慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	標本歪度と標本尖度を使った正規性の検定について
Sub Title	Normality tests with sample skewness and sample kurtosis
Author	長倉, 大輔(Nagakura, Daisuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2025
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.118, No.1 (2025. 6) ,p.1- 18
JaLC DOI	10.14991/001.20250601-0001
Abstract	確率分布の正規性の検定としてよく使われる検定の1つにJarque-Bera検定がある。Jarque-Bera検定では標本歪度と標本尖度についてその漸近分散共分散行列の逆行列で二次形式をとったものを検定統計量として用いている。本稿ではJarque-Bera検定とは異なった標本歪度と標本尖度の組み合わせの仕方を考え，検出力のパフォーマンスがどのように改善されるかを検証する。具体的にはHarvey, Leybourne, and Taylor（2009）で提案された棄却結合によって標本歪度と標本尖度(およびそれらとJarque-Bera検定やその改良版）とを組み合わせた検定を考える。シミュレーションによる検証の結果，棄却結合による組み合わせのいくつかは，シミュレーションにおいて対立仮説として設定された非正規分布のどの場合でも安定的に高いパフォーマンスを示すことが確認された。 Jarque-Bera test is one of the most frequently used normality tests. Jarque-Bera test statistic takes the quadratic form in the sample skewness and sample kurtosis with the inverse of their asymptotic covariance matrix. In this paper, we construct test statistics, combining the sample skewness and sample skewness differently from the Jarque-Bera test, and examine whether these test statistics show improved performances in terms of the power. Specifically, we combine the sample skewness and sample kurtosis (plus the Jarque-Bera test and its modified version) by the way of combination of test statistics proposed in Harvey, Leybourne, and Taylor (2009), which is known as the “union of rejections”. Results of simulation experiments confirm that the some combinations by the union of rejections show relatively high power performances regardless of the alternative non-normal distributions.
Notes	原著論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20250601-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」118 巻 1 号（2025 年 6 月）

標本歪度と標本尖度を使った正規性の検定について

長倉大輔 *

Normality Tests with Sample Skewness and Sample Kurtosis

Daisuke Nagakura *

Abstract: Jarque-Bera test is one of the most frequently used normality tests. Jarque-Bera test statistic takes the quadratic form in the sample skewness and sample kurtosis with the inverse of their asymptotic covariance matrix. In this paper, we construct test statistics, combining the sample skewness and sample skewness differently from the Jarque-Bera test, and examine whether these test statistics show improved performances in terms of the power. Specifically, we combine the sample skewness and sample kurtosis (plus the Jarque-Bera test and its modified version) by the way of combination of test statistics proposed in Harvey, Leybourne, and Taylor (2009), which is known as the "union of rejections". Results of simulation experiments confirm that the some combinations by the union of rejections show relatively high power performances regardless of the alternative non-normal distributions.

Key words: Jarque-Bera test, union of rejections, skewness, kurtosis

JEL Classifications: C12, C21

＊ 慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University
nagakura@keio.jp

Copyright©2025, by the Keio Economic Society

1　はじめに

確率分布の正規性の検定には既に様々な検定方法が提案されている。統計学分野で有名なものとして，Kolmogorov-Smirnov 検定，Anderson-Darling 検定，Cramer-von Mises 検定，Shapiro-Wilk 検定，Shapiro-Fransia 検定，などがある。これらについて詳しくは Dufour, et al.（1998）などを参照されたい。

これらに加えて，特に計量経済学分野の実証分析において正規性の検定によく用いられている検定としては，Jarque and Bera（1980）および Jarque and Bera（1987）で提案された Jarque-Bera（JB）検定がある。JB 検定では標本歪度と標本尖度をそれらの漸近分散共分散行列の逆行列で 2 次形式をとったものを検定統計量として用いている[(1)]。Jarque and Bera（1980）および Jarque and Bera（1987）では JB 検定統計量を，帰無仮説を正規分布，対立仮説を Pearson 分布族としたラグランジュ乗数検定統計量として導出しており，これは JB 検定がこの分布族に対してラグランジュ乗数検定の持つよい性質を持っていることを意味しており，計量経済学分野で JB 検定がよく用いられる一因でもあろう[(2)]。

JB 検定では上記のように標本歪度と標本尖度を組み合わせて検定統計量を構築しているが，本稿では，正規性の検定のためにこれら 2 つの統計量の別の組み合わせを考える。具体的には，Harvey, Leybourne, and Taylor（2009）で提案された “棄却結合” という検定統計量の組み合わせ手法を標本歪度と標本尖度に適用し，正規性検定のための新たな検定統計量を構築する。シミュレーションによってこれらと JB 検定（およびその改良版）とのパフォーマンスを比較した結果，それぞれの検定の検出力は対立仮説の非正規分布に依存するため，ある 1 つの検定が全ての対立仮説に対して他の検定よりもパフォーマンスがよいということはないが，棄却結合によって組み合わせた検定統計量のいくつかはシミュレーションで採用された対立仮説の非正規分布に対して，安定的に高いパフォーマンスを示すことが確認された。

次章以降の本稿の構成は以下のとおりである。まず次章で JB 検定とその改良版，および棄却結合

---

(1)　より正確には標本尖度から 3 を引いたものと標本歪度との二次形式。

(2)　通常，検定統計量の多くは，対立仮説として明示的に想定していない仮説に対しても，それが「帰無仮説でない仮説」であれば（例外はもちろんあるが）検出力を持つ (ここでの帰無仮説は検定統計量が導出された際の仮定を含むような，“より広い意味での帰無仮説” を意味する)。例えば，JB 検定は明示的な対立仮説としては Pearson 分布族を想定しているが，JB 検定は通常 Pearson 分布族に属さない分布に対しても，正規分布と異なる分布に対しては検出力があり，正規分布からの（何らかの意味で）乖離度合いが高いほどその検出力は高くなる。また検定統計量の導出の際に，対立仮説が（暗に想定されているが）明確には設定されていない場合も，特に正規性の検定においては，珍しくない。これらの議論については Godfrey（1988）の 1.2 節も参照されたい。

について説明する。また，同章で Dufour, et al.（1998）によって提案された標本歪度と標本尖度の小標本における正確な分布をシミュレーションによって求める方法も説明する。第 3 章ではシミュレーションによって第 2 章で紹介した検定の小標本におけるパフォーマンスを比較する。第 4 章で本章の結果についてまとめ，補論では第 2 章で述べられた補題 1 の証明を行う。

2　正規性の検定

正規性の検定には様々なものがあるが，2. 1 節ではそのうちの 1 つである JB 検定とその改良版について説明する。JB 検定は標本歪度と標本尖度をその漸近分散共分散行列の逆行列で二次形式をとったものだが，これらの組み合わせの仕方は他にも様々なものが考えられる。2. 3 節ではそのうちの 1 つとして Harvey, Leybourne, and Taylor（2009）によって提案された棄却結合という検定統計量の組み合わせの仕方を紹介する。また 2. 2 節では Dufour, et al.（1998）によって提案された標本歪度と標本尖度の小標本における正確な分布をシミュレーションによって求める方法も説明する。

2. 1　JB 検定とその改良版

$\{y_i\}_{i=1}^N$ を期待値 μ，分散 σ^2 の独立同分布に従う N 個の確率変数とする。また $\widehat{\mu}_N$ と $\widehat{\sigma}_N$ をそれぞれ $\widehat{\mu}_N = N^{-1}\sum_{i=1}^N y_i$ および $\widehat{\sigma}_N = [N^{-1}\sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{\mu})^2]^{1/2}$ とする。母歪度と母尖度はそれぞれ $\nu = E(z_i^3)$ および $\kappa = E(z_i^4)$ と定義される。ここで $z_i = (y_i - \mu)/\sigma$ である。これらは $y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ の時それぞれ $\nu = 0$ および $\kappa = 3$ となる。これら母歪度と母尖度に対して，標本歪度 $\widehat{\nu}_N$ と 標本尖度 $\widehat{\kappa}_N$ は

$$\widehat{\nu}_N = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{\mu}_N)^3}{\widehat{\sigma}_N^3}, \quad \text{および} \quad \widehat{\kappa}_N = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^T (y_i - \widehat{\mu}_N)^4}{\widehat{\sigma}_N^4},$$

で与えられる。標本歪度と標本尖度は，（適当に基準化して）それぞれ単独でも正規性の検定統計量として使うことができるが，JB 検定統計量はこれらを組み合わせたものとして

$$JB_N = N\left[\frac{\widehat{\nu}_N^2}{6} + \frac{(\widehat{\kappa}_N - 3)^2}{24}\right],$$

と定義される。帰無仮説 $H_0 : y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のもとで[(3)]，JB_N は漸近的に自由度 2 のカイ二乗分布に従い，その場合，名目有意水準 5%での棄却点は（小数点以下第 5 位で四捨五入して）5.9915 となる。JB_N は標本歪度と標本尖度（から帰無仮説のもとでの母歪度と母尖度の値を引いたもの）についてその漸近分散の逆行列で二次形式をとったものになっている。すなわち，標本歪度 $\widehat{\nu}_N$ と標本尖度 $\widehat{\kappa}_N$ は帰無仮説 $H_0 : y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のもとで，

$$\sqrt{N}\begin{bmatrix}\widehat{\nu}_N\\ \widehat{\kappa}_N-3\end{bmatrix}\xrightarrow{d}N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}6&0\\0&24\end{bmatrix}\right),$$

となることが知られているので，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_N=[\widehat{\nu}_N,\widehat{\kappa}_N-3]'$ および $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}6&0\\0&24\end{bmatrix}$ とすれば，JB 検定統計量は

$$JB_N=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_N'\left(N^{-1}\mathbf{V}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_N,$$

と表すことができる。実際には Jarque and Bera（1980）と Jarque and Bera（1987）はこの検定統計量を，正規分布を帰無仮説，Pearson 分布族を対立仮説としたラグランジュ乗数検定として導出した。これはこの検定統計量が単なる標本歪度と標本尖度の漸近分散共分散行列の逆行列の二次形式というだけではなく，ラグランジュ乗数検定の持つよい性質を持つことを保証したことになり，計量経済学分野の応用分析において正規性の検定に JB 検定がよく使われるようになった一因でもあろう。

JB 検定統計量の改良版はいくつか提案されている。Urzúa（1996）は $\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ について正規分布の帰無仮説のもとでの小標本における正確な期待値と分散を導出した。それらは

$$\begin{aligned}E(\widehat{\nu}_N)&=0,&\qquad\mathrm{var}(\widehat{\nu}_N)&=\frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)},\\ E(\widehat{\kappa}_N)&=3-\frac{6}{N+1},&\mathrm{var}(\widehat{\kappa}_N)&=\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)},\end{aligned}$$

で与えられる。この結果をもとに，Urzúa（1996）は JB 検定において，標本歪度と標本尖度を上記の小標本における正確な期待値と分散で基準化したもので置き換え，

$$\begin{aligned}AJB_N&=\frac{[\widehat{\nu}_N-E(\widehat{\nu}_N)]^2}{\mathrm{var}(\widehat{\nu}_N)}+\frac{[\widehat{\kappa}_N-E(\widehat{\kappa}_N)]^2}{\mathrm{var}(\widehat{\kappa}_N)}\\&=\frac{(N+1)(N+3)}{N-2}\left(\frac{\widehat{\nu}_N^2}{6}+\frac{\left[\widehat{\kappa}_N-3+\frac{6}{N+1}\right]^2(N+1)(N+5)}{24N(N-3)}\right),\end{aligned}$$

---

(3)　匿名の査読者から「対立仮説が明確に設定されていないため，研究の理論的基盤が弱く，検定の目的と意義を不明確にしている」という指摘があった。多くの正規性の検定統計量は対立仮説として具体的な分布を明確に設定せず導出されているが，そこでは対立仮説としては「$H_1:y_i$ は正規分布には従わない」が暗に想定されている（注釈 2 も参照されたい）。本論文でももちろん対立仮説として H_1 を想定している。対立仮説についての議論はその検定統計量の検出力を考える時（どのような対立仮説に対して検出力があるかを考える時，など）に重要になる。特に正規性の検定に関しては，たくさんある正規性の検定統計量について，どの検定統計量がどのような非正規分布（対立仮説）に対して検出力があるかを考える際に，対立仮説のもとでの統計量の性質が重要になる。この問題については第 3 章で考察する。

という修正された（adjusted）検定統計量を提案した。この検定統計量は漸近的には JB_N 統計量と同じものであるが，Urzúa（1996）のシミュレーションによると，小標本のもとではパフォーマンスが改善されている。

Urzúa（1996）は標本歪度と標本尖度の小標本のもとでの正確な期待値と分散を導出したが，その共分散については導出しなかった。上記の改良版の JB 検定は実際に標本歪度と標本尖度についてその（小標本における正確な）分散共分散行列の逆行列で二次形式をとったものであることは次の補題からわかる。

補題 1　$y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ の時，$\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ の共分散は 0 である。

証明　補論を参照。

本稿では JB_N および AJB_N に加え，標本歪度と標本尖度から構築した以下の 4 つの検定統計量についても考える。

$$
\begin{aligned}
&S_N = N\frac{\widehat{\nu}_N^2}{6}, \quad K_N = N\frac{(\widehat{\kappa}_N - 3)^2}{24}, \\
&AS_N = \frac{[\widehat{\nu}_N - E(\widehat{\nu}_N)]^2}{\mathrm{var}(\widehat{\nu}_N)} = \frac{(N+1)(N+3)\widehat{\nu}_N^2}{6(N-2)}, \\
&AK_N = \frac{[\widehat{\kappa}_N - E(\widehat{\kappa}_N)]^2}{\mathrm{var}(\widehat{\kappa}_N)} = \frac{\left[\widehat{\kappa}_N - 3 + \frac{6}{N+1}\right]^2 (N+1)^2(N+3)(N+5)}{24N(N-2)(N-3)}.
\end{aligned}
$$

これらは全て正規分布の帰無仮説のもとで漸近的に自由度 1 のカイ二乗分布に従い，その場合，有意水準 5%の棄却点は（小数点以下第 5 位で四捨五入して）3.8415 である。また，これらを用いると JB_N と AJB_N は

$$
JB_N = S_N + K_N, \quad AJB_N = AS_N + AK_N,
$$

と表現される。JB_N, AJB_N, S_N, AS_N, K_N, AK_N は全て $\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ の関数であるため，2. 2 節で説明する方法によって小標本における正確な有意水準 α の棄却点を計算できる。

2. 2　シミュレーションによる小標本での正確な棄却点の計算

Dufour, et al.（1998）では線形回帰モデルにおける誤差項の正規性の検定を，最小二乗法の残差を使って行う場合において，シミュレーションによる小標本での正確な棄却点を計算する方法を提案した。ここではその特別な場合として，説明変数が定数のみの場合について考え，Dufour, et al.（1998）の方法についてややかみ砕いて説明する。

標本歪度と標本尖度は $z_i = (y_i - \mu)/\sigma$ を用いて

$$\widehat{\nu}_N = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}[\sigma z_i + \mu - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\sigma z_i + \mu)]^3}{\left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}[\sigma z_i + \mu - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\sigma z_i + \mu)]^2\right\}^{3/2}} = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^3}{\widehat{\sigma}^3_{z,N}}, \tag{1}$$

および

$$\widehat{\kappa}_N = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}[\sigma z_i + \mu - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\sigma z_i + \mu)]^4}{\left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}[\sigma z_i + \mu - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\sigma z_i + \mu)]^2\right\}^{2}} = \frac{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^4}{\widehat{\sigma}^4_{z,N}}, \tag{2}$$

と書き表すことができる。ここで

$$\widehat{\mu}_{z,N} = N^{-1}\sum\nolimits_{i=1}^{N} z_i, \quad \widehat{\sigma}_{z,N} = \sqrt{N^{-1}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^2},$$

である。正規分布の帰無仮説のもとで $z_i \sim N(0,1)$ であり，標準正規分布の標本は簡単にシミュレーションによって発生させることができるので，式(1)と式(2)は，任意のサイズ N に対して，帰無仮説のもとで $\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ の標本をシミュレーションによって発生させることができることを意味している。これは小標本における $\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ の任意の関数の分布の％点を任意の精度で近似できることを意味している。

2. 3　棄却結合（Union of rejections）

2. 1 節で紹介した検定統計量は標本歪度と標本尖度をそれらの漸近分散共分散行列（および小標本における正確な分散共分散行列）の逆行列の二次形式をとることによって組み合わせて構築された。これらの組み合わせ方には様々なやり方が考えられ，二次形式による組み合わせはその 1 つである。ここでは他の組み合わせの方法を紹介する。具体的には Harvey, Leybourne, and Taylor (2009)で提案された棄却結合（Union of rejections）と呼ばれる組み合わせ方法を紹介する。

今，$T_i, i = 1, 2$ を同じ帰無仮説を検定する 2 つの異なった検定統計量とする。また $c_{i,\alpha}$ を検定統計量 T_i を用いた検定において有意水準 100α％で検定する際に用いられる棄却点，すなわち（帰無仮説のもとで）

$$\Pr(T_i > c_{i,\alpha}) = \alpha, \tag{3}$$

が成り立つとする。この時，棄却結合とは，$T_i, i = 1, 2$ のどちらかの検定統計量がある棄却点よりも大きい場合に帰無仮説を棄却するという検定方法のことをいう。具体的には以下のルールによって検定を行う。

棄却結合: $T_1 > \lambda_\alpha c_{1,\alpha}$ もしくは $T_2 > \lambda_\alpha c_{2,\alpha}$ の時に帰無仮説 H_0 を棄却する。

ここで λ_α はこの棄却結合による検定の有意水準が α になるように調整するための定数である。Harvey, Leybourne, and Taylor（2009)は単位根検定の文脈において，いくつかの検定統計量を組み合わせるために棄却結合を提案した。本稿では正規分布を検定するためのいくつかの検定統計量を棄却結合によって組み合わせるとどうなるかを検証する。

棄却結合を実行するためには λ_α を求める必要があるが，これは以下のように求めることができる。上記の棄却結合は

棄却結合: $\max\left\{T_1, \frac{c_{1,\alpha}}{c_{2,\alpha}}T_2\right\} > \lambda_\alpha c_{1,\alpha}$ の時に帰無仮説 H_0 を棄却する。

と書き直すことができる。ここで $c_{1,\alpha}$, $c_{2,\alpha}$ は既知の定数であるので，シミュレーションによって帰無仮説のもとで $T^{\max}_{1,2,\alpha} = \max\{T_1, (c_{1,\alpha}/c_{2,\alpha})T_2\}$ を発生させ（ることができれば），その $100(1-\alpha)$ %点の値を求め，その値を $c_{1,\alpha}$ で割ることによって λ_α を求めることができる。

上記の 2 つの検定統計量による棄却結合は任意の K 個の検定統計量の場合に容易に拡張することができる。今，T_i, $i = 1, ..., K$ を同じ帰無仮説を検定する K 個の異なる検定統計量とする。この時，この K 個の検定統計量による棄却結合は

棄却結合（K 個の場合）：$T_1 > \lambda_\alpha c_{1,\alpha}$ もしくは $T_2 > \lambda_\alpha c_{2,\alpha}$……もしくは $T_K > \lambda_\alpha c_{K,\alpha}$ の時に帰無仮説 H_0 を棄却する。

となる。ここで $c_{i,\alpha}$ と λ_α は先ほどと同様に定義される。この場合も

棄却結合（K 個の場合）：$\max\{T_1, \frac{c_{1,\alpha}}{c_{2,\alpha}}T_2, ..., \frac{c_{1,\alpha}}{c_{K,\alpha}}T_K\} > \lambda_\alpha c_{1,\alpha}$ の時に帰無仮説 H_0 を棄却する。

のように書き換えることができるので，これより先ほどと同様の方法で λ_α の値をシミュレーションによって求めることができる。

3　シミュレーションによるパフォーマンスの比較

この章では小標本における，S_N, K_N, JB_N, AS_N, AK_N, AJB_N およびこれらの棄却結合を用いた検定についてその小標本におけるパフォーマンスを比較する。以下では，検定統計量 T_1 と T_2 の棄却結合を $UR(T_1,\ T_2)$ と表すことにする。3 つ以上の場合も同様に表す。

後ほど，3. 2 節で行うシミュレーションの結果より K_N の検出力は，対立仮説の分布や標本のサイズによらず，AK_N よりも常に小さいので，棄却結合を考える際には K_N は除外する。具体的には，棄却結合として $UR(S_N,\ AK_N)$, $UR(S_N,\ JB_N)$, $UR(S_N,\ AJB_N)$, $UR(AK_N,\ JB_N)$, $UR(AK_N,\ AJB_N)$, $UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$, $UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$ の 7 つを考える。

3. 1 節ではまず S_N, K_N, JB_N, AS_N, AK_N, AJB_N について，漸近分布による棄却点を用いた時と Dufour, et al.（1998）の方法によって計算した小標本での正確な棄却点を用いた時のサイズパフォーマンスを比較する。ここでは漸近分布に基づく棄却点を用いると，検定統計量によっては，深刻な過少棄却が起こることが確認できる。3. 2 節では対立仮説としていくつかの非正規分布を考え，これらについて，Dufour, et al.（1998）の方法によって得た棄却点を用いた場合の検出力を見る。3. 3 節では，3. 2 節の結果をもとに，実際の分析においてどの検定統計量を用いるのがよいかを議論する。

3. 1　サイズパフォーマンスの比較

この節では各検定統計量のサイズパフォーマンスを検証する。それぞれ漸近分布に基づく棄却点を使用した場合と，Dufour, et al.（1998）の方法を用いて得た小標本の正確な棄却点を使用した場合とを見てみる。Dufour, et al.（1998）の方法で有限標本の正確な棄却点を計算する際に使用したシミュレーションの標本のサイズは $1,000,000$ とした[(4)]。また，棄却結合の式(3)における棄却結合に含める検定統計量の棄却点 $c_{\alpha,i}$ として，漸近分布のものではなく Dufour, et al.（1998）の方法で計算した有限標本の正確な棄却点の方を用いることとする（その値に対して Dufour, et al.（1998）の方法で，棄却結合の有限標本での正確な棄却点を計算する）。

帰無仮説のもとでの y_i として，$\{y_i\}_{i=1}^N$ を正規分布 $N(1,2)$ から発生させた。$N = 20, 40$ の 2 つの場合を考える。棄却率を計算するのに用いたシミュレーションの数は $1,000,000$ とした。表 1 は名目有意水準 5%とした時の，それぞれの検定統計量の棄却率（実際のサイズ）をまとめたものである。棄却結合については漸近分布の結果は導出されていないので省略する。

まず S_N, K_N, JB_N, AS_N, AK_N, AJB_N の 6 つの検定統計量について，漸近分布に基づいた棄却点を用いた場合の結果を見てみる。表 1 より，S_N, K_N, JB_N の 3 つについては名目有意水準 5%に対してかなり過少棄却している。特に K_N については $N = 20$ の場合で約 1.32%，$N = 40$ の場合で約 2.23%とかなり過少棄却している。小標本において JB_N が過少棄却するという結果は Dufour, et al.（1998）のシミュレーションの結果と整合的である。また，この結果は漸近分布に基づいた JB 検定においては検出力が本来の検出力（実際の有意水準の棄却点を用いた場合）よりも下がる

(4)　Dufour, et al.（1998）ではシミュレーションに用いる標本のサイズは 99 でも十分よい近似ができることを確認している。

表1　有意水準5%とした時の実際のサイズ（%）

	$N=20$		$N=40$	
	Dufour, et al.（1998）の方法	漸近分布	Dufour, et al.（1998）の方法	漸近分布
S_N	4.965	2.866	5.001	3.818
K_N	5.001	1.318	5.020	2.232
JB_N	4.982	2.442	4.993	3.459
AS_N	4.965	5.326	5.001	5.230
AK_N	4.972	4.637	5.007	4.431
AJB_N	4.988	6.094	4.995	5.786
$UR(S_N,\ AK_N)$	5.007	–	4.992	–
$UR(S_N,\ JB_N)$	5.000	–	5.010	–
$UR(S_N,\ AJB_N)$	5.000	–	5.005	–
$UR(AN_N,\ JB_N)$	5.028	–	4.978	–
$UR(AN_N,\ AJB_N)$	5.023	–	4.982	–
$UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$	5.012	–	4.988	–
$UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$	5.013	–	4.985	–

であろうことも示唆している。

次に，S_N, K_N, JB_N に対して Urzúa（1996）による改良を施した AS_N, AK_N, AJB_N について，漸近分布に基づいた棄却点を用いた場合を見てみる。この場合，いずれについても小標本における実際のサイズは名目の 5%にかなり近くなっており，S_N, K_N, JB_N よりも改善されていることがわかる。ただし，AJB_N については実際のサイズの歪みが他の 2 つよりも相対的にはやや大きくなっている。とはいえ，それでも $N=40$ の場合に 0.8%ほどである。Urzúa（1996）による JB 検定の改良版については先行研究であまり注目されてこなかったが，漸近分布を用いた方法としては，そのサイズパフォーマンスは良好であると言えよう。

次に Dufour, et al.（1998）の方法によって計算した棄却点を用いた場合を見てみよう。これは棄却結合を含む全ての検定統計量について $N=20$，$N=40$ のどちらの場合においても，名目サイズと実際のサイズの違いは，0.04%よりも小さくなっており，実用上違いはほぼ 0 と言える（ここで S_N と AS_N が全く同じ結果になっているが，これは偶然ではなく，実は AS_N は S_N の定数倍になるので，小標本における正確な棄却点を用いるとどちらも同じ結果になることを反映した結果である）。これらは Urzúa（1996）の方法によるパフォーマンスの改善よりもはるかによい。Dufour, et al.（1998）の方法は，任意の N に対して計算でき，コードを組むのも簡単で，計算時間もほとんどかからないため（今回は全て計算するのに 2 分ほど），非常に有用な方法であると言えよう。検定においては，まずはサイズが正しいことが大前提なので（実際のサイズが大きく異なる検定の検出力の比較だけをしてもあまり意味がないため），正規性の検定において，サイズのコントロールという文脈においては，Dufour, et al.（1998）の方法が使用できるのであれば漸近分布に基づく方法を使用する意味はほぼないと言え

るだろう（もちろん漸近分布より得られる棄却点を用いた場合でも，標本の大きさが十分大きければこのようなサイズの歪みの問題はほとんどなくなると思われるが，その場合でもより正確な Dufour, et al.（1998）の方法を使用するのが無難であろう）。

3. 2　検出力の比較

次にそれぞれの検定の検出力を比較する。3. 1 節で確認したように漸近分布に基づく棄却点を用いた時のサイズは検定統計量によっては問題がある一方，Dufour, et al.（1998）の方法を用いて得た棄却点を用いればどの検定もサイズを正しくコントロールできるので，以下ではこの場合の検出力のみを考える。またこの場合は，（AS_N は S_N の定数倍なので）AS_N と S_N のどちらも同じ結果になるので AS_N の結果は省略する。

対立仮説として 2 つの非正規分布を考える。1 つ目の対立仮説として，尖度に対する検出力を検証するために，$H_1^{(t)} : y_i \sim t(d)$, すなわち自由度 d の t 分布を考える。ここで自由度としては $d = 19$, 16, 13, 10, 7, 4, 1 の 7 つを考えた（自由度が小さくなるほど尖度が増大する）。棄却率を計算するためのシミュレーションは，帰無仮説の時と同様 1,000,000 回とした。表 2 はそれぞれの検定統計量についての棄却率（%）をまとめたものである。ここで ν_t と κ_t はそれぞれ与えられた自由度 d の値に対する t 分布の母歪度と母尖度である（母歪度と母尖度が定義できない場合は “–” とした[(5)]）。

表 2 を見ると，$N = 20$ の場合も $N = 40$ の場合も検出力の傾向はそれほど変わらない。どちらの場合も，S_N のパフォーマンスが他と比べて悪いが，S_N 以外の検定統計量について検出力の違いはそれほどない（最大でも 3〜4%ほど）。t 分布の対立仮説のもとで歪度は常に 0 であるので，歪度に対して検出力を持ちそうな S_N のパフォーマンスが一番悪いのは予想通りである（ただし，統計量を基準化する際に使用した漸近分散の導出は，正規分布の仮定のもとで行っているので，対立仮説のもとで歪度が 0 でも正規分布でない場合には検出力はある[(6)]）。1 つ注目すべき点は $N = 20$ の時に，棄却結合 $UR(AK_N,\ AJB_N)$ のパフォーマンスが一番よいことである。棄却結合によって，その中に含まれる検定統計量よりも検出力が大きくなることがあるというのは興味深い。ただし，$N = 40$ の場合は，AK_N のパフォーマンスが最もよくなっており，$UR(AK_N,\ AJB_N)$ のパフォーマンスのよさは 2 番目となっている。AK_N，$UR(AK_N,\ JB_N)$，および $UR(AK_N,\ AJB_N)$ の 3 つが検出力の上位 3 つにほぼ常に入っており，これらはほとんど違いがなく（これら 3 つの検出力の違いは最大で

---

(5)　t 分布において 3 次モーメントが存在するためには $d > 3$，4 次モーメントが存在するには $d > 4$ である必要がある。

(6)　文献でまれに，「JB 検定は歪度と尖度がそれぞれ 0 と 3 かどうかを検定しており，これらがそれぞれ 0 と 3 の分布には検出力がない」という説明があるが，これは必ずしも正しくない。なぜなら，漸近分散を導出する際に正規分布の仮定が用いられているため，歪度が 0 で尖度が 3 だがより高次のモーメントは異なっている非正規分布に対しては，導出した漸近分散の値と実際の統計量の漸近分散の値が異なり，その結果，検出力を持つ可能性があるからである。

表2　有意水準5%におけるt分布への実際のパワー（%）

	d	19	16	13	10	7	4	1
	ν_t	0	0	0	0	0	0	–
$N=20$	κ_t	3.4	3.5	$\frac{11}{3}$	4	5	–	–
S_N		7.887	8.453	9.503	11.265	15.046	25.754	77.399
K_N		7.712	8.371	9.423	11.292	15.385	27.433	85.938
JB_N		8.287	8.976	10.181	12.214	16.569	28.869	86.212
AK_N		8.496[2]	9.276[3]	10.553[2]	12.679[3]	17.266[3]	30.194[3]	87.605
AJB_N		8.416	9.142	10.388	12.474	16.986	29.636	87.183
$UR(S_N,\ AK_N)$		8.420	9.176	10.417	12.544	17.112	30.045	88.028
$UR(S_N,\ JB_N)$		8.229	8.903	10.074	12.049	16.334	28.467	85.852
$UR(S_N,\ AJB_N)$		8.325	9.015	10.229	12.240	16.653	29.137	86.825
$UR(AK_N,\ JB_N)$		8.491[3]	9.280[2]	10.536[3]	12.687[2]	17.296[2]	30.302[2]	88.111[1]
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		8.532[1]	9.321[1]	10.586[1]	12.728[1]	17.358[1]	30.376[1]	88.074[2]
$UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$		8.427	9.188	10.427	12.551	17.116	30.059	88.031
$UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$		8.429	9.185	10.428	12.553	17.118	30.062	88.034[3]
$N=40$								
S_N		9.325	10.375	12.011	14.744	20.581	36.399	88.494
K_N		10.524	11.938	14.098	17.914	26.047	47.715	98.775
JB_N		10.717	12.154	14.292	18.055	25.940	46.914	98.542
AK_N		11.294[1]	12.853[1]	15.193[1]	19.232[1]	27.738[1]	49.708[1]	98.924[1]
AJB_N		10.931	12.437	14.644	18.511	26.604	47.956	98.702
$UR(S_N,\ AK_N)$		10.941	12.430	14.668	18.586	26.828	48.482	98.823
$UR(S_N,\ JB_N)$		10.460	11.824	13.872	17.465	25.121	45.680	98.364
$UR(S_N,\ AJB_N)$		10.590	11.991	14.080	17.779	25.592	46.467	98.513
$UR(AK_N,\ JB_N)$		11.119[3]	12.658[3]	14.949[3]	18.961[3]	27.341[3]	49.193[3]	98.890[3]
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		11.173[2]	12.719[2]	15.007[2]	19.040[2]	27.463[2]	49.362[2]	98.905[2]
$UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$		10.944	12.430	14.675	18.601	26.839	48.503	98.822
$UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$		10.941	12.427	14.675	18.600	26.836	48.500	98.821

（注） 表2において，dはt分布の自由度を表す。ν_tとκ_tはそれぞれその上の自由度の値に対する，t分布の歪度と尖度である。それぞれの自由度のt分布に対して最も高い検出力に[1]を，2番目に高い検出力の値に[2]を，3番目に高い検出力の値に[3]を付けている。

も0.5%ほどである），これら3つに実用上の違いはほぼないと言えるだろう。

2つ目の対立仮説として，歪度に対する検出力を比較するために，$H_1^{(SN)}: y_i \sim SN(\alpha)$，すなわち形状パラメーター$\alpha$の非対称正規分布（skew normal distribution）を考える。非対称正規分布の確率密度関数は

$$f(x) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

で与えられ，その期待値，分散，歪度，尖度はそれぞれ

$$\mu_{SN} = c\delta, \quad \sigma_{SN}^2 = 1-(c\delta)^2, \quad \nu_{SN} = \frac{4-\pi}{2}\frac{(c\delta)^3}{(\sigma_{SN}^2)^{3/2}}, \quad \kappa_{SN} = 3+2(\pi-3)\frac{(c\delta)^4}{(\sigma_{SN}^2)^2},$$

で与えられる。ここで $c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ および $\delta=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ である[7]。非対称正規分布は形状パラメーターの α が 0 である時には標準正規分布に帰着し，α の絶対値が増大するにつれて歪度の絶対値も増大する。また $\alpha\to\infty$ における極限は半正規分布となる（また $\alpha\to-\infty$ の極限は半正規分布にマイナスをつけた分布になる）。ここで非対称正規分布は歪度に対する検出力を見るために使用しているが，ν_{SN} と κ_{SN} の間には

$$\kappa_{SN}=3+2(\pi-3)\frac{2^{4/3}}{(4-\pi)^{4/3}}(\nu_{SN}^2)^{2/3},$$

という関係があるため，歪度が上昇すれば尖度も同時に上昇することに注意する必要がある。

表 3 は非対称正規分布へのそれぞれの検定統計量の実際のパワーをまとめたものである。表 3 より形状パラメーター α と標本の大きさ N について，$\alpha=1$ かつ $N=20$ を除くどの場合に対しても S_N の検出力が最も高いことがわかる。S_N はその構成上歪度に対して検出力を持つことが予想されるので，この結果は自然である。また，2 番目によいのは棄却結合である $UR(S_N,\ JB_N)$ であり，3 番目によいのは $UR(S_N,\ AJB_N)$ となっている。AK_N と K_N は他の 3 つに比べると著しく検出力が低く，この 2 つにパフォーマンスの違いは見られない。この結果を見ると非対称正規分布に対しては S_N を用いることが最もよいと言える。

3. 3　どの検定を用いるかについて

表 4 は検出力のパフォーマンスがよいと思われる検定統計量を表 2 と表 3 のそれぞれの結果から 3 つずつ選び，その相対的なパフォーマンスを比較したものである。具体的には，表 2（t 分布）の結果からは $AK_N, UR(AK_N,\ JB_N), UR(AK_N,\ AJB_N)$ の 3 つを，表 3（非対称正規分布）の結果からは $S_N, UR(S_N,\ JB_N), UR(S_N,\ AJB_N)$ の 3 つを選んだ。相対的なパフォーマンスを見るために，表 4 (a)（t 分布の結果）において $N=20$ の場合については，$UR(AK_N,\ AJB_N)$ の検出力を 1 とした時の他の検定統計量の検出力の割合（すなわちそれぞれの検定統計量の検出力を $UR(AK_N,\ AJB_N)$ の検出力で割った値）を計算し，表 4 (a) の $N=40$ の場合については，AK_N の検出力を 1 とした時の割合を計算している（割合は全て％で表示）。また，表 4 (b)（非対称正規分布の結果）に対しては，S_N の検出力を 1 とした時に他の検定統計量の検出力の割合（つまりそれぞれの検出力を S_N の検出力で割ったもの）を計算し表にしている。図 1 は，これらの結果を視覚的に比較しやすいように表 4 の値を図示したものである。

まず，先ほども見たように，どれか 1 つの検定統計量のパフォーマンスが常に一番よいということはない。対立仮説が t 分布である時には AK_N のパフォーマンスが相対的に最もよく，S_N のパ

---

(7)　よって $|\mu_{SN}|<\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \frac{\pi-2}{\pi}<\sigma_{SN}^2\le 1,\ |\nu_{SN}|<\frac{4-\pi}{\pi-2}\sqrt{\frac{2}{\pi-2}}\approx 0.9953$, および $3\le\kappa_{SN}<3+8\frac{\pi-3}{(\pi-2)^2}\approx 3.8692$ である。

表3　有意水準5%における非対称正規分布への実際のパワー（%）

	α	1	2	3	4	5	10	30
	ν_{SN}	0.137	0.454	0.667	0.784	0.851	0.956	0.991
$N = 20$	κ_{SN}	3.062	3.305	3.510	3.633	3.705	3.823	3.864
S_N		5.727[2]	10.775[1]	17.007[1]	21.588[1]	24.588[1]	30.258[1]	32.317[1]
K_N		5.458	7.844	10.247	11.914	12.912	15.071	15.796
JB_N		5.708	9.983	14.840	18.308	20.470	24.604	26.130
AK_N		5.576	8.241	10.700	12.266	13.111	14.785	15.195
AJB_N		5.684	9.461	13.538	16.344	18.017	21.196	22.283
$UR(S_N,\ AK_N)$		5.691	9.459	13.783	17.075	19.243	23.533	25.172
$UR(S_N,\ JB_N)$		5.738[1]	10.343[2]	15.808[2]	19.819[2]	22.435[2]	27.524[2]	29.392[2]
$UR(S_N,\ AJB_N)$		5.721[3]	10.078[3]	15.206[3]	19.003[3]	21.461[3]	26.278[3]	28.083[3]
$UR(AK_N,\ JB_N)$		5.687	9.167	12.953	15.703	17.441	20.844	22.064
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		5.667	8.950	12.376	14.740	16.193	19.015	19.971
$UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$		5.697	9.468	13.779	17.055	19.210	23.463	25.086
$UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$		5.694	9.468	13.776	17.050	19.205	23.458	25.081
$N = 40$								
S_N		6.590[1]	18.557[1]	33.261[1]	43.518[1]	49.960[1]	60.729[1]	64.178[1]
K_N		5.921	10.165	14.262	16.769	18.412	21.152	22.208
JB_N		6.412	15.484	26.122	33.720	38.717	47.915	51.235
AK_N		6.066	10.628	14.835	17.294	18.858	21.285	22.113
AJB_N		6.364	14.492	23.682	30.017	34.114	41.524	44.163
$UR(S_N,\ AK_N)$		6.318	14.680	25.455	33.740	39.247	49.283	52.733
$UR(S_N,\ JB_N)$		6.511[2]	16.823[2]	29.572[2]	38.864[2]	44.858[2]	55.324[2]	58.847[2]
$UR(S_N,\ AJB_N)$		6.474[3]	16.403[3]	28.757[3]	37.827[3]	43.703[3]	54.092[3]	57.630[3]
$UR(AK_N,\ JB_N)$		6.222	13.335	21.820	28.056	32.234	39.985	42.845
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		6.203	12.873	20.530	25.956	29.552	36.022	38.393
$UR(S_N,\ AK_N,\ JB_N)$		6.314	14.673	25.374	33.602	39.076	49.047	52.478
$UR(S_N,\ AK_N,\ AJB_N)$		6.312	14.664	25.360	33.586	39.060	49.028	52.459

（注） 表3において，αは非対称正規分布の形状パラメーターを表す。ν_{SN}とκ_{SN}はそれぞれその上のαの値に対する，非対称正規分布の歪度と尖度である。それぞれのαの値に対して最も高い検出力の値に[1]を，2番目に高い検出力の値に[2]を，3番目に高い検出力の値に[3]を付けている。

フォーマンスが相対的に最も悪い。棄却結合による検定は，S_NとAK_Nを用いた検定のだいたい中間くらいのパフォーマンスである。次に対立仮説が非対称正規分布の場合にはS_Nのパフォーマンスが相対的に最もよく，AK_Nのパフォーマンスは相対的に2番目に悪い（K_Nが一番悪い）。棄却結合による検定は，ここでもS_NとAK_Nのパフォーマンスの間くらいである。このように対立仮説によって最も検出力の高い検定が異なり，さらに片方でパフォーマンスが一番よいものが，もう片方ではパフォーマンスが一番悪くなっている。よって，対立仮説がわからない場合に，どれか1つの検定を選ぶことは難しい。このような場合の1つの解決方法としてはどちらの対立仮説に対してもそれなりによい検定方法を選ぶことであろう。

表4　有意水準5%における相対的な検出力のパフォーマンス（検出力の割合の%表示）

(a) t 分布

	d	19	16	13	10	7	4	1
	ν_t	0	0	0	0	0	0	–
$N=20$	κ_t	3.4	3.5	$\frac{11}{3}$	4	5	–	–
S_N		92.440	90.691	89.770	88.500	86.677	84.785	87.879
AK_N		99.573[2]	99.521[3]	99.684[2]	99.610[3]	99.470[3]	99.401[3]	99.468[3]
$UR(S_N,\ JB_N)$		96.447	95.521	95.163	94.658	94.099	93.714	97.477
$UR(S_N,\ AJB_N)$		97.577	96.723	96.628	96.159	95.936	95.922	98.582
$UR(AK_N,\ JB_N)$		99.523[3]	99.562[2]	99.524[3]	99.672[2]	99.643[2]	99.757[2]	100.042[1]
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[2]
$N=40$								
S_N		82.566	80.721	79.052	76.660	74.198	73.225	89.457
AK_N		100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]
$UR(S_N,\ JB_N)$		92.611	91.995	91.307	90.809	90.564	91.896	99.433
$UR(S_N,\ AJB_N)$		93.768	93.297	92.671	92.444	92.265	93.479	99.584
$UR(AK_N,\ JB_N)$		98.447[3]	98.487[3]	98.390[3]	98.587[3]	98.571[3]	98.963[3]	99.966[3]
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		98.929[2]	98.956[2]	98.776[2]	99.002[2]	99.007[2]	99.305[2]	99.981[2]

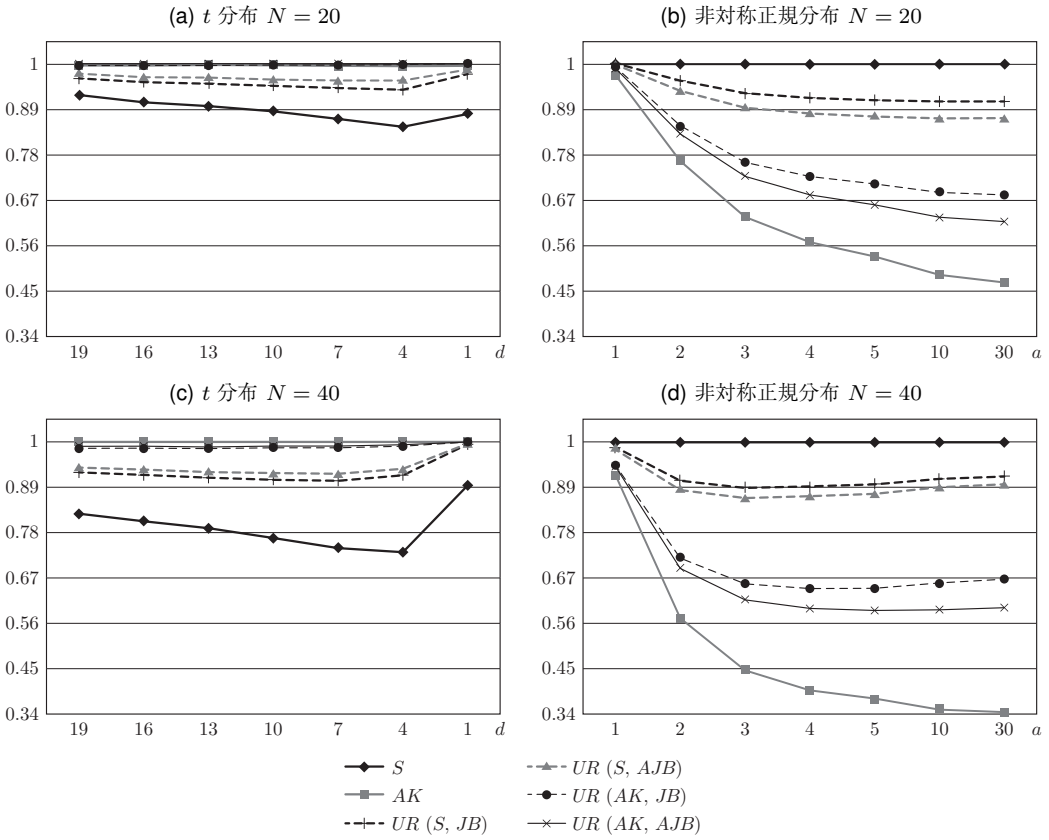
(b) 非対称正規分布

	α	1	2	3	4	5	10	30
	ν_{SN}	0.137	0.454	0.667	0.784	0.851	0.956	0.991
$N=20$	κ_{SN}	3.062	3.305	3.510	3.633	3.705	3.823	3.864
S_N		100.00[2]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]
AK_N		97.363	76.477	62.915	56.818	53.321	48.861	47.017
$UR(S_N,\ JB_N)$		100.197[1]	95.985[2]	92.952[2]	91.802[2]	91.244[2]	90.963[2]	90.951[2]
$UR(S_N,\ AJB_N)$		99.899[3]	93.532[3]	89.411[3]	88.025[3]	87.282[3]	86.846[3]	86.900[3]
$UR(AK_N,\ JB_N)$		99.307	85.073	76.164	72.737	70.932	68.887	68.273
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		98.963	83.064	72.769	68.279	65.858	62.841	61.797
$N=40$								
S_N		100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]	100.00[1]
AK_N		92.047	57.269	44.600	39.740	37.746	35.049	34.455
$UR(S_N,\ JB_N)$		98.810[2]	90.656[2]	88.909[2]	89.305[2]	89.789[2]	91.099[2]	91.693[2]
$UR(S_N,\ AJB_N)$		98.244[3]	88.389[3]	86.456[3]	86.923[3]	87.477[3]	89.071[3]	89.797[3]
$UR(AK_N,\ JB_N)$		94.422	71.859	65.601	64.469	64.520	65.842	66.759
$UR(AK_N,\ AJB_N)$		94.124	69.369	61.723	59.643	59.151	59.316	59.822

（注） 表4 (a) において，d は t 分布の自由度を表す。ν_t と κ_t はそれぞれその上の自由度の値に対する，t 分布の歪度と尖度である。表4 (b) において，α は非対称正規分布の形状パラメーターを表す。ν_{SN} と κ_{SN} はそれぞれその上の α の値に対する，非対称正規分布の歪度と尖度である。表中，それぞれの d もしくは α の値に対して最も相対的な高い検出力の値に [1] を，2番目に高い検出力の値に [2] を，3番目に高い検出力の値に [3] を付けている。

このように考えると棄却結合は選択の候補に入る。さらに棄却結合の中でどれを選ぶか考えた場合，図1より $UR(AK_N,\ JB_N)$ と $UR(AK_N,\ AJB_N)$ は対立仮説が非対称正規分布である時，相対的なパフォーマンスがかなり落ちてしまい，この場合に一番パフォーマンスがよい S_N に比べて相対的な

図 1　表 4 を図示したもの



パフォーマンスが 50%ほどになってしまう。これに対して，$UR(S_N,\ JB_N)$ と $UR(S_N,\ AJB_N)$ の相対的なパフォーマンスは 90%程度である。また，対立仮説が t 分布である時には $UR(S_N,\ JB_N)$ と $UR(S_N,\ AJB_N)$ は，$UR(AK_N,\ JB_N)$ と $UR(AK_N,\ AJB_N)$ に比較してパフォーマンスは落ちるが，それでも一番よい AK_N などと比較して相対的に 90〜95%程度のパフォーマンスを保っている。これらの結果から棄却結合の中でどの組み合わせを選ぶかを考えると，どちらの対立仮説に対しても最もよい検定と比べて相対的におおむね 90%以上のパフォーマンスを維持する $UR(S_N,\ JB_N)$ か $UR(S_N,\ AJB_N)$ が妥当であると考えられる。

4　結語

本稿では正規性の検定において，標本歪度と標本尖度をそれらの漸近分散共分散行列の逆行列で 2 次形式をとって構築された検定統計量である JB 検定統計量とその改良版に対して，他の標本歪度と標本尖度の組み合わせを用いることを考えた。具体的には Harvey, Leybourne, and Taylor（2009）

で提案された棄却結合によってこれらを組み合わせ，その場合の棄却結合のパフォーマンスを JB 検定やその改良版とシミュレーションによって比較した。シミュレーションによる比較の結果，棄却結合による検定は，他の検定と比べて，対立仮説である非正規分布がどのような分布をとるかにかかわらず，安定的に高いパフォーマンスを保つことが確認された。今後の課題は他の正規分布の検定を棄却結合で組み合わせることによってよりよい結果が得られるかどうかを検証することであろう。

補論

補題 1 の証明

実数 p に対して，$\widehat{m}_{z,N}^{(p)} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^p$, $\widehat{\mu}_{z,N} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} z_i$ とする。この時 $\widehat{\sigma}_{z,N}^2 = \widehat{m}_{z,N}^{(2)}$ であり，また(1)および(2) より，$\widehat{\nu}_N = \widehat{m}_{z,N}^{(3)}/(\widehat{m}_{z,N}^{(2)})^{3/2}$, および $\widehat{\kappa} = \widehat{m}_{z,N}^{(4)}/(\widehat{m}_{z,N}^{(2)})^2$ である。Urzúa（1996)の Section2 で述べられた結果より，$\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\sigma}_N^2$ は独立であり，また $\widehat{\kappa}_N$ と $\widehat{\sigma}_N^2$ も独立であるので

$$E\left[\widehat{m}_{z,N}^{(3)}\widehat{m}_{z,N}^{(4)}\right] = E\left[\widehat{\nu}_N\widehat{\kappa}_N(\widehat{\sigma}_{z,N}^2)^{7/2}\right] = E\left[\widehat{\nu}_N\widehat{\kappa}_N\right]E\left[\widehat{\sigma}_{z,N}^7\right],$$

が成り立つ。これより

$$E\left(\widehat{\nu}_N\widehat{\kappa}_N\right) = \frac{E\left[\widehat{m}_{z,N}^{(3)}\widehat{m}_{z,N}^{(4)}\right]}{E\left(\widehat{\sigma}_{z,N}^7\right)},$$

である。よって $\widehat{\nu}_N$ と $\widehat{\kappa}_N$ の共分散は，$E(\widehat{\nu}_N) = 0$ であるので,

$$\mathrm{cov}(\widehat{\nu}_N, \widehat{\kappa}_N) = E(\widehat{\nu}_N\widehat{\kappa}_N) - E(\widehat{\nu}_N)E(\widehat{\kappa}_N) = E(\widehat{\nu}_N\widehat{\kappa}_N) = \frac{E\left[\widehat{m}_{z,N}^{(3)}\widehat{m}_{z,N}^{(4)}\right]}{E\left(\widehat{\sigma}_{z,N}^7\right)}, \tag{4}$$

である。$E\left[\widehat{m}_{z,N}^{(3)}\widehat{m}_{z,N}^{(4)}\right]$ を求めてみると

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{m}_{z,N}^{(3)}\widehat{m}_{z,N}^{(4)}\right] &= N^{-2}E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^3\right]\left[\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^4\right]\right\} \\ &= N^{-2}E\left\{\sum_{i=1}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^7 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(z_i - \widehat{\mu}_{z,N})^3(z_j - \widehat{\mu}_{z,N})^4\right\} \qquad (5) \\ &= N^{-2}\left\{\sum_{i=1}^{N}E(z_i^{*7}) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}E(z_i^{*3}z_j^{*4})\right\}, \end{aligned}$$

となる。ここで $z_i^* = z_i - \widehat{\mu}_{z,N}$ である。$y_i \sim i.i.d.N(\mu, \sigma^2)$ である場合 $z_i \sim i.i.d.N(0,1)$ であるので，$i \neq j$ に対して

$$\begin{bmatrix} z_i^* \\ z_j^* \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{N-1}{N} & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} \end{bmatrix} \right),$$

となるのを示すことができるが，これより

$$z_i^* | z_j^* \sim N\left(-\tfrac{1}{N-1} z_j^*, \tfrac{N-2}{N-1}\right),$$

も求めることができる。よって

$$E(z_i^{*7}) = 0, \tag{6}$$

および，$i \neq j$ に対して

$$\begin{aligned} E(z_i^{*3} z_j^{*4}) &= E[z_j^{*4} E(z_i^{*3} | z_j^*)] \\ &= E\left[-\tfrac{3 z_j^{*5}(N-2)(N-1)}{(N-1)^3} - \tfrac{z_j^{*7}}{(N-1)^3}\right] \\ &= \tfrac{1}{(N-1)^3}\left[-3E(z_j^{*5})(N-2)(N-1) - E(z_j^{*7})\right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。(4), (5), (6), および (7) より $\mathrm{cov}(\widehat{\nu}_N, \widehat{\kappa}_N) = 0$ を得る。

参 考 文 献

Dufour, J.-M., Farhat, A., Gardiol, L., and Khalaf, L. (1998). "Simulation-based finite sample normality tests in linear regressions." *Econometrics Journal*, 1, C154–C173.

Godfrey, L.G. (1988). Misspecification tests in econometrics: The Lagrange multiplier principle and other approaches (*Econometric Society Monographs* No. 16). Cambridge University Press.

Harvey, D.I., Leybourne, S.J., and Taylor, R.A.M. (2009). "Unit root testing in practive: Dealing with uncertainty over the trend and initial condition." *Journal of Applied Econometrics*, 11, 619–632.

Jarque, C.M., and Bera, A. K. (1980). "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals." *Economics Letters* 6, 255–259.

Jarque, C.M., and Bera, A. K. (1987). "A test for normality of observations and regression residuals." *International Statistical Review*, 55(2), 163–172.

Urzúa, C.M. (1996). "On the correct use of omnibus tests for normality." *Economics Ltters*, 53, 247–251.

要旨: 確率分布の正規性の検定としてよく使われる検定の 1 つに Jarque-Bera 検定がある。Jarque-Bera 検定では標本歪度と標本尖度についてその漸近分散共分散行列の逆行列で二次形式をとったものを検定統計量として用いている。本稿では Jarque-Bera 検定とは異なった標本歪度と標本尖度の組み合わせの仕方を考え，検出力のパフォーマンスがどのように改善されるかを検証する。具体的には Harvey, Leybourne, and Taylor (2009) で提案された棄却結合によって標本歪度と標本尖度 (お

よびそれらと Jarque-Bera 検定やその改良版）とを組み合わせた検定を考える。シミュレーションによる検証の結果，棄却結合による組み合わせのいくつかは，シミュレーションにおいて対立仮説として設定された非正規分布のどの場合でも安定的に高いパフォーマンスを示すことが確認された。

キーワード: 正規分布，Jarque-Bera 検定，棄却結合，union of rejections，歪度，尖度