$$\bar{r}_0=e^{\frac{\alpha}{\delta-\tilde{\delta}}}\cdots\cdots(62)$$

(61)'''の場合は上と同様にして

$$\bar{r}_0=e^{\alpha'(\tilde{\delta}-\delta)}\cdots\cdots(62)'$$

したがって、上のそれぞれの場合、非中立的技術進歩と中立的技術進歩における技術進歩率を均等ならしめる資本労働比率は非中立的技術進歩におけるd_Kとδの変動（ρが0の場合は$d_K=\delta$）、中立的技術進歩における$\tilde{\delta}_K$（ρが0の場合は$\tilde{d}_K$は一定）によって規定される$\bar{r}_\rho$、$\bar{r}'_\rho$（或は$\bar{r}_0$、$\bar{r}'_0$）で与えられる。次にrが1である場合は(57)''より技術進歩のパターンと独立に資本労働比率が増加し、技術進歩が資本節約的（労働節約的）であれば、中立的な場合よりも技術進歩率は大（小）である。資本労働比率が減少すれば、上の関係は逆となる。以上を基礎として非中立的技術進歩と中立的技術進歩における技術進歩率の相

対関係を考察しよう。以下においてρを所与とする生産函数の等量曲線の非凹性を制約条件とする。ρが-1の場合、資本労働比率が1以上(以下)であり、それが増加$\left(\frac{\dot{r}}{r}>0\right)$(減少$\left(\frac{\dot{r}}{r}<0\right)$)しているとき、もし技術進歩が資本節約的$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$(労働節約的$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$)であれば、いずれの場合においても(55)の第二項は技術進歩率を(5)'''のそれより高める効果をもち、第三項は正であるので中立的技術進歩の場合に相対して技術進歩率は大である。又、資本労働比率が1以下(以上)であり、それが増加(減少)しつつある場合において、技術進歩が資本節約的(労働節約的)であるならば、非中立的技術進歩はいずれも(55)の第二項に関して技術進歩率を(5)'''のそれより高める効果をもつが、第三項は技術進歩率に負の効果を与える。これらの場合において、非中立的技術進歩は第二、第三項に対して技術進歩率に関して相反する効果を与えるので、中立的技術進歩の場合との技術進歩率に関する相対関係はそれらの相反効果の大小によって規定される。そこでは(59)'によって非中立的技術進歩と中立的技術進歩の技術進歩率を均等させる資本労働比率が存在する。(59)''よりρが-1であり、$r<1$の場合は

$$\frac{\dot{r}}{1-r}=\frac{d_K}{d_K-\bar{d}_K}\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots(63)$$

(60)より、

$$r_{-1}=1-e^{\varepsilon}\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

そこで、$r>1$の場合は

$$\frac{\dot{r}}{r-1}=-\frac{d_K}{d_K-\bar{d}_K}\frac{\dot{\delta}}{\delta}\cdots\cdots(63)'$$

(60)'より

$$r'_{-1}=1+e^{\varepsilon'}\cdots\cdots\cdots\cdots(64)'$$

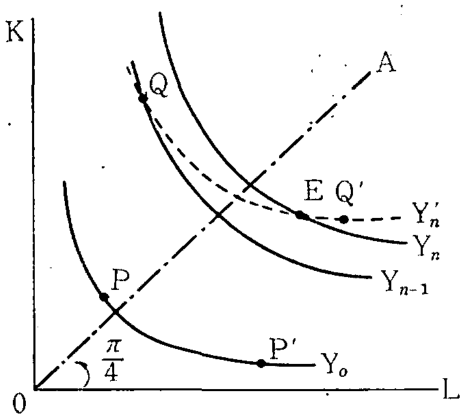
よって、資本労働比率がr'_{-1}(1以下)よりも大(小)であり、又それが増加しつつあり、技術進歩が資本節約的ならば、技術進歩率は中立的技術進歩の場合より大(小)である。資本労働比率がr'_{-1}(1以上)よりも小(大)であり、又それが減少してお

り、技術進歩が労働節約的ならば、技術進歩率は中立的よりも大(小)である。資本労働比率が1でそれが増加(減少)する時に技術進歩率は資本(労働)節約的技術進歩において中立的の場合より大である。資本労働比率が1より大である場合に比較して技術進歩率を中立的技術進歩の場合より高める効果は小である。以上、ρが-1の場合、生産物等量曲線の非凹性を充足しつつ中立的技術進歩と非中立的技術進歩の場合の技術進歩率の相対関係に関して考察を試みた。結局、ρが-1の場合生産物等量曲線が非凹であるためには資本節約的技術進歩は資本労働比率の増加と対応する必要があるが、そこでは(64)によって与えられるr_{-1}以上(以下)の資本労働比率を体系がもつならば、資本節約的技術進歩における技術進歩率は中立的な場合のそれより大(小)である。又、労働節約的技術進歩は資本労働比率の減少と対応するが、そこで(64)′によって与えられる$\bar{r}'_{-1}$以上(以下)の資本労働比率を体系がもつならば、労働節約的技術進歩における技術進歩率は中立的な場合のそれより小(大)である。次に、$-1<\rho<0$, $\rho=0$ および $0<\rho<\infty$ の場合について一括して考察しよう。(64)と(64)′の第三項においてρが$-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ のいずれに属しても体系の資本労働比率が1以上(以下)に関して同一の非中立的技術進歩のパターンのもとでは技術進歩に関して正負いずれであるとしても結局同一方向への効果を示すものである。[18] まず、(I)資本労働比率が増加しつつある場合において技術進歩が資本節約的であれば、体系のもつ資本労働比率が(60)($-1<\rho<0$ の場合、(60)′($0<\rho<\infty$ の場合)、又(62)′($\rho=0$ の場合)で示される$\bar{r}_\rho$、$\bar{r}'_\rho$および$\bar{r}'_0$(いずれも1以下)に相対して大(小)ならば、技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれよりも大(小)であり、又体系の資本労働比率が$\bar{r}_\rho$、$\bar{r}'_\rho$、$\bar{r}'_0$に均等すれば技術進歩率はそれぞれ中立的技術進歩のそれと一致する。又、(II)技術進歩が労働節約的である場合、μとrの相対的変動率の比が$-(\rho+1)$よりも大であることが生産物等量曲線の非凹性にとって必要条件であるが、(60)、(60)′、および(62)で与えられる$\bar{r}_\rho$、$\bar{r}'_\rho$および$\bar{r}_0$(いずれも1以下)に相対して大(小)である資本労働比率を体系がもつならば、技術進歩率はそれぞれ中立的技術進歩の場合に比較して小(大)である。この場合、体系の資本労働比率がr_ρ、r'_ρ、r_0に均等すれば技術進歩率はそれぞれ中立的技術進歩の場

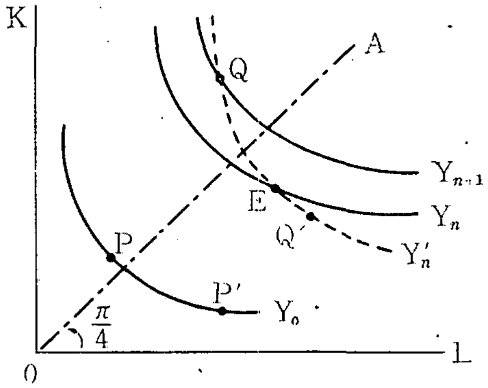
合と同一である。次に、(Ⅲ)資本労働比率が減少しつつある場合において、技術進歩が資本節約的であり、μとrの相対的変動率の比が $-(\rho+1)$ よりも大であるという条件のもとで、体系のもつ資本労働比率が(60)′($-1<\rho<0$ の場合)、(60)($0<\rho<\infty$ の場合)および(62)′($\rho=0$ の場合)で示される $\bar{r}'_\rho$、$\bar{r}_\rho$ および $\bar{r}'_0$(いずれも1以上)よりも大(小)であるならば、技術進歩率は中立的技術進歩のそれに相対して大(小)である。又、この場合、体系の資本労働比率が $\bar{r}'_\rho$、$\bar{r}_\rho$ および $\bar{r}'_0$ に均等すれば、それぞれ技術進歩率は中立的技術進歩の場合と同一である。最後に、また(Ⅳ)技術進歩が労働節約的である場合は、体系のもつ資本労働比率が(60)′、(60)、および(62)で示される $\bar{r}'_\rho$、$\bar{r}_\rho$ および $\bar{r}_0$(いずれも1以上)よりも大(小)であるならば、それぞれ技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれよりも小(大)であり、又体系の資本労働比率が $\bar{r}'_\rho$、$\bar{r}_\rho$、および $\bar{r}_0$ に均等すればそれぞれ技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれに一致する。上の(Ⅰ)〜(Ⅳ)の場合を生産物等量曲線を示す図の上で図解的に示してみよう。第十五図〜第十八図において時間軸を省き、通例にしたがって縦軸に資本、横軸に労働をとる。そこで初期の生産物等量曲線Y_0が非中立的技術進歩によって生産物等量曲線(破線で示される)Y'_nへ、又中立的技術進歩によって等量曲線(実線で示される)Y_nへそれぞれシフトするものとする。そこで、交点Eは非中立的技術進歩と中立的技術進歩の場合の技術進歩率を均等とする点であり、このE点と原点よりなる勾配はその場合の資本労働比率であり、OAは資本労働比率が1である場合を示す半直線である。それぞれの場合において初期の生産点Pは非中立的技術進歩にともなって生産点Qに移動するものとしよう。

(Ⅰ)、(Ⅱ)の場合においては第十五図(第十六図)で示されるように初期の等量曲線Y_0は資本節約的技術進歩$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}>0\right)$(労働節約的技術進歩$\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}<0\right)$)にともなってその曲率を増加(減少)しつつ等量曲線Y'_nにシフトするが、そこでもし技術進歩が中立的であるならば、その曲率を変化することなく等量曲線Y_nにシフトする。そこで、両等量曲線は同一の産出高水準を示すものとし、初期の生産点Pが資本労働比率の増加を伴って生産点Qへ移動するものとすれば、このQ点は等量曲線Y_nよりも低

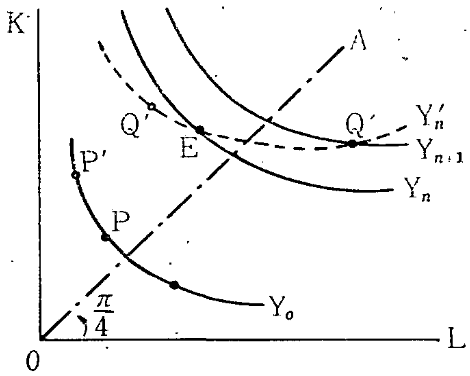
第十五図



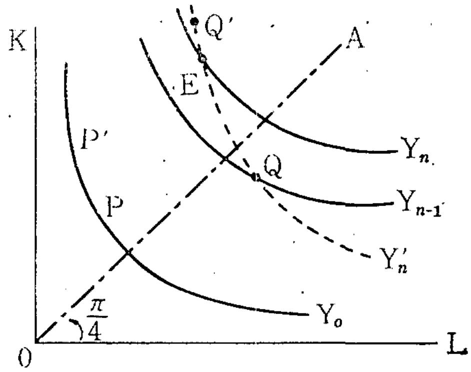
第十六図



第十七図



第十八図



（高）い産出高を示す中立的技術進歩における等量曲線Y_{n-1}（Y_{n+1}）と交わるであろう。従って、上の場合、技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれに相対して大（小）である。もし、そこで生産点P′から生産点Q′へ体系が移動するものとすれば、Q′点は等量曲線Y_nよりも高（低）い産出高をもつ中立的技術進歩における等量曲線と交わることになり、技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれと比較して小（大）である。E点は非中立的技術進歩と中立的技術進歩の場合の技術進歩率を$\bar{r}_\rho$、（$\bar{r}'_\rho$）、又は$\bar{r}_0$（$\bar{r}'_0$）によって与えられる関係により均等とする生産点であり（I）、（II）の場合OAの下に位置する。（III）、（IV）の場合は第十七図（第十八図）で示され、前と同様にして初期の等量曲線Y_0は資本節約的（労働節約的）技術進歩にともなって等量曲線Y'_nにシフトするが、技術進歩が中立的ならば、等量曲線Y_nにシフトする。そこで、両曲線は同一の産出高を示すものとし、初期の生産点Pが資本労働比率の増加を伴って生産点Qへ移動するものとすれば、このQ点は等量

曲線Y_nよりも高(低)い産出高をもつ中立的技術進歩における等量曲線 $Y_{n+1}(Y_{n-1})$ と交わるであろう。従って、上の場合、Q′技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれよりも小(大)である。もし、そこで生産点P′から生産点Q′へ移動するならば、Q′点は等量曲線Y_nよりも低(高)い産出高をもつ中立的技術進歩における等量曲線と交わることになり、技術進歩率は中立的技術進歩の場合のそれに相対して大(小)である。E点は非中立的技術進歩と中立的技術進歩の場合の技術進歩率を均等とする生産点であり、(Ⅲ)、(Ⅳ)の場合OAの上に位置する。このように非中立的技術進歩と中立的技術進歩における技術進歩率の相対関係は技術進歩のパターン、資本労働比率の変動率及びその水準によって規定される。

四、結び

以上において体化されないタイプの技術進歩の問題を生産函数との関連のもとで限界生産力説を理論的支柱として考察を行なった。ここでは生産函数における要素間代替弾力性の非負性（或は等量曲線の非凹性）、及び生産函数の一次同次性を前提とし、主として一般的生産函数 $V=\gamma[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$ を中心として中立的、及び非中立的技術進歩の問題が理論的に検討された。

技術進歩を生産函数との関連のもとで取扱う上においてρを所与とすれば、資本労働比率が一定の場合、μの値によって技術進歩の各パターンがヒックス、ミード、及びソロー等の新古典派における定義と整合的に類別される。このようにして、まず、中立的技術進歩と非中立的技術進歩の相違は資本労働比率と要素間の限界代替率の間の技術的関係 $f_{(Kt, Lt)}$ の時間的な不変性と可変性の差において見出される。次に、シフト要因A_tにおいては前者におけるA_t と $f_{(Kt, Lt)}$ との独立性、後者における$A_{(t)}$の $f_{(Kt, Lt)}$ の変化に対する従属性という関係において見られる。

このような関係を基礎として中立的、及び非中立的技術進歩における要素間代替弾力性、要素市場の競争均衡下における

要素の分配率、及び技術進歩率に関して検討を加え、又相互の関係を理論的に考察した。ここでは生産函数の特性指標（函数型を決定する）ρが所与とされたが、非中立的技術進歩の場合においては更にρのある時間型態を考慮した分析が必要であろう。技術進歩は長期にわたって一定のパターンを示さないであろう。そこで、もし技術進歩のパターンが変化するならば、その動因に関する理論が必要とされる。

技術進歩を生産函数との関連において考察するにあたり、ここでは技術進歩が外生的に与えられるものとされ、それが新資本に体化されないタイプの場合に関して議論された。

しかし、ソローが「投資と技術進歩」1960という論題で展開した体化された技術進歩の場合において、もし、集計的生産函数が一次同次性をもつダグラス型であり、又資本財がそれぞれのヴィンテージに関して異質的である場合においてもそれらの評価と将来収益が一致する完全予見の条件が存在するならば、小稿で展開された議論はなお有効であろう。

注(7)　クレーヴィスによれば資本労働比率、要素の相対価格、分配率$\left(\frac{\Pi}{W}\right)$はそれぞれ 1900～09 において 1.26, 0.309, 0.39 であるが、1949～59 において 2.60, 0.092, 0.24 であり、代替弾力性は 0.64 である。

(8)　A.C.M.S. による19ヵ国、24業種に関する 1949～56 のクロスセクション分析による計測結果は $0.721<\sigma<1.011$ である。又、米国経済の 1909～49 に関する時系列分析による計測結果は $\sigma=0.569$ である。

(9)　筆者の日本経済における 1953～59 にわたる、食品、繊維、化学、機械等の十業種についての「工業統計表」による計測結果によれば、$0.928<\sigma<2.82$ であり、大半は $1<\sigma<2$ である。

(10)　ミーナジアンはソロー等の時系列分析における代替弾力性の推定法と同様にして $\frac{S}{L}=CW^{\eta}$ を分配率の式に変形して $\frac{W\cdot L}{S}=AW^{(1+\eta)}$（S：付加価値額、L：生産労働者数、W：生産労働者の平均時間収入）を計測式とし、1954～57 に関してクロスセクション分析を行ない、殆ど $\eta<0$ であり、当期間において推定値は近似的に一定であることを結論した。又石油、石炭業、機械(除電機)を除いて $\eta=0$（$\sigma=1$）と有意（五%水準）に異なることを見出した。

(11)　ファーガソンは $v=aw^{b}$（v：生産労働者の man hour についての付加価値、w：平均時間賃金率）を計測式として、1947～1958 に

関してクロス・セクション分析を行ない、パラメータ b（代替弾力性値）は標本129の中90が有意（5％水準）であり、b が1から有意に異らない場合が53、b が1以上の場合が20、$0<b<1$ の場合が17で、39は有意でなく、又相関係数の有意なものは50％であるという関係を見出した。

(12) レゼックは $\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{w}{SP_K}$（$P_K$ は資本財の価格、S は長期負債に対して支払われる利子率、長期負債とエクイテイの比率等によって導かれる収益率の効果を示す指標）の関係より $\frac{\partial K}{\partial L}$ を求め、1919〜59 に関して $\underset{(0.019)}{\frac{K}{L}=0.729}\frac{\partial K}{\partial L}\underset{(0.399)}{+5.35}\,t\ R^2=0.9349$ という関係を導いた。そこで、$\frac{K}{L}$ と $\frac{\partial K}{\partial L}$ 間の相関図において両者の回帰線の側方へのシフトが存在し、両者間の対象期間を通じた安定性は見出されない。

(13) 等量曲線の曲率（κ）は $\kappa=\frac{d^2K}{dL^2}\Big/\left\{1+\left(\frac{dK}{dL}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ で定義される。ここで $\frac{d^2K}{dL^2}=R\frac{\partial K}{\partial L}-\frac{\partial R}{\partial L}$ 一方 $\sigma=\frac{R}{KL}\frac{L\cdot R+K}{R\frac{\partial R}{\partial L}-\frac{\partial R}{\partial L}}$ であるので σ と κ は逆比例関係である。

(14) ρ が $q(0<q<\infty)$ であるものとし、技術進歩が資本節約的（労働節約的）であり、資本労働比率が減少（増加）しているとする。μ と r の相対的変動率の比が $\frac{1}{q}-1$ より大で $\frac{1}{q}$ より小ならば第十四図の I''' の部分で示され $1<\sigma$ であり、資本の分配率は減少(増加)しつつある。μ と r の変動率の比が $\frac{1}{q}$ より大で0より小ならば IV'''' の部分で示され、資本の分配率は増加（減少）している。技術進歩が資本節約的（労働節約的）であり、資本労働比率が増加減少しているならば、III' の部分で示され $\sigma<\frac{1}{q+1}$ であり、資本の分配率は減少（増加）している。V'''' の点は中立的技術進歩に対応する点である。

(15) (49)より $\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\mu_t-\bar{\mu}}{\mu_t}\bar{d}_K\right\}\frac{\dot{r}}{r}\gtreqless\frac{\dot{\mu}}{\mu}$ によって $\frac{\dot{d}_K}{d_K}\gtreqless\frac{\bar{d}_K}{\bar{d}_K}$ である。

(16) $V_t=A_tf(K_tL_t)$ 一次同次性により $l_t=A_tf(r_t\cdot 1)$ $\frac{\partial l}{\partial r}=A_t\frac{\partial f}{\partial r}$ よって、$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{f}=\frac{\frac{\partial l}{\partial r}}{l}$, $\frac{\partial l}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial K}$, $\frac{\frac{\partial l}{\partial r}r}{l}=\frac{\frac{\partial V}{\partial K}K}{V}=d_K$ である。

(17) (52) と (43) より $\frac{\partial\psi}{\partial\delta}=-\frac{1}{\rho}(r^{-\rho}-1)(\delta r^{-\rho}+1-\delta)^{-\frac{1}{\rho}-1}$, $\frac{\partial\psi}{\partial r}=\delta r^{-\rho-1}(\delta r^{-\rho}+1-\delta)^{-\frac{1}{\rho}-1}$ よって $\frac{\partial r}{\partial\delta}=-\frac{1}{\rho}r(1-r^{\rho})$ よって (51″) は $g'=\frac{\dot{l}}{l}-d_K\frac{\dot{r}}{r}-\frac{d_K}{\rho}(1-r^{\rho})\frac{\dot{\delta}}{\delta}$ となり(53)と一致する。

(18) 例えば、(65)の第二項は $r>1$（$r<1$）ならば、ρ が $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ のいずれの場合であるとしても資本節約的技術進歩

においては正（負）であり、労働節約的技術進歩において負（正）である。

〔参考文献〕

(1) R. M. Solow, "Technical Change and the Aggregate Production Function" R. E. S. Vol. 39 Aug 1957.
(2) N. Kaldor, "A Model of Economic Growth" E. J. Dec. 1957.
(3) B. Massel, "Capital Formation and the Technological Change in U. S. Manufacturing", P. E. S. Vol. 62 May 1960.
(4) M. Brown and J. Popkin, "A Measure of Technological Change and Returns to Scale", R. E. S. Nov. 1962.
(5) R. W. Resek, "Neutrality of Technical Progress", R. E. S. Feb. 1963.
(6) E. Domar, "On the Measurement of Technological Change", E. J. Dec. 1961.
(7) K. Arrow, H. B., Chenery, B. Minhas and R. M. Solow, "Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency" R. E. S. Aug. 1961.
(8) M. Brown and J. S. DeCani, "A Measure of Technological Employment", R. E. S. Nov. 1963.
(9) R. F. Harrod, Towards a Dynamic Economics.
(10) H. Uzawa, "Neutral Invention and Stability of Growth Equilibrium", R. E. Stu. Feb. 1961.
(11) J. Black, "The Technical Progress Function and the Production Function", Economica, May 1962.
(12) R. M. Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Q. J. E. Feb. 1956.
(13) F. M. Bator, "On Capital Productivity, Input Allocation and Growth", Q. J. E. Vol. 71, 1957.
(14) J. R. Hicks, The Theory of Wages.
(15) J. E. Meade, A Neo Classical Theory of Economic Growth.
(16) 筑井甚吉「技術進歩率の周期的変動と経済」理論経済学 Sep. 1961, No. 1.
(17) H. S. Levine, "A Small Problem in the Analysis of Growth", R. E. S. Vol. 42 1960.
(18) D. Hamberg "Production Function, Innovation and Economic Growth", J. P. E. June 1959.
(19) W. Fellner, "Full Use or Underutilization; Apraisal of Long Run Factors other than Defense", A. E. R. May 1954.
(20) S. Valavanis, "An Econometric Model of Growth of U.S.A." 1866-1953, A. E. R. Vol. 65 1956.
(21) J. B. Kravis, "Relative Income Shares in Fact and Theory", A. E. R. Dec. 1959.

(22) 高橋房二「要素間代替弾力性に関する計量的考察」日本統計学会会報 1962.

(23) J. R. Minasian, "Elasticities of Substitution and Constant-Output Demand Curves for Labour", J. P. E. Vol. 64 June 1961.

(24) C. E. Ferguson, "Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry", R. E. S. Vol. 65 Aug. 1963.

(25) 福岡正夫「経済成長と技術進歩」昭和三七年度経済理論調査報告

(26) H. Uzawa & T. Watanabe, "A Note on the Classification of Technical Invention" 理論経満学 Sep. 1961.

(27) J. Fei and G. Ranis, "Innovation, Capital Accumulation and-Development", A. E. R. Vol. 53 1963.