Title	凹関数と準凹関数の基本的性質とその経済学への応用について
Sub Title	On basic properties of concave and quasi-concave functions and their applications to economics
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuhki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2025
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.117, No.3 (2025. 2) ,p.399 (133)- 438 (172)
JaLC DOI	10.14991/001.20250201-0133
Abstract	本稿では，凹関数および準凹関数についての一般的性質を研究するために，まず一変数の凹関数と二変数の準凹関数について，その特徴付けを行う。次にこれの経済学への応用として，凹化不可能な準凹関数の例，需要関数の微分可能性といったトピックを取り上げ，これをわかりやすく説明する。最後に，一般の凹関数と準凹関数の特徴付け定理を扱う。
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20250201-0133

「三田学会雑誌」117 巻 3 号（2025 年 2 月）

解　説

凹関数と準凹関数の基本的性質と
その経済学への応用について

細矢 祐誉 *

（初稿受付 2024 年 8 月 18 日，査読を経て掲載決定 2024 年 12 月 17 日）

概要：本稿では，凹関数および準凹関数についての一般的性質を研究するために，まず一変数の凹関数と二変数の準凹関数について，その特徴付けを行う。次にこれの経済学への応用として，凹化不可能な準凹関数の例，需要関数の微分可能性といったトピックを取り上げ，これをわかりやすく説明する。最後に，一般の凹関数と準凹関数の特徴付け定理を扱う。

キーワード：凹関数，準凹関数，特徴付け，凹化可能性，需要関数の微分可能性

JEL Classification: C61, C65, D11

1　序論

凹関数，準凹関数という概念は，経済学では頻繁に取り沙汰され，使用されるものである。実際，経済数学やミクロ経済学の教科書の中で，これらの概念が出てこないことは極めてまれであろう。マクロ経済学においても，たとえばオイラー方程式と横断性条件が解の十分条件であることを議論する際には凹性が問題になる。数学分野で言うと，連続時間の最適化を扱う分野の中に変分法と呼ばれるものがあるが，この分野で最も重要な条件は，制御関数の最高次微分係数に関して目的関数が凹関数になることである。このように，経済学においても関連する数学分野においても凹性，準

* 中央大学経済学部
hosoya@tamacc.chuo-u.ac.jp

凹性は非常に重要な位置を占める概念であると言える。

しかしながら，凹関数や準凹関数については，初学者が内容を理解するに当たって苦しむことが少なくない。凹関数の本格的な分析にはアフィン超平面とその相対開集合，あるいは分離定理を用いた解析が必要不可欠であるが，これらの知識を準備するための数学的労力はかなり大きい。さらに，凹関数の値として $-\infty$ を含む場合が多いのも問題で，混乱を引き起こす元となる。準凹関数については，そもそもあまりよい性質を持っていないことも多く，結果としてどのようなものであるかを理解することそのものに困難を感じる学生も少なくないように見受けられる。また，微分を用いた特徴付けは，凹関数については比較的容易に導出することができ，多くの経済学の教科書で記述されているが，準凹関数のそれは条件をつけないと導出することができず，またそもそもあまり有名ではない[(1)]。

本稿はこの問題を解決するため，主に一変数の実数値凹関数と二変数の実数値準凹関数に議論を集中し，その基本的性質を解説することを目的とする。特に，微分不可能な場合も含めて，一変数の凹関数はさほど難しくない議論によって完全な特徴付けが可能である。一方で二変数の場合，経済学で最も頻繁に扱われる強く増加的な連続関数に関しては，準凹性はその任意の等高線関数が凸関数であることと同値であり，したがって陰関数定理を用いてかなり容易に特徴付け定理を導出することができる。この容易さこそが本稿の特徴であり，解析学についての最低限の知識さえ備えていれば本稿だけですべて必要な知識を得ることが可能である。

本稿は凹関数や準凹関数の基礎的性質を初等的に解説することを目的とするのだが，読者の理解を促進させるためには，経済学への応用をいくつか説明することが望ましいと考えられる。そこで本稿では準凹性が最もよく使われる消費者理論に関連して，二つの応用を紹介することにした。第一の応用はいわゆる効用関数の凹化可能性についての議論である。先に述べたように準凹関数は扱いが難しく，凹関数はそれよりは比較的容易に議論できる。一方，経済学において典型的に扱われる準凹関数は，だいたいの場合は単調変換を施すことで凹関数に変形できる。もしこれがすべての準凹関数について言えるのならば，我々は最初から変換を施すことで，凹関数だけを扱えばよいということになる。しかしながら現実はそうではない。これについては Arrow and Enthoven (1961) が反例を与えているのだが，それが反例であることの証明は与えられていない。ここではその反例に関して，なるべく初等的で理解しやすい証明を与えることとした。

第二の応用は需要関数の微分可能性である。経済学において多くの場合，需要関数の微分可能性は天下り式に与えられ，議論の対象とされない。しかしながら，一見してごく普通の効用関数でありながら，対応する需要関数が微分可能にならない例が，Katzner (1968)によって発見されている。

---

(1)　この問題は難しかったため，Otani (1983)が解決するまではそもそも不可能だと思われていた可能性が高い。したがって古典的な凸解析の教科書には掲載されていないし，現代的な教科書でも掲載されていないか，間違った条件の下で掲載されていることが少なくない。

これを踏まえて，需要関数の微分可能性の必要十分条件を提示した論文が Debreu (1972) である。この論文はかなり難解であるが，細矢(2018)がこの論文を詳細に解説している。しかし，この解説ですら難解である。本稿は上で議論した準凹関数の特徴付け定理を応用することで，二変数の準凹関数について，上記の結果を初等的な議論のみから導出する。必要なのは微分の連鎖律についての知識と，行列についての簡単な知識だけである。

最後に，一般の変数の凹関数と準凹関数について，簡潔に解説することにした。凹関数については，本質的には一変数で議論が尽きており，一変数の結果から容易に多変数の結果を得ることができる。残念ながら準凹関数についてはそこまで簡単ではないが，可能な限りの解説を付すこととした。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節で，凹関数や準凹関数，それから凸関数と準凸関数の定義を行う。第 3 節では一変数の凹関数に焦点を当て，その完全な特徴付けを試みる。第 4 節は二変数の準凹関数に焦点を当て，等高線が凸関数であることを用いた特徴付けを紹介する。第 5 節ではこれらの結果の経済学への応用が扱われる。第 6 節は一般の変数の凹関数についての解説が行われている。論文の最後に当たる第 7 節では，ここまでで扱った理論の補足説明と，さらに進んだ理論を勉強したい学生への文献案内が置かれている。

2　定義

X を実ベクトル空間とする。$A \subset X$ が**凸集合**（convex set）であるとは，$x, y \in A$ かつ $t \in [0,1]$ であるならば必ず $(1-t)x + ty \in A$ であることを指す。

A は凸集合であるとし，$f : A \to \mathbb{R}$ が与えられているとする[(2)]。このとき，次の集合

$$E = \{(x,c) | x \in A,\ c \geq f(x)\}$$

を f の**エピグラフ** (epigraph) と呼び，また次の集合

$$H = \{(x,c) | x \in A,\ c \leq f(x)\}$$

を f の**ハイポグラフ** (hypograph) と呼ぶ。エピグラフが凸集合である場合，f は**凸関数**（convex function）であると言い，ハイポグラフが凸集合である場合，f は**凹関数**（concave function）であると言う。

一方，やはり A が凸集合で，$f : A \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，以下の集合

$$L(c) = \{x \in A | f(x) \leq c\}$$

---

(2)　凸解析の文脈上では，f は $+\infty$ や $-\infty$ を取ってもよいということが仮定されることが多いが，本稿ではこの考え方は避けることとする。

を f の高さ c に対する**下位集合**（lower level set）と呼び，また以下の集合

$$U(c) = \{x \in A | f(x) \geq c\}$$

を f の高さ c に対する**上位集合**（upper level set）と呼ぶ。下位集合が常に凸集合である関数は**準凸関数**（quasi-convex function）と呼び，上位集合が常に凸集合である関数は**準凹関数**（quasi-concave function）と呼ぶ。

定義からただちに，凸関数は必ず準凸関数であることがわかる。実際，$x \in L(c)$ であることと $(x, c) \in E$ は同値であり，したがって E が凸なら $L(c)$ も凸なのである。同様に，凹関数は必ず準凹関数である。[3]

これらの定義にはすべて，より簡易な数式による別表現が存在する。たとえば，f が凹関数であることは，どんな $x, y \in A$ と $t \in [0, 1]$ に対しても次の式を満たすことと同値である。証明は簡単であるため省略する。

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{1}$$

ここで，もし $x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ のときには不等号が厳密になる，すなわち

$$f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + tf(y) \tag{2}$$

が成り立つ場合には，この関数は**狭義凹関数**（strictly concave function）であると言う。凸関数についても同様であり，f が凸関数であることと，どんな $x, y \in A$ と $t \in [0, 1]$ に対しても

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \tag{3}$$

が成り立つことは同値である。$x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ のときに不等号が厳密になる，つまり

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) \tag{4}$$

となるときには，この関数は**狭義凸関数**（strictly convex function）であると言う。

準凹，準凸についても，同様の別表現が存在する。f が準凹関数であることは，どんな $x, y \in A$ と $t \in [0, 1]$ に対しても

$$f((1-t)x + ty) \geq \min\{f(x), f(y)\} \tag{5}$$

であることと同値である。$x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ のときに不等号が厳密になる，すなわち

$$f((1-t)x + ty) > \min\{f(x), f(y)\} \tag{6}$$

となるときには，f は**狭義準凹関数**（strictly quasi-concave function）であると言う。準凸関数，狭義準凸関数も同様である。

---

(3)　逆が成り立たないことに注意。$L(c)$ が常に凸だからといって E が凸であるとは限らない。

定義より，f が凹であることと $-f$ が凸であることが同値であること，および f が準凹であることと $-f$ が準凸であることが同値であることがわかる。したがって，凹関数と凸関数の間に目立った性質の差異は存在せず，片方を分析すれば自然ともう片方の性質も導出できる。経済学では凸関数よりも凹関数の方がよく扱われるため，本稿では凹関数，準凹関数を主な分析対象とする。

3　一変数の凹関数，準凹関数

一変数の凹関数は非常にわかりやすい特徴的な性質を持っている。まず，我々はそれを見ていこう。なお，あらかじめ断っておくが，ここで出てくる結果はすべて凸関数に対しても成り立つが，登場する不等号はすべて反転する。

$\mathbb{R}$ の凸部分集合には，たとえば閉区間 $[a,b]$ や開区間 (a,b)，それから半開区間や半直線など，様々なものがあり得る。しかし我々はそれらを統一して扱いたいので，一般に二点以上を含む $\mathbb{R}$ の凸集合を**区間**（interval）と呼ぶことにしよう。このとき，以下の定理が成り立つ。

定理 1. I は区間とし，$f : I \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。f が凹関数であることと，$x_1, x_2, x_3 \in I$ かつ $x_1 < x_2 < x_3$ であるときに必ず次の不等式が成り立つことは同値である。

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{7}$$

さらに，f が狭義凹関数であることは，上の(7)式の不等号が常に強くなること，つまり次の式が成り立つことと同値である。

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{8}$$

注意：(7)式が成り立つとき，必ず

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

となる。実際，$x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$ という方程式を t について解くと，

$$t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

を得る。このとき

$$1 - t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

である。明らかに $0 < t < 1$ であるが，一方で

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} &= \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_1} + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_3-x_1} \\
&= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= (1-t)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} + t\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}
\end{aligned}$$

となるため，(9)式の真ん中の分数は左辺と右辺の加重平均である。よって，(7)式が成り立てば(9)式も必ず成り立つ。同様に，(8)式が成り立てば必ず

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{10}$$

が成り立つ。

証明. まず，f が凹関数であるとしよう。すでに上の注意で示したように

$$x_2 = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}x_1 + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}x_3$$

である。f は凹であるから，

$$f(x_2) \geq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

でなければならない。ここから，

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} &\leq \frac{f(x_3)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)}{x_3-x_2} \\
&= \frac{(x_3-x_1)f(x_3)-(x_3-x_2)f(x_1)-(x_2-x_1)f(x_3)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} \\
&= \frac{(x_3-x_2)f(x_3)-(x_3-x_2)f(x_1)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}
\end{aligned}$$

が得られる。同様に，

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &\geq \frac{\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)-(x_3-x_1)f(x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \\
&= \frac{(x_2-x_1)f(x_3)-(x_2-x_1)f(x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}
\end{aligned}$$

も得られる。よって，(7)式が成り立つ。もし f が狭義凹関数ならば不等号が等号になることはあり得ないため，(8)式も成り立つ。

逆に(7)式を仮定しよう。$x < y$ かつ $0 < t < 1$ とし，$z = (1-t)x + ty$ とする。すると $t = \frac{z-x}{y-x}$，$1-t = \frac{y-z}{y-x}$ であるから，(7)式から

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (1-t)f(z) + tf(z) \\
&= (1-t)(f(z)-f(x)) - t(f(y)-f(z)) + (1-t)f(x) + tf(y) \\
&= \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\frac{(z-x)(y-z)}{y-x} - \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\frac{(z-x)(y-z)}{y-x} + (1-t)f(x) + tf(y) \\
&\ge \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\frac{(z-x)(y-z)}{y-x} - \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\frac{(z-x)(y-z)}{y-x} + (1-t)f(x) + tf(y) \\
&= (1-t)f(x) + tf(y)
\end{aligned}
$$

となる。$t=0$ や $t=1$ のときの例外処理は容易であるため，これで f が凹関数であることが示せたことになる。もちろん，(8)式が成り立っていれば上の式の不等号が等号になることはあり得なくなるため，f は狭義凹関数である。以上で証明が完成した。 ■

定理 1 から，凹関数 f に関して，$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ は $x>y$ となるときには x について非増加的，y については非減少的であることがわかる。これを用いることで，以下の定理を示すことができる。

定理 2. I は区間とし，f は I 上で定義された凹関数とする。また，x は I の内部に属するとする。このとき，f は x において連続であり，さらに**左側微分**

$$D_-f(x) = \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と**右側微分**

$$D_+f(x) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が共に定義できて，実数の値を持つ。さらに $D_+f(x) \le D_-f(x)$ であり，集合

$$\partial f(x) = [D_+f(x), D_-f(x)]$$

は非空で，f が x で微分可能であることと $\partial f(x)$ が一点集合であることは同値である。そして，$p \in \partial f(x)$ であることと，不等式

$$f(y) \le f(x) + p(y-x) \tag{11}$$

がすべての $y \in I$ について成り立つことは同値である。もし f が狭義凹関数ならば，上の不等式は強化され，$p \in \partial f(x)$ かつ $y \ne x$ のときには必ず

$$f(y) < f(x) + p(y-x) \tag{12}$$

が成り立つ。

証明. まず，$y<x<z$ となる $y,z\in I$ を取って固定する。$y<w<x$ のときには(9)式によって

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

が示されるため，ここから

$$f(x)-f(w)\le(x-w)\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

を得る。ところが一方でやはり (9) 式から

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w}\ge\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

が示されるため，

$$f(x)-f(w)\ge(x-w)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

を得る。以上から，

$$(x-w)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le f(x)-f(w)\le(x-w)\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

が得られたので，はさみうちの原理によって f は左側連続であることがわかる。まったく同様に f は右側連続でもあることが示せるため，f は連続である。

さらに $y<w<x$ のとき，$\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ は w について非増加的，かつ下界 $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ を持つため，

$$D_-f(x)\equiv\lim_{w\uparrow x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}=\inf_{w<x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$$

が定義できて実数値である。同様に $x<w<z$ のときには，$\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ は w について非減少的，かつ上界 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ を持つため，

$$D_+f(x)\equiv\lim_{w\downarrow x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}=\sup_{w>x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$$

が定義できて実数値である。定義から明らかに $D_+f(x)\le D_-f(x)$ であるが，$D_+f(x)=D_-f(x)$ であるとき，そしてそのときに限り，f は点 x で微分可能であり，$f'(x)=D_+f(x)=D_-f(x)$ である。

ここで，$p\in\mathbb{R}$ を取ろう。$p\in\partial f(x)$ とすると，$w<x$ であるときには

$$\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\ge D_-f(x)\ge p$$

であるから，$w-x<0$ であることより

$$f(w)\le f(x)+p(w-x)$$

が得られる。同様に $w>x$ であるときは

$$\frac{f(w)-f(x)}{w-x} \leq D_+f(x) \leq p$$

であるから，$w-x>0$ であることより

$$f(w) \leq f(x)+p(w-x)$$

が得られる。一方，$p>D_-f(x)$ とすれば，$w<x$ となる w で

$$\frac{f(w)-f(x)}{w-x} < p$$

となるものが存在し，このとき

$$f(w) > f(x)+p(w-x)$$

である。同様に $p<D_+f(x)$ とすれば，$w>x$ となる w で

$$\frac{f(w)-f(x)}{w-x} > p$$

となるものが存在し，このとき

$$f(w) > f(x)+p(w-x)$$

である。よって $p \in \partial f(x)$ と(11)式の成立は同値である。

最後に，f は狭義凹で，$p \in \partial f(x)$ とする。このとき，$y>x$ であれば，$y>z>x$ となる z を取れば，(10)式から

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq p$$

を得るため，ここからただちに

$$f(y) < f(x)+p(y-x)$$

を得る。$y<x$ のときも同様である。以上ですべての主張の証明が完了した。■

集合 $\partial f(x)$ の要素を f の x における**劣微分**（subderivative）と呼ぶ。この劣微分が持つ意味合いは，(11)式を見ることで容易に理解できる。この式は，$f(x)+p(y-x)$ という直線が，関数 f のグラフ上の指定された点 $(x,f(x))$ を通る**接線**になっているという意味である。したがって凹関数のグラフはその任意の点で接線が引けるし，またその接線が一つしかないことが，微分可能性の必要十分条件なのである。

しばしば教科書に掲載される事実として，凹関数については $f'(x)=0$ であることが最大化の必要十分条件であるということが知られている。ところが我々は劣微分を用いることで，これらの結果を一般化することができる。これは定理 2 から導かれる重要な帰結である。

系 1. I は区間，$f : I \to \mathbb{R}$ は凹関数とし，x は I の内部に含まれるとする。このとき，f が x で最大になることと，$0 \in \partial f(x)$ であることは同値である。

証明. $0 \in \partial f(x)$ であるならば $f(y) \le f(x)$ がすべての $y \in I$ について成り立つので，x は最大点である。逆に最大点であれば，$p = 0$ に対して(11)式が成り立つので $0 \in \partial f(x)$ である。以上で証明が完成した。■

f が x で微分可能であれば $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ となるから，系 1 からただちに，微分可能な凹関数については $f'(x) = 0$ が最大化の必要十分条件だという帰結を得る。

次に，片側微分を用いた凹関数の判定条件を示そう。

定理 3. I は区間，f はその上で定義された連続関数で，I の内部 J のすべての点で $D_-f(x), D_+f(x)$ が定義できて実数値であるとする。このとき，f が凹関数であることと，$x < y$ を満たす $x, y \in J$ に対して常に次の不等式

$$D_-f(x) \ge D_+f(x) \ge D_-f(y) \ge D_+f(y) \tag{13}$$

が成り立つことは同値である。また，f が狭義凹関数であることと，$x < y$ を満たす $x, y \in J$ に対して常に次の不等式

$$D_-f(x) \ge D_+f(x) > D_-f(y) \ge D_+f(y) \tag{14}$$

が成り立つことは同値である。

証明. f が凹関数であれば，$x, y \in J$ かつ $x < y$ であるときに

$$D_-f(x) \ge D_+f(x),\ D_-f(y) \ge D_+f(y)$$

であることはすでに定理 2 で示されている。これに加えて，

$$D_+f(x) \ge \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ge D_-f(y)$$

であるため，(13)式が成り立つ。狭義凹関数であるときには(8)式を用いることで，$x < z < y$ となる z を取れば

$$D_+f(x) \ge \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \ge D_-f(y)$$

を得るため，(14)式が成り立つ。

次に逆を示す。まず，$I = J$ であるときを考えよう。(13)式が成り立っているとする。最初に，$x, y \in I$ かつ $x < y$ とし，

$$p = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

とする。このとき，開区間 (x, y) 内に必ず，$D_- f(z) \geq p$，$D_+ f(z) \leq p$ を満たす z が存在することを示そう。いま $g(z) = f(z) - pz$ と定義すると，定義から

$$g(y) - g(x) = (f(y) - f(x)) - p(y - x) = 0$$

である。仮定から f は連続なので，g も連続であり，したがって g は $[x, y]$ 上で最大点を持つ。まず，その最大点が x, y のみだということはあり得ないことを示そう。証明は背理法による。$x < z < y$ ならば $g(z) < g(x) = g(y)$ であると仮定する。仮定から，

$$D_- f(y) = \lim_{z \uparrow y} \frac{g(z) - g(y)}{z - y} + p \geq p$$

である。ここで z^* を，g の $[x, y]$ 内における最小点とする。すると $x < z^* < y$ である。ここで

$$q = \frac{f(z^*) - f(x)}{z^* - x}$$

と定義すると，

$$0 > \frac{g(z^*) - g(x)}{z^* - x} = q - p$$

より，$q < p$ が導かれる。今度は $h(z) = f(z) - qz$ と定義すると，先ほどと同様に

$$h(z^*) - h(x) = f(z^*) - f(x) - q(z^* - x) = 0$$

であるため，$h(z^*) = h(x)$ が導かれる。したがって，h の $[x, z^*]$ 内の最大点か最小点である z で $x < z < z^*$ を満たすものが存在する。z が最大点ならば $D_+ h(z) \leq 0$ なので，

$$D_+ f(z) \leq q < p \leq D_- f(y)$$

であるが，これは仮定(13)に矛盾する。z が最小点ならば $D_- h(z) \leq 0$ なので，

$$D_- f(z) \leq q < p \leq D_- f(y)$$

となり，やはり仮定(13)に矛盾する。以上より，どちらの場合でも矛盾が生ずるので，これはあり得ないことがわかった。そこで $[x, y]$ 内で g を最大にする z で，$x < z < y$ となるものが存在しなければならないが，このとき $D_- g(z) \geq 0 \geq D_+ g(z)$ であるから，

$$D_- f(z) \geq p \geq D_+ f(z)$$

となって，求めていた式が得られた。[(4)]

(4)　実は f が微分可能ならば $f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ であり，したがってここで扱っていたものは平均値の定理の，必ずしも微分可能とは限らない凹関数への一般化である。

そこで，$x_1, x_2, x_3 \in I$ かつ $x_1 < x_2 < x_3$ とする。上で示したことから，$x_1 < y < x_2 < z < x_3$ を満たす $y, z \in I$ で，

$$D_+ f(y) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},\ D_- f(z) \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

を満たすものが存在する。したがって，

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq D_- f(z) \leq D_+ f(y) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

となり，(7)式が示せた。よって f は凹関数である。もし(14)式が成り立つならば，上の式で $D_- f(z) < D_+ f(y)$ なので，(8)式が成り立ち，よって f は狭義凹関数である。

最後に，$I \neq J$ であるときを考えよう。すでに示したように，f は J 上では凹関数である。$x < y$ となる $x, y \in I$ を任意に取る。x が I の境界にあれば，x に収束する J の数列 (x_n) を取れる。x が J に含まれていれば $x_n \equiv x$ とする。同様のことを y にも行うことで，我々は y に収束する J の数列 (y_n) を取れる。すると $0 \leq t \leq 1$ ならば，

$$f((1-t)x + ty) = \lim_{n \to \infty} f((1-t)x_n + ty_n) \geq \lim_{n \to \infty} [(1-t)f(x_n) + tf(y_n)] = (1-t)f(x) + tf(y)$$

となって，たしかに f は I 上でも凹関数であることがわかる。次に，f が J 上で狭義凹関数であるとし，$x < z < y$ であるとしよう。上で取った数列 $(x_n), (y_n)$ について，十分 n が大きければ $x_n < z < y_n$ であるから，以下では一般性を失うことなくすべての n について $x_n < z < y_n$ とする。もし x が I の境界に位置しているならば $x < x_n$ が必ず成り立つので，(9)式から

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(z) - f(x_n)}{z - x_n}$$

となる。もちろん，x が J に含まれていれば $x_n \equiv x$ だったから，この不等号は等号で成り立つ。同様に，y が I の境界に位置しているならば $y > y_n$ なので，やはり(9)式から

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(y_n) - f(z)}{y_n - z}$$

が成り立つし，y が J に含まれていれば $y_n \equiv y$ なので，この不等号は等号で成り立つ。最後に，f は J 上では狭義凹関数だから，(8)式から

$$\frac{f(z) - f(x_n)}{z - x_n} > \frac{f(y_n) - f(z)}{y_n - z}$$

が得られる。以上から，

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(z) - f(x_n)}{z - x_n} > \frac{f(y_n) - f(z)}{y_n - z} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

となって，I 上における(8)式が確認できた。したがって f は I 上でも狭義凹関数でなければならない。以上で証明が完成した。■

特に，f が微分可能なときには，上の定理から容易に次の系が導かれる。

系 2. I は区間であるとし，$f: I \to \mathbb{R}$ は I 上で連続，かつ I の内部で微分可能であると仮定する。このとき，f' が非増加であることと f が凹関数であることは同値であり，また f' が減少的であることと f が狭義凹関数であることは同値である。さらに f が二階微分可能なときには，$f''(x) \le 0$ が常に成り立つことと f が凹関数であることは同値であり，さらに $f''(x) < 0$ が常に成り立つのであれば，f は狭義凹関数である。

この系の最後の結果について，逆は成立しない。つまり，$f''(x) < 0$ が成り立たない点がある狭義凹関数は存在する。たとえば，$f(x) = -x^4$ などが該当する。この事実は細かいように見えるが，後で(18)式を満たさない狭義準凹関数の例を議論するときに重要な役割を果たす。

最後に，凹関数と凸関数の関係に関する結果を一つ証明しておこう。

定理 4. I は区間であるとし，$f: I \to \mathbb{R}$ は凹関数かつ凸関数とする。このとき，ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して，$f(x) \equiv ax + b$ である。

証明. f は凹であるので，(7)式が成り立つ。一方で f は凸でもあるため，$-f$ は凹であり，よって(7)式の逆が成り立つ。したがって $x < y < z$ となる $x, y, z \in I$ をどう取ってきても

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

が成り立つことになるが，これは $a = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ に対して $D_-f(y) = D_+f(y) = a$ が必ず成り立つということを意味する。したがって f は微分可能で $f'(y) \equiv a$ が成り立つが，ここからただちに主張していた結果を得る。以上で証明が完成した。 ■

以上はすべて凹関数に関する結果である。一変数の準凹関数については，残念ながら凹関数のように劣微分を定義することもできないし，連続であることも証明できない。そもそも，任意の非減少関数は準凹関数であるし，任意の非増加関数も準凹関数である。したがってたとえば，$f(x) = \max\{0, x\}$ は準凹関数である。この関数は $x < 0$ のときに $f'(0) = 0$ を満たすが，当然ながらその点は最大点ではない。それどころか，この $f(x)$ は実のところ凸関数である。このように，一変数に限定した場合，準凹という性質だけからではよい結果を得ることはできないのである。

4　二変数の凹関数，準凹関数

二変数以上の関数についても，凹関数は非常に多くの特徴を有している。それを分析する洗練された手法も存在しているが，これを議論するためには最低限，凸集合の分離定理を初めとした様々な基礎知識が必要となる。本稿では二変数以上の凹関数については深く立ち入らず，一般の場合の微分による特徴付けについてのみ，第 6 節で扱うこととする。

一方，準凹関数については少し様相が異なる。経済学で最もよく扱われる二変数の準凹関数は，定義域が $\mathbb{R}^2_{++}=\{(x_1,x_2)|x_1>0,x_2>0\}$ であるような連続で強く増加的な関数である[(5)]。このような関数については，一変数の場合とも，三変数以上の場合とも異なり，これを表現するよい定理がある。本節ではまずそれを見ていこう。

最初に定義を一つ与える。$u:\mathbb{R}^2_{++}\to\mathbb{R}$ が与えられているとき，次のような関数 $g:I\to\mathbb{R}$ を，u の $x^*\in\mathbb{R}^2_{++}$ を通る**等高線関数**と呼ぶことにする。第一に，I は開半直線 $(0,+\infty)$ に含まれる区間であること。第二に，$x_1^*\in I$ かつ $x_2^*=g(x_1^*)$ であること。第三に，$u(x_1,x_2)=u(x_1^*,x_2^*)$ であることと，$x_1\in I$ かつ $g(x_1)=x_2$ であることが同値となることである。たとえば $u(x)=x_1x_2$ であるならば，これの $x^*=(1,1)$ を通る等高線関数は，$I=(0,+\infty)$ として $g(x_1)=\frac{1}{x_1}$ で与えられる。

以下の定理がとても重要な役割を果たす。

定理 5. $u:\mathbb{R}^2_{++}\to\mathbb{R}$ は連続かつ強く増加的であり，$x^*\in\mathbb{R}^2_{++}$ とする。このとき，x^* を通る等高線関数は必ず存在し，連続かつ減少的であり，またその定義域は開集合である。そして，u が準凹であることと，どの点を通る等高線関数も凸であることは同値である。また，u が狭義準凹であることと，どの点を通る等高線関数も狭義凸であることは同値である。

証明. まず，$x^*\in\mathbb{R}^2_{++}$ とし，$u(x^*)=u^*$ とする。最初に，x^* の定数倍でない $x^+\in\mathbb{R}^2_{++}$ を取ろう。このとき，十分大きな $a>0$ と十分小さな $b>0$ を取れば，$ax^+\gg x^*\gg bx^+$ となるようにできる[(6)]。すると，$u(ax^+)>u^*>u(bx^+)$ であるため，中間値の定理から，$u(cx^+)=u^*$ となる $c>0$ が存在する。そこで,

---

(5)　ここで $U\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $u:U\to\mathbb{R}$ が**強く増加的である**とは，$x\geq y$ かつ $x\neq y$ ならば必ず $u(x)>u(y)$ が成り立つことを指す用語である。たとえば $U=\mathbb{R}^2_{++}$ ならば関数 $u(x)=x_1x_2$ は強く増加的である。しかしながら $U=\mathbb{R}^2_{+}=\{(x_1,x_2)|x_1\geq 0,x_2\geq 0\}$ の場合，$u(1,0)=u(2,0)=0$ なので，この関数は強く増加的ではない。このようなことは頻繁に起こる。以降の議論で強く増加的であることはとても重要なので，我々は $U=\mathbb{R}^2_{++}$ という仮定を置かざるを得ないのである。

(6)　ここで記法 $x\gg y$ は，$x_1>y_1$ かつ $x_2>y_2$ であることを意味する。

$$I = \{x_1 > 0 | \exists x_2 > 0,\ u(x_1, x_2) = u^*\}$$

と定義すると，少なくとも I は x_1^* と cx_1^+ を含んでいるため，二点以上の集合である。また，任意の $x_1 \in I$ に対して，$u(x_1, x_2) = u^*$ となる x_2 は，u が強く増加的であることから，ただ一つしか存在しない。それを $g(x_1)$ と書くことにしよう。

$x_1, y_1 \in I$ かつ $x_1 < y_1$ であるとし, 対応して $x_2 = g(x_1)$, $y_2 = g(y_1)$ とする。u は強く増加的であるから, $x_2 > y_2$ でなければならない。これは g が減少的であることを意味する。次に, $x_1 < z_1 < y_1$ を満たすすべての z_1 に対して，u が強く増加的であることにより，$u(z_1, y_2) < u^* < u(z_1, x_2)$ が成り立つ。したがって中間値の定理から，$u(z_1, z_2) = u^*$ となる z_2 が必ず存在する。これは $z_1 \in I$ を意味する。よって I は区間であることがわかった。ここで I に最小数 $\bar{x}_1$ が存在したとする。このとき，対応して $\bar{x_2} = g(\bar{x}_1)$ とし，$\frac{y_2}{y_1} > \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$ となる $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ を取ると，上で x^* と x^+ に行ったのと同様の議論から，$u(cy) = u^*$ となる $c > 0$ が存在する。このとき $\bar{x}_1$ は I の最小数であったから $cy_1 \geq \bar{x}_1$ だが，そうすると y の取り方から $cy_2 > \bar{x}_2$ となって，u が強く増加的であることと矛盾する。かくして，I には最小数がないことがわかった。同様に I には最大数もないので，I は開集合である。

さて，(x_1^n) が I 内の数列で $x_1 \in I$ に収束しているとする。すでに示した通り，x_1 は I の最小数でも最大数でもないので，$x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon \in I$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。この ε に対してある N が存在して，$n \geq N$ ならば $|x_1^n - x_1| < \varepsilon$ を満たすため,

$$a = \min\{x_1^1, ..., x_1^{N-1}, x_1 - \varepsilon\},\ b = \max\{x_1^1, ..., x_1^{N-1}, x_1 + \varepsilon\}$$

と定義すると，$0 < a < b$ かつ $a, b \in I$ であり，かつすべての n について $x_1^n \in [a, b]$ である。したがって，$x_2^n = g(x_1^n)$ とすると $x_2^n \in [g(b), g(a)]$ が常に成り立つ。ここで，(x_2^n) が $x_2 = g(x_1)$ に収束していなかったと仮定しよう。すると，ある $\delta > 0$ が存在して，N をどれほど大きく取っても，$m > N$ かつ $|x_2^m - x_2| \geq \delta$ となる m が存在する。そこで $N = 1$ のときの該当する m の最小数を $k(1)$ と定義し，また $k(n)$ が定まったとき，$m > k(n)$ かつ $|x_2^m - x_2| \geq \delta$ となる m の最小数を $k(n+1)$ と定義する。すると部分列 $(x_2^{k(n)})$ はすべての n について $|x_2^{k(n)} - x_2| \geq \delta$ を満たす。一方で $x_2^{k(n)} \in [a, b]$ であるから，$[a, b]$ のコンパクト性から，$(x_2^{k(n)})$ は収束部分列 $(x_2^{\ell(n)})$ を持つ。収束先を x_2' とすると，u の連続性から

$$u(x_1, x_2') = \lim_{n \to \infty} u(x_1^{\ell(n)}, x_2^{\ell(n)}) = u^*$$

となり，よって $x_2' = g(x_1) = x_2$ となるが，$|x_2' - x_2| \geq \delta$ であるため，矛盾が生ずる。したがってこれはあり得ず，$\lim_{n \to \infty} g(x_1^n) = g(x_1)$ であることがわかった。故に g は連続である。

今度は，u が準凹であるとしよう。このとき，$x_1, y_1 \in I$ とし，$x_2 = g(x_1), y_2 = g(y_1)$ とすると，$0 \leq t \leq 1$ である場合,

$$u((1-t)x+ty) \geq \min\{u(x), u(y)\} = u^*$$

を得る。したがって，

$$g((1-t)x_1+ty_1) \leq (1-t)x_2+ty_2 = (1-t)g(x_1)+tg(y_1)$$

であり，よって g は凸である。もし u が狭義準凹で，$x_1 \neq y_1$ かつ $0 < t < 1$ ならば，上の不等号が強化され，

$$u((1-t)x+ty) > \min\{u(x), u(y)\} = u^*$$

となるため，

$$g((1-t)x_1+ty_1) < (1-t)x_2+ty_2 = (1-t)g(x_1)+tg(y_1)$$

となり，よって g は狭義凸である。

逆に，g が凸であるとしよう。$x, y \in \mathbb{R}^2_{++}$ を取る。一般性を失うことなく，$u(y) \geq u(x)$ と仮定しよう。十分小さな $a > 0$ を取れば，$x \gg ay$ となるため，$u(x) > u(ay)$ である。したがって中間値の定理により，$a < c \leq 1$ となるある c について $u(x) = u(cy)$ が成り立つ。ここで，$0 \leq t \leq 1$ とし，$z = (1-t)x+tcy$ とすると，g の凸性から

$$g(z_1) \leq (1-t)g(x_1)+tg(cy_1) = (1-t)x_2+tcy_2 = z_2$$

という結果を得る。これは $u(z) \geq u(x)$ を意味するため，

$$u((1-t)x+ty) \geq u((1-t)x+tcy) = u(z) \geq u(x) = \min\{u(x), u(y)\}$$

となって，u の準凹性が示される。次に g が狭義凸であるとし，$x \neq y$ かつ $0 < t < 1$ としよう。y が x の定数倍ならば $y_1 > x_1$ かつ $y_2 > x_2$ であり，u が強く増加的であることから，

$$u((1-t)x+ty) > u(x) = \min\{u(x), u(y)\}$$

を得る。y が x の定数倍でないならば，$u(x) = u(cy)$ となる $c \leq 1$ について，$x_1 \neq cy_1$ である。よって $z = (1-t)x+tcy$ に対して

$$g(z_1) < (1-t)g(x_1)+tg(cy_1) = (1-t)x_2+tcy_2 = z_2$$

を得る。これは $u(z) > u(x)$ を意味するため，

$$u((1-t)x+ty) \geq u((1-t)x+tcy) = u(z) > u(x) = \min\{u(x), u(y)\}$$

となる。したがってこの場合，u は狭義準凹である。以上で証明が完成した。■

ここで，特に興味の対象となるのが，u が二階連続微分可能で，かつ偏導関数 $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ と $u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ が絶対に 0 にならない場合である[7]。この場合，陰関数定理により，任意の点を通る等高線関数 g は微分可能である。これと前節の結果を用いて，我々は準凹関数の特徴付けを行うことができる。

定理 6. $u : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ は二階連続微分可能で，偏導関数の条件 $u_1(x) > 0, u_2(x) > 0$ をすべての $x \in \mathbb{R}^2_{++}$ で満たすとする。このとき，x^* を通る等高線関数 g は二階連続微分可能であり，以下の公式が成り立つ。

$$g'(x^*) = -\frac{u_1(x^*)}{u_2(x^*)}, \tag{15}$$

$$g''(x^*) = \frac{1}{(u_2(x^*))^3}\begin{vmatrix} u_{11}(x^*) & u_{12}(x^*) & u_1(x^*) \\ u_{21}(x^*) & u_{22}(x^*) & u_2(x^*) \\ u_1(x^*) & u_2(x^*) & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

特に，u が準凹であることは，以下の条件

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_1(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & 0 \end{vmatrix} \geq 0 \tag{17}$$

がすべての $x \in \mathbb{R}^2_{++}$ で成り立つことと同値であり，またもし

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_1(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{18}$$

が成り立っているならば，u は狭義準凹である。

証明. 陰関数定理から，g は二階連続微分可能で，

$$g'(x_1) = -\frac{u_1(x_1, g(x_1))}{u_2(x_1, g(x_1))}$$

である。$g(x_1^*) = x_2^*$ なので，(15) 式は確かめられた。次に，上の式を $x_1 = x_1^*$ で微分することによって，割り算の微分の公式と合成微分の公式から

$$g''(x_1^*) = -\frac{[u_{11}(x^*) + u_{12}(x^*)g'(x_1^*)]u_2(x^*) - u_1(x^*)[u_{21}(x^*) + u_{22}(x^*)g'(x_1^*)]}{(u_2(x^*))^2}$$

---

(7)　以降，略記法として，実数値関数 u の偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ は u_i と書くことにする。また，二階の偏導関数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ も u_{ij} と略記する。

が得られる。そこでこの $g'(x_1^*)$ に (15) 式を代入すると，

$$\begin{aligned} g''(x_1^*) = &-\frac{1}{(u_2(x^*))^3}[u_{11}(x^*)(u_2(x^*))^2 - u_{12}(x^*)u_1(x^*)u_2(x^*) \\ &- u_{21}(x^*)u_1(x^*)u_2(x^*) + u_{22}(x^*)(u_1(x^*))^2] \\ = &\frac{1}{(u_2(x^*))^3}\begin{vmatrix} u_{11}(x^*) & u_{12}(x^*) & u_1(x^*) \\ u_{21}(x^*) & u_{22}(x^*) & u_2(x^*) \\ u_1(x^*) & u_2(x^*) & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となって，(16)式が確かめられた。

特に，u が準凹であることは，g が凸であることと同値であり，これは $g''(x_1) \geq 0$ が常に成り立つことと同値であるから，(17)と同値である。また，もし(18)が成り立つ場合，どんな等高線関数も $g''(x_1) > 0$ をすべての点で満たすため，g は狭義凸であり，よって u は狭義準凹である。以上で証明が完成した。 ■

この(17)の条件を**縁付きヘッセ行列の符号条件**と呼び，また(18)の条件を**強い縁付きヘッセ行列の符号条件**と呼ぶ。したがって我々は，二階連続微分可能かつ偏微分が正の関数 u について二つの結果を得た。第一に，もし強い縁付きヘッセ行列の符号条件が成り立つならば，u は狭義準凹である。第二に，縁付きヘッセ行列の符号条件は u の準凹性と同値である。

実例として，$u(x) = x_1x_2$ について見てみよう。このとき，

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_1(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1x_2 > 0$$

を得るため，(18)が成り立ち，故にこの関数は狭義準凹である。

一方，狭義準凹であるにもかかわらず(18)を満たさない関数の実例は Katzner (1968)によって発見されており，

$$u(x) = x_1^3x_2 + x_1x_2^3$$

が該当する。計算すると，

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_1(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & 0 \end{vmatrix} \\ = &\begin{vmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2+3x_2^2 & 3x_1^2x_2+x_2^3 \\ 3x_1^2+3x_2^2 & 6x_1x_2 & x_1^3+3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2+x_2^3 & x_1^3+3x_1x_2^2 & 0 \end{vmatrix} = 12x_1x_2(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4) \end{aligned}$$

となって, $x_1 = x_2$ のところでのみ(18)を満たさない。これは, 等高線関数 $g(x_1)$ について, $g(x_1) = x_1$ となる点のみにおいて $g''(x_1) = 0$ が成り立ち，それ以外の点では $g''(x_1) > 0$ であることを意味するため，g' は増加的で，したがって g は狭義凸である。よって u は狭義準凹なのだが，(18)を満たさない。

念のために，$u_1 > 0, u_2 > 0$ という仮定が本質的であることを示しておく。この条件が成り立たなくとも，u が二階連続微分可能かつ準凹であれば(17)式が成り立つことは知られている。しかしながら，逆は成り立つとは限らない。実際,

$$u(x) = (x_1 - 2)^4$$

と定義すると,

$$u(2,1) = 0 < 1 = \min\{u(1,1), u(3,1)\}$$

となるため，u は準凹ではないが，一方で

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & u_1(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & u_2(x) \\ u_1(x) & u_2(x) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12(x_1-2)^2 & 0 & 4(x_1-2)^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4(x_1-2)^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

となって，(17)式は満たされている。

最後に，定義域が $\mathbb{R}^2_{++}$ ではなく，$\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ である場合について考えよう。こちらの定義域の方が経済学ではよく用いられるので，この問題は重要である。いま $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ が連続であるとし，また u を $\mathbb{R}^2_{++}$ 上に制限すれば準凹であるとする。このとき，$e = (1,1)$ として，$x, y \in \mathbb{R}^2_+$ に対して $x_n = x + n^{-1}e,\ y_n = y + n^{-1}e$ と置くと，$x_n, y_n \in \mathbb{R}^2_{++}$ である。したがって $0 \leq t \leq 1$ ならば,

$$u((1-t)x + ty) = \lim_{n\to\infty} u((1-t)x_n + ty_n) \geq \lim_{n\to\infty} \min\{u(x_n), u(y_n)\} = \min\{u(x), u(y)\}$$

となるため，u は $\mathbb{R}^2_+$ 全体でも準凹である。しかしながら，u が $\mathbb{R}^2_{++}$ 上に制限したときには狭義準凹だったとしても，$\mathbb{R}^2_+$ 上で狭義準凹とは限らない。たとえば $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上では狭義準凹であるが，$\mathbb{R}^2_+$ 上では狭義準凹ではない。この点には十分注意を払うべきである。

5　経済学への応用

この節では，いままで分析してきた凹関数および準凹関数の性質についての経済学への応用をいくつか紹介する。

5.1　準凹と凹の関係

$U \subset \mathbb{R}^n$ は凸集合で，$w : U \to \mathbb{R}$ は凹関数であるとする。$I = w(U)$ として，増加関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ を取り，$u = \varphi \circ w$ と定義する。するとこの u は準凹である。実際，w は凹だから準凹でもあり，よって $x, y \in U$ かつ $0 \le t \le 1$ であれば,

$$
\begin{aligned}
u((1-t)x + ty) &= \varphi(w((1-t)x + ty)) \\
&\ge \varphi(\min\{w(x), w(y)\}) \\
&= \min\{\varphi(w(x)), \varphi(w(y))\} = \min\{u(x), u(y)\}
\end{aligned}
$$

となるため，主張は正しい。

ここで, 逆の主張が成り立つかどうかについて考えてみたい。つまり, 与えられた準凹関数 $u : U \to \mathbb{R}$ に対して，必ずなんらかの凹関数 w と増加関数 φ が存在して，$u = \varphi \circ w$ となる，ということが言えるであろうか。残念ながらそれに対する答えは否定的であり，u の形によっては，そのような w と φ の組は一つも存在しないことが示せるのである。ここでは Arrow and Enthoven (1961) による次の例を考察しよう。

$$u(x) = (x_1 - 1) + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 4(x_1 + x_2)}.$$

まず，ここでは $U = \mathbb{R}^2_+$ とする。$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ ならば上の平方根の中身は 1 以上となるので, u は連続微分可能である。そして,

$$u_1(x) = 1 + \frac{x_1 + 1}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + 4(x_1 + x_2)}} > 0,$$

$$u_2(x) = \frac{2}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + 4(x_1 + x_2)}} > 0$$

であるから，u は強く増加的でもある。$u(0) = 0$ なので u は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で正値で，また $u(x) \ge x_1$ であるため，任意の正の数 $C > 0$ に対して $u(x) = C$ となる $x \in \mathbb{R}^2_{++}$ が存在する。ここで $C > 0$ に対応する等高線関数を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
u(x) = C &\Leftrightarrow C - (x_1 - 1) = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 4(x_1 + x_2)} \\
&\Leftrightarrow (C - (x_1 - 1))^2 = (x_1 - 1)^2 + 4(x_1 + x_2) \\
&\Leftrightarrow 4x_2 = C^2 - 2C(x_1 - 1) - 4x_1 \\
&\Leftrightarrow x_2 = (-1 - C/2)x_1 + (C^2 + 2C)/4
\end{aligned}
$$

となって，等高線関数は一次関数であることがわかる。一次関数は凸関数なので，定理 5 から u は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で準凹であるが，u は連続であるから，前節の最後に述べた事実によって，u は $\mathbb{R}^2_+$ 全体で準凹である。ここで

$$\psi_1(C)=\frac{C}{2},\ \psi_2(C)=\frac{C^2+2C}{4}$$

と定義すると，$C>0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{\psi_1(C)}+\frac{x_2}{\psi_2(C)}=1 &\Leftrightarrow \frac{2Cx_1+4x_1+4x_2}{C^2+2C}=1\\ &\Leftrightarrow 2Cx_1+4x_1+4x_2=C^2+2C\\ &\Leftrightarrow x_2=(-1-C/2)x_1+(C^2+2C)/4 \Leftrightarrow u(x)=C\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう。

ここで，固定された $k>0$ に対して次の関数

$$h_k(C)=\sup\{-x_1-kx_2|u(x)\ge C\}$$

を考える。関数 u は強く増加的で，かつ $u(0)=0$ であるから，$C>0$ かつ $u(x)\ge C$ ならば $0<a\le 1$ となる a で $u(ax)=C$ となるものが存在する。これを踏まえて計算すると，条件 $u(x)\ge C$ は $u(x)=C$ で書き換えることが可能であり，よって

$$\begin{aligned}h_k(C)=&\ \sup\{-x_1-kx_2|u(x)\ge C\}=\sup\{-x_1-kx_2|u(x)=C\}\\ =&\ -\inf\left\{x_1+kx_2\,\middle|\,\frac{x_1}{\psi_1(C)}+\frac{x_2}{\psi_2(C)}=1\right\}\\ =&\ -\min\{\psi_1(C),k\psi_2(C)\}\end{aligned}$$

という結論を得る。

さて，仮にある凹関数 $w:U\to\mathbb{R}$ と，w の値域 J 上で定義された増加関数 φ について，$u=\varphi\circ w$ となっていたと仮定しよう。まず，$x\ne 0$ ならば $u(x)>u(0)$ なので，$w(x)>w(0)$ でもあるが，実は J から $\{w(0)\}$ を取り除いてできた集合 I は区間である(8)。これを示すために，まず $I=w(\mathbb{R}^2_{++})$ であることを確認しよう。いま $a\in I$ かつ $a=w(x)$ とする。仮定から $a\ne w(0)$ なので，$x\ne 0$ であり，よって $u(x)>0$ である。すでに上で示したことから，$u(y)=u(x)$ となる $y\in\mathbb{R}^2_{++}$ が存在するが，このとき $w(y)=a$ であるから，たしかに $I=w(\mathbb{R}^2_{++})$ であることが確認できた。さて，仮に $a,b\in I$ かつ $a<c<b$ であるとすると，いま示した事実から，$a=w(x),b=w(y)$ となる $x,y\in\mathbb{R}^2_{++}$ が存在する。ここで $f(t)=w(x+t(y-x))$ と定義すると，f は $[0,1]$ を含む開区間上で定義された実数値関数であり，しかも凹関数である(9)。よって，定理 2 から f は連続であり，中間値の定理から，$f(t^*)=c$ となる t^* が存在する。これは $w(x+t^*(y-x))=c$ を意味し，よって $c\in I$

(8)　w が連続であれば J 自体が区間になるが，いま w の連続性は仮定していないことに注意する。

(9)　ここでは証明を省略するが，厳密な証明が見たい読者は後の定理 10 を参照せよ。

である。したがって I は凸集合であるが，明らかに I は二点以上を含むので，I は区間である。また定義から明らかに，どんな $z \in I$ に対しても $\varphi(z) > 0$ が成り立つ。

一方，実は $h_k \circ \varphi$ は I 上で定義された凹関数である。これを示すために，$z_0, z_1 \in I$ かつ $0 \leq t \leq 1$ とし，$z_t = (1-t)z_0 + tz_1$ とする。ここで $\varepsilon > 0$ を任意に取る。h_k の定義から，$i \in \{0,1\}$ に対して

$$h_k(\varphi(z_i)) - \varepsilon < -x_1^i - kx_2^i,\ u(x^i) \geq \varphi(z_i)$$

を満たす $x^i \in \mathbb{R}_+^2$ が存在する。すると $w(x^i) \geq z_i$ なので，

$$w((1-t)x^0 + tx^1) \geq (1-t)w(x^0) + tw(x^1) \geq z_t$$

であり，両辺を φ の中に入れることで $u((1-t)x^0 + tx^1) \geq \varphi(z_t)$ が得られる。よって，

$$\begin{aligned} h_k(\varphi(z_t)) \geq & -[(1-t)x_1^0 + tx_1^1] - k[(1-t)x_2^0 + tx_2^1] \\ &= (1-t)(-x_1^0 - kx_2^0) + t(-x_1^1 - kx_2^1) \\ &> (1-t)h_k(\varphi(z_0)) + th_k(\varphi(z_1)) - \varepsilon \end{aligned}$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意であったため，$\varepsilon \downarrow 0$ とすることで，

$$(h_k \circ \varphi)(z_t) \geq (1-t)(h_k \circ \varphi)(z_0) + t(h_k \circ \varphi)(z_1)$$

が得られた。故に，$h_k \circ \varphi$ はたしかに凹関数である。これを上の予備的な計算結果と総合すると，

$$g_k(z) = \min\{\psi_1(\varphi(z)), k\psi_2(\varphi(z))\}$$

は凸関数でなければならないことになる。特に，任意の $z \in I$ について $\psi_1(\varphi(z)) = \lim_{k\to\infty} g_k(z)$ であることを考えれば，$z_0, z_1 \in I$ かつ $0 \leq t \leq 1$ のときには

$$\begin{aligned} \varphi((1-t)z_0 + tz_1) &= 2\psi_1(\varphi((1-t)z_0 + tz_1)) \\ &= 2\lim_{k\to\infty} g_k((1-t)z_0 + tz_1) \\ &\leq 2\lim_{k\to\infty} [(1-t)g_k(z_0) + tg_k(z_1)] \\ &= 2(1-t)\lim_{k\to\infty} g_k(z_0) + 2t\lim_{k\to\infty} g_k(z_1) \\ &= (1-t)2\psi_1(\varphi(z_0)) + 2t\psi_1(\varphi(z_1)) \\ &= (1-t)\varphi(z_0) + t\varphi(z_1) \end{aligned}$$

となるため，φ は凸関数でなければならない。

ここで，φ が I の内部のとある点 z で微分可能であったと仮定しよう。もし $\varphi'(z) = 0$ ならば系 1 を $-\varphi$ に適用することで φ が z で最小であることが示され，φ が増加的な関数であるという

仮定と矛盾してしまう。よって $\varphi'(z) > 0$ である。ここで $k = \frac{2}{\varphi(z)+2}$ と定義すると，定義から $\psi_1(\varphi(z)) = k\psi_2(\varphi(z))$ である。一方，

$$\left.\frac{d}{dz'}(\psi_1(\varphi(z')) - k\psi_2(\varphi(z')))\right|_{z'=z} = \frac{\varphi'(z)}{2} - k\psi_2'(\varphi(z))\varphi'(z)$$
$$= \varphi'(z)\left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi(z)+1}{\varphi(z)+2}\right) < 0$$

となるため，z の近くにおいて $z' > z$ ならば $g_k(z') = \psi_1(\varphi(z'))$ であり，$z' < z$ ならば $g_k(z') = k\psi_2(\varphi(z'))$ であることになる。$g_k(z)$ が凸関数であることから，

$$k(\psi_2 \circ \varphi)'(z) = D_- g_k(z) \leq D_+ g_k(z) = \frac{\varphi'(z)}{2}$$

でなければならない。ここから

$$\varphi'(z) < 2k\psi_2'(\varphi(z))\varphi'(z) \leq \varphi'(z)$$

という矛盾した式を得るが，これはあり得ない。

以上から，φ は I 上のすべての点で微分不可能だということになる。したがって，I に含まれる任意の z について，$D_-\varphi(z) < D_+\varphi(z)$ が成り立たなければならない。すると定理 2 から，$D_+\varphi(z)$ はすべての点で不連続でなければならないが，一方で $D_+\varphi(z)$ は単調非減少関数であり，よく知られるように，そのような関数の不連続点は高々可算無限個しか存在し得ない[(10)]。したがって I は可算集合ということになるが，これは任意の区間が非可算であるという有名な事実に矛盾する[(11)]。故に，このような w と φ の組は存在することができないのである[(12)]。

付記：この事実を経済学への応用としたことについて，違和感を持った読者も多いかもしれない。たしかに，本節で議論したのはただの数学的事実であり，「連続，強く増加的，準凹な関数の中に，凹関数と単調関数の合成関数とは絶対に一致しないものが存在する」という事実を示したに過ぎない。しかしながら，この事実は経済学における古典的な議論と強く関係している。それは，**効用関数を凹関数と仮定してはいけない**という議論である。

非常に古い文献になるが，Gossen (1854) が提示した効用関数の三つの法則のうち「第一法則」は，$u_i(x)$ が x_i について減少的であるという内容であった。つまり，第 i 番目の商品は，それが少ないうちは価値が高いが，多くなっていくにつれて価値が減少していくというのである。この仮定は，u

---

(10) 証明は丸山 (1995) の数学付録 B などを参照。

(11) こちらの証明も丸山 (1995) の第 1 章を参照。

(12) 本稿では扱わないが，開集合上で定義された任意の凸関数は**局所リプシッツ**（locally Lipschitz）という性質を満たしており，このような関数が微分できない点のルベーグ測度は 0 であることが知られている。

が凹関数であるならば定理 3 を偏微分に適用することで容易に確認できるが，u が凹関数でない場合には必ずしも成り立たない。よって，おそらく古い時代の消費者理論においては，効用関数は凹関数であることが暗黙のうちに想定されていたのであろう。しかしながら現代の消費者理論では，効用関数が凹関数である，という仮定は，置いてはいけないとされる。では，どのような理由で「置いてはいけない」のだろうか？

この種の議論で最もよく理由として挙げられるのは，関数の凹性が単調変換不変性を持っていない，ということである。いわゆる序数的効用の見地から見て，効用関数は消費者の好みに対応する順序を表現する数値以上の意味を持たないと解釈される。一方で，効用関数 u が表現する順序は，単調変換 φ と合成して $v=\varphi\circ u$ に変形したとしても，一切変化しない。この点を前提とすれば，u と v のどちらを採用するかによって成り立ったり成り立たなかったりする条件は，効用関数の性質として望ましくない。

我々は後に**前段落の議論には問題が含まれる**ということを議論するのだが，まずはいったん前段落の議論がいまの問題に適用できるかどうかを確認してみよう。いま，$\mathbb{R}^2_+$ 上で定義された関数 $u(x)=\sqrt{x_1x_2}$ は凹関数であるが，$\varphi(z)=z^2$ を合成して $v=\varphi\circ u$ とすると $v(x)=x_1x_2$ となって，これは凹関数ではない。したがって凹関数であるという条件は効用関数の条件として望ましくない。

一方，凸集合 A 上で定義された関数 $u:A\to\mathbb{R}$ が準凹であるとき，単調変換 φ を用いて $v=\varphi\circ u$ と定義したとしよう。ここで $x,y\in A$ かつ $0\le t\le 1$ であれば，

$$\begin{aligned}v((1-t)x+ty)&=\varphi(u((1-t)x+ty))\ge\varphi(\min\{u(x),u(y)\})\\&=\min\{\varphi(u(x)),\varphi(u(y))\}=\min\{v(x),v(y)\}\end{aligned}$$

となるため，v も準凹である。以上から，効用関数の性質として準凹性には問題がないという結論を得る。このため，我々は消費者理論で，効用関数には準凹性を仮定し，凹性は仮定しないのである。

しかしながら，すでに予告したようにこの議論には若干の問題がある。たとえば先ほども用いた $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で定義された凹関数 $u(x)=\sqrt{x_1x_2}$ を考え，$\varphi(c)$ は $c\le 1$ ならば c で，$c>1$ ならば $c+1$ であるとしよう。このとき，$v=\varphi\circ u$ とすると，

$$v(x)=\begin{cases}\sqrt{x_1x_2} & \text{if}\ \ x_1x_2\le 1,\\ \sqrt{x_1x_2}+1 & \text{if}\ \ x_1x_2>1\end{cases}$$

となる。この v は明らかに連続関数ではない。つまり，単調変換によって連続性も破壊される場合があるのである。すると，上で議論したことをそのまま適用すると，効用関数に連続性を仮定することも望ましくないということになるが，現実にはそのような議論は普通はされず，消費者理論に

おいて効用関数が連続であるという仮定はごく標準的である。これはダブルスタンダードという批判を免れ得ない態度であるように思われる。

したがって，単調変換不変性は，効用関数が凹関数だと仮定してはいけない理由としては適格とは言いがたい。それでは，他にどんな理由があるだろうか。それは，効用関数が表現する**順序の性質**と関係している。この点について簡単に概観してみよう。

いま，凸集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上のなんらかの順序を取ってきて，これを $\succsim$ という記号で表す。$x \succsim y$ は x が y と同等かそれ以上によいことを表す。この順序を関数 $u : A \to \mathbb{R}$ が**表現する**という言葉を，関係

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$$

で定義する。もし順序 $\succsim$ を表現する関数 u が存在するならば，この順序は次の二つの性質を満たすはずである。第一に，$x \succsim y$ と $y \succsim x$ のいずれかは必ず成り立つという性質。これは**完備性**（completeness）と呼ばれる。実際，$u(x) \geq u(y)$ か $u(y) \geq u(x)$ のどちらか片方は少なくとも成り立つので，この主張は正しい。第二に，$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ ならば，$x \succsim z$ であるという性質。これは**推移性**（transitivity）と呼ばれる。実際，$u(x) \geq u(y)$ かつ $u(y) \geq u(z)$ ならば $u(x) \geq u(z)$ なので，この主張も正しい。

完備性と推移性を共に満たす A 上の順序を，A 上の**弱順序**（weak order）と言う。弱順序については，$x \succsim y$ かつ $y \not\succsim x$ であることを $x \succ y$ と記述することが慣例である。ここで，$x \succ y$ であるときに，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$\|z - x\| < \varepsilon$ かつ $\|w - y\| < \varepsilon$ であれば $z \succ w$ となる，という性質を，$\succsim$ の**連続性**（continuity）と呼ぼう。Debreu (1954)は以下の定理を示した。

定理 7（効用関数の存在定理）**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合で，$\succsim$ が A 上の弱順序であるとき，$\succsim$ が連続性を満たすことと，$\succsim$ を表現する連続な関数 $u : A \to \mathbb{R}$ が存在することは同値である。[(13)]

特に，人々の好みを表す弱順序のことを，経済学では**選好関係**（preference relation）と呼んでいる。定理 7 によると，選好関係が連続性の公理を満たせば，それを表現する連続な効用関数は**少なくとも一つは存在する**のである。そして，連続性の公理は「x が y よりも好まれるならば，x と y をほんの少しだけ動かしてもその好みの順序は変化しない」というごく自然な性質であり，選好関係に課す性質としては比較的妥当に見える。

一方，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上の弱順序に関して，それを表現する効用関数が必ず準凹になるための必要十分条件

(13) Debreu (1954)自身はこの結果を A がずっと一般的な集合で成り立つことを示しているが，ここではそれは扱わないことにする。証明に興味がある読者は，Debreu (1959)やその翻訳である丸山(1977)，それから丸山(1980)などを参照せよ。英語文献ならば，より現代的な取り扱いは Bridges and Mehta (1995)にある。

は，$y \succsim x$ かつ $0 \leq t \leq 1$ であるときに必ず $(1-t)x + ty \succsim x$ であることだという結果が知られている。さらに，$x \neq y$, $y \succsim x$ かつ $0 < t < 1$ であるときに必ず $(1-t)x + ty \succ x$ であるという条件は，この順序を表現する効用関数が狭義準凹になるための必要十分条件である。これらはどちらも比較的解釈が容易であり，x_1 と x_2 をバランスよく消費することが，偏った消費をするより望ましくなること，という意味になることが知られている。したがって，選好関係を表現する効用関数の準凹性は連続性と同じく，少なくとも経済学的に自然な仮定から導出できる。

これらの議論を経た上で，我々の議論を振り返ってみよう。本節で証明したことは，連続かつ準凹な効用関数で表現できる順序が，凹な効用関数で表現できるとは限らないという事実である。したがって，選好関係の性質として「凹な効用関数で表現できる」という仮定は，少なくとも上の二つの自然な性質からは保証できない。

これこそが，効用関数の凹性を仮定してはいけない真の理由である。つまり，**選好関係を表現する効用関数の中に凹関数が存在するための条件で，自然なものが知られていない**のである[(14)]。そのため，我々は消費者の選好関係が凹関数の効用関数で表現できると仮定していいのかどうかを，経済学的に判断できない。故に，消費者理論では消費者の効用に凹性を仮定せず，準凹性しか仮定しないことが標準的になっているのである。

5.2 需要関数の微分可能性

消費者理論において，消費者の行動は次の効用最大化問題によって表現される。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega, \\ & p \cdot x \leq m \end{aligned} \tag{19}$$

ここで, 集合 Ω は消費者が選択可能な消費計画 $x = (x_1, ..., x_n)$ の集合であり, **消費集合** (consumption set) と呼ばれる。ここでは $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ を仮定することにする。この問題はパラメータ $p_1, ..., p_n, m$ を含むため, この問題の解はパラメータごとに決まる。その解を $f_1(p_1, ..., p_n, m), ..., f_n(p_1, ..., p_n, m)$ と表すとき，これをベクトルとして並べた関数 $f(p, m)$ を**需要関数** (demand function) と呼ぶことにする。

需要関数が通常の関数として存在するためには，上の問題に解が存在し，しかもただ一つである必要がある。そのための仮定はいろいろあるが，ここではその詳細な議論はいったん省いておこう。

---

(14) Kannai (1977) は，連続な弱順序について，それが凹関数で表現できるための必要十分条件を 3 つも提示した。しかしながら彼の提示した条件はすべて非常に技術的かつ複雑で，それを経済学的に解釈することも難しいし，数学的にどのくらい強いかを判定することも困難である。したがって，彼の提示した条件はこの問題の解決には使用できない。

いま，(p^*, m^*) という価格ベクトルと所得の組において，効用最大化問題 (19) の解がただ一つに定まったとしよう。さらに，その解 x^* は $\mathbb{R}^n_{++}$ に含まれていることを仮定する。ここで考えたい問題は，需要関数 f が (p^*, m^*) の近くで連続微分可能になるための u の条件はなにか，ということである。

一般論としてのこの問題は Debreu (1972) によって解決されたのだが，その一般論を議論することは難しい。しかし，$n = 2$ である場合には，これまでの知識を用いることで極めて明瞭な結果を得ることができる。ここではそれについて触れよう。

次の定理は有名であるが，念のために証明を記しておく。

定理 8（ラグランジュ未定乗数法の原理）**.** $n = 2$，$\Omega = \mathbb{R}^2_+$ とし，$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は連続かつ準凹であるとする。また，u は $x^* \in \mathbb{R}^2_{++}$ で微分可能であり，また $u_2(x^*) > 0$ であるとする。このとき，以下の二条件は同値である。

（1） x^* は効用最大化問題（19）の解である。

（2） $p \cdot x^* = m$ であり，かつある $\lambda > 0$ が存在して，$u_1(x^*) = \lambda p_1$，$u_2(x^*) = \lambda p_2$ が成り立つ。

さらに，もし u が $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で狭義準凹であった場合，x^* は（19）の唯一の解である。

証明. まず，（1）を仮定する。もしここで $p \cdot x^* < m$ であったとすると，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $u(x_1^*, x_2^* + \varepsilon) > u(x_1^*, x_2^*)$ となることになるが，$\varepsilon > 0$ が十分小さければ $p \cdot (x_1^*, x_2^* + \varepsilon) < m$ となるため，（1）に矛盾する。よって，$p \cdot x^* = m$ でなければならない。次に，$g(t) = (x_1^* + tp_2, x_2^* - tp_1)$ と定義すると，

$$p \cdot g(t) = p_1 x_1^* + tp_1 p_2 + p_2 x_2^* - tp_2 p_1 = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = p \cdot x^* = m$$

が成り立つため，$|t|$ が十分小さなすべての t について，$g(t) \in \mathbb{R}^2_+$ であり，かつ $p \cdot g(t) \le m$ が満たされる。したがって (1) から，$t = 0$ において $u(g(t))$ は極大になる。そこで関数 $u \circ g$ を $t = 0$ の点で t で微分すると 0 になるが，合成微分の公式から

$$0 = \left. \frac{d}{dt}(u \circ g)(t) \right|_{t=0} = u_1(x^*)p_2 - u_2(x^*)p_1$$

となるため，ここからただちに

$$u_1(x^*)p_2 = u_2(x^*)p_1$$

を得る。したがって $\lambda = \frac{u_2(x^*)}{p_2}$ と定義すれば，

$$u_1(x^*) = \lambda p_1,\ u_2(x^*) = \lambda p_2$$

となって，(2)が成り立つことが示せた。

逆に，(2)を仮定する。ここで，もし(1)が成り立たなかったとすると，$p \cdot x \leq m$ かつ $u(x) > u(x^*)$ となる $x \in \mathbb{R}^2_+$ が存在する。u は連続であるため，必要があれば少しだけ x を動かすことで，$x \in \mathbb{R}^2_{++}$ かつ $p \cdot x < m$ であることを仮定してよい。ここで，$g(t) = x^* + t(x - x^*)$ と定義する。u は準凹であるから，$0 < t \leq 1$ である限り $u(g(t)) \geq u(x^*) = u(g(0))$ となる。したがって，

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(g(t)) - u(g(0))}{t} \\ &= u_1(x^*)(x_1 - x_1^*) + u_2(x^*)(x_2 - x_2^*) \\ &= \lambda[(p_1 x_1 - p_1 x_1^*) + (p_2 x_2 - p_2 x_2^*)] \\ &= \lambda[p \cdot x - p \cdot x^*] = \lambda[p \cdot x - m] < 0 \end{aligned}$$

となって矛盾が生ずる。故に(1)が成り立たなければならない。

最後に，u が $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で狭義準凹であるとしよう。仮に，x^* 以外に(19)の解 $x \in \mathbb{R}^2_+$ が存在していたとすると，$u(x) = u(x^*)$ である。したがって，$y = \frac{1}{2}(x + x^*)$ と置くと，u の準凹性から $u(y) \geq u(x^*)$ である。また，$x^* \in \mathbb{R}^2_{++}$ かつ $x \in \mathbb{R}^2_+$ なので，$y \in \mathbb{R}^2_{++}$ である。したがって，$z = \frac{1}{2}(y + x^*)$ と置くと，u の $\mathbb{R}^2_{++}$ 上の狭義準凹性から $u(z) > u(x^*)$ となる。しかし，$z \in \mathbb{R}^2_{++}$ であり，かつ $p \cdot z = \frac{1}{4} p \cdot x + \frac{3}{4} p \cdot x^* \leq m$ であるため，x^* が(19)の解でないことになって矛盾が生ずる。よってこれはあり得ず，x^* は(19)のただ一つの解である。以上で証明が完成した。 ■

さて，上の定理を念頭に置いて，以降の議論を行おう。実数値関数 u は $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ 上で連続かつ準凹，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上では二階連続微分可能かつ狭義準凹で，$u_1(x) > 0$ と $u_2(x) > 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}^2_{++}$ について成り立つとする。また，与えられた (p, m) に対して，$x^* \in \mathbb{R}^2_{++}$ が(19)の解であると仮定する。定理 8 から，$p \cdot x^* = m$ であり，さらに

$$u_1(x^*) = \lambda^* p_1,\ u_2(x^*) = \lambda^* p_2$$

が成り立つような正の数 $\lambda^* > 0$ が存在する。ここで，次の関数 F を考えよう。

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \lambda, q_1, q_2, w) &= u_1(x_1, x_2) - \lambda q_1, \\ F_2(x_1, x_2, \lambda, q_1, q_2, w) &= u_2(x_1, x_2) - \lambda q_2, \\ F_3(x_1, x_2, \lambda, q_1, q_2, w) &= w - q_1 x_1 - q_2 x_2. \end{aligned}$$

我々の仮定と定理 8 から，$F(x^*, \lambda^*, p, m) = 0$ が成り立つことはわかっている。この点 (x^*, λ^*, p, m) において F を (x_1, x_2, λ) で微分したヤコビ行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x^*) & u_{12}(x^*) & -p_1 \\ u_{21}(x^*) & u_{22}(x^*) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(\lambda^*)^2} \begin{vmatrix} u_{11}(x^*) & u_{12}(x^*) & u_1(x^*) \\ u_{21}(x^*) & u_{22}(x^*) & u_2(x^*) \\ u_1(x^*) & u_2(x^*) & 0 \end{vmatrix}$$

となる。したがって，(18)が成り立っている場合，陰関数定理が適用可能であり，(p,m) を含むある開集合 U と，(x^*,λ^*) を含むある開集合 V，そして連続微分可能な関数 $x(q,w),\lambda(q,w)$ が存在して，$(x,\lambda)\in V$ と $(q,w)\in U$ について，$F(x,\lambda,q,w)=0$ であることと，$x=x(q,w)$，$\lambda=\lambda(q,w)$ であることは同値である。十分に U と V を小さく取ることで，$\lambda(q,w)>0$ と，$x(q,w)\in\mathbb{R}^2_{++}$ を仮定することができる。したがって定理 8 から，$x(q,w)$ は U の上で需要関数 $f(q,w)$ と一致している。$x(q,w)$ は連続微分可能だから，f は (p,m) の近傍上で連続微分可能である。以上から，(18)が $x=x^*$ において成り立つならば，f は $x^*=f(p,m)$ となる (p,m) の近傍上で連続微分可能であることがわかった。

逆に，需要関数 f が点 (p,m) の近くで連続微分可能で，かつ $x^*=f(p,m)\in\mathbb{R}^2_{++}$ であると仮定しよう。ここで $x\in\mathbb{R}^2_{++}$ に対して，

$$g_i(x)=\frac{u_i(x)}{u_2(x)}$$

と定義する。定理 8 から $g(x^*)=\lambda p$ となる $\lambda>0$ が存在し，また $p\cdot x^*=m$ である。よって $g(x^*)\cdot x^*=\lambda p\cdot x^*=\lambda m$ を得るが，これは $(g(x^*),g(x^*)\cdot x^*)=\lambda(p,m)$ を意味する。一方，$a>0$ として，(q,w) を (aq,aw) で置き換えたとしても，需要関数の値は変わらない。これは，(p,m) の代わりに (q,w) を置いた場合と，(aq,aw) を置いた場合で，問題(19)の制約を満たす x の集合が変わらないことからただちに導かれる。言い換えると，f は**正 0 次同次性**と呼ばれる次の条件

$$f(aq,aw)=f(q,w)$$

を満たすのである。これを $a=\lambda$ に適用することで，f は $(g(x^*),g(x^*)\cdot x^*)$ の近くで連続微分可能であるという結果を得る。

一方で，$x\in\mathbb{R}^2_{++}$ について，$(q,w)=(g(x),g(x)\cdot x)$ に対して定理 8 の(2)の条件が成り立つため，恒等式

$$x=f(g(x),g(x)\cdot x)$$

が成り立つ。この両辺を $x=x^*$ の点で x で微分すると，$h(x)=g(x)\cdot x$ として，$g_2(x)\equiv 1$ であることから[(15)]，

(15) I_2 は単位行列である。なお，以降変数は適宜省略して記述するが，f に関係するところには $(g(x^*),h(x^*))$ が，g に関係するところには x^* が入っている。

$$I_2=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \frac{\partial f_1}{\partial m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \frac{\partial f_2}{\partial m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ 0 & 0\\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

を得る。したがって

$$F=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial m}\end{pmatrix}$$

は正則であり，さらに

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)=\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*)f_1(p,m)+g_1(x^*),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)=\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*)f_1(p,m)+1$$

を用いることで以下の計算結果

$$\begin{aligned}F^{-1}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ f_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ g_1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ f_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}g_1 & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ g_1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を得る。この最後の式の行列式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}g_1&=\frac{u_{11}u_2-u_1u_{21}}{u_2^2}-\frac{u_{12}u_2-u_1u_{22}}{u_2^2}\frac{u_1}{u_2}\\ &=\frac{1}{u_2^3}[u_{11}u_2^2+u_{22}u_1^2-u_{12}u_1u_2-u_{21}u_1u_2]\\ &=-\frac{1}{u_2^3}\begin{vmatrix}u_{11} & u_{12} & u_1\\ u_{21} & u_{22} & u_2\\ u_1 & u_2 & 0\end{vmatrix}\end{aligned}$$

となる。正則行列の行列式は 0 にならないため，我々は

$$\begin{vmatrix}u_{11}(x^*) & u_{12}(x^*) & u_1(x^*)\\ u_{21}(x^*) & u_{22}(x^*) & u_2(x^*)\\ u_1(x^*) & u_2(x^*) & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

を得ることになるが，一方で u は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で準凹なので，定理 6 から(17)が成り立つことがわかる。この二つの結果を組み合わせることで，我々は x^* において u が(18)を満たすという結論を得る。

以上の結果から，次の定理を得る。

定理 9. $n=2$ とし，$\Omega=\mathbb{R}^2_+$ とする。$u:\Omega\to\mathbb{R}$ は連続かつ準凹であり，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上では狭義準凹かつ二階連続微分可能で $u_1(x)>0$ と $u_2(x)>0$ を常に満たしているとし，与えられた $(p,m)\in\mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}_{++}$ において $x^*=f(p,m)\in\mathbb{R}^2_{++}$ とする。このとき，需要関数 f が (p,m) の近くで連続微分可能であるための必要十分条件は，u が x^* において(18)を満たすことである。

6　一般の次元の凹関数，準凹関数

いままで我々は一変数の凹関数と二変数の準凹関数について詳しく扱った。本節では，もう少し一般化した変数の下での凹関数と準凹関数について議論する。

凹関数の解析において基礎となるのは以下の定理である。

定理 10. $U\subset\mathbb{R}^n$ は凸集合とし，$f:U\to\mathbb{R}$ が与えられているとする。ここで $x\in U$ と $v\in\mathbb{R}^n$ に対して，$g_{x,v}(t)=f(x+tv)$ と定義する。このとき，f が凹関数であることと，任意の $x\in U$ と $v\in\mathbb{R}^n$ について $g_{x,v}$ が凹関数であることは同値である。また，f が狭義凹関数であることと，任意の $x\in U$ と $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ について $g_{x,v}$ が狭義凹関数であることは同値である。

証明. まず，f が凹関数であるとし，$x\in U$ かつ $v\in\mathbb{R}^n$ であるとする。$v=0$ ならば $g_{x,v}(t)\equiv f(x)$ なので，これは当然凹関数である。$v\neq 0$ であるとき，$x+t_0v, x+t_1v\in U$ となる t_0,t_1 を取る。ここで $0\le t\le 1$ とすると，

$$\begin{aligned}g_{x,v}((1-t)t_0+tt_1)&=f(x+[(1-t)t_0+tt_1]v)=f((1-t)(x+t_0v)+t(x+t_1v))\\&\ge(1-t)f(x+t_0v)+tf(x+t_1v)=(1-t)g_{x,v}(t_0)+tg_{x,v}(t_1)\end{aligned}$$

となって，たしかに $g_{x,v}$ は凹関数である。また，f が狭義凹関数で $t_0\neq t_1$ かつ $0<t<1$ の場合，上の不等号は等号にならないため，$g_{x,v}$ は狭義凹関数である。

逆に，$g_{x,v}$ が常に凹関数であるとし，$x,y\in U$ かつ $0\le t\le 1$ であるとしよう。ここで $v=y-x$ としたとき，$g_{x,v}(t)=f((1-t)x+ty)$ である。したがって，

$$\begin{aligned}f((1-t)x+ty)&=g_{x,v}(t)=g_{x,v}((1-t)0+t1)\\&\ge(1-t)g_{x,v}(0)+tg_{x,v}(1)=(1-t)f(x)+tf(y)\end{aligned}$$

となる。これは f が凹関数であることを意味する。さらに，$v\neq 0$ のときに $g_{x,v}$ が狭義凹関数になるとき，$x\neq y$ かつ $0<t<1$ とすれば，上の不等号は等号にならないため，f は狭義凹関数である。以上で証明が完成した。 ■

定理 10 を用いることで，n 変数の凹関数の特徴付けが与えられる。

定理 11. $U \subset \mathbb{R}^n$ は開凸集合で，$f : U \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする。このとき，f が凹関数であることと，すべての $x, y \in U$ について $Df(x)(y-x) \geq f(y)-f(x)$ であることは同値である。また，f が狭義凹関数であることと，$x \neq y$ であるようなすべての $x, y \in U$ について $Df(x)(y-x) > f(y)-f(x)$ であることは同値である。[16]

証明. f が凹関数であるとし，$x, y \in U$ とする。$v = y-x$ として定理 10 で扱った $g_{x,v}(t) = f(x+tv)$ を作ると，$g_{x,v}$ は凹関数である。よって定理 2 の(11)式から

$$f(y) = g_{x,v}(1) \leq g_{x,v}(0) + g'_{x,v}(0) = f(x) + Df(x)(y-x)$$

を得ることができるが，ここからただちに

$$Df(x)(y-x) \geq f(y) - f(x)$$

を得る。もし f が狭義凹で，かつ $y \neq x$ であれば，(12)式が適用できて，上の不等式は厳密な不等号で置き換えることができる。よって

$$Df(x)(y-x) > f(y) - f(x)$$

を得る。

逆に，f が凹関数でなかったとしよう。このとき，$x, y \in U$ と $0 \leq t \leq 1$ を満たす t の中で，

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

を満たすものが存在する。ここで，

---

(16) 一般に，凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された微分可能な実数値関数で，$Df(x)(y-x) \leq 0$ であるならば必ず $f(y) \leq f(x)$ であるようなものを**擬凹関数**（pseudo-concave function）と呼ぶ。この定理からただちにわかるように，微分可能な凹関数は擬凹である。一方で，擬凹関数は準凹である。これは次のようにして確かめられる。仮に f が準凹でないとし，$x, y \in U$ かつ $0 \leq t \leq 1$ で，$f((1-t)x+ty) < \min\{f(x), f(y)\}$ となるものがあるとしよう。一般性を失うことなく $f(x) \geq f(y)$ とし，$f((1-t)x+ty)$ が $[0,1]$ 区間上で最小になるような t^* を取ると，$0 < t^* < 1$ である。$z = (1-t^*)x + t^* y$ とすれば $Df(z)(y-z) = 0$ であるが，$f(z) < f(y)$ となり，したがって f は擬凹ではない。この対偶を取れば，f が擬凹であるときには必ず準凹であることがわかるのである。

もちろん，上の結果の逆は成立しない。たとえば $f(x) = x^3$ は準凹であるが，$f'(0)(1-0) = 0$ なのに $f(1) > f(0)$ であるため，擬凹ではない。また，$f(x) = x^3 + x$ は擬凹であるが，$f'(x) = 3x^2 + 1$ が単調非増加ではないので，凹ではない。このように，凹，擬凹，準凹の間にはかなり複雑な関係があることがわかる。

$$g(t) = f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - tf(y)$$

を $[0,1]$ 内で最小にする点を t^* とし，$z = (1-t^*)x + t^*y$ とする。明らかに $0 < t^* < 1$ であり，またこのとき

$$0 = g'(t^*) = Df(z)(y-x) - (f(y) - f(x))$$

であることから，

$$Df(z)(y-z) = (1-t^*)Df(z)(y-x) = (1-t^*)(f(y) - f(x))$$

を得る。一方，定義から $g(t^*) < 0$ であり，よって

$$f(z) < (1-t^*)f(x) + t^*f(y)$$

である。ここから，

$$f(y) - f(z) > (1-t^*)(f(y) - f(x)) = Df(z)(y-z)$$

を得る。対偶を取ると，$Df(x)(y-x) \geq f(y) - f(x)$ を常に満たす関数は必ず凹関数である。

同様に，f が狭義凹関数でなかった場合，$x \neq y$ となる $x, y \in U$ と $0 < t < 1$ を満たす t の中で，

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

を満たすものが存在する。先ほどと同様に g を定義すると，g を最小にする t のうち少なくとも一つは $0 < t < 1$ を満たすので，それを t^* とし，先ほどと同様に $z = (1-t^*)x + t^*y$ とする。このとき，上と同じ計算から

$$Df(z)(y-z) = (1-t^*)(f(y) - f(z))$$

を得るが，一方で定義から $g(t^*) \leq 0$ であり，よって

$$f(z) \leq (1-t^*)f(x) + t^*f(y)$$

である。故に

$$f(y) - f(z) \geq (1-t^*)(f(y) - f(x)) = Df(z)(y-z)$$

を得る。やはり対偶を取ると，$x \neq y$ のときに $Df(x)(y-x) > f(y) - f(x)$ を常に満たす関数は必ず狭義凹関数である。以上で証明が完成した。 ■

f が二階微分可能な場合には，ヘッセ行列 $D^2f(x)$ を利用した凹関数の特徴付けができる。念のために用語を確認しよう。n 次正方行列 A が**半負値定符号**（negative semi-definite）であるとは，任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について $v^TAv \leq 0$ が成り立つことを言う。もし $v \neq 0$ のときにこの不等号が厳密になる，すなわち $v^TAv < 0$ が必ず成り立つならば，A は**負値定符号**（negative definite）であると言う。

系 3. $U \subset \mathbb{R}^n$ は開凸集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ は二階微分可能であるとする。このとき，f が凹関数であることと，そのヘッセ行列 $D^2 f(x)$ がすべての点で半負値定符号であることは同値である。また，もしすべての点でヘッセ行列が負値定符号ならば，f は狭義凹関数である。

証明. 定理 10 の $g_{x,v}$ について，連鎖律から容易に

$$g''_{x,v}(t) = v^T D^2 f(x + tv) v$$

が得られる。したがって系 2 からただちにこの結果を得る。 ■

準凹関数についても，凹関数と同様に次の結果が示せる。

定理 12. $U \subset \mathbb{R}^n$ は凸集合であるとし，$u : U \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。このとき，u が準凹であることは，任意の $x, y \in U$ に対して以下の関数

$$g_{x,y}(a, b) = u(ax + by)$$

が準凹であることと同値である。

証明. u が準凹であるとし，$x, y \in U$ とする。このとき，$ax + by, cx + dy \in U$ かつ $0 \le t \le 1$ なら，

$$\begin{aligned} g_{x,y}((1-t)(a,b) + t(c,d)) &= u((1-t)[ax+by] + t[cx+dy]) \\ &\ge \min\{u(ax+by), u(cx+dy)\} = \min\{g_{x,y}(a,b), g_{x,y}(c,d)\} \end{aligned}$$

となるので，$g_{x,y}$ は準凹である。

逆に，u が準凹でないとすると，$x, y \in U$ と $0 \le t \le 1$ となる t をうまく取ると

$$u((1-t)x + ty) < \min\{u(x), u(y)\}$$

となる。このとき，

$$g_{x,y}((1-t)(1,0) + t(0,1)) < \min\{g_{x,y}(1,0), g_{x,y}(0,1)\}$$

となるため，$g_{x,y}$ は準凹ではない。対偶を取ると，$g_{x,y}$ が必ず準凹になるならば，u は準凹である。以上で証明が完成した。 ■

これを用いて二階連続微分可能なときの u の準凹性の判定要件を議論することも可能なのだが，凹関数の場合と異なり，証明がいささか難解になる。したがってここでは直接結果を示すことにしよう。

定理 13. $U \subset \mathbb{R}^n$ は開凸集合であり，$u : U \to \mathbb{R}$ は二階連続微分可能で，かつ $Du(x) \neq 0$ がすべての $x \in U$ において成り立っているとする。このとき，u が準凹であることは，次の条件

$$Du(x)v = 0 \Rightarrow v^T D^2 u(x) v \leq 0 \tag{20}$$

がすべての $x \in U$ において成り立つことと同値である。また，仮に

$$v \neq 0,\ Du(x)v = 0 \Rightarrow v^T D^2 u(x) v < 0 \tag{21}$$

がすべての $x \in U$ において成り立っているとすれば，u は狭義準凹である。

証明. まず，ある点 $x \in U$ において (20) 式が成り立たなかったとしよう。このとき，ある $v \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$Du(x)v = 0$ であるにもかかわらず $v^T D^2 u(x) v > 0$ である。$g(t) = u(x + tv)$ とすると，$g'(0) = 0$ かつ $g''(0) = v^T D^2 u(x) v > 0$ であるため，$|t|$ が十分小さい限り，$g'(t)$ の符号は t の符号と一致する。よって，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取ると $g(\varepsilon) > g(0)$ かつ $g(-\varepsilon) > g(0)$ であるが，このとき $t = \frac{1}{2}$ に対して

$$\begin{aligned} u((1-t)(x+\varepsilon v) + t(x - \varepsilon v)) &= u(x) = g(0) < \min\{g(\varepsilon), g(-\varepsilon)\} \\ &= \min\{u(x+\varepsilon v), u(x - \varepsilon v)\} \end{aligned}$$

となるため，u は準凹ではない。対偶を取ると，u が準凹ならば(20)式がすべての $x \in U$ において成り立っていなければならないことがわかる。(17)

逆に，(20)式がすべての $x \in U$ において成り立っていると仮定する。u が準凹でないとすると，ある $x, y \in U$ と $0 \leq t \leq 1$ となる t について，

$$u((1-t)x + ty) < \min\{u(x), u(y)\}$$

にならなければならない。そこで，左辺が $[0,1]$ 区間内で最小になる $t \in [0,1]$ の中で最大のものを t^* と置き，$z = (1-t^*)x + t^* y$ とし，$p = (Du(z))^T$ と置く。そして，

$$g(s,t) = u(z + s(y-x) + tp)$$

と定義する。定理の仮定より $p \neq 0$ であるため，

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0,0) = Du(z)p = \|p\|^2 > 0$$

となり，故に方程式

(17) ここまでの議論では $Du(x) \neq 0$ の仮定を使っていないので，この結論は $Du(x) = 0$ となる可能性があっても成り立つ。

$$g(s,t)=u(z)$$

には陰関数定理が適用できる。よって，0 を含む開区間 I 上で定義された二階連続微分可能な関数 $t(s)$ が存在して，$t(0)=0$ であり，かつ

$$u(z+s(y-x)+t(s)p)=g(s,t(s))=u(z)$$

がすべての $s\in I$ に対して成り立つ。したがって，$z(s)=z+s(y-x)+t(s)p$ および $v(s)=(y-x)+t'(s)p$ に対して

$$Du(z(s))v(s)=0$$

および,

$$v(s)^TD^2u(z(s))v(s)+t''(s)Du(z(s))p=0$$

を得る。$s=0$ の場合，$z(s)=z$ なので，$Du(z(s))p>0$ であり，よって $|s|$ が十分小さい場合，$Du(z(s))p>0$ である。(20)式から $v(s)^TD^2u(z(s))v(s)\le 0$ であるため，このときには $t''(s)\ge 0$ でなければならない。したがって $t'(s)$ は十分 0 に近い部分で非減少的である。また t^* の定義から $Du(z(0))(y-x)=0$ なので $t'(0)=0$ であり，よって $t(s)$ は十分 $s>0$ が小さい場合には非負でなければならない。一方，u は連続微分可能なので，十分 $\varepsilon>0$ が小さいならば，$|s|,|t|<\varepsilon$ である限り

$$Du(z+s(y-x)+tp)p>0$$

である。$s>0$ が十分小さい限り $t(s)<\varepsilon$ となり，ここから

$$u(z)=g(s,t(s))=u(z+s(y-x)+t(s)p)\ge u(z+s(y-x))=u((1-(t^*+s))x+(t^*+s)y)$$

を得るが，$t^*<1$ なので矛盾が生ずる。よってこれはあり得ず，u は準凹である。[18]

最後に，(21)式がすべての $x\in U$ において成り立っていたと仮定しよう。u が狭義準凹でないと仮定すると，$x\neq y$ となる $x,y\in U$ と $0<t<1$ となる t で,

$$u((1-t)x+ty)\le\min\{u(x),u(y)\}$$

となるものが存在する。右辺を最小にする t で，かつ $0<t<1$ を満たすものを一つ取り，それを t^* と書くことにする。そして $z=(1-t^*)x+t^*y$ と定義する。$g(t)=u((1-t)x+ty)$ とすると,

$$Du(z)(y-x)=g'(t^*)=0,\ (y-x)^TD^2u(z)(y-x)=g''(t^*)\ge 0$$

となって，(21)式に矛盾する。以上で証明が完成した。 ■

(18) この証明では $p\neq 0$ でなければ陰関数定理が適用できないが，これは本質的である。実際，第 4 節の最後で扱った関数 $u(x)=(x_1-2)^4$ は(20)式を満たすが，準凹ではない。

7　補足説明および文献案内

本稿では，主に一変数の凹関数および二変数の準凹関数に焦点を当て，その特徴付けをいくつか行った。この節では最後に，いくつかの補足説明および文献案内を書いておくことにする。

まず，定理 6 と定理 13 は共に準凹関数の特徴付けであるが，それは(17)と(20)という，異なる形式の特徴付けを与えていた。この二つの条件がなんらかの関係性を持っていると予想するのは自然であろう。実は，$n=2$ かつ $u_1>0, u_2>0$ という定理 6 の仮定の下では，この二つは同値であることが Debreu (1952)によって示されている。さらには，(18)と(21)の同値性も同じ論文で示されている。現代的な解説は丸山(2021)の第 6 章に与えられている。

定理 7 は Debreu (1954)による。これに関連して，von Neumann and Morgenstern (1944)による NM 期待効用の存在定理にも言及しなければならない。これは，単純くじと呼ばれるものの空間上に与えられた弱順序について，その順序がくじ P による効用関数 u の期待値 $E_P[u]$ の大小で表現できるための必要十分条件を求めたものである。この文脈においては，効用関数の凹性は**危険回避**と呼ばれる行動と同値であることが知られている。したがって，NM 期待効用で議論する限り，凹性の仮定は自然である。しかし，この存在定理に含まれる独立性の公理に対する批判が古くから知られており，したがって通常，確率的な議論をしなくてよい文脈では，NM 期待効用で議論することは避けるべきだという考えが一般的である。一方，Alt (1936)はこれと異なり，$u(x)-u(y)$ に意味があるような効用関数の存在定理を扱ったが，このアルトの効用については，ゴッセンの第一法則を一般化した公理が u の凹性と同値であることが証明されている。詳細は Hosoya (2022a)の定理 2 を参照せよ。しかしながら，Debreu (1954)が扱った，最も消費者理論において基本的な構造だけを用いて，凹関数の効用関数が存在することを示すことは非常に難しい。このテーマについては Kannai (1977)が最も基本的な文献になっている。

不思議なことに，有限個の購買データを元にその購買データを効用最大化行動として表現する効用関数を探すという文脈においては，そのような効用関数で増加的なものが一つでも存在するならば，その中に凹関数のものが必ず存在することが知られている。これは Afriat (1967)によって部分的に示され，Varian (1982)が証明を完成させた結果である。現代的な解説については Chambers and Echenique (2016)を参照せよ。Mas-Colell (1978)はこの結果を元に無限個の購買データに対応する需要関数そのものを説明する効用関数を構築しようとした論文であるが，そこではかなり強い追加的仮定が必要とされている。

Arrow and Enthoven (1961)は 5.1 節の議論についてあまり詳しく述べておらず，この u がフェ

ンヒェル(2017)にある条件を満たしていないと述べているだけである[19]。しかしながら，フェンヒェルの書籍のうちどの部分に書かれた条件なのかが判然としない。h_k の凹性の証明はフェンヒェルで示されているので，まったくの無関係ではないというのは確かなのだが，それ以上の関係はわからなかった。ここでの証明は Monteiro (2010)のものをさらに簡略化したものである。

定理 9 の証明は Debreu (1972)によるのだが，彼は $n \geq 3$ の場合も含めた一般論で議論し，(21)式が需要関数の微分可能性の必要十分条件だという結論を得ている。ただしこの論文においては，(21)式それ自体ではなく，**無差別超曲面のガウス曲率がどこでも 0 にならない**という性質が最も重視されている。一方，我々の証明は Samuelson (1950)にある行列の計算を簡単化したもので，Debreu (1972)によるオリジナルの証明よりもずっと容易に，同値な定理を導き出すことができている。この結果の一般化については細矢(2018)を見よ。

定理 13 のうち，(20)から準凹性を示す箇所は Otani (1983)による。この定理は非常にエレガントなのだが，証明が難しい。定理 6 はそれよりずっと直接的に(17)と準凹性の結びつきを示しているが，これは $n = 2$ だからできたことであり，$n \geq 3$ ではそう簡単にはいかないのである。なお，これを一般化した論文として Hosoya (2022b)があるが，そこではバナッハ空間の凸部分集合を定義域とする必ずしも二階微分可能とは限らない準凹関数が扱われている。

最後に，$n = 1$ でない場合でも，(11)式を用いて $\partial f(x)$ を定義することは可能である。f が凹関数であるとき，支持超平面定理を用いることで，定義域の内部において $\partial f(x)$ は非空であることが証明でき，またそれが一点集合であることと，f が x において微分可能であることの同値性は比較的容易に示すことができる。この種の結果を網羅した書籍としては Rockafeller (1970)が挙げられる。この結果を用いると，定理 8 を，微分可能でない凹関数に拡張することが可能であることが知られている。一方で，準凹関数に対してはこのような議論は不可能である。そもそも凹関数は定義域の内部では連続であるし，実は局所リプシッツであることまで知られているが，準凹関数でありながら連続ですらない例は 5.1 節のような形でごく普通に作れる。この点で準凹関数は凹関数よりも扱いにくい。もし準凹関数を単調変換によって凹関数に変形できれば非常に有益なのだが，我々はまさにそれができない例を 5.1 節において見たのであった。したがって，経済学を学ぶためには，この使いにくい準凹性という概念とうまく付き合っていかざるを得ないのであろう。

(19) このフェンヒェルの書籍は 1951 年に書かれた講義ノートであり，2017 年は翻訳版の出版年であることに注意されたい。1961 年当時にはすでにこの書籍の英語版は存在していて，参照できる状態にあった。

参 考 文 献

[1] Afriat, S. (1967) "The Construction of a Utility Function from Demand Data." *International Economic Review* 8, pp. 67–77.

[2] Alt, F. (1936) "Über die Messbarkeit des Nutzens." *Zeitschrift für Nationalökonomie* 7, pp.161-169. Translated by Schach, S. (1971) "On the Measurability of Utility." In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and Sonnenschein, H. F. (Eds.) *Preferences, Utility and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York. pp. 424–431.

[3] Arrow, K. J. and Enthoven, A. C. (1961) "Quasi-Concave Programming." *Econometrica* 29, pp. 779–800.

[4] Bridges, D. S. and Mehta, G. B. (1995) *Representations of Preference Orderings.* Springer, Berlin.

[5] Chambers, C. P. and Echenique, F. (2016) *Revealed Preference Theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Debreu, G. (1952) "Definite and Semi-Definite Quadratic Forms." *Econometrica* 20, pp. 295–300.

[7] Debreu, G. (1954) "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function." In: Thrall, R. M., Coombs, C. H., and Davis, R. L. (Eds.) *Decision Processes.* Wiley, New York, pp. 159–165.

[8] Debreu, G. (1959) *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium.* Yale University Press, New Haven.（日本語訳：ジェラール・ドブリュー，丸山徹訳（1977）『価値の理論』東洋経済新報社.）

[9] Debreu, G. (1972) "Smooth Preferences." *Econometrica* 40, pp. 603–615.

[10] Gossen, H. H. (1854) *Entwicklung der Gesetze des Menschlichen Verkehrs und der Daraus Fließenden Regeln für Menschliches Handeln.* F. Vieweg, Braunschweig.

[11] Hosoya, Y. (2022a) "An Axiom for Concavifiable Preferences in View of Alt's Theory." *Journal of Mathematical Economics* 98, 102583.

[12] Hosoya, Y. (2022b) "Differential Characterization of Quasi-Concave Functions without Twice Differentiability." *Communications in Optimization Theory* 2022:21, pp. 1–10.

[13] Kannai, Y. (1977) "Concavifiability and Constructions of Concave Utility Functions." *Journal of Mathematical Economics* 4, pp. 1–56.

[14] Katzner, D. W. (1968) "A Note on the Differentiability of Consumer Demand Functions." *Econometrica* 36, pp. 415–418.

[15] Mas-Colell, A. (1978) "On Revealed Preference Analysis." *Review of Economic Studies* 45, pp. 121–131.

[16] Monteiro, P. K. (2010) "A Class of Convex Preferences Without Concave Representation." *Revista Brasileira de Economia* 64, pp. 81–86.

[17] von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton.

[18] Otani, K. (1983) "A Characterization of Quasi-Concave Functions." *Journal of Economic Theory* 31, pp. 194–196.

[19] Rockafeller, R. T. (1970) *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton.

[20] Samuelson, P. A. (1950) "The Problem of Integrability in Utility Theory." *Economica* 17, pp. 355–385.

[21] Varian, H. R. (1982) "The Nonparametric Approach to Demand Analysis." *Econometrica* 50, pp. 945–973.

[22] ヴェルナー・フェンヒェル (2017)『凸解析の基礎』知泉書館.

[23] 細矢祐誉 (2018)「ジェラール・ドブリューと滑らかな選好の理論」『三田学会雑誌』110-4, pp. 95–131.

[24] 丸山徹 (1980)『函数解析学』慶應通信.
[25] 丸山徹 (1995)『数理経済学の方法』創文社.
[26] 丸山徹 (2021)『経済の数学解析』丸善出版.