

Title	一変数Sobolev空間の初等理論
Sub Title	Elementary theory of one-dimensional Sobolev spaces
Author	丸山, 徹(Maruyama, Toru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2025
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.117, No.3 (2025. 2) ,p.361 (95)- 397 (131)
JaLC DOI	10.14991/001.20250201-0095
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20250201-0095

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.



一変数 Sobolev 空間の初等理論

丸山 徹*

序

物理学はもちろんのこと、経済理論もまた変分学との深いかわりをもち、これについては周知のところであろうから、あらためて言葉を費す煩は避ける。解析学において変分学は長い学説史を有するが、近年、とりわけ非線形偏微分方程式との関連で、新しい角度から関心が寄せられてきた。⁽¹⁾

変分問題に解が存在するならば、それは所謂 Euler 方程式を満たさなければならない。いまある偏微分方程式が、それに対応して適切に構成された変分問題の Euler 方程式に該当しているとしよう。もしこの変分問題に解の存在が保証されるならば、それは当該変分問題の Euler 方程式を満たさなければならないので、結局当初与えられた偏微分方程式の解の存在が確証されたことになるであろう。このように微分方程式の解の存在証明を、変分法の解の存在問題に切り換えて考察する方法を直接法（direct method）と称する。

この着想の有効性が広く認められたために、変分学の解の存在証明という主題にルネサンスが起こり、南雲道夫や L. Tonelli の古典的学説の意義にあらためて光が照射されたのであった。

解析学のこのような傾向に鑑み、本稿とその続篇においては、主として経済学に現われる変分問題を念頭におきつつ、一次元の、すなわち実軸 $\mathbb{R}$ で定義された未知関数を解く変分問題を主題とする。最も簡略な形式の変分問題における解の存在証明の全貌に体系的な解説を施すこととしたい。とくに本稿では、この目的を果たすための不可欠な準備として、やはり $\mathbb{R}$ 上で定義された関数が作

* 慶應義塾大学名誉教授

(1) 詳しくは Evans [6] Chap. 8, Struwe [15].

る Sobolev 空間の初等的理論に十分な函数解析的な検討を加える⁽²⁾。

I. 微分の一般化

§1. 簡単な事例：Dirichlet 積分

古典的な変分問題の最も簡単な形式は次のようである。 Ω を $\mathbb{R}^3$ の非空・開集合とし、函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は Ω 上で連続微分可能、つまり $\mathcal{C}^1$ -級であるとする。 $\mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ に属する函数 u のうち、すべての $t \in [t_0, t_1]$ に対して $(t, u(t), \dot{u}(t)) \in \Omega$ を満たすものの全体を $\mathcal{U}$ とし、函数 $J: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, u(t), \dot{u}(t)) dt \quad (1)$$

と定義する。そこで次の問題を考える。

$$[V] \quad \begin{cases} \text{Minimize} & J(u) \\ \text{subject to} & u \in \mathcal{U}, \quad u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1. \end{cases}$$

ただし、 u_0, u_1 は固定された点である。

いま函数 $u^* \in \mathcal{U}$ が問題 [V] の局所解であるとしよう。 u^* が問題 [V] の局所解であるとは、十分に小さな $\delta > 0$ について、 $\mathcal{U}$ における u^* の δ -近傍内の函数 u で、条件 $u(t_0) = u_0, u(t_1) = u_1$ を満たすものについては必ず $J(u) \geq J(u^*)$ の成り立つことをいう。ここで δ -近傍を定めるノルムとしては $\mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ を用いるのである。これを標語的に記せば次のようである⁽³⁾。

$$\|u - u^*\|_{\mathcal{C}^1} < \delta, \quad u \in \mathcal{U}, \quad u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1 \implies J(u) \geq J(u^*).$$

u^* が問題 [V] の局所解であるとき、 u^* は微分方程式

$$D_u f(t, u, \dot{u}) - \frac{d}{dt} D_{\dot{u}} f(t, u, \dot{u}) = 0, \quad u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1 \quad (2)$$

の解でなければならない⁽⁴⁾。この微分方程式を問題 [V] の **Euler 方程式**、その解を**停留函数** (extremal)、停留函数のグラフを**停留曲線**と呼ぶ。問題 [V] の局所解がもし存在するならば、それは必ず停留函

(2) 一変数 Sobolev 空間については、Brezis [2] Chap. 8, Buttazzo, Giaquinta and Hildebrandt [3] Chap. 2 および黒田 [8] 第 6 章にも優れた説明があり、私もこれらを参考にした。

(3) $[t_0, t_1]$ 上で定義される連続微分可能な実数値函数の集合 $\mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ 上のノルムとして $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ のかわりに一様収束ノルム $\|\cdot\|_{\infty}$ を用いて u^* の近傍を定義する場合もある。 $\|\cdot\|_{\infty}$ を用いた場合の局所解を強い局所解、また $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ を用いた場合のそれを弱い局所解と呼んで区別することもある。

(4) $D_u f, D_{\dot{u}} f$ はそれぞれ、函数 f の $u, \dot{u}$ についての偏導函数を表わす。

数になっていなければならない。⁽⁵⁾

それではそもそも問題 [V] に解が存在するためには、いかなる条件が要請されるのか？ 問題のおおよその感触をつかむために、簡単な例題を考察することから始めよう。

$[t_0, t_1] = [0, 1]$ とし, $J: \mathfrak{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ をごく簡単な形で

$$J(u) = \int_0^1 |\dot{u}_t|^2 dt \quad (3)$$

と定義する。そこで [V] の特殊事例として,

$$[D] \quad \begin{cases} \text{Minimize} & J(u) = \int_0^1 |\dot{u}_t|^2 dt, \\ \text{subject to} & u \in \mathfrak{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases}$$

なる変分問題 [D] を考えるのである。 (u_0, u_1) は定数。⁽⁶⁾ (3) の積分を **Dirichlet 積分** と称する。

制約条件を満たす函数の集合を $\mathcal{A}$ と書く。つまり

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathfrak{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) | u(0) = u_0, u(1) = u_1\}$$

である。すると問題 [D] は簡略に

$$[D'] \quad \underset{u \in \mathcal{A}}{\text{Minimize}} J(u)$$

と整理することができる。まず J の作り方から,

$$0 \leq \inf_{u \in \mathcal{A}} J(u) < \infty \quad (4)$$

であることは明らかである。そこで $\mathcal{A}$ の点列 $\{u_n\}$ を

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{A}} J(u) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たすように選ぶことができる。⁽⁷⁾ $A = \inf_{u \in \mathcal{A}} J(u)$ と書くことにすれば、一般性を失うことなく,

$$J(u_n) \leq A + 1 \quad \text{for all } n \quad (5)$$

(5) Gelfand and Fomin [7] pp. 14–22, あるいは丸山 [9] pp. 393–411 を見よ。

(6) u の定義域がたとえば l 次元の場合, Dirichlet 積分は $\|Du(\cdot)\|^2$ を l のある範囲で積分することとなる。 $Du(\cdot)$ は u の導函数である。

(7) このような点列 $\{u_n\}$ を問題 ([D] または [D']) の最小化列 (minimizing sequence) と呼ぶ。

と仮定してよい。⁽⁸⁾

$\{u_n\}$ は同程度連続でしかも一様有界であることが次のようにして示される。各 n と $x, y \in [0, 1]$ ($x < y$) について

$$u_n(y) - u_n(x) = \int_x^y \dot{u}_n(t) dt \quad (6)$$

である。 $u_n \in \mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$ であることに留意して、(6)の右辺に Hölder の不等式を適用すると、

$$\begin{aligned} |u_n(y) - u_n(x)| &\leq \left(\int_x^y |\dot{u}_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} |x - y|^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 |\dot{u}_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} |x - y|^{1/2} \\ &\leq \sqrt{A+1} |x - y|^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。これから $\{u_n\}$ は同程度連続である。⁽⁹⁾

また

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq |u_n(0)| + \left(\int_0^t |\dot{u}_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} t^{1/2} \\ &\leq |u_0| + \left(\int_0^1 |\dot{u}_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq |u_0| + \sqrt{A+1} \quad \text{for all } n. \end{aligned} \quad (8)$$

したがって $\{u_n(t)\}$ は一様有界である。⁽¹⁰⁾

こうして Ascoli-Arzelà の定理⁽¹¹⁾によれば、 $\{u_n\}$ はある $u \in \mathfrak{C}([0, 1], \mathbb{R})$ に一様収束する部分列を有する。煩雑を避けるために、この部分列は記号を変えず、元のまま $\{u_n\}$ と記す。

$$\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

- (8) $J(u_n) \rightarrow A$ であるから、十分に大きな n_0 を選び、 $J(u_n) \leq A+1$ (for all $n \geq n_0$) とすることができる。そこで n_0 以降の添数をもつ u_n にあらためて $1, 2, \dots$ の添数を付して $\{u_{n'}\} = \{u_{1'}, u_{2'}, \dots, u_{n'}, \dots\}$ とすれば、 $J(u_{n'}) \rightarrow A$ かつ $J(u_{n'}) \leq A+1$ (for all n') を満たす。したがってはじめから $\{u_n\}$ が (5) を満たすものと想定してよいのである。

- (9) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|x - y| < \varepsilon^2 / (A+1)$$

とすれば、(7)により

$$|u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon.$$

これが任意の n について成り立つのであるから、 $\{u_n\}$ は同程度連続である。

- (10) つまり $\|u_n\|_\infty \leq |u_0| + \sqrt{A+1}$ (for all n).

- (11) Dunford and Schwartz [4] pp. 266–267, 丸山 [10] pp. 157–159 などを見よ。

さて次に導函数の列 $\{\dot{u}_n\}$ について調べよう。(5)により, $\{\dot{u}_n\}$ は Hilbert 空間 $\mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$ において弱収束する部分列を有する。⁽¹²⁾ この部分列も記号を変えず $\{\dot{u}_n\}$ と書く。これは

$$\int_0^1 \dot{u}_n(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^1 v(t) \varphi(t) dt \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (10)$$

for all $\varphi \in \mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$

を満たす $v \in \mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$ が存在することを意味する。 $\mathfrak{C}_0^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ は $\mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$ において稠密な部分空間であるから,⁽¹³⁾ (10)は次の(11)と同値である。

$$\int_0^1 \dot{u}_n(t) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^1 v(t) \theta(t) dt \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (11)$$

for all $\theta \in \mathfrak{C}_0^\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

ここで(11)に現われる u_n, θ はそれぞれ $\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^\infty$ の元であるから, 部分積分により

$$\int_0^1 \dot{u}_n(t) \theta(t) dt = u_n(t) \theta(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 u_n(t) \dot{\theta}(t) dt = - \int_0^1 u_n(t) \dot{\theta}(t) dt. \quad (12)$$

$\theta \in \mathfrak{L}^2([0, 1], \mathbb{R})$ であるから, (10)により

$$\int_0^1 \dot{u}_n(t) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^1 v(t) \theta(t) dt \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

また $u_n \rightarrow u$ (一様収束) ゆえ,

$$- \int_0^1 u_n(t) \dot{\theta}(t) dt \rightarrow - \int_0^1 u(t) \dot{\theta}(t) dt \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(12)により

$$\int_0^1 v(t) \theta(t) dt = - \int_0^1 u(t) \dot{\theta}(t) dt. \quad (13)$$

ここで u は連続ではあるが $\mathfrak{C}^1$ -級ではないので, $\dot{u}$ は必ずしも定義されないし, (13)の右辺に部分積分を施すこともできない, しかしとくに u が $\mathfrak{C}^1$ -級である場合には $v = \dot{u}$ でなければならない。 u が (連続ではあるが) 滑らかでない場合には, このような v を “一般化された” u の導函数とみなして, $v = u'$ と書くことにしよう。 u' を u の導超函数 (distributional derivative) と呼ぶこともある。⁽¹⁴⁾

(12) Banach 空間 $\mathfrak{X}$ が回帰的であるためには, $\mathfrak{X}$ の閉単位球 S が弱コンパクトであることが必要十分である。(Kakutani の定理, Dunford and Schwartz [4] p. 425.) また $M \subset \mathfrak{X}$ が弱相対コンパクトであることと, それが弱列コンパクトであることは互いに同値である。(Eberlein-Šmulian の定理, Dunford and Schwartz [4] pp. 430–433, 丸山 [9] pp. 366–372.) とくに後者の証明は容易ではない。

(13) 丸山 [11] p. 213 を見よ。

(13)は

$$\int_0^1 u'(t)\theta(t)dt = - \int_0^1 u(t)\dot{\theta}(t)dt \quad \text{for all } \theta \in \mathfrak{C}_0^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \quad (13')$$

と書いても同じである。(10)は

$$\dot{u}_n \rightarrow u' \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (\mathfrak{L}^2\text{-弱収束}) \quad (10')$$

を意味する。

一般に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定まった空間では、任意の二元 w, z に対して不等式

$$2\langle z, w - z \rangle \leq \|w\|^2 - \|z\|^2$$

が成り立つ (殆ど自明)。 $\dot{u}_n$ を w , u' を z に見立ててこの公式を用いると、

$$2 \int_0^1 u'(t) \left\{ \dot{u}_n(t) - u'(t) \right\} dt \leq \int_0^1 |\dot{u}_n(t)|^2 dt - \int_0^1 |u'(t)|^2 dt.$$

右辺の下極限をとれば、(10')により

$$\liminf_n \int_0^1 |\dot{u}_n(t)|^2 dt - \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \geq \liminf_n 2 \int_0^1 u'(t) \left\{ \dot{u}_n(t) - u'(t) \right\} dt = 0.$$

ゆえに

$$\liminf_n \int_0^1 |\dot{u}_n(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \quad (14)$$

が導かれる。

$\{u_n\}$ の極限函数 u が $\mathfrak{C}^1$ -級であるならば、(14)により、この u が問題 [D] の解であることがただちに知られる。ところが u は連続ではあるものの、 $\mathfrak{C}^1$ -級であるや否やは判定できない。したがって問題 [D] の解の存在証明はまだ完結していないのである。

しかし問題を解く筋道はかなり鮮明に見えてきたのではなかろうか。

上記の推論では解を求める空間を $\mathfrak{C}^1$ と設定したが、最後の段階(14)で解となるはずの函数 u は $\mathfrak{C}^1$ から逸脱してしまった。証明を閉じるためには、解を求める空間を工夫して、 u がそこから逸脱しないようにすることがひとつの方法である。(14)を導くためには

(14) 本稿では超函数の概念を厳密に定義していないので、この用語を用いるのは便宜上のことと了解していただきたい。体系的な理論についてはもちろん Schwartz [13] Chap. 1-2 を参照のこと。解説として Schwartz [14] Chap. 1-2 および吉田・加藤 [16] 第Ⅲ章が優れている。

$$u_n \rightarrow u \text{ (一様収束)}, \quad \dot{u}_n \rightarrow u' \text{ (}\mathfrak{L}^2\text{-弱収束)}$$

なるふたつの極限関係が鍵を握る。解を求める空間とその位相の選択にあたっては、この関係が自然に成り立つよう留意することが重要である。⁽¹⁵⁾

いまひとつ極小化の対象となっている函数が、この事例では、Dirichlet 積分という簡単な形であるために、(14)の導出が初等的な方法で可能であった。しかし $J(u)$ が(1)のような一般的形態の場合は如何に考えればよいか。この点についても十分な吟味が加えられねばならないのである。

§2. 一般化された微分

微分概念のひとつの一般化については既に前節において述べたのであるが、ここであらためてやや詳しい説明を加えておこう。

以下 $\mathbb{R}$ における開区間として有限区間 (a, b) , 無限区間 $(-\infty, a), (a, \infty), \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ などを考えるが、いずれも I という記号で表わし、なんらかの限定を要する場合はその都度明記する。

まずひとつ次の定理を準備する。

定理 1.1 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は局所的に可積分な函数とする。⁽¹⁶⁾

(i) いかなる $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対しても

$$\int_I f(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (17)$$

であるならば、 $f(t) = 0$ a.e. である。

(ii) いかなる $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対しても

$$\int_I f(t) \dot{\varphi}(t) dt = 0$$

であるならば、 $f(t) = C(\text{定数})$ a.e. である。

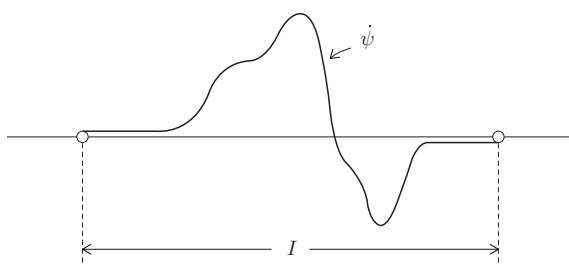
証明 ここでは (ii) のみを証明する。 θ, η はともに $\mathfrak{C}_0(I, \mathbb{R})$ の元で、 θ は $\int_I \theta(t) dt = 1$ を満たすものとしよう。函数

(15) ただし本来の問題 [D] が要求するとおり、 $\mathfrak{C}^1$ の範囲内で解を求めるためには、さらに別の考察が必要である。

(16) $\mathfrak{C}_0^1$ をより狭い $\mathfrak{C}_0^\infty$ に換えてもこの定理は成り立つ。やや長い証明を要するので、ここで議論することは省略する。

(17) この積分はもちろん Lebesgue 積分、 dt は Lebesgue 測度である。

図 1.1



$$\eta(t) - \left(\int_I \eta(s) ds \right) \theta(t)$$

は連続でコンパクトな台をもち、 I 上の積分は 0 である。したがって

$$\dot{\psi}(t) = \eta(t) - \left(\int_I \eta(s) ds \right) \theta(t)$$

を満たす $\psi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ が一意的に存在する。仮定により、

$$\begin{aligned} \int_I f(t) \dot{\psi}(t) dt &= \int_I f(t) \left[\eta(t) - \left(\int_I \eta(s) ds \right) \theta(t) \right] dt \\ &= \int_I f(t) \eta(t) dt - \left(\int_I \eta(s) ds \right) \int_I f(t) \theta(t) dt \\ &= \int_I f(t) \eta(t) dt - \int_I \int_I f(s) \theta(s) ds \cdot \eta(t) dt \\ &= \int_I \left[f(t) - \int_I f(s) \theta(s) ds \right] \eta(t) dt \\ &= 0 \quad \text{for any } \eta \in \mathfrak{C}_0(I, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(i) により、

$$f(t) - \int_I f(s) \theta(s) ds = 0 \quad \text{a.e.}$$

すなわち

$$f(t) = \int_I f(s) \theta(s) ds \quad (\text{定数}) \quad \text{a.e.}$$

(証了)

前節でも見たとおり、ふたつの関数 u, φ がともに $\mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の元であれば、部分積分により、

$$\int_I \dot{u}(t) \varphi(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt$$

が成り立つ。そこで $u \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ とするとき、 $\dot{u}$ は必ずしも定義できないが、

$$\int_I g(t) \varphi(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}) \quad (1)$$

を満たす函数 $g \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ が存在するとき、この g を u の一般化された導函数 (generalized derivative) と定義するのである。定理 1.1 により、 u が一般化された導函数を有するならば、それは一意に定まる。

u が $\mathfrak{C}^1$ -級の場合は、一般化された導函数は通常の導函数 $\dot{u}$ と合致する⁽¹⁸⁾。本稿では、 u の一般化された導函数を u' と記すこととし、通常の導函数 $\dot{u}$ と区別する。 u が $\mathfrak{C}^1$ -級ならば、 $u' = \dot{u}$ である。

定義 $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ の元のうち、やはり $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ に属する一般化された導函数を有する函数の集合を Sobolev 空間といい、 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ と表記する。とくに $p = 2$ の場合は $\mathfrak{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ のかわりに $\mathfrak{H}^1(I, \mathbb{R})$ と書く場合もある。⁽¹⁹⁾

$\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ が線形空間であることは容易に知られる。そのノルムを

$$\|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p \quad (2)$$

と定める、これは $(\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p)^{1/p}$ としても同等である。 $\mathfrak{H}^1(I, \mathbb{R})$ については、内積を

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{H}^1} = \int_I u(t)v(t)dt + \int_I u'(t)v'(t)dt \quad (3)$$

と定義すれば、ノルムは

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^1} = \|u\|_{\mathfrak{W}^{1,2}} = (\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)^{1/2} \quad (4)$$

である。

例 1 まず I が有限開区間 (a, b) の場合を考える。 $\tilde{u} \in \mathfrak{C}^1(\bar{I}, \mathbb{R})$ とし、その I への制限を u としよう。つ

(18) 局所可積分函数 $g \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}^1(I, \mathbb{R})$ に対して

$$\int_I g(t) \varphi(t) dt = \int_I \dot{u}(t) \varphi(t) dt$$

が成り立つとすれば、定理 1.1 により、 $g(t) = \dot{u}(t)$ a.e. でなければならない。

(19) $k \geq 2$ なる自然数 k に対して、 $\mathfrak{W}^{k,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ を次のように帰納的に定義する。

$$\mathfrak{W}^{k,p}(I, \mathbb{R}) = \{u \in \mathfrak{W}^{k-1,p}(I, \mathbb{R}) | u' \in \mathfrak{W}^{k-1,p}(I, \mathbb{R})\}.$$

また $\mathfrak{W}^{k,2}(I, \mathbb{R})$ を $\mathfrak{H}^k(I, \mathbb{R})$ と記す場合もある。ただし本稿では、 $k \geq 2$ の場合にふれることはない。

まり $u = \tilde{u}|_I$ である。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ を $\bar{I}$ 上に拡張して,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) \text{ on } I, \quad \tilde{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(b) = 0$$

とすれば, 部分積分により,⁽²⁰⁾

$$\begin{aligned} \int_I \dot{u}(t) \varphi(t) dt &= \int_{\bar{I}} \dot{\tilde{u}}(t) \tilde{\varphi}(t) dt = \tilde{u}(t) \tilde{\varphi}(t) \Big|_a^b - \int_{\bar{I}} \tilde{u}(t) \dot{\tilde{\varphi}}(t) dt \\ &= - \int_{\bar{I}} \tilde{u}(t) \dot{\tilde{\varphi}}(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \\ &\text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

したがって $u' = \dot{u} \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ であり, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ 。

次に I が無限開区間の場合にはどうか。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ とすれば, その台 $\text{supp } \varphi$ はコンパクトである。そこで有限開区間 (a, b) を $\text{supp } \varphi \subset (a, b) \subset I$ を満たすように選べば,

$$\begin{aligned} \int_I \dot{u}(t) \varphi(t) dt &= \int_a^b \dot{u}(t) \varphi(t) dt = - \int_a^b u(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \\ &\text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

したがって $u, \dot{u} \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ という条件が満たされるならば, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ であり, しかも $u' = \dot{u}$ である。

例 2 $I = (-1, 1)$ とし, 函数 $Y: I \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{for } t \in [0, 1) \end{cases}$$

と定義する。任意の $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して

$$- \int_I Y(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_{-1}^0 0 \cdot \dot{\varphi}(t) dt - \int_0^1 1 \cdot \dot{\varphi}(t) dt = -\varphi(t) \Big|_a^b = \varphi(0).$$

つまり函数 $Y(t)$ の一般化された導函数に相当するものは, 各 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して $\varphi(0)$ を対応させる作用素 $\varphi \mapsto \varphi(0)$ である。点 0 に質量 1 を置く測度を δ と書くことにすれば

$$\varphi(0) = \int_I \varphi(t) d\delta$$

とも表現できる。この場合, 一般化された導函数にあたるものは δ であって函数ではない。したがって函数 $Y(t)$ は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の元ではない。測度 δ を Dirac 測度と称する。

(20) $\bar{I}$ と I との相違は $\bar{I} \setminus I = \partial I = \{a, b\}$ で測度 0 であり, I 上では $\dot{u}(t) \varphi(t) = \dot{\tilde{u}}(t) \tilde{\varphi}(t)$ であるから, 最初の等号が成り立つ。厳密にはこのとおりであるが, 煩雑さを避けて ($\dot{u} \varphi$ は ∂I では定義されていないが) $\int_{\bar{I}} \dot{\tilde{u}}(t) \tilde{\varphi}(t) dt = \int_a^b \dot{\tilde{u}}(t) \tilde{\varphi}(t) dt$ などと書くことにする。

例 3 $I = (-1, 1)$ とし, 函数 $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$u(t) = \begin{cases} -t & \text{for } t \in (-1, 0), \\ t & \text{for } t \in [0, 1), \end{cases}$$

すなわち $u(t) = |t|$ と定義する。任意の $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt &= - \int_0^1 t \dot{\varphi}(t) dt + \int_{-1}^0 t \dot{\varphi}(t) dt \\ &= - \left(t\varphi(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(t) dt \right) + \left(t\varphi(t) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi(t) dt \right) \\ &= \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_{-1}^0 \varphi(t) dt \\ &= \int_I g(t) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

ここで

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{for } t \in [0, 1) \end{cases}$$

である。この g はもちろん $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ の元である。ゆえにこの例の u は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の元で, $u' = g$ である。

例 4 $I = \mathbb{R}, u(t) = e^{-\lambda|t|} (\lambda > 0)$ とする。 $u \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ である。さらに

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt &= - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \dot{\varphi}(t) dt - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} \dot{\varphi}(t) dt \\ &= - [e^{-\lambda t} \varphi(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \varphi(t) dt - [e^{\lambda t} \varphi(t)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda t} \varphi(t) dt \\ &= \varphi(0) + \int_0^{\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \varphi(t) dt - \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 \lambda e^{-\lambda(-t)} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

ここで函数 $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(t) = \begin{cases} -\lambda u(t) & \text{for } t \in [0, \infty), \\ \lambda u(t) & \text{for } t \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

と定義すれば,

$$- \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_I g(t) \varphi(t) dt.$$

しかも $g \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ であるから, この例の u は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の元で, $u' = g$ である。

注意 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の定義として次のような方法を採用する立場もある。まず空間 $\mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R})$ に属する函数 u のうち

$$\left(\int_I (|u|^p + |\dot{u}|^p) dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

が有限であるものの集合を $\mathfrak{U}$ とすれば、 $\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{C}^1$ の線形部分空間で、上式は $\mathfrak{U}$ 上のノルムとなる。このノルムについての $\mathfrak{U}$ の完備化を $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ と定義するのである。⁽²¹⁾

(補論) 絶対連続函数

Sobolev 空間に属する函数の性質を精査するためには、有界変分および絶対連続な函数というふたつの概念について、ひととおりのことを述べておかねばならない。ただしこの主題については別の機会に詳しく論じたので、ここでは必要な概念と結果の要点を摘記するにとどめる。⁽²²⁾

定義 f を区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値函数とする。 $[a, b]$ 上のいかなる分割

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

に対しても

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M \quad (1)$$

を成り立たしめる (どの Δ にも共通な) 数 $M < \infty$ が存在するとき、 f は $[a, b]$ 上で有界変動 (bounded variation) の函数であるという。

$[a, b]$ のすべての分割 Δ についての (1) の上限を f の全変動 (total variation) といい、これを $V_a^b[f]$ と記す。

例 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が単調ならば、 f は有界変分である。また f が連続であるとき、その不定積分

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

は $[a, b]$ 上で有界変分である。しかし連続函数が必ずしも有界変分とは限らない。実際、たとえば函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(21) この立場はたとえば Buttazzo, Giaquinta and Hildebrandt [3] p. 58. Sobolev 空間の一般論の詳細については、Adams [1], および Maz'ja [12] を参照すべきである。

(22) 詳しくは丸山 [11] 第 5 章 §1–§2 を参照していただきたい。

と定義すれば、これは連続ではあるが有界変分ではない事例である。

f の連続性は明らかであるが、念のために、(2)で定義された f が有界変分でないことを確かめておこう。 $[0, 1]$ の分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ を次のように選ぶ。

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n-1}, \dots, x_{n-1} = \frac{1}{2}, \quad x_n = 1.$$

つまり区間の右端から測った分点の間隔が $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ となるようにとり、添数は左から順につけている。一般項は

$$x_k = \frac{1}{n - (k - 1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

である。 f を(2)で定義された函数とし、 $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0, \\ f(x_1) &= \frac{1}{n} \cos n\pi = \frac{1}{n} (-1)^n, \\ f(x_2) &= \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\pi = \frac{1}{n-1} (-1)^{n-1}, \\ f(x_3) &= \frac{1}{n-2} \cos(n-2)\pi = \frac{1}{n-2} (-1)^{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ f(x_{k-1}) &= \frac{1}{n - (k - 2)} \cos [n - (k - 2)]\pi = \frac{1}{n - (k - 2)} (-1)^{n-(k-2)}, \\ f(x_k) &= \frac{1}{n - (k - 1)} \cos [n - (k - 1)]\pi = \frac{1}{n - (k - 1)} (-1)^{n-(k-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ f(x_{n-2}) &= \frac{1}{n - (n - 2 - 1)} \cos [n - (n - 2 - 1)]\pi = \frac{1}{3} \cos 3\pi, \\ f(x_{n-1}) &= \frac{1}{n - (n - 1 - 1)} \cos [n - (n - 1 - 1)]\pi = \frac{1}{2} \cos 2\pi, \\ f(n) &= \cos \pi. \end{aligned}$$

$f(x_{k-1})$ と $f(x_k)$ の値のうち (-1) にかかる指数は 1 だけ差のあることに注意すると、

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \frac{1}{n - (k - 1)} + \frac{1}{n - (k - 2)}.$$

したがって

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= \frac{1}{n}, \\ |f(x_2) - f(x_1)| &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}, \\ |f(x_3) - f(x_2)| &= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \frac{1}{n - (k-1)} + \frac{1}{n - (k-2)},$$

.....

$$|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| = \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| = 1 + \frac{1}{2}.$$

これを全部加えると,

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{2} + 1.$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば, この値は ∞ に発散する。ゆえに f は有界変動ではない。

有界変動関数の基本的性質を列挙する。

1° 有界変動関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は, ふたつの単調減少関数の差として表現することができる。

2° $[a, b]$ 上の単調関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は (a, b) の殆どすべての点において微分可能である。

1°, 2° からただちに次の結果が導かれる。

3° (Lebesgue) 有界変動な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は殆どすべての点において微分可能である。

定義 f を区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値関数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分に小さな $\delta > 0$ を選び

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \quad (a_i, b_i \in [a, b])$$

なる, 互いに共通部分をもたない有限個の開区間 $(a_i, b_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ に対して, 必ず

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

が成り立つとき, f は $[a, b]$ 上で**絶対連続** (absolutely continuous) であるという。

絶対連続関数の和・差・数との積は絶対連続である。定義からただちに, 絶対連続関数は一様連続であることがわかる。しかしその逆は必ずしも成り立たない。実際, たとえば Cantor の階段関数はこれを示す反例となっている。⁽²³⁾

(23) 丸山 [11] pp. 161–163.

1° 絶対連続函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動である。

しかし 1° の逆は必ずしも成り立たない。上にあげた Cantor の階段函数は有界変動ではあるが、絶対連続ではない実例となっている。

2° 絶対連続函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は、単調非減少な絶対連続函数の差として表現することができる。

3° 絶対連続函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は、殆どすべての点において微分可能である。

4° 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が可積分であるとき、その不定積分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

は絶対連続である。

したがって 3° により、 $F(x)$ は殆どすべての点において微分可能で、 $\dot{F}(x) = f(x)$ a.e. が成り立つ。

5° 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続であるとき（殆どすべての点で定義される）その導函数 $\dot{f}$ は可積分で、⁽²⁴⁾

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \dot{f}(t)dt$$

が成り立つ。

こうして f が絶対連続の場合、かつその場合に限って微積分学の基本公式が成り立つのである。⁽²⁵⁾

6°（部分積分） 函数 $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は絶対連続、殆どすべての点で定義されるその導函数をそれぞれ f, g とすれば、

(24) 一般に非減少函数 $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ の（殆どすべての点で定義される）導函数 $\dot{\psi}$ は可積分で

$$\int_a^b \dot{\psi}(t)dt \leq \psi(b) - \psi(a).$$

この事実と 2° により、 f が絶対連続ならば、 $\dot{f}$ は可積分。

(25) Cantor の階段函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ をもう一度とり上げてみよう。 f は単調な連続函数で、 $\dot{f}(x) = 0$ a.e. しかし他方、すべての $x \in (0, 1]$ に対して

$$0 = \int_0^x \dot{f}(t)dt < f(x) - f(0) = f(x)$$

となり、微積分学の基本公式が成り立たない。これは f が絶対連続性を満たさないことから生ずる事態である。

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

左辺の $F(x)$ は $[a, b]$ 上で有界, g は可積分であるから $F \cdot g$ は可積分。同様に右辺の積分にも意味がある。

II. Sobolev 空間の基礎的性質

§1. 完備性・可分性・反射性

函数空間 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の最も基本的な性質を次の定理にまとめておこう。

定理 2.1 I は $\mathbb{R}$ の有限または無限开区間とする。

(i) $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は Banach 空間である。⁽²⁶⁾

(ii) $1 \leq p < \infty$ に対して, $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は可分である。

(iii) $1 < p < \infty$ に対して, $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ は反射的である。

証明 (i) $\{u_n\}$ を $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ の Cauchy 列とする。p. 103 に述べたノルムの定義により, $\{u_n\}$ と $\{u'_n\}$ (一般化された導函数の列) は, いずれも $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ の Cauchy 列である。 $\mathfrak{L}^p$ の完備性により, これらの列はそれぞれ $\mathfrak{L}^p$ において極限を有する。それを $u, v \in \mathfrak{L}^p$ としよう。

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_p \rightarrow 0, \quad \|u'_n - v\|_p \rightarrow 0 \\ \text{as } n \rightarrow \infty; \quad u, v \in \mathfrak{L}^p. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $v = u'$ であることが確かめられれば, $\{u_n\}$ が u に $\mathfrak{W}^{1,p}$ において収束することが示される。一般化された微分の定義から,

$$\int_I u'_n(t)\varphi(t)dt = - \int_I u_n(t)\dot{\varphi}(t)dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

(1)により,

$$\int_I v(t)\varphi(t)dt = - \int_I u(t)\dot{\varphi}(t)dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}). \tag{2}$$

(2)から, v が u の一般化された導函数であることが知られた。つまり $v = u'$ である。ゆえに $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ でしかも $\|u_n - u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}} \rightarrow 0$ (as $n \rightarrow \infty$) である。こうして $\mathfrak{W}^{1,p}$ の完備性が証明された。

(26) とくに $\mathfrak{H}^1(I, \mathbb{R}) = \mathfrak{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ は Hilbert 空間である。

(ii) 作用素 $T: \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) \times \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ を

$$T: u \mapsto (u, u')$$

と定義すれば、 T は等長の線形作用素であるから、 $\mathfrak{W}^{1,p}$ と $T(\mathfrak{W}^{1,p})$ とは線形ノルム空間として同型である。したがってこれらは位相空間としても同型である。 $\mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^p$ は可分であり、 $T(\mathfrak{W}^{1,p}) \cong \mathfrak{W}^{1,p}$ ⁽²⁸⁾ はその部分空間であるから、やはり可分である。⁽²⁹⁾

(iii) $1 < p < \infty$ とすれば、 $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R}) \times \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ は反射的である。 $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ が完備であることは既に (i) で示したので、 $T(\mathfrak{W}^{1,p})$ は $\mathfrak{L}^p \times \mathfrak{L}^p$ の閉部分空間である。ゆえに $\mathfrak{W}^{1,p} \cong T(\mathfrak{W}^{1,p})$ は反射的である。⁽³⁰⁾ (証了)

いま $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ であり、 $u = v$ a.e. とすれば、任意の $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して

$$\int_I u'(t) \varphi(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I v(t) \dot{\varphi}(t) dt$$

であるから、 v も $\mathfrak{W}^{1,p}$ の元で、しかも $u' = v'$ である。つまり殆どいたるところ等しい $\mathfrak{W}^{1,p}$ の元は同一視してよいであろう。 $\mathfrak{W}^{1,p}$ においてこの意味で同一視される函数族のなかに必ず連続函数が含まれるであろうか。次の定理はこの問いに肯定的に答えるものである。ひとつ準備を施す。

補題 2.1 I は有限または無限の開区間、 t_0 は I の固定された一点とする。 $f \in \mathfrak{L}_{\text{loc}}^1(I, \mathbb{R})$ ⁽³¹⁾ に対して函数 $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ を

(27) たとえば左辺については ($1/p + 1/q = 1$ とする),

$$\begin{aligned} & \left| \int_I u'_n \varphi dt - \int_I v \varphi dt \right| \\ & \leq \int_I |u'_n - v| \cdot |\varphi| dt \\ & \leq \|u'_n - v\|_p \cdot \|\varphi\|_q \quad (\text{Hölder の不等式}) \\ & \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad ((1) \text{ による}) \end{aligned}$$

右辺についても同様にすればよい。

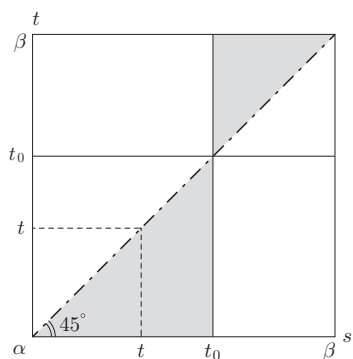
(28) 丸山 [10] pp. 202–203 を見よ。 $p = \infty$ については、これが成り立たない。同書 p. 204 に反例が示されている。

(29) 可分な距離空間の部分空間は可分である。ただし一般の位相空間の場合は然らず。

(30) 反射的な Banach 空間の閉部分空間は反射的である。Dunford and Schwartz [4] p. 67.

(31) I における任意のコンパクト集合上で可積分であるような函数を局所可積分 (locally integrable) であるという。そして I 上の局所可積分な函数の集合を $\mathfrak{L}_{\text{loc}}^1(I, \mathbb{R})$ と書くのである。

図 2.1



$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

と定義する。このとき $F \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$ で

$$\int_I f(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I F(t) \ddot{\varphi}(t) dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}) \quad (3)$$

が成り立つ。

証明 まず F の連続性は明らか。次に t_0 と $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ の台を内部に含む空間 $[\alpha, \beta]$ をとれば、
(3) の両辺の積分は積分区間を I のかわりに $[\alpha, \beta]$ を用いても同じである。⁽³²⁾

$$\begin{aligned} & \int_I F(t) \ddot{\varphi}(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{t_0}^t f(s) ds \right\} \ddot{\varphi}(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{t_0} \left\{ \int_{t_0}^t f(s) ds \right\} \ddot{\varphi}(t) dt + \int_{t_0}^{\beta} \left\{ \int_{t_0}^t f(s) ds \right\} \ddot{\varphi}(t) dt \quad (\text{図 2.1 参照}) \\ &= - \int_{\alpha}^{t_0} \left\{ \int_t^{t_0} f(s) ds \right\} \dot{\varphi}(t) dt + \int_{t_0}^{\beta} \left\{ \int_{t_0}^t f(s) ds \right\} \dot{\varphi}(t) dt \\ &= - \left\{ \int_t^{t_0} f(s) ds \right\} \varphi(t) \Big|_{\alpha}^{t_0} + \int_{\alpha}^{t_0} -f(t) \varphi(t) dt + \left\{ \int_{t_0}^t f(s) ds \right\} \varphi(t) \Big|_{t_0}^{\beta} - \int_{t_0}^{\beta} f(t) \varphi(t) dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi(t) dt = - \int_I f(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

こうして (3) が示されたのである。

(証了)

(32) I が有限区間 (a, b) の場合は、 (α, β) は (a, b) と考えればよい。

定理 2.2 I は有限開区間 (a, b) とし, $1 \leq p \leq \infty$ とする。 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して, 次の条件を満たす $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ が存在する。

(i) $u(t) = \tilde{u}(t)$ a.e. on I .

(ii) $a \leq t_0 < t \leq b$ なる t_0, t に対して

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds.$$

証明 函数 $v \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$ を

$$v(t) = \int_{t_0}^t u'(s) ds, \quad t \in I$$

と定義すれば, $v(t)$ は I 上において一様連続である (Hölder の不等式による)。したがって v は $\bar{I}$ 上の一様連続函数として一意に拡張することができる。⁽³³⁾ これを $\bar{v}$ と書くことにしよう。

補題 2.1 ⁽³⁴⁾ により,

$$\int_I v(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I u'(t) \varphi(t) dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

ゆえに

$$\int_I \{u(t) - v(t)\} \dot{\varphi}(t) dt = 0 \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

定理 1.1 により, $u - v = A$ (定数) a.e. ここで $\tilde{u}(t) = \bar{v}(t) + A$ ($t \in \bar{I}$) とすれば, この $\tilde{u}$ が所望の条件をすべて満たす。 (証了)

§2. $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ の特徴づけ

本節では $\mathfrak{W}^{1,p}$ に属する函数の特徴づけについて考察する。その際, $p = 1, 1 < p < \infty, p = \infty$ の場合に依じて命題の形が異なるので, 注意が必要である。まず定理 2.2 との関連で, 次の一般的な定理を示そう。

定理 2.3 I は有限または無限の開区間, $1 \leq p < \infty$ とする。このとき $u \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ に対して次の二命題は同値である。

(33) $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ は距離空間, X の部分集合 M は X において稠密で, かつ Y は完備とする。写像 $f: M \rightarrow Y$ が一様連続であるとき, f は X 上の一様連続函数 $\bar{f}: X \rightarrow Y$ として一意に拡張することができる。丸山 [10] pp. 74-76 を参照。

(34) 補題 2.1 では t_0 にあたる点を I のなかから選んで固定したが, ここでは $t_0 = a$ としても不都合は生じない。

(i) $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$.

(ii) u は適当な $v \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$, $t_0 \in I$, および $\alpha \in \mathbb{R}$ を用いて

$$u(t) = \int_{t_0}^t v(s) ds + \alpha \quad \text{a.e.}$$

と表現することができる。

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) : $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ と仮定し, $t_0 \in I$ をひとつ固定する。

$$v(t) = \int_{t_0}^t u'(s) ds$$

とおけば, (u' は局所可積分なので) 補題 2.1 により,

$$\int_I v(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I u'(t) \varphi(t) dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

したがって v も一般化された導函数を有し $v' = u'$ である。定理 1.1 から, $u(t) - v(t) = A(\text{定数}) \text{a.e.}$, すなわち

$$u(t) = \int_{t_0}^t u'(s) ds + A \quad \text{a.e.}$$

となり, (ii) が成り立つ。

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 逆に(ii)を仮定する。補題 2.1 により,

$$\int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_I v(t) \varphi(t) dt \quad \text{for any } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$$

であるから, $u' = v$. しかも仮定により $v \in \mathfrak{L}^p$ なので, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ を得る。 (証了)

定理 2.4 ($p = 1$) I を有限開区間 (a, b) とするとき, 函数 $u \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R})$ について次の二命題は同値である。

(i) $u \in \mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$.

(ii) u は $\bar{I}$ 上で絶対連続である。

注意 定理 2.2 により, その(i), (ii)を満たす $\tilde{u} \in \mathfrak{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ が存在する。定理 2.4 で u が $\bar{I}$ 上で定義されているように記したのは, u と $\tilde{u}$ とを同一視しているのである。したがって正確には, (ii)の命題は “ u に対応する $\tilde{u}$ は……” とすべきであろう。

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) : まず $u \in \mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ としよう。定理 2.2 における u と $\tilde{u}$ とを同一視して考える。 $\bar{I}$ における, 互いに共通部分をもたない有限個の区間 $(a_i, b_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ について

$$u(b_i) - u(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} u'(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が成り立つので,

$$\sum_{i=1}^n |u(b_i) - u(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |u'(t)| dt = \int_{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)} |u'(t)| dt.$$

u' は可積分であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分に小さくとれば,⁽³⁵⁾

$$\text{meas.} \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta$$

である限り,

$$\sum_{i=1}^n |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon$$

とすることができる。つまり u は $\bar{I}$ 上で絶対連続である。

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 逆に u が絶対連続であるとしよう。任意の $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ も絶対連続であることに⁽³⁶⁾注意すれば, 部分積分法により

$$\begin{aligned} & - \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \\ &= -u(t)\varphi(t) \Big|_a^b + \int_I \dot{u}(t)\varphi(t) dt \quad (\text{部分積分, pp. 109–110 の 6}^\circ) \\ &= \int_I \dot{u}(t)\varphi(t) dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

p. 109 の 5 $^\circ$ により, $\dot{u}$ は可積分である。これから $u \in \mathfrak{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ で, しかも $u' = \dot{u}$ a.e. である。(証了)

注意 I は有限区間なので, $1 < p$ の場合にも $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ であれば, u および u' は可積分である。したがって上記 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明がそのまま生きて, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ は絶対連続である。しかし (ii) を仮定したときに $u \in \mathfrak{W}^{1,p} (1 < p)$ は必ずしも成り立たない。 $u \in \mathfrak{L}^p$ であるが, $\dot{u} \in \mathfrak{L}^p$ なる条件は保証されていないからである。

定理 2.5 ($1 < p \leq \infty$) I を有限または無限開区間とし, $1 < p \leq \infty$ とするとき, 函数 $u \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ について次の二命題は同値である。

(35) $\text{meas.} A$ は集合 $A \subset \mathbb{R}$ の Lebesgue 測度である。

(36) φ は $\dot{\varphi}$ の不定積分であるから絶対連続である。p. 109 の 4 $^\circ$ による。

(i) $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$.

(ii) q を $1/p + 1/q = 1$ なる数とすると、

$$\left| \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \right| \leq C \|u\|_p \|\varphi\|_q \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$$

を満たす定数 C が存在する。

証明 (i) $\implies$ (ii) : $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ とすれば

$$-\int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_I u'(t) \varphi(t) dt$$

がすべての $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して成り立つが、このような φ は $\mathfrak{L}^q(I, \mathbb{R})$ の元であるから、Hölder の不等式により、

$$\left| \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \right| \leq \|u'\|_p \|\varphi\|_q \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

こうして $C = \|u'\|_p$ として (ii) が導かれる。

(ii) $\implies$ (i) : 逆に (ii) が成り立つことを想定してみよう。 $\mathfrak{C}_0^1$ 上の線形汎函数 Λ を

$$\Lambda: \varphi \mapsto \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt, \quad \varphi \in \mathfrak{C}_0^1$$

と定義すれば、 $\mathfrak{C}_0^1$ を $\mathfrak{L}^q$ の部分空間とみたとき、(ii) によって Λ は連続である。 $1 < p \leq \infty$ であるから、 $q \neq \infty$ 。ゆえに $\mathfrak{C}_0^1$ は $\mathfrak{L}^q$ において稠密である。⁽³⁷⁾ 一致の原理により、⁽³⁸⁾ Λ は $\mathfrak{L}^q$ 上の連続な線形汎函数 $\tilde{\Lambda}: \mathfrak{L}^q \rightarrow \mathbb{R}$ として一意的に拡張することができる。⁽³⁹⁾ $(\mathfrak{L}^q)'$ の表現定理から

$$\tilde{\Lambda}f = \int_I v(t)f(t)dt, \quad f \in \mathfrak{L}^q$$

を満たす $v \in \mathfrak{L}^p$ が存在する。もちろん

$$\Lambda\varphi = \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_I v(t)\varphi(t)dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}).$$

ゆえに $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ で、しかも $u' = -v$ である。 (証了)

定理 2.6 ($p = \infty$) I は有限または無限開区間とすると、 $u \in \mathfrak{L}^\infty(I, \mathbb{R})$ について次の二命題は

(37) 丸山 [11] p. 213 の 7° を見よ。

(38) 丸山 [11] p. 134.

(39) 丸山 [11] 第 6 章 §2 (p. 214 以下) を参照。

同値である。

- (i) $u \in \mathfrak{W}^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$.
- (ii) 殆どすべての $s, t \in I$ に対して

$$|u(s) - u(t)| \leq C|s - t|$$

を満たす定数 C が存在する。

証明 (i) $\implies$ (ii) : $u \in \mathfrak{W}^{1,\infty}$ とすれば、定理 2.2 より、

$$|u(s) - u(t)| \leq \|u'\|_{\infty} \cdot |s - t| \quad \text{for a.e. } s, t \in I.$$

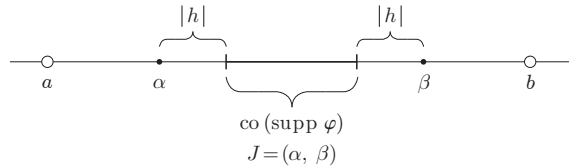
(ii) $\implies$ (i) : 逆に(ii)を仮定しよう。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R})$ に対して

$$\int_I \{u(t+h) - u(t)\} \varphi(t) dt$$

を計算する際、 $I = \mathbb{R}$ の場合にはいかなる不都合もない。しかし他の場合は $t+h$ が I から逸脱する可能性が生じるので、 $u(t+h)$ を定義することができないであろう。そこで便宜上、 u と φ を $\mathbb{R} \setminus I$ 上では (たとえば) 0 として拡張し、この函数も同じ記号で記すこととすれば、上記の積分計算に曖昧な点はない。⁽⁴⁰⁾

また $\text{supp } \varphi$ はコンパクトなので、 $|h|$ を十分に小さくとれば、 $\text{supp } \varphi$ の凸包 $\text{co}(\text{supp } \varphi)$ を左右に $|h|$ だけ拡張した区間 J が I から逸脱しないようにすることができる (図 2.2 を参照)。この J の

図 2.2



上では $\varphi(t) = 0$ なのであるから、上記の積分は t も $t+h$ も J 上に属する範囲で計算すればよいのである。以下、このような設定の下で計算する。

$$\begin{aligned} & \int_I \{u(t+h) - u(t)\} \varphi(t) dt \\ &= \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t+h) \varphi(t) dt - \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{1}$$

(40) $I = (a, b), (a, \infty), (-\infty, a)$ いずれも同じように考えればよい。

$$= \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \varphi(t-h) dt - \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \varphi(t) dt \quad (\text{変数変換}).$$

(ii) により

$$|u(t+h) - u(t)| \leq C|h| \quad \text{a.e. } t \in \text{co}(\text{supp } \varphi) \quad (2)$$

を満たす定数 C が存在するので, (1), (2) から,

$$\left| \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \{\varphi(t-h) - \varphi(t)\} dt \right| \leq C|h| \cdot \|\varphi\|_1 \quad (\text{Hölder の不等式}).$$

ゆえに上限収束定理により,

$$\begin{aligned} \lim_{|h| \rightarrow 0} \left| \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h} dt \right| \\ = \left| \int_{\text{co}(\text{supp } \varphi)} u(t) \dot{\varphi}(t) dt \right| = \left| \int_I u(t) \dot{\varphi}(t) dt \right| \leq C \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

これが任意の $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1$ について成り立つのであるから, 定理 2.5 により, (i) が導かれる。(証了)

次の結果は, $I = \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ なる場合の, $\mathfrak{W}^{1,p}$ の特徴づけである。定理 2.6 の証明では $u(t+h)$ を扱うのにやや慎重な注意が必要であつたが, $I = \mathbb{R}$ の場合は移動作用素 $\tau_h u(t) = u(t+h)$ ($h \in \mathbb{R}$) を自由に使うことができる。

定理 2.7 ($1 < p < \infty$, 無限区間) $I = \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ とするとき, $u \in \mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ に対して, 次の二命題は同値である。

(i) $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$.

(ii) 任意の $h \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|\tau_h u - u\|_p \leq C|h|$$

を満たす定数 C が存在する。

証明 (i) $\implies$ (ii) : 定理 2.2 により

$$u(t+h) - u(t) = \int_t^{t+h} u'(s) ds = h \int_0^1 u'(t+\theta h) d\theta \quad \text{a.e.}$$

であるから,

$$|u(t+h) - u(t)| \leq |h| \int_0^1 |u'(t+\theta h)| d\theta \quad \text{a.e.}$$

Hölder の不等式により,

$$|u(t+h) - u(t)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(t+\theta h)|^p d\theta \quad \text{a.e.}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_I |u(t+h) - u(t)|^p dt &\leq |h|^p \int_I \left\{ \int_0^1 |u'(t+\theta h)|^p d\theta \right\} dt \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \left\{ \int_I |u'(t+\theta h)|^p dt \right\} d\theta = |h|^p \int_0^1 \left\{ \int_I |u'(z)|^p dz \right\} d\theta = |h|^p \|u'\|_p^p. \end{aligned}$$

これで $C = \|u'\|_p$ として (ii) が示された。

(ii) $\implies$ (i) : 逆に (ii) が成り立つとする。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(I, \mathbb{R}), h \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_I \{u(t+h) - u(t)\} \varphi(t) dt = \int_I u(t) \{\varphi(t-h) - \varphi(t)\} dt. \quad (3)$$

(ii) と Hölder の不等式により,

$$\left| \int_I \{u(t+h) - u(t)\} \varphi(t) dt \right| \leq C|h| \|\varphi\|_q.$$

(ここで $1/p + 1/q = 1$)。したがって (3) から

$$\left| \int_I u(t) \{\varphi(t-h) - \varphi(t)\} dt \right| \leq C|h| \|\varphi\|_q.$$

両辺を $|h|$ で除し, $h \rightarrow 0$ とすれば, 上限収束定理により,

$$\left| \int_I u(t) \cdot \dot{\varphi}(t) dt \right| \leq C \|\varphi\|_q.$$

定理 2.5 より, (i) を得る。

(証了)

注意 (i) $\implies$ (ii) は $p = 1$ の場合にも成り立つ。上記の証明を見れば明らかであろう。

§3. $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ の拡大

Sobolev 空間で $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に属する函数を滑らかな函数で近似する問題を考えよう。たとえば $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす $\mathfrak{C}_0^\infty(I, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}$ が存在するであろうか。そのための準備として, $\mathfrak{W}^{1,p}((a, b), \mathbb{R})$ に属する函数を $\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に属する函数へと拡大する可能性を次の形で整理しておこう。一般性を失うことなく, $I = (0, 1)$ とする。

定理 2.8 $I = (0, 1), 1 \leq p \leq \infty$ とするとき、次の諸条件を満たす有界線形作用素 $E: \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ が存在する。⁽⁴¹⁾

(i) すべての $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して、

$$Eu|_I = u,$$

つまり Eu は u の拡大である。

(ii) すべての $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して、

$$\|Eu\|_p \leq C \|u\|_p$$

を満たす定数 C が存在する。(ただし左辺の $\|\cdot\|_p$ は $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のノルム、右辺の $\|\cdot\|_p$ は $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$ のノルムである。)

(iii) すべての $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ に対して、

$$\|Eu\|_{\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq C' \|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})}$$

を満たす定数 C' が存在する。

はじめに $I = (0, 1)$ のかわりに $(0, \infty)$ の場合を考えてみよう。 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})$ に対して

$$(Eu)(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t > 0, \\ u(-t) & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

と定義すれば、⁽⁴²⁾ Eu は $\mathbb{R}$ 上で定義された u の拡大で、

$$\|Eu\|_p \leq 2 \|u\|_p. \quad (1)$$

(ここで左辺の $\|\cdot\|_p$ は $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のノルム、右辺の $\|\cdot\|_p$ は $\mathfrak{L}^p((0, \infty), \mathbb{R})$ のそれである。) 次に Eu の一般化された導関数を求めよう。

$\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ として

$$-\int_{\mathbb{R}} (Eu)(t) \dot{\varphi}(t) dt$$

(41) この E を拡張作用素 (extension operator) と称する。

(42) $u(0)$ の値は全く任意に与えればよい。

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^0 u(-t) \dot{\varphi}(t) dt - \int_0^{\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt \\
&= - \int_0^{\infty} u(s) \dot{\varphi}(-s) ds - \int_0^{\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt \quad (\text{変数変換}) \\
&= \int_0^{\infty} u'(s) \varphi(-s) ds + \int_0^{\infty} u'(t) \varphi(t) dt \\
&= - \int_{-\infty}^0 u'(-t) \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} u'(t) \varphi(t) dt.
\end{aligned} \tag{2}$$

函数 $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$v(t) = \begin{cases} u'(t) & \text{for } t > 0, \\ -u'(-t) & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

と定義すると, $v \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で, (2)により

$$- \int_{\mathbb{R}} (Eu)(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} v(t) \varphi(t) dt \quad \text{for all } \varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

つまり v が Eu の一般化された導函数であることがわかり, $Eu \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ である。しかも

$$\|v\|_p = \|(Eu)'\|_p \leq 2 \|u'\|_p \tag{3}$$

であるから, (1), (3)により

$$\|Eu\|_{\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq 2 \|u\|_{\mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})}.$$

これで $u \in \mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})$ の場合について, 定理 2.8 が示されたのである。($C = C' = 2$ である。)

つづいて u の定義域が有限区間の場合へと進むのであるが, 推論の効率化を図るためにいくつかのルールを, あらかじめ明示しておくことにしよう。

1° 函数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $f^\sharp: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f^\sharp(t) = f(-t), \quad t \in (-\infty, 0)$$

と定義する。⁽⁴³⁾ $f \in \mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})$ ならば, $f^\sharp \in \mathfrak{W}^{1,p}((-\infty, 0), \mathbb{R})$ で,

$$\begin{aligned}
&(f^\sharp)' = -(f')^\sharp, \\
&\text{i.e. } (f^\sharp)'(t) = -f'(-t), \quad t \in (-\infty, 0)
\end{aligned} \tag{4}$$

である。

証明は直接計算による。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1((-\infty, 0), \mathbb{R})$ とする。

$$-\int_{-\infty}^0 f^\sharp(t) \dot{\varphi}(t) dt = -\int_{-\infty}^0 f(-t) \dot{\varphi}(t) dt = -\int_0^\infty f(s) \dot{\varphi}(-s) ds.$$

ここで $\psi(s) = \varphi(-s) = \varphi^\sharp(s)$ ($s \in (0, \infty)$) と定義すれば, $\psi \in \mathfrak{C}_0^1((0, \infty), \mathbb{R})$ で, $\dot{\psi}(s) = -\dot{\varphi}(-s)$ である。したがって上の計算を続けると,

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty f(s) \dot{\psi}(s) ds = -\int_0^\infty f'(s) \psi(s) ds \\ &= -\int_0^\infty f'(s) \varphi(-s) ds = -\int_{-\infty}^0 f'(-t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

である。 $-f'(-t) \in \mathfrak{L}^p((-\infty, 0), \mathbb{R})$ は明らかであるから, (4)が導かれる。 $(f^\sharp \in \mathfrak{L}^p((-\infty, 0), \mathbb{R}))$ であることも自明。

2° $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, また τ_h ($h \in \mathbb{R}$) は移動作用素, つまり $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$ とする。 $f \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ならば, $\tau_h f \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で

$$(\tau_h f)' = \tau_h f' \quad (5)$$

である。

再び直接計算による。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とすれば,

$$-\int_{\mathbb{R}} \tau_h f(t) \dot{\varphi}(t) dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t+h) \dot{\varphi}(t) dt = -\int_{\mathbb{R}} f(s) \dot{\varphi}(s-h) ds.$$

ここで $\psi(s) = \varphi(s-h) = (\tau_{-h}\varphi)(s)$ とすれば, $\psi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で $\dot{\psi}(s) = \dot{\varphi}(s-h)$ 。したがって上の計算を続ければ,

$$\begin{aligned} &= -\int_{\mathbb{R}} f(s) \dot{\psi}(s) ds = \int_{\mathbb{R}} f'(s) \psi(s) ds = \int_{\mathbb{R}} f'(s) \varphi(s-h) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(t+h) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (\tau_h f')(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

これからただちに(5)が導かれる。

3° $f \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とすれば $\tau_h f^\sharp \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で

(43) つまり $f^\sharp$ は $t=0$ を境とする f の鏡映である。

$$(\tau_h f^\sharp)' = \tau_h (f^\sharp)' = \tau_h (-f')^\sharp, \quad (6)$$

$$i.e. \quad f(-(\cdot) + h)'(t) = -f'(-t + h).$$

これを示すためには 1° と 2° を組み合わせればよい。

4° $f \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とし, $\eta \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は導函数の台がコンパクト, つまり $\dot{\eta} \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を満たす函数とする。このとき $\eta f \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で

$$(\eta f)' = f' \eta + f \eta' \quad (7)$$

である。

実際, これは次のような計算から確かめることができる。 $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} \eta(t) f(t) \dot{\varphi}(t) dt \stackrel{(44)}{=} \\ & = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \eta(t) \dot{\varphi}(t) dt \\ & = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \{ [\eta(t) \varphi(t)]^\bullet - \dot{\eta}(t) \varphi(t) \} dt \\ & = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot [\eta(t) \varphi(t)]^\bullet dt + \int_{\mathbb{R}} f(t) \dot{\eta}(t) \varphi(t) dt \\ & = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \cdot \eta(t) \varphi(t) dt + \int_{\mathbb{R}} f(t) \dot{\eta}(t) \varphi(t) dt \\ & = \int_{\mathbb{R}} \{ f'(t) \eta(t) + f(t) \dot{\eta}(t) \} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

これから (7) を得る。

以上を準備として, 再び定理 2.8 の証明に戻ることにしよう。

定理 2.8 の証明 $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$, $I = (0, 1)$ とする。函数 $\theta \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ を

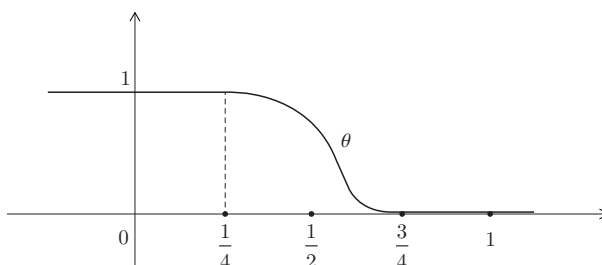
$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{for } t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

を満たすように選んで固定する。⁽⁴⁵⁾

(44) 仮定から $\eta(t)$ は有界なので $\eta \cdot f \in \mathfrak{L}^p$ 。また $\dot{\varphi} \in \mathfrak{L}^q(1/p + 1/q = 1)$ 。ゆえにこの積分は意味をもつ。

(45) p. 123 の 4° では函数の定義域を $\mathbb{R}$ としたが, $(0, \infty)$ でも同様である。

図 2.3



第一段 $\tilde{u}_1: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義し, u を $(0, \infty)$ 上に拡大する。

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{for } t > 1. \end{cases} \quad (8)$$

u' もこれと同様にして $(0, \infty)$ 上に拡大しよう。 θ は p. 123 の 4° における η の条件を満たすので, $\theta \tilde{u}_1 \in \mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})$ で ⁽⁴⁶⁾

$$(\theta \tilde{u}_1)' = \tilde{u}_1' \theta + \tilde{u}_1 \dot{\theta} \quad (9)$$

が成り立つ。

第二段 θ を用いて u を次のように書き換える。

$$u(t) = \theta(t)u(t) + (1 - \theta(t))u(t), \quad t \in (0, 1). \quad (10)$$

まず右辺第一項を (8) の方法で $(0, \infty)$ 上に拡大し, これを $\theta \tilde{u}_1$ とする。これをさらに鏡映の方法 (pp. 121–122 の 1°) により $\mathbb{R}$ 上に拡大する。(拡大作用素を E_1 と書く。) すなわち

$$E_1(\theta \tilde{u}_1)(t) = \begin{cases} \theta(t) \tilde{u}_1(t) & \text{for } t > 0, \\ (\theta \tilde{u}_1)^\sharp(t) = \theta(-t) \tilde{u}_1(-t) & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

とすればよい。

第一段で確認したとおり, $\theta \tilde{u}_1 \in \mathfrak{W}^{1,p}((0, \infty), \mathbb{R})$ であるから, pp. 121–122 の 1° から $E_1(\theta \tilde{u}_1) \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で, その一般化された導関数は (4) と (9) により

(46) 前注を見よ。また容易に知られるとおり, $(\tilde{u}_1)' = \tilde{u}_1'$ 。

$$E_1(\theta \tilde{u}_1)'(t) = \begin{cases} \tilde{u}_1'(t)\theta(t) + \tilde{u}_1(t)\dot{\theta}(t) & \text{for } t > 0, \\ -\tilde{u}_1'(-t)\theta(-t) - \tilde{u}_1(-t)\dot{\theta}(-t) & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (12)$$

の形で得られる。

(11), (12) のノルムを計算しよう。

$$\int_{\mathbb{R}} |E_1(\theta \tilde{u}_1)(t)|^p dt = 2 \int_0^\infty |\theta \tilde{u}_1(t)|^p dt \leq 2 \int_0^\infty |\tilde{u}(t)|^p dt = 2 \int_0^1 |u(t)|^p dt.$$

ゆえに⁽⁴⁷⁾

$$\|E_1(\theta \tilde{u}_1)\|_{p, \mathbb{R}} \leq 2 \|u\|_{p, I}. \quad (13)$$

同様に

$$\begin{aligned} \|\theta \tilde{u}_1'\|_{p, \mathbb{R}} &\leq 2 \|(\theta \tilde{u}_1')'\|_{p, (0, \infty)} \quad ((3) \text{ による}) \\ &= 2 \|\tilde{u}_1' \theta + \tilde{u}_1 \dot{\theta}\|_{p, (0, \infty)} \\ &\leq 2\{\|\tilde{u}_1'\|_{p, (0, \infty)} \cdot \|\theta\|_\infty + \|\tilde{u}_1\|_{p, (0, \infty)} \cdot \|\dot{\theta}\|_\infty\}^{(48)}. \end{aligned} \quad (14)$$

定数 A を $2\text{Max}\{\|\theta\|_\infty, \|\dot{\theta}\|_\infty\} \leq A$ となるように選べば, (14) により

$$\begin{aligned} \|E_1(\theta \tilde{u}_1)\|_{p, \mathbb{R}} &\leq A\{\|\tilde{u}_1\|_{p, (0, \infty)} + \|\tilde{u}_1'\|_{p, (0, \infty)}\} \\ &= A\{\|u\|_{p, I} + \|u'\|_{p, I}\} \\ &= A \|u\|_{\mathfrak{W}^{1, p}, I} \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。

第三段 次に(10)の右辺第二項を検討する。(1 - θ) u の定義域を $(-\infty, 1)$ に拡大するため

$$\tilde{u}_2(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (16)$$

(47) 以下, $\mathfrak{L}^p(I, \mathbb{R})$, $\mathfrak{L}^p((0, \infty), \mathbb{R})$, $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のノルムを記述の簡便のために, それぞれ $\|\cdot\|_{p, I}$, $\|\cdot\|_{p, (0, \infty)}$ および $\|\cdot\|_{p, \mathbb{R}}$ と書いて識別する。また $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}^{1, p}, I}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}^{1, p}, (0, \infty)}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}^{1, p}, \mathbb{R}}$ の記号の意味も同様である。

(48) $\|\tilde{u}_1 \cdot \dot{\theta}\|_{p, (0, \infty)}^p = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}_1|^p |\dot{\theta}|^p dt \leq \|\tilde{u}_1\|_{p, (0, \infty)}^p \cdot \|\dot{\theta}\|_\infty^p$. ここで $\dot{\theta}$ は連続で, $[0, 1]^c$ では 0 であるから, $\|\dot{\theta}\|_\infty < \infty$ が保証されている。したがって $\|\tilde{u}_1 \theta\|_{p, (0, \infty)} \leq \|\tilde{u}_1\|_{p, (0, \infty)} \cdot \|\dot{\theta}\|_\infty$ が成り立つ。 $\|\tilde{u}_1' \theta\|_{p, (0, \infty)} \leq \|\tilde{u}_1'\|_{p, (0, \infty)} \cdot \|\theta\|_\infty$ も全く同様にして確かめられる。

と定義する。 u' の $(-\infty, 1)$ への拡大も同様とし、これを $\tilde{u}'_2$ と書く。

さらに $(1 - \theta)\tilde{u}_2$ を $\mathbb{R}$ 全体に拡大するためには

$$E_2((1 - \theta)\tilde{u}_2)(t) = \begin{cases} (1 - \theta(t))\tilde{u}_2(t) & \text{for } t < 1, \\ (1 - \theta(2 - t))\tilde{u}_2(2 - t) & \text{for } t > 1 \end{cases} \quad (17)$$

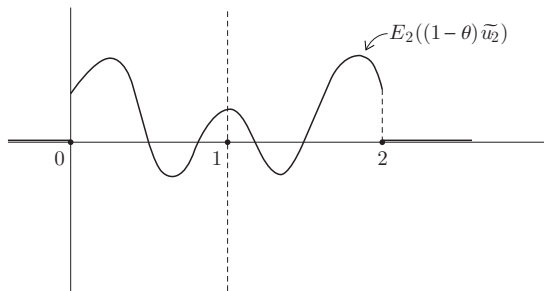
とすればよいのである ($t = 1$ を境とする鏡映, 図 2.4 参照)。第二, 三段と類似の推論をつうじて, $E_2((1 - \theta)\tilde{u}_2) \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で,

$$\| E_2((1 - \theta)\tilde{u}_2) \|_{p, \mathbb{R}} \leq 2 \| u \|_{p, I}, \quad (18)$$

$$\| E_2((1 - \theta)\tilde{u}_2)' \|_{p, \mathbb{R}} \leq B \| u \|_{\mathfrak{W}^{1,p}, I} \quad (19)$$

が成り立つ。 B は十分に大きな定数である。

図 2.4



第四段 最後に

$$Eu = E_1(\theta\tilde{u}_1) + E_2((1 - \theta)\tilde{u}_2) \quad (20)$$

と定義すれば, E は $\mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R})$ から $\mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のなかへの有界線形作用素で, Eu は u の拡大である。(13)と(18)からは(ii)が, そして(15)と(19)により(iii)が導かれる。

これで定理 2.8 の証明が完了した。 (証了)

§4. $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ の円滑な近似

本章の終わりに, $u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ を滑らかな函数で近似する問題を考察する。つまり, たとえば

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす $\mathfrak{C}_0^\infty(I, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}$ が存在するや否やを問うのである。

補題 2.2 $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ とすれば, $f * u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ で, しかも

$$(f * u)' = f * u'$$

が成り立つ。

証明 はじめに f の台がコンパクトであることを仮定しよう。 $f * u \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ であることは周知のところである。⁽⁴⁹⁾ $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とすれば⁽⁵⁰⁾

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} (f * u) \dot{\varphi}(t) dt &\stackrel{(イ)}{=} - \int_{\mathbb{R}} u(f^\sharp * \dot{\varphi}) dt \\ &\stackrel{(ロ)}{=} - \int_{\mathbb{R}} u(f^\sharp * \varphi)^\bullet dt = \int_{\mathbb{R}} u'(f^\sharp * \varphi) dt \\ &\stackrel{(ハ)}{=} \int_{\mathbb{R}} (f * u') \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

したがって $f * u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (f * u)' = f * u'$ が導かれる。

次に f の台が必ずしもコンパクトでない場合について考えよう。 $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ において稠密であるから、 $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $\{f_n\}$ を適当に選び⁽⁵¹⁾

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

とすることができる。上記の結果から

$$f_n * u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (f_n * u)' = f_n * u'. \quad (1)$$

また $\| (f_n - f) * u \|_p \leq \|f_n - f\|_1 \cdot \|u\|_p$ であること⁽⁵²⁾ から

$$\|f_n * u - f * u\|_p \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

(49) たたみ込みの演算とその計算ルールについては、丸山 [11] pp. 205–213 を参照していただきたい。

(50) 等式 (イ) (ハ) については直接に計算によって確かめることができるが、一般に次の公式が成り立つ。 $f \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g \in \mathfrak{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}), h \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とする。ここで $1 \leq p, q \leq \infty, 1/p + 1/q = 1$ とする。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} (h * f) g dt = \int_{\mathbb{R}} f (h^\sharp * g) dt.$$

(証明は容易。)

また等式 (ロ) は積分記号下の微分公式 (丸山 [11] 系 3.6, p. 109) から明らか。

(51) 丸山 [11] 定理 5.13(pp. 171–174), あるいは p. 213 の 7°。

(52) 丸山 [11] 定理 6.5, pp. 207–208.

同様にして

$$\|f_n * u' - f * u'\|_p \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

したがって $f * u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ かつ $(f * u)' = f * u'$ を得る。⁽⁵³⁾ (証了)

定理 2.9 任意の $u \in \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) に対して

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす $\mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の列 $\{u_n\}$ が存在する。

注意 ここでは u の定義列を $\mathbb{R}$ として定理を述べたが、それは証明中で軟化子を利用するためである。しかし定義域を $I = (a, b)$ としても定理 2.9 はそのまま成り立つ。実際、定理 2.8 により u を $\mathbb{R}$ 上に拡大したうえで

$$u_n|_I \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(I, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす $u_n \in \mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を見出せばよいのである。

定理 2.9 の証明 函数 $\theta \in \mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ を

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } |t| < 1, \\ 0 & \text{for } |t| \geq 2 \end{cases}$$

となるようにひとつ固定し、さらに

$$\theta_n(t) = \theta\left(\frac{t}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

と定義する (図 2.5 参照)。

$u \in \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ であるから、上限収束定理により、

$$\theta_n u \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

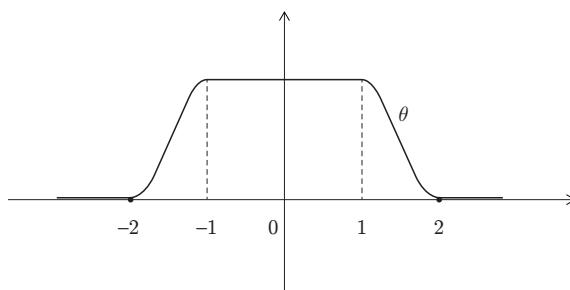
(53) p. 127–128 の証明を見よ。(1)により

$$-\int_{\mathbb{R}} (f_n * u) \dot{\varphi} dt = \int_{\mathbb{R}} (f_n * u') \varphi dt$$

がすべての $\varphi \in \mathfrak{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対して成り立つ。両辺の極限に移れば、(2)と(3)から

$$-\int_{\mathbb{R}} (f * u) \dot{\varphi} dt = \int_{\mathbb{R}} (f * u') \varphi dt.$$

図 2.5



$\varepsilon_n \downarrow 0$ とし, 軟化子 $\xi_{\varepsilon_n} * (\cdot)$ を簡略化のために $\xi_n * (\cdot)$ と書く。⁽⁵⁴⁾ いま

$$u_n = \theta_n(\xi_n * u), \quad n = 1, 2, \dots$$

と定義すれば,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

実際,

$$u_n - u = \theta_n\{(\xi_n * u) - u\} + (\theta_n u - u) \quad (5)$$

と表現することができるので,

$$\|u_n - u\|_p \leq \|\xi_n * u - u\|_p + \|\theta_n u - u\|_p \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (55) \quad (6)$$

次に補題 2.2 により, $(\xi_n * u)' = \xi_n * u'$ であることと, p.123 の 4° とから⁽⁵⁶⁾

$$u'_n = \theta_n(\xi_n * u)' + (\xi_n * u)\dot{\theta}_n = \theta_n(\xi_n * u') + (\xi_n * u)\dot{\theta}_n. \quad (7)$$

したがって(6)から

(54) $\mathbb{R}$ 上の実数地函数 ξ を

$$\xi(x) = \begin{cases} C \exp(|x|^2 - 1)^{-1} & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| \geq 1 \end{cases}$$

と定義する。ここで C は $\int_{\mathbb{R}} \xi(x) dx = 1$ を満たすように選ぶ。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\xi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \xi(x/\varepsilon)$ とおけば, その積分は 1。この ξ_ε と局所可積分函数 f とのたたみ込み $\xi_\varepsilon * f$ は ε を十分小さくとりとき, f を滑らかな函数で近似する働きがあるので, 作用素 $\xi_\varepsilon * (\cdot)$ を軟化子 (mollifier) と呼ぶのである。詳しくは丸山 [11] pp. 209–213 を見よ。

(55) $\|\xi_n * u - u\|_p \rightarrow 0$ は丸山 [11] pp. 212–213 の 6° を見よ。また $\|\theta_n u - u\|_p \rightarrow 0$ は(4)で確かめた。

(56) p.123 の(7)式に対応して, ここでは η として θ を, f として $\xi_n * u \in \mathfrak{W}^{1,p}$ を用いるのである。

$$\begin{aligned}
& \|u'_n - u'\|_p \leq \|(\xi_n * u)\dot{\theta}_n\|_p + \|\theta_n(\xi_n * u') - u'\|_p \\
& \leq \frac{\|\dot{\theta}\|_\infty}{n} \|u\|_p + \|\theta_n(\xi_n * u') - \theta_n u'\|_p + \|\theta_n u' - u'\|_p \\
& \leq \frac{\|\dot{\theta}\|_\infty}{n} \|u\|_p + \|\xi_n * u' - u'\|_p + \|\theta_n u' - u'\|_p \\
& \xrightarrow{(57)} 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{8}$$

(6) と (8) により,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathfrak{W}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(証了)

記号についての注意 ここで用いた記号は解析学で標準的なものばかりであるが、念のため、本文中とくに説明することなく用いたいくつかの函数空間の表記法を摘記しておく（レフェリーのご注意による）。

$\mathfrak{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 区間 $[0, 1]$ 上で定義され、 $\mathbb{R}$ に値をとる連続函数の空間。

$\mathfrak{C}_0([0, 1], \mathbb{R})$ $[0, 1]$ 上の連続な実数値函数のうち、台（supp と書く）がコンパクトなものの全体。

$\mathfrak{C}^1((0, 1), \mathbb{R})$ $(0, 1)$ 上で定義され、連続微分可能な実数値函数の空間。

$\mathfrak{L}^p([0, 1], \mathbb{R}) (1 \leq p \leq \infty)$ $[0, 1]$ 上で定義された p 乗可積分な実数値函数の空間。ただし殆どすべての点で等しい函数は同一視する。 $p = \infty$ は本質的に有界な函数の空間。

$\|\cdot\|_\infty$ は一様収束ノルム、 $\|\cdot\|_p$ は p 乗可積分空間のノルム。

参 考 文 献

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, (Academic Press, New York) 1975.
- [2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, (Springer, New York/Dordrecht/Heidelberg/London) 2011.
- [3] Buttazzo, G., M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems*, (Clarendon Press, Oxford) 1998.
- [4] Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, (Interscience, New York) 1958.
- [5] Evans, L. C., *Weak Convergence Methods for Nonlinear Differential Equations*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1990.
- [6] ———, *Partial Differential Equations*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1998.
- [7] Gelfand, I. M. and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, (Prentice-Hall, Englewood Cliff) 1963.
- [8] 黒田成俊『関数解析』（共立出版）1980.
- [9] 丸山徹『関数解析学』（慶應通信）1980.
- [10] ———『数理経済学の方法』（創文社）1995. 現在は講談社から刊行。
- [11] ———『積分と関数解析』第二版（丸善出版）2024.

(57) 最後の不等式第二項は丸山 [11] pp. 212–213 の 6° により 0 に収束する。第三項が 0 に収束することは、(4) と同様、上限収束定理による。

- [12] Maz'ja, V. G., *Sobolev Spaces*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 1985.
- [13] Schwartz, L., *Théorie des distributions*, (Hermann, Paris) 1967.
- [14] ———, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, (Hermann, Paris) 1961.
- [15] Struwe, M., *Variational Methods*, (Springer-Verlag, Berlin) 1990.
- [16] 吉田耕作・加藤敏夫『応用数学 I』(裳華房) 1961.

付記 本稿およびこれに続く「一変数 Sobolev 空間の埋め込み定理と変分法」は、毎週土曜日に会合する数理経済学研究会における筆者の講義録（令和 5 年 4 月–12 月）である。また貴重なご意見を賜った匿名のレフェリーに厚く謝意を表する。