

Title	一変数Sobolev空間の埋め込み定理と変分法
Sub Title	Embedding theorems of one-dimensional Sobolev spaces and calculus of variations
Author	丸山, 徹(Maruyama, Toru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2025
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.118, No.1 (2025. 6) ,p.45- 77
JaLC DOI	10.14991/001.20250601-0045
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20250601-0045

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.



一変数 Sobolev 空間の埋め込み定理と変分法

丸山 徹*

序

経済現象の記述とその分析のために、変分法の理論は多くの場面で利用される。変分問題における最適解の存在条件を究明するという基礎的課題には幾とおりかのアプローチが知られているが、本稿では最も初等的な型の変分問題に限って、Sobolev 空間のなかに解の存在を保証する条件を詳しく論じようと思う。

まず若干の準備のうちに、Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,p}$ の埋め込み定理について研究する。つまり $\mathfrak{W}^{1,p}$ は (p の値に応じて) 連続関数の空間あるいは可積分関数の空間のなかに埋め込まれ、しかも埋め込みの線形作用素は完全連続であることを示すのである。

とくに定義域の境界上で 0 となる関数がつくる $\mathfrak{W}^{1,p}$ の部分空間 $\mathfrak{W}_0^{1,p}$ においては、Sobolev 空間のノルムと (一般化された) 導関数の $\mathfrak{L}^p$ -ノルムとが同値であることを根拠づける Poincaré の不等式も重要な結果である。

次に Sobolev 空間の双対空間を決定し、そのうえで Sobolev 空間の弱位相の構造を精査する。たとえば $\mathfrak{W}^{1,1}$ の点列 $\{u_n\}$ が u_0 に弱収束するならば、(イ) $\{u_n\}$ は u_0 に $\mathfrak{L}^1$ -強収束する部分列を有し、また (ロ) $\{u'_n\}$ は u'_0 に $\mathfrak{L}^1$ -弱収束する⁽¹⁾という事実が論証され、これは変分法の解の存在証明にあたって際立った役廻りを演ずるのである。

以上の理論は本来、多変数関数がつくる Sobolev 空間について述べるべきであるが、本稿では初

* 慶應義塾大学名誉教授

(1) u'_n, u'_0 はそれぞれ u_n, u_0 の一般化された導関数であり、通常の意味での導関数 $\dot{u}_n, \dot{u}_0$ と区別する。

等的な一変数函数がつくる空間に視野を限定し、理論の骨格を簡明に示すように努めた⁽²⁾。

最終目標である変分問題の解の存在証明に際しては、Sobolev 空間をめぐる上記の諸結果に加えて、次のふたつの定理が鍵を握る。すなわち (一) 可積分函数空間における弱・相対コンパクト性を特徴づける南雲道夫の定理、および (二) 非線形積分汎函数の連続性をめぐる A.D. Ioffe の定理のふたつである。これらについては私は別の機会に詳しく論じたので⁽³⁾、ここでは結果だけを整理することにとどめた。これらの定理を礎石とし、本稿で論じた諸結果を有効に利用して、初等的変分問題の最適解の存在証明を最後に論じよう。

ただし、ここで得られる解は Sobolev 空間に属する函数であって、必ずしも古典的な、つまり円滑な (たとえば $\mathcal{C}^2$ -級の) 解ではない。古典的な解の存在を示すためには、本稿で述べた結果とは別種の、たとえば非線形積分核の幾何学的考察が必要となる。この点は機会をあたためて、別途論ずることとしたい。

本稿に先立つ拙稿 [15] は、一変数 Sobolev 空間のごく初等的な理論を整理したものである。そこに記された諸結果および記号法などは、本稿でもそれを踏襲し、自由に利用することとする。

I. ふたつの準備

§1. 一般形の Hölder の不等式

次章 II で利用されるふたつの結果を、はじめに準備しておこう。

まず第一は、Hölder の不等式を一般化した次の命題である。

補題 1.1 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ は測度空間とする。 $1 \leq p_i < \infty (i = 1, 2, \dots, k)$ は

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

を満たす数とし、

$$f_i \in \mathcal{L}^{p_i}(X, \mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

であるならば、 $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ は $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R})$ に属し、不等式

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot \dots \cdot \|f_k\|_{p_k}$$

が成り立つ。

(2) 多次元の一般論については Adams [1], Maz'ja [16] そしてとくに Evans [6] Chap. 5 が優れた解説である。

(3) 丸山 [13] 第 7 章を参照のこと。

証明 $q_i = p_i/p$ ($i = 1, 2, \dots, k$) とすれば, $q_i \geq 1$ で, しかも

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_k} = 1. \quad (1)$$

$f_i \in \mathfrak{L}^{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) であるから,

$$f_i^p \in \mathfrak{L}^{p_i/p} = \mathfrak{L}^{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

(1), (2) と Hölder の不等式により, $f_1^p \cdot f_2^p \cdot \dots \cdot f_k^p \in \mathfrak{L}^1(X, \mathbb{R})$ で, さらに

$$\|f_1^p \cdot f_2^p \cdot \dots \cdot f_k^p\|_1 \leq \|f_1^p\|_{q_1} \cdot \|f_2^p\|_{q_2} \cdot \dots \cdot \|f_k^p\|_{q_k}, \quad (3)$$

すなわち

$$\int_X |f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k|^p d\mu \leq \prod_{i=1}^k \left(\int_X |f_i|^{q_i} d\mu \right)^{1/q_i} \leq \prod_{i=1}^k \left(\int_X |f_i|^{p_i} d\mu \right)^{p/p_i} \quad (3')$$

である。これからただちに

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$$

が導かれる。

(証了)

注意 p_i のなかに ∞ が混っていても補題 1.1 は成り立つ。たとえば $1 \leq p_i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $p_k = \infty$ の場合を考えると, $1/p_k = 1/\infty = 0$, $q_k = p_k/p = \infty/p = \infty$ と約束して, (3), (3') が成り立つのである。

これから次の結果が容易に導かれる。

系 1.1 (補間不等式) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ とし, また $f \in \mathfrak{L}^p(X, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{L}^q(X, \mathbb{R})$ とする。任意の $r \in [p, q]$ に対して, $\alpha \in [0, 1]$ を

$$\frac{1}{r} = (1 - \alpha) \frac{1}{p} + \alpha \frac{1}{q}$$

を満たす数とすれば,

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\alpha} \cdot \|f\|_q^\alpha$$

が成り立つ。

図 1.1



証明 $f \in \mathfrak{L}^p \cap \mathfrak{L}^q$ であるから

$$f^{1-\alpha} \in \mathfrak{L}^{p/(1-\alpha)}, \quad f^\alpha \in \mathfrak{L}^{q/\alpha}.$$

ここで $p/(1-\alpha), q/\alpha \geq 1$ である。 $1/r = (1-\alpha)/p + \alpha/q$ と補題 1.1 により $f \in \mathfrak{L}^r$ でしかも

$$\|f\|_r \leq \|f^{1-\alpha}\|_{p/(1-\alpha)} \cdot \|f^\alpha\|_{q/\alpha} = \|f\|_p^{1-\alpha} \cdot \|f\|_q^\alpha$$

を得る。

(証了)

§2. $\mathfrak{L}^p$ における強・相対コンパクト性

第二の準備は, $\mathfrak{L}^p$ の部分集合が強位相について相対コンパクトになるための条件である。ここで測度空間は Lebesgue 測度 λ の定まった $\mathbb{R}^l$ を考える。

$h \in \mathbb{R}^l$ に対して, $\tau_h : \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ は, 各 $f \in \mathfrak{L}^p$ に対して

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h), \quad x \in \mathbb{R}^l$$

と定義される函数 $\tau_h f$ を対応させる作用素である。これを $\mathfrak{L}^p$ 上の移動作用素 (shift operator) と呼ぶ。

補題 1.2 $1 \leq p < \infty$ とし, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ は次の二条件を満たすものとする。(測度は Lebesgue 測度。)

(i) $\mathcal{F}$ は有界⁽⁴⁾。

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当に $\delta > 0$ を選び,

$$h \in \mathbb{R}^l, \|h\| < \delta \implies \|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}$$

とすることができる。

このとき $\lambda\Omega < \infty$ なる $\mathbb{R}^l$ の任意の Lebesgue-可測集合 Ω に対して

(4) 強位相についての有界性と弱位相についての有界性は同値である (共鳴定理)。丸山 [11] p. 351.

$$\mathcal{F}|_{\Omega} = \{f|_{\Omega} | f \in \mathcal{F}\}$$

は $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ の相対コンパクト (強位相について) 集合である。⁽⁵⁾

証明 やや長い証明を要するので、いくつかの段落に分けて進むことにしたい。

1° まず $1/n < \delta$ とするとき、

$$\|\xi_{1/n} * f - f\|_p < \varepsilon \quad \text{for all } f \in \mathcal{F} \quad (1)$$

であることを示そう。ここで $\xi_{1/n} * (\cdot)$ は軟化子⁽⁶⁾である。

定義により

$$\begin{aligned} |(\xi_{1/n} * f)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^l} |f(x-y) - f(x)| \xi_{1/n}(y) dy \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^l} |f(x-y) - f(x)|^p \xi_{1/n}(y) dy \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

二番目の不等式は $\xi_{1/n}(y)dy$ を測度とみなし、そのうえで Hölder の不等式を用いて導かれたものである。したがって $1/n < \delta$ とすれば、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^l} |(\xi_{1/n} * f)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^l} |f(x-y) - f(x)|^p \xi_{1/n}(y) dy dx \\ &\leq \int_{B_{1/n}(0)} \xi_{1/n}(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^l} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right\} dy \\ &\quad \text{(Fubini の定理)} \\ &< \varepsilon^p. \quad ((ii) \text{ による}) \end{aligned}$$

これで (1) が示された。⁽⁷⁾

2° 次にふたつの不等式評価を確かめておこう。はじめに

(5) (ii) の条件は、 $\mathcal{F}$ が “同程度可積分” であることと表現してもよいかもしれない。

X をコンパクト・Hausdorff 位相空間、 $\mathcal{G}$ を連続関数空間 $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ の部分集合とし、 $\mathcal{G}$ が有界かつ同程度連続であるならば、 $\mathcal{G}$ は (一様収束ノルムについて) 相対コンパクトである。(逆も成り立つ。) これは Ascoli–Arzelà の定理として函数解析学でよく知られている (Dunford and Schwartz [5] pp. 266–267, Schwartz [18] pp. 78–80) が、補題 1.2 との類似は明白であろう。

(6) 丸山 [13] 第 6 章に詳しい説明がある。

(7) dx, dy は Lebesgue 測度。積分変数を明示するために、 $d\lambda$ とするかわりにこのように書いたのである。

$$|(\xi_{1/n} * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^l} |f(x-y)\xi_{1/n}(y)|dy \leq \|f\|_p \cdot \|\xi_{1/n}\|_q.$$

ここで $1/p + 1/q = 1$ である。この関係が任意の $x \in \mathbb{R}^l$ について成り立つので、 $A_n = \|\xi_{1/n}\|_q$ とすれば、

$$\|\xi_{1/n} * f\|_\infty \leq A_n \|f\|_p \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}. \quad (2)$$

いまひとつの評価は $\xi_{1/n} * f$ の連続性の程度にかかわるものである。 $f \in \mathfrak{L}^p$ とすれば $f \in \mathfrak{L}_{loc}^1$ であるから、 $\xi_{1/n} * f \in \mathfrak{C}^1$ であり、

$$D(\xi_{1/n} * f) = D\xi_{1/n} * f$$

である。⁽⁸⁾ (2) と同様に $B_n = \|D\xi_{1/n}\|_q$ とすれば、

$$\|D(\xi_{1/n} * f)\|_\infty \leq B_n \|f\|_p.$$

$\xi_{1/n} * f$ の連続微分可能性から⁽⁹⁾

$$|(\xi_{1/n} * f)(x_1) - (\xi_{1/n} * f)(x_2)| \leq B_n \|f\|_p |x_1 - x_2| \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}. \quad (3)$$

3° Ω を $\lambda\Omega < \infty$ なる $\mathbb{R}^l$ の可測集合とし、 $\Omega' \subset \Omega$ も可測とする。記号の約束として、ある函数の $\mathbb{R}^l$ 上での $\mathfrak{L}^p$ -ノルムは簡単に $\|\cdot\|_p$ と記すが、たとえば $\Omega \setminus \Omega'$ 上での $\mathfrak{L}^p$ -ノルムを $\|\cdot\|_{p, \Omega \setminus \Omega'}$ と書くことにしよう。すると $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} \|f\|_{p, \Omega \setminus \Omega'} &\leq \|f - (\xi_{1/n} * f)|_{p, \Omega \setminus \Omega'} + \|\xi_{1/n} * f\|_{p, \Omega \setminus \Omega'} \\ &\leq \|f - (\xi_{1/n} * f)\|_p + \|\xi_{1/n} * f\|_{p, \Omega \setminus \Omega'}. \end{aligned} \quad (4)$$

1° により、 n を十分に大きくとれば、

$$\|f - (\xi_{1/n} * f)\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}. \quad (5)$$

(8) 丸山 [13] p. 210 を見よ。

(9) 一般論として R を $\mathbb{R}^l$ の直方体、 $g: R \rightarrow \mathbb{R}^l$ は連続微分可能とし、

$$\sup_{x \in R} |D_j f_i(x)| \leq M$$

とすれば、

$$\|f(x) - f(y)\| \leq l^2 M \|x - y\| \quad \text{for all } x, y \in R$$

が成り立つ。(丸山 [12] p. 253.)

このような十分に大きな n をひとつ固定すると、(2)により

$$\|\xi_{1/n} * f\|_\infty \leq A_n \|f\|_p \leq A_n \sup_{g \in \mathcal{F}} \|g\|_p.$$

$\mathcal{F}$ の有界性から、 $\sup_{g \in \mathcal{F}} \|g\|_p < \infty$ である。ゆえに $\lambda(\Omega \setminus \Omega')$ を十分に小さくとれば、⁽¹⁰⁾

$$\|\xi_{1/n} * f\|_{p, \Omega \setminus \Omega'} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}. \quad (6)$$

(5), (6)により、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\lambda(\Omega \setminus \Omega')$ が十分に小さくなるように可測集合 $\Omega' \subset \Omega$ を選べば

$$\|f\|_{p, \Omega \setminus \Omega'} < \varepsilon \quad \text{for all } f \in \mathcal{F} \quad (7)$$

が成り立つ。Lebesgue 測度の内正則性から、このような Ω' はコンパクト集合とすることができる。

4° 最後に $\mathcal{F}|_\Omega$ が(強)相対コンパクトであることを示す。そのためには $\mathcal{F}|_\Omega$ が $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ において全有界であることを確かめれば十分であろう。⁽¹¹⁾

$\varepsilon > 0$ に対して(7)を満たすコンパクト集合 $\Omega' \subset \Omega$ をひとつ固定して考える。また n は(1)が成り立つように $1/n < \delta$ なるものをひとつ固定する。

さて、

$$\mathcal{G} = (\xi_{1/n} * \mathcal{F})|_{\Omega'} = \{\xi_{1/n} * f|_{\Omega'} | f \in \mathcal{F}\}$$

とすれば (ここで $\xi_{1/n} * f|_{\Omega'}$ は $\xi_{1/n} * f$ の Ω' への制限), $\mathcal{G} \subset \mathfrak{C}(\Omega', \mathbb{R})$ 。 $\mathcal{F}$ が $\mathfrak{L}^p$ において有界であることを考慮し、(2)と(3)から、 $\mathcal{G}$ は一様有界かつ同程度連続である。したがって Ascoli–Arzelà の定理から、 $\mathcal{G}$ は $\mathfrak{C}(\Omega', \mathbb{R})$ において相対コンパクトである。 $\lambda\Omega' < \infty$ に注意して、 $\mathcal{G}$ は $\mathfrak{L}^p(\Omega', \mathbb{R})$ においても(強)相対コンパクトである。⁽¹²⁾

ゆえに有限個の $g_1, g_2, \dots, g_s \in \mathfrak{L}^p(\Omega', \mathbb{R})$ を適当に選んで

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_{j=1}^s B_\varepsilon(g_j) \quad (8)$$

(10) Lebesgue 測度の正則性により、 $\lambda(\Omega \setminus \Omega')$ がいくらでも小さくなるように $\Omega' \subset \Omega$ を選ぶことができる。

(11) 丸山 [12] pp. 83–84 を見よ。

(12) $\mathcal{G}$ の任意の点列 $g_k = \xi_{1/k} * f_k|_{\Omega'} (f_k \in \mathcal{F})$ はある $g^* \in \mathfrak{C}(\Omega', \mathbb{R})$ に収束する部分列 $\{g_{k'}\}$ をもつ。 $\lambda\Omega' < \infty$ なので、この $\{g_{k'}\}$ は g^* に $\mathfrak{L}^p(\Omega', \mathbb{R})$ でも収束する。つまり $\{g_k\}$ は $\mathfrak{L}^p(\Omega', \mathbb{R})$ において収束する部分列を有する。

とすることができる。すなわち $g_1, g_2, \dots, g_s$ は $\mathcal{G}$ の ε -網である。そこで $\tilde{g}_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, s$) を

$$\tilde{g}_j(x) = \begin{cases} g_j(x) & \text{on } \Omega', \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \Omega', \end{cases} \quad (9)$$

と定義する。

$f \in \mathcal{F}$ とすれば(8)により

$$\|\xi_{1/n} * f|_{\Omega'} - g_j\|_{p, \Omega'} < \varepsilon \quad (10)$$

を満たす $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ が存在する。また(9)により

$$\|f - \tilde{g}_j\|_{p, \Omega}^p = \int_{\Omega \setminus \Omega'} |f|^p dx + \int_{\Omega'} |f - g_j|^p dx$$

であるが、(7)により

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{g}_j\|_{p, \Omega} &\leq \varepsilon + \|f - g_j\|_{p, \Omega'} \\ &\leq \varepsilon + \|f - (\xi_{1/n} * f)\|_p + \|(\xi_{1/n} * f) - g_j\|_{p, \Omega'} \\ &< 3\varepsilon \quad ((1), (10) \text{ による}). \end{aligned} \quad (11)$$

(11)は任意の $f \in \mathcal{F}$ について成り立つのであるから、 $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_s$ は $\mathcal{F}$ の 3ε -網である。こうして $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ において全有界、したがって相対コンパクトであることが知られた。 (証了)

§3. $\mathfrak{L}^1$ における弱・相対コンパクト性

可積分関数空間における弱・相対コンパクト性については次の著名な定理が知られている。詳しくは別の機会⁽¹³⁾に論じたので、ここでは結論だけを述べる。

Dunford-Pettis の定理⁽¹⁴⁾ $(X, \mathcal{E}, \mu)$ が有限測度空間とするとき、 $\mathcal{F} \subset \mathfrak{L}^1(X, \mathbb{R})$ について次の二命題は同値である。

- (i) $\mathcal{F}$ は弱・相対コンパクトである。
- (ii) $\mathcal{F}$ は有界で、しかも一様可積分である。

南雲の定理⁽¹⁵⁾ $(X, \mathcal{E}, \mu)$ が有限測度空間とするとき、 $\mathcal{F} \subset \mathfrak{L}^1(X, \mathbb{R})$ について次の二命題は同値

(13) 丸山 [13] 第 7 章。

(14) Brezis [2] pp. 466–468. 丸山 [13] pp. 246–247.

(15) Nagumo [17]. 丸山 [13] pp. 250–254.

である。

(i) $\mathcal{F}$ は弱・相対コンパクトである。

(ii) $\mathcal{F}$ は有界で、次の a, b を満たす殆どいたるところ連続な非減少関数 $\Phi: [\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

$$\text{a. } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

$$\text{b. } \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_X \Phi(|f(x)|) d\mu \leq C < \infty$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

ここでもちろん、両定理をひとつにまとめて書いてもよいのであるが、のちの参照に便利のように、ふたつの定理として分けて記したのである。 $\mathcal{F}$ が弱・相対コンパクトであることは、それが弱・列コンパクトであることと同値である (Eberlein-Šmulian の定理⁽¹⁶⁾)。また $\mathcal{F}$ の有界性は強位相についてのそれと、弱位相についてのそれとは同値である (共鳴定理)。

II. Sobolev の埋め込み定理

§1. Sobolev の定理

Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,p}$ はある種の条件の下に連続関数空間あるいは $\mathfrak{L}^q$ 空間に埋め込まれ、しかも埋め込みの線形作用素は完全連続⁽¹⁷⁾であることが知られている。この結果は Sobolev の埋め込み定理 (embedding theorem) と呼ばれ、定理 2.2 がその厳密な内容である⁽¹⁸⁾。

まず、Sobolev の不等式と称せられる定理を証明しておこう。

定理 2.1 (Sobolev の不等式) I は $\mathbb{R}$ の開区間で、その Lebesgue 測度 λI は有限でも無限大でもよい。このとき任意の $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) に対して

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \quad (1)$$

を満たす (u, p から独立な) 定数 $C > 0$ が存在する。

(16) Dunford and Schwartz [5] pp. 430–433. 丸山 [11] pp. 367–372.

(17) 完全連続な線形作用素はコンパクト作用素と呼ばれることもある。これについては Dunford and Schwartz [5] pp. 577–580, Yosida [19] Chap. X, 丸山 [11] pp. 573–586 など。

(18) 一変数 Sobolev 空間については前稿 [15] 同様, Brezis [2], Buttazzo, Giaquinta and Hildebrandt [3] などを参考にした。

証明 1° $I = \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ の場合, さらにステップをふたつに分けて, はじめに $v \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を考える, 函数 $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$H(\alpha) = |\alpha|^{p-1} \alpha, \quad 1 \leq p < \infty$$

と定義する。 $\dot{H}(\alpha) = p|\alpha|^{p-1}$ であるから, $w = H \circ v$ とすれば, $w \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で

$$\dot{w} = \dot{H}(v) \dot{v} = p|v|^{p-1} \dot{v}.$$

ゆえに, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$H \circ v(x) = H(v(x)) = \int_{-\infty}^x p|v(t)|^{p-1} \dot{v}(t) dt.$$

Hölder の不等式により ($1/p + 1/q = 1$ とする)

$$\begin{aligned} |H(v(x))| &= |v(x)|^p \leq p \| \dot{v} \|_p \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{(p-1)q} dt \right)^{1/q} \\ &= p \| \dot{v} \|_p \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^p dt \right)^{\frac{p-1}{p}} = p \| \dot{v} \|_p \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^p dt \right)^{1/p} \right]^{p-1} \\ &= p \|v\|_p^{p-1} \| \dot{v} \|_p \leq p \|v\|_{\mathfrak{W}^{1,p}}^p \\ &\quad \text{for all } v \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

したがって

$$|v(x)| \leq p^{1/p} \|v\|_{\mathfrak{W}^{1,p}}$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ について成り立つ。ここで $p^{1/p} \leq e^{1/e}$ であるから

$$\|v\|_{\infty} \leq C \|v\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \quad \text{for all } v \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (2)$$

を満たす (p から独立な) 定数 $C > 0$ が存在する。これで $v \in \mathfrak{C}_0^1$ についての所望の不等式が導かれた。

次に一般の $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の検討に移ろう。前稿 [15] の定理 2.9 より,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (3)$$

なる $\mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ が存在する。(2) から

$$\|u_n\|_{\infty} \leq C \|u_n\|_{\mathfrak{W}^{1,p}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

であることにより, $\{u_n\}$ は $\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ における Cauchy 列である。したがって $\{u_n\}$ は $\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ における極限 $z \in \mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ をもつ。しかし $z = u$ であるから, ⁽¹⁹⁾(4)より(1)が導かれる。

2° $I \neq \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ の場合。前稿 [15] 定理 2.8 により, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ を $\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の元 Eu に拡張し, $Eu|_I = u$ で, ⁽²⁰⁾しかも

$$\begin{aligned}\|Eu\|_{p, \mathbb{R}} &\leq A\|u\|_{p, I}, \\ \|Eu\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, \mathbb{R}} &\leq B\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, I}\end{aligned}$$

なる A, B を定めることができるのであった。(A, B は u から独立。) したがって 1° により,

$$\|u\|_{\infty, I} \leq \|Eu\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq C\|Eu\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, \mathbb{R}} \leq BC\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, I}.$$

ここで BC をあらためて C とおけば, $I \neq \mathbb{R}$ の場合にも (1) を得る。

3° 以上, $1 \leq p < \infty$ の場合について (1) を証明したが, $p = \infty$ の場合は, $\mathfrak{W}^{1,p}$ の定義から (1) は自明である。

これで定理の証明が完了した。 (証了)

定理 2.1 によれば, $\mathfrak{W}^{1,p}$ に属する函数 u はいずれも $\mathfrak{L}^\infty$ に属し, $\mathfrak{W}^{1,p}$ の元としての u を, $\mathfrak{L}^\infty$ の元としての u 自身に対応させる恒等作用素は連続である。この対応の操作を $\mathfrak{W}^{1,p}$ の $\mathfrak{L}^\infty$ のなかへの埋め込み (embedding) といい, 上記の恒等作用素を埋め込み作用素 (embedding operator) と呼ぶ。

次の結果は各種埋め込み定理のなかでも最も重要な事実を語っている。定理を述べる前に, 言葉づかいについてあらかじめ注意を施しておきたい。 $1 \leq p \leq \infty$ とするとき, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は I 上の一様連続函数とみなしうることが示される。したがって u は $\bar{I}$ 上の一様連続函数として一意的に拡大 ⁽²¹⁾される。これを $\tilde{u}$ と表記しよう。 $u \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$ とその拡大 $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ とを同一視し, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ を $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ に対応させる作用素は連続になる。この操作を $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ のなかへの埋め込みと呼んでよいことにしよう。この対応 $u \mapsto \tilde{u}$ は厳密には恒等作用素ではないから, 言葉

(19) (3)より $\|u_n \rightarrow u\|_p \rightarrow 0$ であるから, $\{u_n\}$ の適当な部分列 $\{u'_n\}$ を選び, $u_{n'}(x) \rightarrow u(x)$ a.e. とすることができる。(丸山 [13] pp. 69–70, 198–200.) 一方 $\|u_n - z\|_\infty \rightarrow 0$ なので, $z = u$ でなければならない。

(20) $\|\cdot\|_{p, \mathbb{R}}, \|\cdot\|_{p, I}, \|\cdot\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, \mathbb{R}}, \|\cdot\|_{\mathfrak{W}^{1,p}, I}$ などの記号については前稿 [15] p. 125 の脚注を見よ。

(21) 連続性による拡大。前稿 [15] 定理 2.2 を見よ。

の使い方としてはややルール違反であるが、誤解が生ずるおそれはないであろうから、表現の簡明のために了承していただきたい。

定理 2.2 I は $\mathbb{R}$ の開区間で $\lambda I < \infty$ とする。

(i) $1 < p \leq \infty$ のとき、 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ のなかに埋め込まれ、埋め込み作用素は完全連続である。⁽²²⁾

(ii) $1 \leq q < \infty$ に対して、 $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ のなかに埋め込まれ、埋め込み作用素は完全連続である。

証明 (i) $\lambda I < \infty$ かつ $1 < p \leq \infty$ とする。前稿 [15] 定理 2.2 により、各 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して、次の二条件を満たす函数 $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ が存在することを想起しよう。

(イ) $u = \tilde{u}$ a.e. on I .

(ロ) $\bar{I} = [a, b]$, $a \leq t_0 < t_1 \leq b$ とするとき、 $\langle u' \rangle$ は u の一般化された導函数

$$\tilde{u}(t_1) - \tilde{u}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} u'(s) ds.$$

以下、 u と $\tilde{u}$ とを同一視して扱う。 $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ であるから、これは一様連続である。また誤解のおそれのないときは、 u と $\tilde{u}$ を同じ記号 u で表記する。

S を $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の単位球とすれば、定理 2.1 により、 S は $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ における（一様収束ノルムについての）有界集合である。⁽²³⁾ また任意の $u \in S$ について $(1/p + 1/q = 1)$

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_p |x - y|^{1/q} \leq |x - y|^{1/q} \quad (5)$$

for any $x, y \in \bar{I}$

であるから、 S は同程度連続である。⁽²⁴⁾ ゆえに Ascoli–Arzelà の定理により、 S は $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ における相対コンパクト集合である。こうして $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の u を $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ の u （実は $\tilde{u}$ ）に対応させる作用素の完全連続性が確認された。⁽²⁵⁾

(22) 定理の直前に述べた注意を見よ。

(23) ここで $\mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$ ではなく $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ と書いたのは u と $\tilde{u}$ を同一視する上記の約束による。

(24) ここで $p = 1$ の場合には $q = \infty$ となって (5) を導くことができない。 $p \neq 1$ を仮定したのはこの理由による。

(25) p. 49 の脚注 (5) を見よ。

(ii) $\lambda I < \infty$ であるから、定理 2.1 により $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ ($1 \leq q \leq \infty$) であることはただちに知られる。

S を $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ の単位球とし、前稿 [15] 定理 2.8 によって、 $u \in S$ を $\mathfrak{W}^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の元 Eu に拡張する。こうすると $Eu|_I = u$ で

$$\|Eu\|_{1, \mathbb{R}} \leq A\|u\|_{1, I}, \quad (6)$$

$$\|Eu\|_{\mathfrak{W}^{1,1}, \mathbb{R}} \leq B\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,1}, I}$$

なる定数 A, B (u から独立) が存在する。

$\mathcal{F} = E(S)$ とすれば、 $\mathcal{F}|_I = \{Eu|_I | u \in S\} = S$ である。

(6) により、 $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ においても有界であるから、 $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ でも有界。また定理 2.1 により、 $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ においても有界である。そこで補間不等式 (系 1.1) から、 $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($1 \leq q < \infty$) においても有界となる。

前稿 [15] 定理 2.7 の (i) $\Rightarrow$ (ii) は $p = 1$ の場合にも成り立つ⁽²⁶⁾ことに留意して、

$$\|\tau_h f - f\|_{1, \mathbb{R}} \leq |h| \cdot \|f'\|_{1, \mathbb{R}} \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}. \quad (7)$$

$\mathcal{F}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の有界集合ゆえ、(7) から

$$\|\tau_h f - f\|_{1, \mathbb{R}} \leq C|h| \quad \text{for all } f \in \mathcal{F} \quad (8)$$

なる定数 C が存在する。以上の結果から

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{q, \mathbb{R}}^q &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f - f|^{q-1} \cdot |\tau_h f - f| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (2\|f\|_\infty)^{q-1} \cdot |\tau_h f - f| dt \\ &= (2\|f\|_\infty)^{q-1} \|\tau_h f - f\|_{1, \mathbb{R}} \\ &\leq (2\|f\|_\infty)^{q-1} C|h| \quad ((8) \text{ による}) \\ &\leq C'|h| \quad \text{for all } f \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

を満たす C' (上の C とは異なる) が存在する。ゆえに $C'' > (C')^{1/q}$ とすれば

$$\|\tau_h f - f\|_{q, \mathbb{R}} \leq C''|h|^{1/q} \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}.$$

こうして、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ を $\delta < (\varepsilon/C'')^q$ のように選べば、 $|h| < \delta$ に対して

(26) 前稿 [15] p. 119 の注意。

$$\|\tau_h f - f\|_q < \varepsilon \quad \text{for all } f \in \mathcal{F}.$$

補題 1.2 より, $\mathcal{F}|_I = S$ は $\mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ ($1 \leq q < \infty$) の(強)相対コンパクト集合である。つまり $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ の元としての u を, $\mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ の元としての u 自身に対応させる作用素は完全連続である。(証了)

Sobolev 空間の埋め込み定理は, このあとに続く議論の大切な鍵を握る。まずこれから容易に導かれる二, 三の結果を述べておこう。

系 2.1 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) とするとき,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

証明 前稿 [15] 定理 2.9 およびその注意により, $\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ において u に収束する $\mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ が存在する。定理 2.1 から, 適当な $C > 0$ に対して

$$\|u_n - u\|_\infty \leq C \|u_n - u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \quad \text{for all } n$$

が成り立つので, $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ (as $n \rightarrow \infty$)。任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分に大きな n をとれば $\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$ が成り立つが, このような n をひとつ固定して考える。この u_n に対して十分に大きな $N > 0$ を選び

$$u_n(x) = 0 \quad \text{for } |x| > N$$

とすることができるので,

$$|u(x)| < \varepsilon \quad \text{for } |x| > N.$$

ゆえに $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ が示された。(証了)

系 2.2 (積の微分) $u, v \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) とすれば, $uv \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ で, しかも

$$(uv)' = u'v + uv'$$

が成り立つ。

証明 定理 2.1 より, $u \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ であるから, $uv \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ である。次に $(uv)' \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ を示そう。

1° $1 \leq p < \infty$ の場合。拡張定理（前稿 [15] 定理 2.8）により， $\mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ で

$$u_n|_I \rightarrow u, \quad v_n|_I \rightarrow v, \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \quad (9)$$

を満たすものが存在する。定理 2.1 によれば

$$u_n|_I \rightarrow u, \quad v_n|_I \rightarrow v, \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R}) \quad (10)$$

も成り立つ。(9), (10)から

$$u_n v_n|_I \rightarrow uv \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R}), \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}). \quad (11)$$

$u_n v_n \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ であるから， $(u_n v_n)' = (u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n'$. ⁽²⁷⁾したがって

$$(u_n v_n|_I)' \rightarrow u'v + uv' \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}). \quad (12)$$

これから⁽²⁸⁾

$$(uv)' = u'v + uv' \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}). \quad (13)$$

(11), (13)を併せて， $uv \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ と積の微分公式を得る。

2° $p = \infty$ の場合。 $u, v \in \mathfrak{W}^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ とすれば， $uv \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ であり，また $u'v + uv' \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ も明らか。

残るのは $(uv)' = u'v + uv'$ の確認である。

$\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ とし，有界な開区間 J を $\text{supp } \varphi \subset J \subset I$ となるようにとる。 $u, v \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ なので $u|_J, v|_J \in \mathfrak{L}^p(J, \mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$). 1° の結果から

$$-\int_J (uv) \dot{\varphi} dt = \int_J (u'v + uv') \varphi dt. \quad (14)$$

(27) たとえば $\|u_n' v_n - u'v\|_p = \|u_n' v_n - u_n' v + u_n' v - u'v\|_p \leq \|u_n'\|_p \|v_n - v\|_\infty + \|u_n' - u'\|_p \|v\|_\infty$ としてこれが 0 に収束することを確認できればよい。

(28) この点は前稿 [15] 定理 2.1 (i) の証明と同じ方針で示せばよい。念のために要点を摘記すれば次のとおり。

$$\begin{aligned} \int_I (uv)' \varphi dt &= - \int_I (uv) \dot{\varphi} dt = - \lim_{(11)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (u_n v_n) \dot{\varphi} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I (u_n v_n)' \varphi dt = \lim_{(12)} \int_I (u'v + uv') \varphi dt \end{aligned}$$

がすべての $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ について成り立つ。 $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ ($1/p + 1/q = 1$) のなかで稠密なので， $(uv)' = u'v + uv'$ 。

$\text{supp } \varphi \subset J$ なので, (14)から

$$-\int_I (uv) \dot{\varphi} dt = \int_I (u'v + uv') \varphi dt.$$

これがすべての $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ について成り立つので, $(uv)' = u'v + uv'$. (証了)

系 2.2 からは次の結果がただちに導かれる。

系 2.3 (部分積分) $u, v \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ とすれば, 任意の $x \leq y, x, y \in I$ に対して

$$\int_x^y u'v dt = uv \Big|_x^y - \int_x^y uv' dt.$$

いまひとつ, 初等微積分学における周知の公式を Sobolev 空間の函数に拡張しておこう。

系 2.4 (合成函数の微分) I は $\mathbb{R}$ の有限または無限开区間とする。 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$, また $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は $f(0) = 0$ を満たす函数としよう。このとき, $f \circ u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ で

$$(f \circ u)' = (\dot{f} \circ u)u' \quad (15)$$

が成り立つ。

証明 1° $1 \leq p < \infty$ の場合。以下, $I = \mathbb{R}$ として証明する。 I が有限区間の場合は, 前稿 [15] 定理 2.9 への注意により, $\mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}$ を適当に選び, $u_n|_I \rightarrow u$ (in $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$) とすることができる。下記の証明中に現われる $u_n \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を $u_n|_I$ で置き換えれば, I が有限区間の場合も全く同様に証明される。

定理 2.1 により, $u \in \mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ つまり $A \equiv \|u\|_\infty < \infty$ 。また $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ かつ $f(0) = 0$ であることから,

$$|f(s)| \leq L|s| \quad \text{for all } s \in [-A, A]$$

なる定数 $L > 0$ が存在する。 $(f$ は $[-A, A]$ 上で Lipschitz である。) したがって

$$|f \circ u| \leq L|u|$$

であるから, $f \circ u \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。 $\dot{f} \circ u \in \mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ かつ $u' \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ゆえ, $(\dot{f} \circ u)u' \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。

最後に(15), すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ u) \dot{\varphi} dt = - \int_{\mathbb{R}} (\dot{f} \circ u) u' \varphi dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

を示せばよい。⁽²⁹⁾ $1 \leq p < \infty$ であるから、前稿 [15] 定理 2.9 により、

$$u_n \rightarrow u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

なる $\{u_n\} \subset \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ が存在する。⁽³⁰⁾ 定理 2.1 から

$$u_n \rightarrow u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

f は一様連続なので

$$f \circ u_n \rightarrow f \circ u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (\text{一様収束}). \quad (16)$$

さらに

$$(\dot{f} \circ u_n) \dot{u}_n \rightarrow (\dot{f} \circ u) u' \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (17)$$

であることも次のように示される。実際、

$$\begin{aligned} & \|(\dot{f} \circ u_n) \dot{u}_n - (\dot{f} \circ u) u'\|_p \\ & \leq \|(\dot{f} \circ u_n) \dot{u}_n - (\dot{f} \circ u) \dot{u}_n\|_p + \|(\dot{f} \circ u) \dot{u}_n - (\dot{f} \circ u) u'\|_p \\ & \leq \|\dot{f} \circ u_n - \dot{f} \circ u\|_\infty \|\dot{u}_n\|_p + \|\dot{f} \circ u\|_\infty \|\dot{u}_n - u'\|_p \\ & \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

これから (17) を得る。

通常の部分積分により、

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ u_n) \dot{\varphi} dt = - \int_{\mathbb{R}} (\dot{f} \circ u_n) \dot{u}_n \varphi dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \quad (18)$$

(16), (17) により、

$$(18) \text{ の左辺 } \rightarrow \int_{\mathbb{R}} (f \circ u) \dot{\varphi} dt,$$

(29) I が有限区間の場合は、 φ は $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ とする。

(30) I が有限区間の場合には、 $u_n|_I \rightarrow u$ (in $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$) なる $\mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}$ を用いるのである。

(31) $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ なので、一般性を失うことなく、 u_n の値域 $u_n(\mathbb{R})$ はすべての $[-A, A]$ をすこしふくらませた区間に含まれるものとみなしてよい。

$$(18) \text{の右辺} \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} (\dot{f} \circ u) u' \varphi dt, \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

これで(15)が示された。

2° $p = \infty$ の場合。 $f \circ u \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$, $(\dot{f} \circ u)u' \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ は容易に知られるから, $(f \circ u)' = (\dot{f} \circ u)u'$ を示せばよい。そこで $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して, J を $\text{supp } \varphi \subset J \subset I$ を満たす有限開区間とすれば, $f \circ u|_J \in \mathfrak{W}^{1,p}(J, \mathbb{R})$, $(\dot{f} \circ u)u'|_J \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) (1 \leq p < \infty)$ であるから, 1° により $(f \circ u|_J)' = (\dot{f} \circ u)u'|_J$ ($\mathfrak{W}^{1,p}(J, \mathbb{R})$ において) が成り立つ。つまり

$$\int_J (f \circ u) \dot{\varphi} dt = - \int_J (\dot{f} \circ u) u' \varphi dt,$$

したがって, $\text{supp } \varphi \subset J$ により

$$\int_I (f \circ u) \dot{\varphi} dt = - \int_I (\dot{f} \circ u) u' \varphi dt. \quad (19)$$

(19)はすべての $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ について成り立つのであるから, $p = \infty$ の場合にも(15)が示されたのである。 (証了)

§2. Poincaré の不等式

定義 I は $\mathbb{R}$ における開区間とする。 $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ における閉包を $\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ と書く。とくに $p = 2$ の場合は, $\mathfrak{W}_0^{1,2}(I, \mathbb{R})$ を $\mathfrak{H}_0^1(I, \mathbb{R})$ とも表記する。

もちろん, $\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の位相は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ から導入される相対位相である。 $\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は可分な Banach 空間で, $p > 1$ の場合は反射的である。⁽³²⁾ $\mathfrak{H}_0^1(I, \mathbb{R})$ は Hilbert 空間である。

次の性質は容易に確認することができる。

1° $I = \mathbb{R}$ の場合は $\mathfrak{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。

これは前稿 [15] 定理 2.9 から明らかである。

2° $\overline{\mathfrak{C}_0^\infty(I, \mathbb{R})}^{\mathfrak{W}^{1,p}} = \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$.⁽³³⁾

実際, 左辺 $\subset$ 右辺は自明であり, 逆の包含関係は再び前稿 [15] 定理 2.9 による。

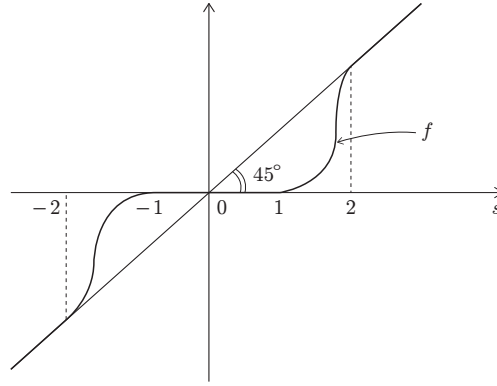
3° $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{C}_0(I, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ 。

この結果は次に述べる定理 2.3 から明白であろう。

(32) 一般論として, 反射的 Banach 空間の閉部分空間はやはり反射的である。

(33) 左辺は $\mathfrak{C}_0^\infty(I, \mathbb{R})$ の, $\mathfrak{W}^{1,p}$ のノルムについての閉包。

図 2.1



定理 2.3 I は $\mathbb{R}$ における有限開区間とする。このとき、次の二命題は互いに同値である。 $(1 \leq p \leq \infty)$

- (i) $u \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$.
- (ii) $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ かつ $u = 0$ on ∂I .⁽³⁴⁾

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) : $u \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ とすれば、定義により

$$u_n \rightarrow u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$$

なる $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ が存在する。定理 2.1 により

$$u_n \rightarrow u \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{in } \mathfrak{L}^\infty(\bar{I}, \mathbb{R})$$

(u_n, u を $\bar{I}$ 上へ拡大した函数も同じ記号で表わす。) ゆえに ∂I 上では $u = 0$ である。

(ii) $\Rightarrow$ (i) : (ii) を仮定する。函数 $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{for } |s| \leq 1, \\ s & \text{for } |s| \geq 2 \end{cases}$$

かつ

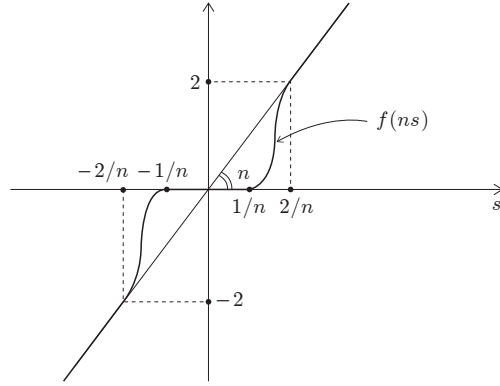
$$|f(s)| \leq |s| \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}$$

を満たすように特定化する。この f は系 2.4 の f の条件を満たすことに留意しよう (図 2.1)。

この f を用いて、 $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

(34) ∂I は I の境界。

図 2.2



$$u_n(t) = \frac{1}{n} f(nu(t)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

と定義すれば (図 2.2), 系 2.4 により $u_n \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ 。しかも

$$u'_n(t) = \dot{f}(nu(t))u'(t) \quad (2)$$

である。(1)により

$$|u_n(t) - u(t)| \begin{cases} = |u(t)| & \text{if } |u(t)| \leq \frac{1}{n}, \\ = 0 & \text{if } |u(t)| \geq \frac{2}{n}, \\ \leq \frac{4}{n} & \text{if } \frac{1}{n} \leq |u(t)| \leq \frac{2}{n}. \end{cases}$$

ゆえに上限収束定理により, $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$.

一方, (2)によれば

$$|u'_n(t) - u'(t)| \begin{cases} = |u'(t)| & \text{if } |u(t)| \leq \frac{1}{n}, \\ = 0 & \text{if } |u(t)| \geq \frac{2}{n}, \\ \leq \sup_{s \in [1,2]} |\dot{f}(s) - 1| \cdot |u'(t)| & \text{if } \frac{1}{n} \leq |u(t)| \leq \frac{2}{n} \end{cases}$$

であるから, $\|u'_n - u'\|_p \rightarrow 0$. こうして $\|u_n - u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \rightarrow 0$ が確かめられた。

$$\text{supp } u_n \subset \left\{ t \in I \mid |u(t)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

であり, ∂I においては $u = 0$ なので, $\text{supp } u_n$ が I に含まれるコンパクト集合であることは明ら

かである。ゆえに各 n に対して, u_n に $(\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}))$ において) 収束する $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の列が存在する。
(前稿 [15] 定理 2.9。⁽³⁵⁾)

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分に大きな n を選び $\|u_n - u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} < \varepsilon/2$ とすることができ, またこの n について $\|v_n - u_n\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} < \varepsilon/2$, したがって $\|v_n - u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} < \varepsilon$ を満たす $v_n \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ が存在する。これから $u \in \overline{\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})}^{\mathfrak{W}^{1,p}} = \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ が導かれる。(p. 62 の §2.2° を見よ。) (証了)

定理 2.4 (Poincaré の不等式) I を $\mathbb{R}$ における有限開区間とすると, 次の不等式を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

$$\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \leq C \|u'\|_p \quad \text{for all } u \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R}).$$

(C は λI に依存する。)

証明 1° $I = (a, b), u \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ とすれば, $u(a) = 0$ であるから

$$|u(t)| = |u(t) - u(a)| = \left| \int_a^t u'(s) ds \right| \leq \|u'\|_1.$$

したがって $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$. ゆえに $(1/p + 1/q = 1$ として)

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq \|u\|_\infty^p \lambda I \leq \|u'\|_1^p \lambda I \\ &\leq \|u'\|_p^p \|1\|_q^p \lambda I \quad (\text{Hölder の不等式}) \\ &\leq \|u'\|_p^p (\lambda I)^{p/q} \lambda I = \|u'\|_p^p (\lambda I)^{(p+q)/q}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\|u\|_p \leq \|u'\|_p (\lambda I)^{(p+q)/pq} = \|u'\|_p \lambda I.$$

$\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p$ であるから

$$\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \leq (\lambda I + 1) \|u'\|_p.$$

ここで $C = \lambda I + 1$ とおけば証明が完了する。

(証了)

(35) 前稿の定理 2.9 によると, $\mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $v_n^m; m = 1, 2, \dots$ を適当に選んで $v_n^m|_I \rightarrow u_n$ (as $m \rightarrow \infty$) が成り立つ。(位相は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ のそれである。) ただしここでの u_n は I のなかにコンパクトな台を有するので, $v_n^m|_I$ も $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の元とすることができるのである。

$I = \mathbb{R}$, したがって $\mathfrak{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の場合は, その元 u について $\lim_{|t| \rightarrow \infty} u(t) = 0$ が成り立つ。これは既に系 2.1 で見たとおりである。

$\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ について

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p} \implies u'_n \rightarrow u' \quad \text{in } \mathfrak{L}^p$$

は自明。しかし $\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ においては逆に

$$u'_n \rightarrow u' \quad \text{in } \mathfrak{L}^p \implies u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}$$

も成り立つことを Poincaré の不等式は保証している。つまりこの場合、 $\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}}$ と $\|u'\|_p$ とは $\mathfrak{W}_0^{1,p}$ 上の同値なノルムなのである。

III. $\mathfrak{W}^{1,p}$ の双対と弱収束

§1. 双対空間の表現

Banach 空間 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ および $\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の双対空間の表現について述べよう。

定理 3.1 I は $\mathbb{R}$ における有限または無限開区間、 $1 \leq p \leq \infty$ とする、任意の $\Lambda \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})'$ に対して、

$$\Lambda u = \int_I f u \, dt + \int_I g u' \, dt \quad \text{for all } u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$$

を満たす $f, g \in \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})(1/p + 1/q = 1)$ が存在する。

証明 直積空間 $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) \times \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ にはノルム $\|\cdot\|_p + \|\cdot\|_p$ を定める。線形作用素 $T : \mathfrak{W}^{1,p} \rightarrow \mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^p$ を

$$T : u \mapsto (u, u')$$

と定義すれば、 T は $\mathfrak{W}^{1,p}$ から $T(\mathfrak{W}^{1,p})$ の上への等長同型作用素である。この逆作用素 $T^{-1} : T(\mathfrak{W}^{1,p}) \rightarrow \mathfrak{W}^{1,p}$ を用いて、 $\Phi : T(\mathfrak{W}^{1,p}) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Phi : v \mapsto \Lambda(T^{-1}v), \quad v \in T(\mathfrak{W}^{1,p})$$

と定義すれば、 Φ は $T(\mathfrak{W}^{1,p})$ 上の有界線形汎関数である。したがって Hahn-Banach の定理により、 Φ は $\mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^p$ 上の有界線形汎関数として（ノルムを保存して）拡大することができる。これを $\tilde{\Phi}$ と書くことにすれば、 $f \in \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})(1/p + 1/q = 1)$ を適当に選び

(36) Dunford and Schwartz [5] p. 63. Schwartz [18] p. 39.

$$\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = \int_I f\xi dt + \int_I g\eta dt \quad \text{for all } \xi, \eta \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$$

とすることができる。⁽³⁷⁾とくに

$$\begin{aligned} \Lambda u &= \tilde{\Phi}(Tu) = \tilde{\Phi}(u, u') \\ &= \int_I fu dt + \int_I gu' dt \quad \text{for all } u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証了)

注意 Λ を表現する $f, g \in \mathfrak{L}^q$ は一意的には定まらない。それは Φ の拡大が一意的でないことから明白であろう。

$\mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の双対空間を求めるためには、 $T: \mathfrak{W}_0^{1,p} \rightarrow \mathfrak{L}^p$ を $T: u \mapsto u'$ と定義する。定理 2.4 より、 T は $T(\mathfrak{W}_0^{1,p}) \subset \mathfrak{L}^p$ の上への全単射となる。あとは定理 3.1 の証明と同様の手続きで、次の結果を得る。

系 3.1 I は $\mathbb{R}$ における有限開区間、 $1 \leq p \leq \infty$ とする。任意の $\Lambda \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})'$ に対して

$$\Lambda u = \int_I gu' dt \quad \text{for all } u \in \mathfrak{W}_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$$

を満たす $g \in \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ ($1/p + 1/q = 1$) が存在する。

§2. Sobolev 空間の弱収束

Sobolev 空間の双対空間について具体的表現が得られたので、点列の弱収束の概念も具体的な姿でとらえることができる。

以下、 I は有限な開区間、 $1 \leq p < \infty$ とする。定理 3.1 により、 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ が $u_0 \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に弱収束することは、任意の $f, g \in \mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ ($1/p + 1/q = 1$) に対して

$$\int_I f(u_n - u_0) dt + \int_I g(u'_n - u'_0) dt \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

の成り立つことを意味する。

弱収束する点列 $\{u_n\}$ は (強・弱いずれの位相についても) 有界である。⁽³⁸⁾したがって定理 2.1, 2.2 により、次の関係が成り立つ。

(37) $\|\tilde{\Phi}\| = \max\{\|f\|, \|g\|_q\}$. $(\mathfrak{L}^p)'$ の表現については丸山 [13] 第 6 章に詳しく述べられている。

(38) 共鳴定理による。

$u_n \rightarrow u_0 : \mathfrak{W}^{1,p}$ における弱収束 $\implies$

- a. $1 < p \leq \infty$ の場合: $\{u_n\}$ は $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ において (強) 相対コンパクト。
- b. $p = 1$ の場合: 任意の $1 \leq r < \infty$ に対して, $\{u_n\}$ は $\mathfrak{L}^r(I, \mathbb{R})$ において (強) 相対コンパクト。

したがって $\{u_n\}$ は a の場合には $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$, b の場合には $\mathfrak{L}^r(I, \mathbb{R})$ において強収束する部分列を有するのである。

また, $\{u'_n\}$ は $\mathfrak{L}^p$ において u'_0 に弱収束することは自明である。

以上の結果を定理としてまとめておこう。⁽³⁹⁾

定理 3.2 I は $\mathbb{R}$ における有限開区間, $1 \leq p \leq \infty$ とする。 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ が $u_0 \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に弱収束するとき, 次の結果が成り立つ。

- (i) a. $1 < p \leq \infty$ の場合: $\{u_n\}$ は $\mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ において u_0 に (一様) 収束する部分列を有する。
- b. $p = 1$ の場合: $\{u_n\}$ は任意の $1 \leq r < \infty$ に対して u_0 に $\mathfrak{L}^r$ -収束する部分列を有する。
- (ii) $\{u'_n\}$ は u'_0 に $\mathfrak{L}^p$ -弱収束する。

ここで前稿 [15] の冒頭に述べた問題に戻り, それを Sobolev 空間上で考えてみよう。 Ω を $\mathbb{R}^3$ の非空開集合とし, 函数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を固定しておく。 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に属する函数のうち, 殆どすべての $t \in I$ に対して $(t, u(t), u'(t)) \in \Omega$ を満たすもののある集合を $\mathcal{U}$ とする。積分汎函数 $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J(u) = \int_I f(t, u(t), u'(t)) dt$$

と定義する。いま

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) > -\infty$$

で, $\mathcal{U}$ の点列 $\{u_n\}$ が

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

を満たすものとしよう。このような点列を J の最小化列 (minimizing sequence) という。いま $\{u_n\}$ がある $u_0 \in \mathcal{U}$ に $\mathfrak{W}^{1,p}$ -弱収束することがわかっているとすれば, いかなる $1 \leq p < \infty$ についても

$$u_{n'} \longrightarrow u_0 \quad \mathfrak{L}^p\text{-強収束},$$

$$u'_{n'} \longrightarrow u'_0 \quad \mathfrak{L}^p\text{-弱収束},$$

(39) 無限次元空間に値をとる函数空間への一般化については Maruyama [14]。

なる条件を満たす部分列 $\{u_{n'}\}$ が存在する。⁽⁴⁰⁾

したがって積分汎関数 J の、たとえば列下半連続性を調べるためには、一般論として次のような問題を考えればよいことになる。

$(T, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間, $f: T \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ を所与の函数とし, $\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l) \times \mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k) (p, q \geq 1)$ 上において

$$J(x, y) = \int_T f(t, x(t), y(t)) d\mu$$

なる積分汎関数を定める。そして $\mathfrak{L}^p$ には強位相, $\mathfrak{L}^q$ には弱位相を定めたとえで, J の連続性を考察すれば, 上記の問題はその特殊ケースとして包摂されるであろう。

本節のおわりに, $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ の弱収束に関する簡単な, しかし時々有用な働きをする結果をひとつ用意しておこう。⁽⁴¹⁾

系 3.2 I は $\mathbb{R}$ における有限開区間, また $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{u_n\}$ は次の二条件を満たすものとしよう。

(i) $\sup_n \|u_n\|_{\mathfrak{W}^{1,1}} < \infty$.

(ii) $\{u'_n\}$ は一様可積分。

このとき $\{u_n\}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ において弱収束する部分列を有する。

証明 条件 (i) と定理 2.2 により, $\{u_n\}$ は $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ の強・相対コンパクト集合と見ることができるので, ある $u \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ に強収束する部分列 $\{u_{n'}\}$ を有する。また (i), (ii) と Dunford–Pettis の定理により, $\{u'_{n'}\}$ は $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ の弱・相対コンパクト集合であるから, ある $v \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ に弱収束する部分列 $\{u'_{n''}\}$ を有する。

$$u_{n''} \rightarrow u \quad \mathfrak{L}^1\text{-強収束},$$

$$u'_{n''} \rightarrow v \quad \mathfrak{L}^1\text{-弱収束}.$$

第一の関係からは ($\{u_{n''}\}$ は u に弱収束もするので)

$$\int_I u'_{n''} \varphi dt = - \int_I u_{n''} \dot{\varphi} dt \rightarrow - \int_I u \dot{\varphi} dt \quad (1)$$

$$\text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

(40) Maruyama[14] には, 埋め込み定理を表に出さない, より直接的な取り扱いが示されている。

(41) Buttazzo, Giaquinta and Hildebrandt [3] pp. 79–80.

また第二の関係からは

$$\int_I u'_{n''} \varphi dt \rightarrow \int_I v \varphi dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}). \quad (2)$$

(1) と (2) を比べて

$$-\int_I u \dot{\varphi} dt = \int_I v \varphi dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$$

であるから, $u' = v$ 。

こうして $\{u_{n''}\}$ は u に, そして $\{u'_{n''}\}$ は u' にそれぞれ $\mathfrak{L}^1$ -弱収束する。ゆえに $\{u_{n''}\}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ において u に弱収束する。
(証了)

IV. 変分法の解の存在

§1. 非線形積分汎函数の連続性

これまでに得た結果に基づいて, 変分法の解の存在を Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ 上で考察しよう。ここで I は有限開区間 (a, b) とする。

存在問題の解決のためには, 非線形積分汎函数の連続性を保証する条件が明らかにされねばならないが, この要請にこたえるのが A.D. Ioffe に負う基本定理である。Ioffe の理論については別の機会⁽⁴²⁾に詳しく論じたので, ここでは要点のみを記すにとどめる。

$(T, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間, $f : T \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を所与の函数とする。積分汎函数 $J : \mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l) \times \mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k) \rightarrow \bar{\mathbb{R}} (p, q \geq 1)$ を

$$J(x, y) = \int_T f(t, x(t), y(t)) d\mu$$

と定義する。

定義 $\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l)$ の点列 $\{x_n\}$ と, $\mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k)$ の点列 $\{y_n\}$ とについて,

- (i) $\{x_n\}$ は $\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l)$ において強収束,
- (ii) $\{y_n\}$ は $\mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k)$ において弱収束し, かつ
- (iii) $\sup_n J(x_n, y_n) < \infty$

が成り立つとき, つねに $\{f^-(t, x_n(t), y_n(t))\}$ が $\mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$ における弱・相対コンパクト集合であるならば, f は下方コンパクト性 (lower compactness property) を有するという。

(42) 丸山 [13] 第 7 章 §2.

定義 函数 $f : T \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が次の a, b を満たすとき, f は正規非線形積分核 (normal integrand) であるといい, さらに c も満たすときには凸正規非線形積分核 (convex normal integrand) と呼ぶ。

- a. f は $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ -可測。⁽⁴³⁾
- b. $t \in T$ を任意に固定したとき, 函数 $(x, y) \mapsto f(t, x, y)$ は下半連続。
- c. $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^l$ を任意に固定したとき, 函数 $y \mapsto f(t, x, y)$ は凸。

$\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l)$ に強位相, $\mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k)$ には弱位相を与えた場合に J が列下半連続となる場合, J は (p, q) -列下半連続であると略称する。

これらの概念を用いると, Ioffe の定理は次のように整理される。⁽⁴⁴⁾

Ioffe の定理 $(T, \mathcal{E}, \mu)$ は原子をもたない完備な有限測度空間, $f : T \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を凸正規非線形積分核とし, (自明な場合を除くために) すくなくともひと組の $(x, y) \in \mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^q$ について $J(x, y) < \infty$ が成り立つものとする。このとき, 次の二命題は同値である。

(i) 積分汎函数 J は (p, q) -列下半連続で, しかも

$$J(x, y) > -\infty \quad \text{for all } (x, y) \in \mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^q.$$

(ii) f は下方コンパクト性を有する。

下方コンパクト性を満たす函数の実例については丸山 [13] pp. 264–266 を参照していただきたいが, 若干の補足を加えておこう。

補題 4.1 I は $\mathbb{R}$ における有限開区間, 測度は Lebesgue 測度 λ , $p = q = 1$ とする。 $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は正規非線形積分核で, 次の条件を満たす函数 $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が存在することを仮定する。

- a. Φ は殆どすべての点で連続な非減少函数。
- b. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y)}{y} = \infty$.
- c. $f(t, x, y) \geq \Phi(|y|)$ for any $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

このとき f は下方コンパクト性を有する。⁽⁴⁵⁾

証明 $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は p. 70 の (i), (ii), (iii), つまり $\{x_n\}$ は $\mathfrak{L}^1$ -強収束, $\{y_n\}$ は

(43) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$, $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ はそれぞれ, $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k$, $\bar{\mathbb{R}}$ 上の Borel σ -集合体。

(44) Ioffe [8]. より一般的な枠組での研究としては Castaing [4]。

(45) ここに現われる Φ は, 南雲の定理 (p. 52) において主要な役割を演じた函数にほかならない。

$\mathfrak{L}^1$ -弱収束し、かつ

$$\sup_n \int_I f(t, x_n(t), y_n(t)) dt \leq C < \infty$$

を満たすものとしよう。このとき $\{f^-(t, x_n(t), y_n(t))\}$ が $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ における弱・相対コンパクト集合であることを示すのである。

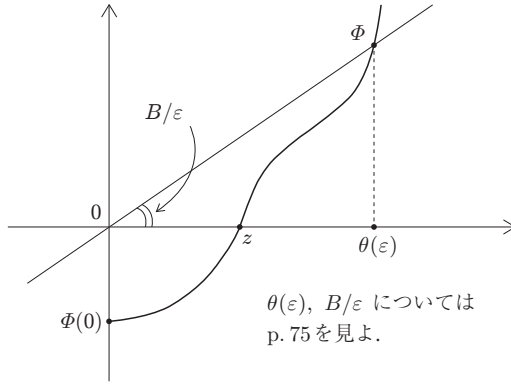
まず数 $z \geq 0$ を

$$z = \inf\{y \in [0, \infty) | \Phi(y) \geq 0\} \quad (1)$$

とおく (図 4.??)。

$f(t, x_n(t), y_n(t)) < 0$ であるためには、 $|y_n(t)| \in [0, z]$ でなければならない。したがって $f^-(t, x_n(t), y_n(t))$ の I 上での積分は、実質的には $|y_n(t)| \in [0, z]$ となる t の集合上で計算すればよいことに注意しよう。

図 4.1



可測集合 $H \subset I$ に対して

$$\begin{aligned} H_n^- &= \{t \in H | |y_n(t)| \in [0, z]\}, \\ H_n^+ &= H \setminus H_n^- \end{aligned} \quad (2)$$

と書くと、 H 上での積分は H_n^- と H_n^+ とに分割して行なえばよい。

$$\begin{aligned} \int_{H_n^-} f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt &\leq \int_{H_n^-} |\Phi(|y_n(t)|)| dt \\ &\leq |\Phi(0)| \lambda H_n^- \leq |\Phi(0)| \lambda H. \end{aligned} \quad (3)$$

(46) $z = 0$ の場合は、 $f^-(t, x_n(t), y_n(t))$ はすべての n について恒等的に 0。

また H_n^+ 上では $f^-(t, x_n(t), y_n(t)) = 0$ であるから

$$\int_{H_n^+} f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt = 0. \quad (4)$$

(3), (4)により,

$$\int_H f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt = \int_{H_n^-} f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt. \quad (5)$$

とくに $H = I$ とすれば, (3) と (5) から

$$\int_I f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt \leq |\Phi(0)|\lambda I. \quad (6)$$

ゆえに $\{f^-(t, x_n(t), y_n(t))\}$ は $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ において(強)有界である。

また任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{|\Phi(0)|} \quad (7)$$

のように小さく選んでおけば, (3), (5) により,

$$\lambda H < \delta \implies \int_H f^-(t, x_n(t), y_n(t)) dt < \varepsilon \quad (8)$$

がすべての n について成り立つ。つまり $\{f^-(t, x_n(t), y_n(t))\}$ は I 上で一様可積分である。

以上の結果から, Dunford–Pettis の定理を適用して, $\{f^-(t, x_n(t), y_n(t))\}$ は $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ において弱・列コンパクト (=弱・相対コンパクト) である。

こうして f が下方コンパクト性を有することが確かめられたのである。 (証了)

積分汎関数の連続性については以上で十分であろう。

§2. 変分法：解の存在証明

函数 $f: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と, 数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が与えられたとき, 次のような最も基本的形式の変分問題 $[V]$ における解の存在を Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ の上で考察しよう。⁽⁴⁷⁾ I は有限開区間 (a, b) とし, 測度は Lebesgue 測度 λ である。

$$[V] \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimize } J(u) = \int_I f(t, u(t), u'(t)) dt \\ \text{subject to} & u \in \mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R}), \\ & u(a) = \alpha, u(b) = \beta. \end{array} \right.$$

(47) Buttazzo, Giaquinta and Hildebrandt [3] Chap.3 を参照したが, より一般的に述べた。

簡便のために

$$\Gamma = \{u \in \mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R}) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$$

とする。

定理 4.1 I は有限開区間 (a, b) , 測度は Lebesgue 測度 λ とする。函数 $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は凸正規非線形積分核で, 補題 4.1 の条件 a, b, c を満たす函数 $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを仮定する。このとき変分問題 $[V]$ は解を有する。

証明 J は下から有界, つまり

$$\inf_{u \in \mathfrak{W}^{1,1}} J(u) > -\infty$$

である。実際, それは

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_I f(t, u(t), u'(t)) dt \\ &\geq \int_I \Phi(|u'(t)|) dt \quad (c \text{ による}) \\ &\geq \int_I \Phi(0) dt \quad (a \text{ による}) \\ &= \Phi(0)\lambda I \end{aligned}$$

から明らかである。

そこで $\{u_n\}$ を問題 $[V]$ の最小化列, すなわち

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \Gamma} J(u) (> -\infty) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

なる Γ の点列とする。一般性を失うことなく

$$\inf_{u \in \Gamma} J(u) < \infty \tag{1}$$

と仮定してよい。⁽⁴⁸⁾

1° $\{u_n\}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ において有界である。

これは次のようにして確かめられる。条件 c により

$$\int_I \Phi(|u'_n(t)|) dt \leq J(u_n)$$

(48) そうでない場合には, J は Γ 上で恒等的に ∞ である。

であり, $\{u_n\}$ は最小化列なので $\sup_n J(u_n) \leq A < \infty$ なる数 A が存在する。これから,

$$B = \sup_n \int_I |\Phi(|u'_n(t)|)| dt < \infty \quad (2)$$

の成り立つことが示される。⁽⁴⁹⁾

条件 b によれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分に大きな $\theta(\varepsilon) > 0$ を選び (図 4.?? 参照)

$$\frac{\Phi(y)}{y} \geq \frac{B}{\varepsilon} \quad \text{for all } y \geq \theta(\varepsilon) \quad (3)$$

とすることができる。そこで

$$I_n = \{t \in I \mid |u'_n(t)| \geq \theta(\varepsilon)\}$$

と書くことにすれば,

$$\int_{I_n} |u'_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{B} \int_{I_n} \Phi(|u'_n(t)|) dt \stackrel{(50)}{\leq} \frac{\varepsilon}{(2)} \quad (4)$$

したがって

$$\|u'_n\|_1 \leq \int_{I_n} |u'_n| dt + \int_{I \setminus I_n} |u'_n| dt \stackrel{(4)}{\leq} \varepsilon + \theta(\varepsilon) \lambda I.$$

右辺は n に依存しない有限の正数であるから,

$$\sup_n \|u'_n\|_1 < \infty. \quad (5)$$

(49) p. 72 と同様, $z = \inf\{y \in [0, \infty) \mid \Phi(y) \geq 0\}$ と定義し,

$$I_n^- = \{t \in I \mid |u'_n(t)| \in [0, z]\}, \quad I_n^+ = I \setminus I_n^-$$

とする。各 n に対して ($\Phi(0) < 0$ に注意)

$$\begin{aligned} A \geq J(u_n) &\geq \int_I \Phi(|u'_n(t)|) dt = \int_{I_n^+} \Phi(|u'_n|) dt + \int_{I_n^-} \Phi(|u'_n|) dt \\ &\geq \int_{I_n^+} \Phi(|u'_n|) dt + \Phi(0) \lambda I_n^- \geq \int_{I_n^+} \Phi(|u'_n|) dt + \Phi(0) \lambda I. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{I_n^+} \Phi(|u'_n|) dt \leq A + |\Phi(0)| \lambda I.$$

これから (右辺は n から独立)

$$\int_I |\Phi(|u'_n|)| dt \leq A + 2|\Phi(0)| \lambda I.$$

(50) I_n 上では $\Phi(|u'_n(t)|) \geq 0$ であるから, (4) 第二項の積分の内側には, 絶対値記号 $|\cdot|$ をつけてもつけなくても同じことである。

前稿 [15] 定理 2.2 より,

$$u_n(t) = u_n(a) + \int_a^t u'_n(s) ds = \alpha + \int_a^t u'_n(s) ds$$

であることから, $\{u_n\}$ も $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ において有界である。

$$\sup_n \|u_n\|_1 < \infty. \quad (6)$$

(5), (6) からただちに 1° を得る。

2° $\{u'_n\}$ は $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ において一様可積分。

$\{u'_n\}$ が $\mathfrak{L}^1$ -強有界であることと (2) とを考え併せれば, 南雲の定理により, $\{u'_n\}$ は弱・相対コンパクト (したがって一様可積分) である。

$1^\circ, 2^\circ$ および補題 4.1 から, 次の帰結を得る。

3° $\{u_n\}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ において弱収束する部分列 $\{u_{n'}\}$ を有する。

その極限を u , つまり

$$w\text{-}\lim_{n' \rightarrow \infty} u_{n'} = u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,1} \quad (7)$$

とすれば ($w\text{-}\lim$ は弱位相についての極限), 定理 2.1 より

4° $u \in \Gamma$.

(7) より, u_n の適当な凸結合から成る点列をつくり, それを u に $\mathfrak{W}^{1,1}$ -強収束せしめることができる。⁽⁵¹⁾ この凸結合のそれぞれは a, b での値が α, β に等しいという端点条件を満たしている。定理 2.1 によれば, $\mathfrak{W}^{1,1}$ における強収束からは一様収束が保証される。したがって極限 u も端点条件を満たし, $u \in \Gamma$ であることが知られる。

この $\{u_{n'}\}$ はもちろん問題 $[V]$ の最小化列である。定理 3.2 から, 次の結果が導かれる。

5° $\{u_{n'}\}$ は u に $\mathfrak{L}^1$ -強収束する部分列 $\{u_{n''}\}$ を有し, $\{u'_{n''}\}$ は u' に $\mathfrak{L}^1$ -弱収束する。

また補題 4.1 からは

6° f は下方コンパクト性を有する

という重要な命題が保証されるので, Ioffe の定理により

7° J は $(1, 1)$ -列下半連続である。

$5^\circ, 7^\circ$ から最終的な結果

$$J(u) \leq \liminf_{n''} J(u_{n''})$$

が得られる。こうして u が問題 $[V]$ の解であることが証明されたのである。

(証了)

(51) Mazur の定理による。Dunford and Schwartz [5] p. 422, 丸山 [11] p. 349.

参 考 文 献

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, (Academic Press, New York) 1975.
- [2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, (Springer, New York/Dordrecht/Heidelberg/London) 2011.
- [3] Buttazzo, G., M. Giaquinta and S.Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems*, (Clarendon Press, Oxford) 1998.
- [4] Castaing, C., “Semicontinuit  des fonctionnelles int grales”, *Acta Math. Vietnam.*, **7** (1982), 139–170.
- [5] Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, (Interscience, New York) 1958.
- [6] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1998.
- [7] Ioffe, A. D., “An Existence Theorem for Problems of the Calculus of Variations”, *Soviet Math Dokl.*, **13** (1972), 919–923.
- [8] ———, “On Lower Semicontinuily of Integral Functionals, I”, *SIAM J. Control and Optimization*, **15** (1977), 991–1000.
- [9] ——— and V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, (North-Holland, Amsterdam) 1979.
- [10] Giaquinta, M. and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations*, I, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 1996.
- [11] 丸山徹『函数解析学』(慶應通信) 1980.
- [12] ———『数理経済学の方法』(創文社) 1995. 現在は講談社から刊行。
- [13] ———『積分と函数解析』第二版(丸善出版) 2024.
- [14] ——— (Maruyama, T.), “A Generalization of the Weak Convergence Theorem in Sobolev Spaces with Applications to Differential Inclusions in a Banach Space”, *Proc. Japan Acad.*, **77**, Ser. A (2001), 5–10.
- [15] ———「一変数 Sobolev 空間の初等理論」『三田学会雑誌』第 117 巻 3 号 (2025), 95–131.
- [16] Maz’ja, V. G., *Sobolev Spaces*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 1985.
- [17] Nagumo, M., „ ber die Gleichmassige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variations-Problem“, *Japanese J. Math.*, **6** (1929), 178–182.
- [18] Schwartz, L., *Functional Analysis*, (Courant-Institute, New York) 1964.
- [19] Yosida, K., *Functional Analysis*, 3rd ed., (Springer-Verlag, New York) 1971.

附記

毎週土曜日、諸大学の若手学者が集まって数理経済学の研究会を催している。参加者の研究報告を聞き、私も参加者たちの役に立ちそうなテーマを選んで講義するよう心がけている。本稿ならびにこれに先立つ拙稿 [15] は、この研究会における令和 5 年度の私の講義録である。

会場や秘書業務を提供し、研究会の運営を支えてくれている一般社団法人樫の会の協力に謝意を表する。