Title	動学的パネルデータモデルに関する検定の改良について
Sub Title	Improving a test for a static panel data model against a dynamic panel data modeled
Author	長倉, 大輔(Nagakura, Daisuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2023
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.116, No.1 (2023. 4) ,p.41- 57
JaLC DOI	10.14991/001.20230401-0041
Abstract	本稿では長倉（2020）で提案された動学的パネルデータモデルに対する静学的パネルデータモデルのラグランジュ乗数検定の小標本におけるサイズパフォーマンスを改良することを目的とする。長倉（2020）では漸近分散の推定量として，外積勾配推定量を用いているが，若干の過剰棄却の問題が生じていた。本稿では経験ヘシアン推定量および情報行列推定量を用いることを提案する。また本稿で考える動学的パネルデータモデルについて，1つのパラメーターのみに依存する集約化対数尤度関数を求める。シミュレーション実験により，提案された検定統計量は小標本においても実際のサイズがほぼ名目のサイズと等しいことが確認された。 In this paper, we consider to improve finite sample size performances of the LM test proposed in Nagakura (2020) for the null of a static panel data model against a dynamic panel data model; the test has an over-rejection problem in small sample sizes. Specifically, we propose to use empirical Hessian (EH) and information matrix (IM) asymptotic covariance matrix estimators in the LM test, instead of the outer product gradient (OPG) estimator used in Nagakura (2020). We also derive the concentrated log likelihood for the dynamic panel data model, which depends on only one parameter. Our simulation experiment shows that the test has almost correct sizes in small sample sizes by using the EH and IM asymptotic covariance estimators.
Notes	原著論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20230401-0041

「三田学会雑誌」116 巻 1 号（2023 年 4 月）

動学的パネルデータモデルに関する検定の改良について

長倉大輔 *

Improving a Test for a Static Panel Data Model against a Dynamic Panel Data Modeled

Daisuke Nagakura *

Abstract: In this paper, we consider to improve finite sample size performances of the LM test proposed in Nagakura (2020) for the null of a static panel data model against a dynamic panel data model; the test has an over-rejection problem in small sample sizes. Specifically, we propose to use empirical Hessian (EH) and information matrix (IM) asymptotic covariance matrix estimators in the LM test, instead of the outer product gradient (OPG) estimator used in Nagakura (2020). We also derive the concentrated log likelihood for the dynamic panel data model, which depends on only one parameter. Our simulation experiment shows that the test has almost correct sizes in small sample sizes by using the EH and IM asymptotic covariance estimators.

Key words: static panel data model, dynamic panel data model, lagrange multiplier test, empirical Hessian asymptotic matrix estimator, information matrix asymptotic matrix estimator, outer product of gradient asymptotic matrix estimator, concentrated log likelihood function.

JEL Classifications: C23, C12

匿名の査読者からの有意義なコメントにより内容が非常に改善されたことに感謝したい。言うまでもなく，ありうべきすべての間違いは筆者の責任である。

* 慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University
nagakura@z7.keio.jp

1　はじめに

ある一時点における多数の個体のデータは横断面（クロスセクション）データと呼ばれる。それに対して，複数の時点における多数の個体のデータはパネルデータと呼ばれる。パネルデータは，個体間の異質性を捉えるのに有用であり，パネルデータに対する様々なモデルが発展してきている。パネルデータを用いた分析において，モデルの説明変数として過去の被説明変数を含んでいるモデルは動学的，含んでいないモデルは静学的と呼ばれる。一般に動学的パネルデータモデルの推定は静学的パネルデータモデルの推定より難しい。動学的線形パネルデータモデルの推定には一般化モーメント法（generalized method of moments; GMM）を用いることが多く，代表的な推定量として，一階階差 GMM 推定量，レベル GMM 推定量，システム GMM 推定量などがある。これらの推定量およびパネルデータ分析について詳しくは松浦，マッケンジー（2009），Hsiao（2015），千木良，早川，山本（2011）などを参照されたい。

動学的パネルデータモデルの推定は静学的パネルデータモデルの推定より難しいため，動学的パネルデータモデルの推定を行う前に，本当にモデルが動学的か（すなわち説明変数として過去の被説明変数を含んでいるか）を，確認できたら便利である。このような動機のもとで，長倉（2020）は動学的線形パネルデータモデルを対立仮説，静学的線形パネルデータモデルを帰無仮説とするラグランジュ乗数（Lagrange multiplier; 以下 LM）検定を提案した。LM 検定の利点として，ワルド検定や尤度比検定と異なり，必要とされる推定は帰無仮説のモデルのみであることがあげられる。今回の帰無仮説のモデル，すなわち静学的線形パネルデータモデル，の推定は容易であるため，今回のような問題には非常に適した検定方法といえる。長倉（2020）はシミュレーション実験により，この LM 検定の実際のサイズは名目のサイズよりも若干大きく，過剰棄却の問題があるものの，標本の大きさが応用上よくある程度まで大きくなると名目サイズに近くなり，検出力も十分あることを確認している。この過剰棄却の問題は，応用でよく用いられる標本の大きさでは問題となるほどではないが，標本の大きさが比較的小さい場合は注意が必要である。本稿では，比較的小さい標本においても，過剰棄却の問題が起きないように 長倉（2020）の LM 検定統計量を改良することを目的とする。

長倉（2020）では漸近共分散行列の推定量として外積勾配（outer product of gradient; 以下 OPG）推定量を用いている。OPG 推定量は計算が非常に簡単であり，それゆえよく用いられるが，OPG 推定量を用いた LM 検定は過剰棄却の問題が発生しやすいことが知られている（Bera and Mckenzie (1986)）。一方，漸近共分散行列の推定量として，経験ヘシアン（empirical Hessian; 以下 EH）推定量や情報行列（information matrix; 以下 IM） 推定量は，推定のコストは OPG 推定量よりも大きくなるが，これらを用いた LM 検定は過剰棄却の問題が起こりにくいことが知られている（Bera and Mckenzie (1986)）。本稿では長倉（2020）の LM 検定に対して，これらの代替的な漸近共分散行列の

推定量を導出し，それらを用いることによって，比較的小さい標本での検定のパフォーマンスが改善するかどうかをシミュレーションによって確認する。

また本稿では，対立仮説および帰無仮説のもとでの，局外パラメーターの推定における最適化（最大化）の計算を容易にするため，ある局外パラメーターに対して対数尤度関数を集約（concentration）し，集約化対数尤度関数を導出する。従来の最尤推定では多数の局外パラメーターについて尤度関数を最適化（最大化）する必要があったが，この集約化対数尤度関数を用いると，この 1 つの局外パラメーターについて最適化（最大化）するだけで，すべての局外パラメーターを推定できるようになるため，計算が効率化される。

本稿は以下のように構成される。まず次章では長倉（2020）の LM 検定について説明し，漸近共分散行列の推定量として，EH 推定量および IM 推定量を導出する。第 3 章では，対立仮説および帰無仮説のもとでの局外パラメーターの集約化最尤推定法について詳しく説明する。第 4 章ではシミュレーション実験を行い，提案された漸近共分散行列の推定量が長倉（2020）の LM 検定のパフォーマンスを改善するか確認する。第 5 章で本稿のまとめと今後の課題について述べる。補論では EH 推定量の導出に必要なヘシアン行列の計算，および IM 推定量の導出に必要なヘシアン行列の期待値の計算をする。

2　長倉（2020）の検定統計量とその改良

2.1 節では長倉（2020）の LM 検定について簡単に説明し，続く 2.2 節では EH および IM 推定量を用いて LM 検定の小標本におけるパフォーマンスの向上について考える。

2.1　長倉 (2020) の LM 検定統計量

本稿では，長倉（2020）に従い，以下の動学的パネルデータモデルを考える。

$$y_{i,t} = \phi y_{i,t-1} + \mathbf{x}'_{i,t}\boldsymbol{\beta} + u_{i,t}, \quad u_{i,t} = \eta_i + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, ..., N, t = 0, ..., T, \tag{1}$$

ここで $\mathbf{x}_{i,t}$ は 定数項を含む $q \times 1$ 説明変数ベクトル，$\varepsilon_{i,t}$ は誤差項，η_i はランダムな個別効果を表す。$(q+2)\times 1$ ベクトル $[\mathbf{x}'_{i,t}, \varepsilon_{i,t}, \eta_i]'$ は i 上で独立とし，また，η_i は $\varepsilon_{i,t}$ と $\mathbf{x}_{i,t}$ に対してすべての t について独立，$\varepsilon_{i,t}$ と $\mathbf{x}_{i,s}$ はすべての t と s について独立とする。さらに $\varepsilon_{i,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ および $\eta_i \sim N(0, \kappa\sigma^2)$, $\kappa > 0$ がすべての i で成り立つとする。また $y_{i,0}$ は外生的に与えられており，ベクトル $[\mathbf{x}_{j,t}, \varepsilon_{j,t}, \eta_j]'$, $j = 1, ..., N$, $t = 1, ..., T$, と独立とする。このモデルにおける未知パラメーターは $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}', \sigma^2, \kappa, \phi]'$ となる。このモデルにおいて，長倉（2020）は，帰無仮説

$$H_0: \quad \phi = 0, \tag{2}$$

を検定する LM 検定統計量を提案した。

今，$T\times 1$ ベクトル $\mathbf{y}_i = [y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,T}]'$，$N\times 1$ ベクトル $\mathbf{y}_0^* = [y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{N,0}]'$ および $q\times T$ 行列 $\mathbf{X}_i$=[$\mathbf{x}_{i,1}$，$\mathbf{x}_{i,2}$，...，$\mathbf{x}_{i,T}$]，$i = 1, ..., N$，が観測されるとする。さらに $\mathbf{y}_i^{(-1)} = [y_{i,0}, y_{i,1}, ..., y_{i,T-1}]'$ とし，$\mathbf{u}_i = [u_{i,1}, u_{i,2}, ..., u_{i,T}]'$ を

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)} - \mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta},$$

と定義すると，$\mathbf{u}_i \sim i.i.d.N(\mathbf{0}_{T,1}, \boldsymbol{\Omega})$ である。ここで $\mathbf{0}_{s,t}$ は要素がすべて 0 の $s\times t$ 行列を表すとする。$\mathbf{E}_k$ を要素がすべて 1 の $k\times k$ 行列とすると，$T\times T$ 行列 $\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2(\mathbf{I}_T + \kappa\mathbf{E}_T),$$

と表される。

これらの条件のもとで, 長倉（2020）は未知パラメーター $\boldsymbol{\theta}$ について, $q\times NT$ 行列 $\mathbf{X} \equiv [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_N]$ が与えられたという条件付き対数尤度関数

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{NT}{2}\log 2\pi - \frac{N}{2}\log|\boldsymbol{\Omega}| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i, \tag{3}$$

を導出した。(3)式の対数尤度関数は，逆行列 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ および行列式 $|\boldsymbol{\Omega}|$ が

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{I}_T - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{E}_T\right), \quad |\boldsymbol{\Omega}| = \sigma^{2T}(1+T\kappa), \tag{4}$$

と表されること，また，$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}$ であることに注意すると，

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = -\tfrac{NT}{2}\log 2\pi - \tfrac{NT}{2}\log\sigma^2 - \tfrac{N}{2}\log(1+T\kappa) - \tfrac{1}{2\sigma^2}\left[\mathbf{u}'\mathbf{u} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right], \tag{5}$$

と表すこともできる。ここで $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', ..., \mathbf{u}_N']'$ である。

長倉（2020）ではこの尤度関数のパラメーター ϕ についてのスコア $s_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \partial\log L(\boldsymbol{\theta})/\partial\phi$ を導出し，(2)式の帰無仮説を検定するための検定統計量として，以下で定義される LM 検定統計量を提案した。

$$LM_N = s_\phi(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)^2\mathbf{R}(N\mathbf{V}_N)^{-1}\mathbf{R}', \tag{6}$$

ここで $\mathbf{R} = [\mathbf{0}_{1,q+2}, 1]$，$\mathbf{V}_N$ は

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}E_0\left(\frac{\partial^2\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right)\right],$$

と定義される $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の（帰無仮説のもとでの）一致推定量である。ここで $E_0(.)$ は帰無仮説のもとでの期待値を意味する。LM_N は，T 固定，$N\to\infty$ の時，帰無仮説 $H_0: \phi = 0$ のもとで漸近的に自由度 1 のカイ二乗分布に従う。よって $LM_N > 3.84$ であれば有意水準 5%，$LM_N > 6.63$ であれば有意水準 1% で帰無仮説を棄却することになる。

長倉（2020）は $\mathbf{V}_N$ として 以下で定義される OPG 推定量を用いた。

$$\mathbf{V}_N^{OPG}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{s}_i(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)\mathbf{s}_i(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)',$$

ここで $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'_N, \widetilde{\sigma}^2_N, \widetilde{\kappa}_N, 0]'$ であり，$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_N$, $\widetilde{\sigma}^2_N$, $\widetilde{\kappa}_N$ はそれぞれ帰無仮説を制約とした $\boldsymbol{\beta}$, σ^2, κ の制約付き最尤推定量，また

$$\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \\ -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{u}'_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \\ -\frac{T}{2(1+T\kappa)} + \frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'_i\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, ..., N,$$

である[(1)]。この時，OPG 推定量を用いた LM 検定統計量は

$$LM_N^{OPG} = s_\phi(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)^2\mathbf{R}[N\mathbf{V}_N^{OPG}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)]^{-1}\mathbf{R}', \tag{7}$$

と定義される。長倉（2020）はこの検定統計量 LM_N^{OPG} の小標本での性質を調べ，小標本においてはやや過剰棄却する傾向があるものの，実用上問題となるほどではないことを確認した。また実際のデータに応用しその有用性を示している。しかしながら，$\mathbf{V}_N$ としては OPG 推定量の他にもいくつか考えられ，それらを用いることにより小標本におけるパフォーマンスがより向上する可能性がある。次節ではこの可能性について検証する。

2.2　経験ヘシアン推定量および IM 推定量を用いた LM 検定

以下では，EH 推定量および推定量の導出に必要な未知パラメーター $\boldsymbol{\theta}$ についての対数尤度関数のヘシアン行列を計算し，それをもとに EH 推定量および IM 推定量を導出する。

長倉（2020）は(5)式の対数尤度関数に対して，以下のスコアベクトル（対数尤度関数の $\boldsymbol{\theta}$ についての 1 階導関数のベクトル）を導出した。

$$\mathbf{s}_\theta(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\sigma(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\kappa(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\phi(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}, \tag{8}$$

（1）　長倉（2020, p. 94）の 6 行目からの $\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta})$ に関する式のところに出てくる $\mathbf{x}_i$ は $\mathbf{X}_i$ の，$\mathbf{y}_i^{(0)\prime}$ は $\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}$ の間違いである。また同様に p. 99 の $s_\phi(\boldsymbol{\theta})$ のところの $\mathbf{y}_i^{(0)\prime}$ も $\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}$ の間違いである。

$$
s_\sigma(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}, \tag{9}
$$

$$
s_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{NT}{2(1+T\kappa)} + \frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}, \tag{10}
$$

および

$$
s_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}, \tag{11}
$$

ここで $\mathbf{y}^{(-1)} = [\mathbf{y}_1^{(-1)\prime}, \mathbf{y}_2^{(-1)\prime}, \cdots, \mathbf{y}_N^{(-1)\prime}]'$ である。

以下ではまず(5)式の対数尤度関数のヘシアン行列 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})/\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'$ を導出する。補論 1 の計算より，$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ は

$$
\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{H}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{H}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{H}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{H}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta})' & H_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{H}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta})' & H_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{H}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta})' & H_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) & H_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{H}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}', \tag{12}
$$

$$
\mathbf{H}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}, \tag{13}
$$

$$
\mathbf{H}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\kappa} = -\frac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}, \tag{14}
$$

$$
\mathbf{H}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\phi} = -\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)}, \tag{15}
$$

$$
H_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{(\partial\sigma^2)^2} = \frac{NT}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^4}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}, \tag{16}
$$

$$
H_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2\partial\kappa} = -\frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}, \tag{17}
$$

$$
H_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2\partial\phi} = -\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)}, \tag{18}
$$

$$
H_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{(\partial\kappa)^2} = \frac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2} - \frac{T}{\sigma^2(1+T\kappa)^3}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}, \tag{19}
$$

$$
H_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\kappa\partial\phi} = -\frac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{y}^{(-1)}, \tag{20}
$$

$$
H_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{(\partial\phi)^2} = -\mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)}, \tag{21}
$$

となる。この時，$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の EH 推定量は

$$\mathbf{V}_N^{EH}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) = -\frac{1}{N}\mathbf{H}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N),$$

で定義され，この推定量を用いた LM 統計量は

$$LM_N^{EH} = \widetilde{s}_\phi^2 \mathbf{R}[N\mathbf{V}_N^{EH}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)]^{-1}\mathbf{R}', \tag{22}$$

と定義される。

次に $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の IM 推定量を定義し，それを用いた LM 統計量を定義する。IM 推定量は

$$\mathbf{V}_N^{IM}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) = \frac{1}{N}\mathbf{IM}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N), \quad \mathbf{IM}(\boldsymbol{\theta}) = -E_0[\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{X}, \mathbf{y}_0^*],$$

で定義される。補論 2 の計算より $\mathbf{IM}(\boldsymbol{\theta})$ は

$$\mathbf{IM}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{IM}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{IM}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{IM}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{IM}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{IM}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta})' & IM_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{IM}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta})' & IM_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{IM}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta})' & IM_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) & IM_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{IM}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}', \quad \mathbf{IM}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{q,1}, \quad \mathbf{IM}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{q,1}, \\ &\mathbf{IM}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^*, \quad IM_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NT}{2\sigma^4}, \quad IM_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NT}{2(1+T\kappa)}, \\ &IM_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad IM_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2}, \quad IM_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N(T-1)}{(1+T\kappa)}, \\ &IM_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}^*(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* + \frac{N(T-1)(1+T\kappa+\kappa^2)}{1+T\kappa}, \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$\mathbf{X}^* \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0^{*\prime} \otimes \mathbf{a} \\ \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^* \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} \equiv [1, \mathbf{0}_{1,T-1}], \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{T-1,1} & \mathbf{I}_{T-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1,T-1} \end{bmatrix},$$

である。$\mathbf{V}_N^{IM}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)$ を用いた LM 検定統計量は

$$LM_N^{IM} = \widetilde{s}_\phi^2 \mathbf{R}[N\mathbf{V}_N^{IM}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)]^{-1}\mathbf{R}', \tag{23}$$

と定義される。

3　集約化最尤推定

この節では対立仮説（(1)式）と帰無仮説のもとでのパラメーターの集約化最尤推定を考える。

3.1　対立仮説（(1)式）のモデルに対する集約化最尤推定

通常の最尤推定法は(5)式で与えられた対数尤度関数を最大化する未知パラメーターベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の値を最尤推定量として定義する。これは（局所極大値が存在しないような場合は）最大化のための 1 階の条件を満たす $\boldsymbol{\theta}$ の値，すなわち(8)–(11)式で与えられたスコアを 0 にするような $\boldsymbol{\theta}$ の値と等しい。このように対数尤度関数を $\boldsymbol{\theta}$ について最大化することによって $\boldsymbol{\theta}$ を推定する場合，通常は数値計算によってこの $q+2$ 個のパラメーターについて最大化を行う必要があるが，これは q が大きくなるにつれて，計算が困難になってくる。

以下では対数尤度関数の集約化（concentration）をすることにより κ についての集約化対数尤度関数を導出する。この方法のメリットは，この場合，この 1 つのパラメーター κ についてだけ最適化（最大化）を行えばよいため，数値計算のコストが非常に軽減され，より精度のよい結果を得ることが容易となることである。

$(q+1)\times NT$ 行列 $\mathbf{Z}$ を $\mathbf{Z}=[\mathbf{X}',\mathbf{y}^{(-1)}]'$ と定義し，また $(q+1)\times 1$ パラメーターベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ を $\boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\beta}',\phi]'$ と定義する。この時，$\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}$ となる。$\boldsymbol{\gamma}$ についてのスコアベクトルは(8)および(11)より

$$\mathbf{s}_\gamma(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}=\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})(\mathbf{y}-\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}),\tag{24}$$

となる。このスコアベクトルについての 1 階の条件，すなわち $\mathbf{s}_\gamma(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}_{q+1,1}$ を解くことにより

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_c(\kappa)=&\ [\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{Z}']^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}\\ =&\ \left[\mathbf{Z}\mathbf{Z}'-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{Z}'\right]^{-1}\left[\mathbf{Z}\mathbf{y}-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{y}\right]\\ =&\ (\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}')^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}),\end{aligned}\tag{25}$$

を得る。ここで $\mathbf{F}_\kappa=\mathbf{I}_{NT}-\frac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)=\mathbf{I}_N\otimes\left(\mathbf{I}_T-\frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{E}_T\right)$ である。上記 2 つめの等式は(4)の結果を用いることにより得られる。$\boldsymbol{\gamma}_c(\kappa)$ は残りの 2 つの未知パラメーター κ と σ^2 のうち，κ には依存しているが σ^2 には依存していないことに注意が必要である。

次に σ^2 について同様に 1 階の条件の解を求める。まず，

$$\mathbf{u}'\mathbf{u}=\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma},$$

および

$$\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{u}=\mathbf{y}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{y}-2\mathbf{y}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma},$$

より

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'\mathbf{u}-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{u}&=\mathbf{y}'\mathbf{y}-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{y}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}+\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}2\mathbf{y}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}\\&\quad+\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}\\&=\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\boldsymbol{\gamma},\end{aligned}$$

を得る。さらに(25)式で与えられる $\boldsymbol{\gamma}_c(\kappa)$ を上式の γ に代入すると，κ のみの式として

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'\mathbf{u}-\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\mathbf{u} &= \mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\\ &\quad+\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\\ &= \mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}-\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\\ &= \mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\left[\mathbf{F}_\kappa^{-1}-\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y},\end{aligned}\qquad(26)$$

が得られる。ここで $\mathbf{F}_\kappa^{-1}$ は $\mathbf{F}_\kappa$ の逆行列で $\mathbf{F}_\kappa^{-1}=\mathbf{I}_N\otimes(\mathbf{I}_T+\kappa\mathbf{E}_T)$ で与えられる。(9)式および(26)式より，$\mathbf{s}_\sigma(\boldsymbol{\theta})=0$ (および $\mathbf{s}_\gamma(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}_{q,1}$) の解として

$$\sigma_c^2(\kappa)=\frac{1}{NT}\left\{\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\left[\mathbf{F}_\kappa^{-1}-\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\right\},\qquad(27)$$

を得る。(5)式の対数尤度関数に(26)式，(27)式，および $|\boldsymbol{\Omega}|=\sigma^{2T}(1+T\kappa)$ を代入すると $\boldsymbol{\gamma}$ と σ^2 について集約化した集約化対数尤度関数（concentrated log likelihood）

$$\begin{aligned}\log L(\kappa)= &-\tfrac{NT}{2}\log 2\pi+\tfrac{NT}{2}\log(NT)-\tfrac{NT}{2}-\tfrac{N}{2}\log(1+T\kappa)\\ &-\tfrac{NT}{2}\log\left\{\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\left[\mathbf{F}_\kappa^{-1}-\mathbf{Z}'\left(\mathbf{Z}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{Z}'\right)^{-1}\mathbf{Z}\right]\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\right\},\end{aligned}$$

を得る（実際の最適化の計算では定数項は無視できることに注意）。κ の最尤推定値はこの集約化対数尤度関数を最大にする κ の値として求めることができる。この集約化対数尤度関数は κ という 1 変数の関数なので，最大化する κ の探索のための数値計算が非常に容易になる。この最尤推定値を $\widehat{\kappa}_N$ とすると，$\boldsymbol{\gamma}$ と σ^2 の最尤推定値は $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_N=\boldsymbol{\gamma}_c(\widehat{\kappa}_N)$ および $\widehat{\sigma}_N^2=\sigma_c^2(\widehat{\kappa}_N)$ によって求められる。ここで $\boldsymbol{\gamma}_c(\kappa)$ および $\sigma_c^2(\kappa)$ は(25)式および(27)式で与えられる[(2)]。

3.2 帰無仮説のもとでの集約化最尤推定

$\mathbf{Z}$ を $\mathbf{X}$ におきかえるだけで前節と全く同じ議論が適用できるので，結果だけ要約する。κ が与えられたもとで，$\boldsymbol{\beta}$ の最尤推定量は，κ の関数として

$$\boldsymbol{\beta}_{c,0}(\kappa)=(\mathbf{X}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{X}')^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}),$$

で与えられる。同様に，κ が与えられたもとでの σ^2 の最尤推定量は

---

(2)　次章のシミュレーションの設定において，$N=20, T=4, \phi=0.1$ の場合に，通常の最尤推定と集約化最尤推定を 10,000 回行い，推定時間の平均を比べてみたところ，通常の最尤推定は 1 回約 0.0086 秒，集約化最尤推定は 1 回約 0.0028 秒と，約 3 倍の違いが見られた。これは集約化することによって推定時間を短縮できることを示唆している。ただしこれらの結果は推定コード（今回は Matlab という統計ソフトを用いている）にも依存しているため，正式な比較ではないことに注意が必要である。また通常の最尤推定の方も，ここでの設定のように説明変数が 1 つの場合は特に，そこまで時間がかからないため，それほどの違いはない。この 2 つの方法の違いが重要になるのはデータの数が非常に大きい場合や，説明変数の数が非常に多い時などになるだろう。

$$\sigma_{c,0}^2(\kappa) = \frac{1}{NT}\left\{\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\left[\mathbf{F}_\kappa^{-1} - \mathbf{X}'\left(\mathbf{X}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{X}'\right)^{-1}\mathbf{X}\right]\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\right\},$$

で与えられる。κ は以下の集約化対数尤度関数を最大化することにより求める。

$$\begin{aligned}\log L_0(\kappa) = &-\tfrac{NT}{2}\log 2\pi + \tfrac{NT}{2}\log(NT) - \tfrac{NT}{2} - \tfrac{N}{2}\log(1+T\kappa)\\ &-\tfrac{NT}{2}\log\left\{\mathbf{y}'\mathbf{F}_\kappa\left[\mathbf{F}_\kappa^{-1} - \mathbf{X}'\left(\mathbf{X}\mathbf{F}_\kappa\mathbf{X}'\right)^{-1}\mathbf{X}\right]\mathbf{F}_\kappa\mathbf{y}\right\}.\end{aligned}$$

この最尤推定値を $\widehat{\kappa}_{0,N}$ とすると，$\boldsymbol{\beta}$ と σ^2 の最尤推定値は $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0,N} = \boldsymbol{\beta}_{c,0}(\widehat{\kappa}_N)$ および $\widehat{\sigma}_{0,N}^2 = \sigma_{c,0}^2(\widehat{\kappa}_N)$ によって求められる。

4　シミュレーション

本章では前章で提案した漸近共分散行列推定量を用いた場合の長倉（2020）の LM 検定の小標本における実際のサイズおよび検出力を確認するためにシミュレーションを行う。

以下では(1)式よりシミュレーションを行う。ここで $\mathbf{x}_{i,t}$ は $\mathbf{x}_{i,t} = [1, x_{i,t}]'$，$x_{i,t} \sim N(0,1)$, $y_{i,0} \sim N(0,1)$ とし, $\boldsymbol{\beta} = [1,1]'$ および $\sigma^2 = \kappa = 1$ に固定する。また ϕ の値として $\phi = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ の 4 つの値を用いる。さらに T については $T = 2, 4$ の 2 つの値，N は $N = 20, 40$ の 2 つの値を用いる。シミュレーションは以下の手順で行う。

(i) $\mathbf{x}_{i,t} = [1, x_{i,t}]'$, $x_{i,t} \sim N(0,1)$, $i = 1, ..., N$, $t = 1, ..., T$ を発生させる。以後の手順では，（異なった ϕ に対して）T と N の組み合わせが同じ場合には，この固定した $\mathbf{x}_{i,t}$ および $y_{0,t}$ を繰り返し用いる。

(ii) (1)式で定義したモデルより $y_{i,t}$, $i = 1, ..., N$, $t = 1, ..., T$ を発生させる。

(iii) 手順(i)で発生させた $\mathbf{x}_{i,t}$, $y_{i,0}$，および手順(ii)で発生させた $y_{i,t}$ より（7)式，(22)式，および(23)式で定義された 3 つの LM 検定統計量を計算し，有意水準 1%および 5%で検定を行う。

(iv) 手順(ii)–(iii)を 10,000 回繰り返し，そのうち棄却された割合を実際のサイズ（$\phi = 0$ の時）および検出力（$\phi = 0.1, 0.3, 0.5$ の時）とする。

結果は表 1 のようになった。EH 推定量，IM 推定量のどちらもサイズパフォーマンスは OPG 推定量を用いた時よりもよくなっているのが見て取れる。特に IM 推定量を用いた場合は過剰棄却の問題はほとんどなくなっている。EH 推定量を用いた時は過剰棄却の問題はやや残っているが，それでも OPG 推定量を用いた時よりは，同問題は緩和されている。検出力については，EH 推定量を用いた時も，IM 推定量を用いた時も，OPG 推定量を用いた時よりも悪くなっているが，実用上は十分な検出力を持っているといえよう。ここで，OPG 推定量の方が一見すると検出力が大きく見える理由は，ここでの結果はサイズ調整をしたものではないためである。過剰棄却が起きているということは，OPG 推定量を用いた場合の LM 検定統計量の実際のサイズは名目のサイズよりも大

表 1　各 LM 検定の小標本における実際のサイズと検出力（% 表示）

(a) $T = 2$ の場合

		$N = 20$				$N = 40$			
		ϕ				ϕ			
		0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1%	OPG	4.1	6.5	33.6	75.5	2.4	7.0	61.6	97.8
	EH	3.5	5.8	32.9	74.8	2.8	8.0	64.4	98.0
	IM	1.8	3.2	19.0	50.6	1.9	6.6	56.5	93.7
5%	OPG	13.4	18.4	57.5	90.6	8.8	19.7	82.1	99.6
	EH	8.3	13.2	50.7	86.2	7.4	18.5	81.0	99.2
	IM	5.9	9.5	39.5	73.8	6.0	16.9	77.1	96.7

(b) $T = 4$ の場合

		$N = 20$				$N = 40$			
		ϕ				ϕ			
		0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1%	OPG	2.9	12.7	83.6	99.8	2.0	20.6	98.4	100
	EH	2.2	11.4	87.5	97.9	1.5	18.9	98.9	99.0
	IM	1.0	9.5	83.6	97.9	1.0	18.6	98.6	99.8
5%	OPG	11.0	31.8	95.7	100	7.8	42.2	99.8	100
	EH	7.0	25.4	95.4	98.0	5.9	38.1	99.8	97.0
	IM	5.2	24.1	94.2	98.2	5.0	38.3	99.7	99.8

（注） 第 1 列の 1%，5%は名目のサイズを表す。$\phi = 0$ の列が実際のサイズ，それ以外の列が実際の検出力を表す。OPG，EH，IM はそれぞれ OPG 推定量，EH 推定量，IM 推定量を用いた場合の LM 検定を表す。

きいということなので，実際のサイズがより名目のサイズに近い EH 推定量や IM 推定量を用いた場合よりも検出力が大きくなるのは自然である。

総じて，OPG 推定量の過剰棄却の問題は，EH 推定量や IM 推定量（特に IM 推定量）を用いることにより，標本のサイズが比較的小さい時でも緩和される（IM 推定量の時は名目のサイズとほぼ同じ）ことが確認でき，また検出力も実際の応用では十分であろうと思われる。

5　結論

本稿では長倉（2020）の LM 検定統計量において使われた漸近共分散行列の OPG 推定量の代わりに，代替的な漸近共分散行列推定量，すなわち，EH 推定量と IM 推定量を用いて，比較的小標本における LM 検定のパフォーマンスの改善を試みた。シミュレーションによって確認した結果，どちらの推定量も OPG 推定量よりもパフォーマンスがよいが，IM 推定量が 3 つの中で最もよいパ

フォーマンスを示した。

参　考　文　献

Bera, A. K. and Mckenzie, C.R. (1986) “Alternative forms and properties of the score test,” *Journal of Applied Statistics*, 13(1), 13–25.

Hsiao, C. (2015), *Analysis of Panel Data*, 3rd ed. Cambridge University Press.

千木良弘朗，早川和彦，山本拓 (2011)『動学的パネルデータ分析』，知泉書館 [Chigira, Hiroaki, Hayakawa, Kazuhiko, and Yamamoto, Taku, *Dogakuteki Panel Data Bunseki*, Chisenshokan, 2011]

長倉大輔 (2020)「動学的パネルデータモデルに対する静学的パネルデータモデルの検定」『三田学会雑誌』，第 113 巻第 1 号，89–100 [Nagakura, Daisuke, “Dogakuteki Panel Data Model nitaisuru Seigakuteki Panel Data Model no Kentei,” *Mita Gakkai Zasshi*, Vol. 113, No. 1, 89–100, 2020]

松浦克己，コリン・マッケンジー (2009) 『ミクロ計量経済学』，東洋経済新報社 [Matsuura, Katsumi and McKenzie, Colin, *Micro Keiryo Keizaigaku*, Toyo Keizai Shimposha, 2009]

補論 1： ヘシアン行列の計算

(8)式より

$$\mathbf{H}_{\beta\beta} \equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta'} = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta'} = -\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}',$$

および

$$\mathbf{H}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} = -\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)},$$

を得る。また(4)式および(8)式より

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\beta\sigma} \equiv \tfrac{\partial \mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = \mathbf{X}\left(\mathbf{I}_N \otimes \tfrac{\partial \boldsymbol{\Omega}^{-1}}{\partial \sigma^2}\right)\mathbf{u} &= -\tfrac{1}{\sigma^4}\mathbf{X}\left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\mathbf{I}_T - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{E}_T\right)\right]\mathbf{u} \\ &= -\tfrac{1}{\sigma^4}\mathbf{X}\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T\right)\right]\mathbf{u},\end{aligned}$$

および

$$\mathbf{H}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\beta}{\partial \kappa} = \mathbf{X}\left(\mathbf{I}_N \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^{-1}}{\partial \kappa}\right)\mathbf{u} = -\frac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{X}\left(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T\right)\mathbf{u},$$

を得る。さらに(4)式および(9)式より

$$\begin{aligned}H_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) &\equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\sigma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = \frac{NT}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \frac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\mathbf{u}, \\ H_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) &\equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\sigma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} = -\frac{1}{2\sigma^4(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u},\end{aligned}$$

および

$$
\begin{aligned}
H_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \tfrac{\partial \mathbf{s}_\sigma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} &= \tfrac{1}{2\sigma^4}\tfrac{\partial}{\partial \phi}\left\{\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\mathbf{u}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2\sigma^4}\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}'}\left\{\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\mathbf{u}\right\}\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\phi} \\
&= \tfrac{1}{\sigma^4}\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\phi} \\
&= -\tfrac{1}{\sigma^4}\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\mathbf{y}^{(-1)},
\end{aligned}
$$

を得る。(10)式より

$$
H_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\kappa(\boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} = \frac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2} - \frac{T}{\sigma^2(1+T\kappa)^3}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u},
$$

および

$$
\begin{aligned}
H_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \tfrac{\partial \mathbf{s}_\kappa(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} &= \tfrac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\tfrac{\partial\left[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right]}{\partial \phi} \\
&= \tfrac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\tfrac{\partial\left[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right]}{\partial \mathbf{u}'}\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \\
&= -\tfrac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{y}^{(-1)},
\end{aligned}
$$

を得る。最後に(11)式より

$$
H_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \mathbf{s}_\phi}{\partial \phi} = \mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} = -\mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)},
$$

を得る。

補論２：情報行列の計算

以下では表記の簡単化のために $E_0^*(.) \equiv E_0(.|\mathbf{X}, \mathbf{y}_0^*)$ とする。(12)式より

$$
\mathbf{IM}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[\mathbf{H}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}',
$$

が得られる。(13)式より

$$
\mathbf{IM}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[\mathbf{H}_{\beta\sigma}(\boldsymbol{\theta})] = -\frac{1}{\sigma^4}\mathbf{X}\left[\mathbf{I}_{NT} - \frac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]E_0^*(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{q,1},
$$

および(14)式より

$$
\mathbf{IM}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[\mathbf{H}_{\beta\kappa}(\boldsymbol{\theta})] = -\frac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)E_0^*(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{q,1},
$$

をそれぞれ得る。また

$$
\mathbf{X}_i^* = \begin{bmatrix} y_{i,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0}_{q,1} & \mathbf{x}_{i,1} & \cdots & \mathbf{x}_{i,T-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i,0}\mathbf{a} \\ \mathbf{X}_i\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^* \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{a} \equiv [1, \mathbf{0}_{1,T-1}], \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{T-1,1} & \mathbf{I}_{T-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1,T-1} \end{bmatrix},
$$

とすると，

$$E_0^*[\mathbf{y}_i^{(-1)}] = \begin{bmatrix} y_{i,0} \\ \mathbf{x}_{i,1}'\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{i,T-1}'\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^*,$$

であるので，

$$E_0^*[\mathbf{y}^{(-1)}] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N^*\boldsymbol{\beta}^* \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^*, \tag{28}$$

を得る。ここで $\mathbf{X}^*$ は

$$\mathbf{X}^* \equiv [\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, ...\mathbf{X}_N^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{*\prime} \otimes \mathbf{a} \\ \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \end{bmatrix},$$

と定義される $(q+1) \times TN$ 行列 である。よって (15)式と(28)式より

$$\mathbf{IM}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[\mathbf{H}_{\beta\phi}(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})E_0^*[\mathbf{y}^{(-1)}] = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^*,$$

を得る。次に，(16)式と

$$E_0^*(\mathbf{u}'\mathbf{u}) = NT(1+\kappa)\sigma^2, \tag{29}$$

および

$$\begin{aligned} E_0^*[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}] &= \mathrm{tr}[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)E_0^*(\mathbf{u}\mathbf{u}')] \\ &= \mathrm{tr}[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega})] \\ &= \mathrm{tr}[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T\boldsymbol{\Omega})] \\ &= NT(1+T\kappa)\sigma^2, \end{aligned} \tag{30}$$

より

$$\begin{aligned} IM_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[H_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta})] &= -\tfrac{NT}{2\sigma^4} + \tfrac{1}{\sigma^6}E_0^*\left[\mathbf{u}'\mathbf{u} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right] \\ &= -\tfrac{NT}{2\sigma^4} + \tfrac{1}{\sigma^6}\left[NT(1+\kappa)\sigma^2 - \kappa NT\sigma^2\right] \\ &= \tfrac{NT}{2\sigma^4}, \end{aligned}$$

を得る。また(17)式と(30)より

$$IM_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[H_{\sigma\kappa}(\boldsymbol{\theta})] = \tfrac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}E_0^*[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}] = \tfrac{NT}{2(1+T\kappa)},$$

を得る。また

$$
\begin{aligned}
E_0^*\left[\mathbf{u}_i'\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] &= E_0^*\left([u_{i,1}, u_{i,2}, ..., u_{i,T}][y_{i,0}, y_{i,1}, ..., y_{i,T-1}]'\right) \\
&= E_0^*\left(y_{i,0}u_{i,1} + \sum_{t=2}^{T} y_{i,t-1}u_{i,t}\right) \\
&= E_0^*\left[\sum_{t=2}^{T}(\mathbf{x}_{i,t-1}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,t-1})u_{i,t}\right] \\
&= E_0^*\left[\sum_{t=2}^{T} u_{i,t-1}u_{i,t}\right] \\
&= \sum_{t=2}^{T} E_0^*\left[\eta_i^2\right] \\
&= (T-1)\kappa\sigma^2,
\end{aligned}
$$

より

$$
E_0^*\left[\mathbf{u}'\mathbf{y}^{(-1)}\right] = E_0^*\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] = N(T-1)\kappa\sigma^2, \tag{31}
$$

を得る。さらに $t > 0$ に対して

$$
E_0^*(y_{i,t}u_{i,t}) = E_0^*[(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,t})u_{i,t}] = E_0^*(u_{i,t}^2) = (1+\kappa)\sigma^2,
$$

であり，$t > 0,\ s > 0,\ s \neq t$ に対して

$$
E_0^*(y_{i,t}u_{i,s}) = E_0^*[(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,t})u_{i,s}] = E_0^*(\eta_i^2) = \kappa\sigma^2,
$$

となることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
E_0^*\left[\mathbf{y}_i^{(-1)}\mathbf{u}_i'\right] &= E_0^*([y_{i,0}, y_{i,1}, ..., y_{i,T-1}]'[u_{i,1}, u_{i,2}, ..., u_{i,T}]) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (1+\kappa)\sigma^2 & \kappa\sigma^2 & \cdots & \kappa\sigma^2 & \kappa\sigma^2 \\ \kappa\sigma^2 & (1+\kappa)\sigma^2 & \cdots & \kappa\sigma^2 & \kappa\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \kappa\sigma^2 & \kappa\sigma^2 & \cdots & (1+\kappa)\sigma^2 & \kappa\sigma^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,T} \\ \kappa\sigma^2\mathbf{E}_{T-1,T} + \sigma^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{\Omega}^*,
\end{aligned} \tag{32}
$$

を得る。ここで $\mathbf{E}_{t,s}$ はすべての要素が 1 の $t \times s$ 行列,

$$
\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{T-1} & \mathbf{0}_{T-1,1} \end{bmatrix},
$$

である。(32)式より $E_0^*[\mathbf{y}^{(-1)}\mathbf{u}'] = \mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^*$ であるので

$$
\begin{aligned}
E_0^*\left[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{y}^{(-1)}\right] &= \mathrm{tr}\{(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)E_0^*[\mathbf{y}^{(-1)}\mathbf{u}']\} \\
&= \mathrm{tr}[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^*)] \\
&= \mathrm{tr}[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T\boldsymbol{\Omega}^*)] \\
&= N\mathrm{tr}(\mathbf{E}_T\boldsymbol{\Omega}^*) \\
&= N[(T-1)\sigma^2 + T(T-1)\kappa\sigma^2] \\
&= N(T-1)(1+T\kappa)\sigma^2,
\end{aligned} \tag{33}
$$

を得る。(18)式，(31)式，および(33)式より

$$
\begin{aligned}
IM_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[H_{\sigma\phi}(\boldsymbol{\theta})] &= E_0^*\left[\tfrac{1}{\sigma^4}\mathbf{u}'\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\right]\mathbf{y}^{(-1)}\right] \\
&= \tfrac{1}{\sigma^4}\left\{E_0^*[\mathbf{u}'\mathbf{y}^{(-1)}] - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}E_0^*[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{y}^{(-1)}]\right\} \\
&= \tfrac{1}{\sigma^4}\left[N(T-1)\kappa\sigma^2 - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}N(T-1)(1+T\kappa)\sigma^2\right] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

を得る。(19)式および(30)より

$$
\begin{aligned}
IM_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[H_{\kappa\kappa}(\boldsymbol{\theta})] &= -\tfrac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2} + \tfrac{T}{\sigma^2(1+T\kappa)^3}E_0^*\left[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right] \\
&= -\tfrac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2} + \tfrac{T}{\sigma^2(1+T\kappa)^3}NT(1+T\kappa)\sigma^2 \\
&= \tfrac{NT^2}{2(1+T\kappa)^2},
\end{aligned}
$$

を得，また(20)式および(33)より

$$
\begin{aligned}
IM_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -E_0^*[H_{\kappa\phi}(\boldsymbol{\theta})] &= \tfrac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}E_0^*\left[\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{y}^{(-1)}\right] \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}N(T-1)(1+T\kappa)\sigma^2 \\
&= \tfrac{N(T-1)}{1+T\kappa},
\end{aligned}
$$

を得る。最後に $IM_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta})$ を求める。まず，$t > 0$ に対して

$$
E_0^*(y_{i,t}^2) = E_0^*[(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,t})^2] = (\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta})^2 + (1+\kappa)\sigma^2,
$$

であり，また $t, s > 0,\, t \neq s$ に対して

$$
E_0^*(y_{i,t}y_{i,s}) = E_0^*[(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,t})(\mathbf{x}_{i,s}'\boldsymbol{\beta} + u_{i,s})] = (\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta})(\mathbf{x}_{i,s}'\boldsymbol{\beta}) + \kappa\sigma^2,
$$

である。よって

$$
\begin{aligned}
E_0^*\left[\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] = \sum_{t=0}^{T-1} E_0^*(y_{i,t}^2) &= y_{i,0}^2 + \sum_{t=1}^{T-1}(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta})^2 + (T-1)(1+\kappa)\sigma^2 \\
&= \boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* + (T-1)(1+\kappa)\sigma^2,
\end{aligned} \tag{34}
$$

および

$$
\begin{aligned}
E_0^*\left[\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{E}_T\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] &= E_0^*\left[\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1} y_{i,t}y_{i,s}\right] \\
&= E_0^*\left[\sum_{t=0}^{T-1} y_{i,t}^2 + 2\sum_{t=0}^{T-2}\sum_{s=t+1}^{T-1} y_{i,t}y_{i,s}\right] \\
&= E_0^*\left[\sum_{t=0}^{T-1} y_{i,t}^2 + 2y_{i,0}\sum_{s=1}^{T-1} y_{i,s} + 2\sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s=t+1}^{T-1} y_{i,t}y_{i,s}\right] \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} E_0^*(y_{i,t}^2) + 2y_{i,0}\sum_{s=1}^{T-1} E_0^*(y_{i,s}) + 2\sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s=t+1}^{T-1} E_0^*(y_{i,t}y_{i,s}) \qquad (35) \\
&= y_{i,0}^2 + \sum_{t=1}^{T-1}(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta})^2 + (T-1)(1+\kappa)\sigma^2 + 2y_{i,0}\sum_{s=1}^{T-1}\mathbf{x}_{i,s}'\boldsymbol{\beta} \\
&\quad +2\sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s=t+1}^{T-1}(\mathbf{x}_{i,t}'\boldsymbol{\beta})(\mathbf{x}_{i,s}'\boldsymbol{\beta}) + (T-1)(T-2)\kappa\sigma^2 \\
&= \boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\mathbf{E}_T\mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* + \sigma^2(T-1)[1+(T-1)\kappa],
\end{aligned}
$$

を得る。(21)式，(34)式，および(35)式より，

$$
\begin{aligned}
IM_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta}) &\equiv -E_0^*[H_{\phi\phi}(\boldsymbol{\theta})] \\
&= E_0^*[\mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{y}^{(-1)}] \\
&= E_0^*\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left\{E_0^*\left[\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{y}_i^{(-1)}\right] - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}E_0^*\left[\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{E}_T\mathbf{y}_i^{(-1)}\right]\right\} \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\mathbf{E}_T\mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^*\right) \\
&\quad +N(T-1)(1+\kappa) - N\tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(T-1)[1+(T-1)\kappa] \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}^{*\prime}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{X}_i^*\mathbf{X}_i^{*\prime} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{X}_i^*\mathbf{E}_T'\mathbf{X}_i^{*\prime}\right)\boldsymbol{\beta}^* + \tfrac{N(T-1)(1+T\kappa+\kappa^2)}{1+T\kappa} \\
&= \tfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\beta}^{*\prime}\mathbf{X}^*\left[\mathbf{I}_{NT} - \tfrac{\kappa}{1+T\kappa}(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{E}_T)\right]\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}^* + \tfrac{N(T-1)(1+T\kappa+\kappa^2)}{1+T\kappa},
\end{aligned}
$$

を得る。

要旨: 本稿では長倉（2020）で提案された動学的パネルデータモデルに対する静学的パネルデータモデルのラグランジュ乗数検定の小標本におけるサイズパフォーマンスを改良することを目的とする。長倉（2020）では漸近分散の推定量として，外積勾配推定量を用いているが，若干の過剰棄却の問題が生じていた。本稿では経験ヘシアン推定量および情報行列推定量を用いることを提案する。また本稿で考える動学的パネルデータモデルについて，1 つのパラメーターのみに依存する集約化対数尤度関数を求める。シミュレーション実験により，提案された検定統計量は小標本においても実際のサイズがほぼ名目のサイズと等しいことが確認された。

キーワード: 静学的パネルデータモデル，動学的パネルデータモデル，ラグランジュ乗数検定，経験ヘシアン漸近分散推定量，情報量行列漸近分散推定量，集約化対数尤度