| | |
|---|---|
| Title | Antonelliの連立偏微分方程式 |
| Sub Title | Antonelli's system of partial differential equations |
| Author | 丸山, 徹(Maruyama, Toru) |
| Publisher | 慶應義塾経済学会 |
| Publication year | 2023 |
| Jtitle | 三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.115, No.4 (2023. 1) ,p.367 (47)- 392 (72) |
| JaLC DOI | 10.14991/001.20230101-0047 |
| Abstract | |
| Notes | 解説 |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20230101-0047 |

「三田学会雑誌」115 巻 4 号（2023 年 1 月）

解　説

# Antonelli の連立偏微分方程式

丸山　徹 *

## 序

1886 年，G.B. Antonelli は，効用理論における積分可能条件をめぐる先駆的な成果を公刊した。『経済学の数学的理論』と題した小冊 [1] がそれである。彼の推論の主たる根拠を成しているのは，一階の線形連立偏微分方程式の解法に関する，19 世紀における解析学の蓄積であった。この覚え書は，Antonelli が提示した型の方程式をめぐる解の存在と具体的解法を示そうとするものである。

$U$ を $\mathbb{R}^l$ の開集合とし，函数

$$f_i\colon U \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

は与えられたものとする。形式的に

$$\sum_{i=1}^{l} f_i(x)dx_i = 0 \tag{1}$$

なる方程式を考え，これを全微分方程式（total differential equation）と呼ぶが，これは[(1)]

$$D_i\varphi = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, l \tag{2}$$

を満たす微分可能な函数 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ を求める問題を意味する。このような函数 $\varphi$ が存在するとき，上記の全微分方程式 (1) は狭義の積分可能性を満たす，あるいは完全（exact）であるという。また 0 にならない函数 $\mu : U \to \mathbb{R}$ と函数 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ とが存在して

＊　慶應義塾大学名誉教授

（1）　$D_i\varphi = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \varphi_{x_i}$ であり，適宜便利な記法を用いる。

$$D_i \varphi = \mu \cdot f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, l \tag{3}$$

が成り立つとき，全微分方程式は積分可能性（integrability）を満たす（あるいは積分可能 integrable である）といい，$\varphi$ をこの方程式の積分，$\mu$ を積分因子（integral factor）と称する。

方程式(1)が積分可能であるための必要十分条件は G. Frobenius[4] によって与えられた。次のように記号を約束する。

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l \tag{4}$$

$$A_{ijk} = a_{jk} f_i + a_{ki} f_j + a_{ij} f_k,\ i, j, k = 1, 2, \cdots, l \tag{5}$$

**Frobenius の定理**　各 $f_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ が $\mathfrak{C}^l$- 級であるとき，全微分方程式(1)が積分可能であるためには,

$$A_{1pq} = 0, \quad p,\ q = 2, 3, \cdots, l, \quad p \neq q \tag{6}$$

の成り立つことが必要十分である[(2)]。

この定理を証明するためには，単独の一階線形同次偏微分方程式に関する次の基本定理が不可欠の役割を果たす。

$U$ を $\mathbb{R}^l$ の開集合，函数

$$\xi_i : U \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

は与件とし,

$$\sum_{i=1}^{l} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = 0 \tag{7}$$

を満たす函数 $u$ を見出す問題を考えよう。$\xi_1(x), \xi_2(x), \cdots, \xi_l(x)$ のうちすくなくともひとつは 0 でないような点 $x$ を方程式(7)の正常点と称する。

**Monge-Cauchy の定理**　各 $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ が $\mathfrak{C}^1$-級であるならば，方程式(7)には正常点の近傍において[(3)]

$$\operatorname{rank} D(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{l-1}) = l - 1 \tag{8}$$

を満たす $(l-1)$ 個の解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{l-1}$ が存在する。

$S : \mathbb{R}^{l-1} \to \mathbb{R}$ を任意の微分可能な函数とすれば,

---

(2)　(6)が成り立てば，すべての $i, j, k = 1, 2, \cdots, l$ について $A_{ijk} = 0$ が成り立つ。

$$S(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{l-1}) \tag{9}$$

もまた(7)の解であり，(7)の任意の解は(9)の形式に表現される。

Frobenius の定理は Monge-Cauchy の定理を基礎とし，$l$ についての数学的帰納法によって証明される。

いま消費財が $l$ 種存在するものとし，逆需要函数 $P(x) = (P_1(x), P_2(x), \cdots, P_l(x))$ が定義されるとしよう。（ここで $x$ は消費財の需要ベクトルである。）観察された需要函数または逆需要函数を既知として，それを生成する効用函数を求める問題を，全微分方程式

$$\sum_{j=1}^{l} P_j(x) dx_j = 0 \tag{10}$$

の積分可能性として把握したのは Pareto[13],[14] であった。そして積分可能性を保証する経済学的条件を初めて究明したのは Samuelson[16] である。

細矢・廣 [6] は，Frobenius の定理に基づく Pareto-Samuelson の数理の全貌を厳密に整理した研究である。

しかし一方，逆需要函数から効用函数を析出する問題に Pareto よりもひと足先んじて成果を世に問うた Antonelli は，Frobenius の定理を経由せず，直接に連立偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} - P_j \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad j = 2, 3, \cdots, l \tag{11}$$

（$P_1(x) = 1$ とする）を解く形式で問題を把握した。この型の一階線形連立偏微分方程式は所謂 Jacobi 系と呼ばれる条件を満たし，幾とおりかの解法が知られている。以下の解説は，その一般論に多少なりとも見易い整理を加え，細矢・廣 [6] を補充しようとするものにほかならない(4)。

数学的な基礎理論をひととおり記述したのちに，最終節において Antonelli の結果を正当化する根拠を明示することとしよう。本稿が数理経済学に携わる読者だけでなく，効用理論の発展に関心

(3)　(8)の左辺は函数 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{l-1})$ の導函数を表わす行列（Jacobian matrix）

$$D(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{l-1}) = \begin{pmatrix} \partial\eta_1/\partial x_1, & \cdots & ,\partial\eta_1/\partial x_l \\ \partial\eta_2/\partial x_1, & \cdots & ,\partial\eta_2/\partial x_l \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\eta_{l-1}/\partial x_1, & \cdots & ,\partial\eta_{l-1}/\partial x_l \end{pmatrix}$$

の階数を示している。

(4)　この問題にはより現代的な視覚からの取り扱いも可能であるが，ここでは専ら古典解析の手法に拠った。とくに藤原 [5]pp. 496–517, Carathéodory [2] pp. 31–45 などを参照した。また単独の方程式については南雲 [11] 第 2, 3 章および [12] 第 1 章の説明が優れている。

を寄せる経済学史家にとっても参考になるならば幸いである。

## I.　微分作用素 $X^i$

$\mathbb{R}^l$ の適当な領域 $\Omega$ で定義された $\mathfrak{C}^1$-級の実数値函数

$$\xi_k^i : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, r; \\ k = 1, 2, \cdots, l \end{array}$$

が与えられたとき，$\mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ 上の微分作用素 $X^i : \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}(\Omega, \mathbb{R})$ を

$$X^i = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \tag{1}$$

つまり各 $v \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ に対して

$$(X^i v)(x) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i(x) \frac{\partial v}{\partial x_k}(x), \quad x \in \Omega,\ i = 1, 2, \cdots, r \tag{1'}$$

と定める。これを用いて

$$X^i u = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \tag{2}$$

すなわち（$(X^i u)(x) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$）を満たす $u \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ を求める連立線形一階の偏微分方程式の解法について論じよう。

まず微分作用素 $X^i$ の初等的性質を摘記しておく。$1°$～$3°$ では添数 $i$ を省略し，単に $X$ と表記する。

$1°$　任意の $v, w \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$X(\alpha v + \beta w) = \alpha X v + \beta X w.$$

つまり $X$ は線形である。

$2°$　$v, w \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$，$F \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ に対して[(5)]，

$$XF(v, w) = \frac{\partial F}{\partial v} X v + \frac{\partial F}{\partial w} X w.$$

---

(5)　ここで $\partial F/\partial v, \partial F/\partial w$ はそれぞれ $v, w$ を代入する $F$ の第一，第二変数についての偏導函数である。

証明

$$XF(v,w) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} F(v,w)$$
$$= \sum_{k=1}^{l} \xi_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x_k} \right\}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial v} Xv + \frac{\partial F}{\partial w} Xw.$$

（証了）

3° $v, w \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ に対して，

$$X(v \cdot w) = wXv + vXw.$$

証明

$$X(v \cdot w) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}(v \cdot w) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k \left( w \frac{\partial v}{\partial x_k} + v \frac{\partial w}{\partial x_k} \right)$$
$$= w \sum_{k=1}^{l} \xi_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + v \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial w}{\partial x_k} = wXv + vXw.$$

（証了）

4° $v \in \mathfrak{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ に対して，(6)

$$X^i(X^j v) - X^j(X^i v) = \sum_{k=1}^{l} \left\{ X^i \xi_k^j - X^j \xi_k^i \right\} \frac{\partial v}{\partial x_k},$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, r.$$

証明

$$X^i(X^j v) = X^i \left\{ \sum_{k=1}^{l} \xi_k^j \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{l} X^i \left( \xi_k^j \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \quad （1° による） \tag{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{l} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_k} X^i \xi_k^j + \xi_k^j X^i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\}. \quad （3° による）$$

同様にして

$$X^j(X^i v) = \sum_{k=1}^{l} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_k} X^j \xi_k^i + \xi_k^i X^j \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\}. \tag{4}$$

(3), (4)右辺の $\sum_k \xi_k^j X^i \partial v / \partial x_k$ と $\sum_k \xi_k^i X^j \partial v / \partial x_k$ とは相殺するので，ただちに 4° を得る。念のため直接計算をすると次のとおり。

---

(6) $X^i(X^j v)$ を計算するためには，以下に見るとおり $\partial^2 v / \partial x_k \partial x_h$ が現われる。ゆえに $v$ は $\mathfrak{C}^2$-級であることを要する。

$$
\begin{aligned}
X^i(X^j v) - X^j(X^i v) &= X^i \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^j \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) - X^j \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{l} \xi_h^i \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^j \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) - \sum_{h=1}^{l} \xi_h^j \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{l} \xi_h^i \left\{ \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{l} \xi_k^j \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_h} \right\} \\
&\quad - \sum_{h=1}^{l} \xi_h^j \left\{ \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_h} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{l} \left\{ \sum_{h=1}^{l} \xi_h^i \frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_h} - \sum_{h=1}^{l} \xi_h^j \frac{\partial \xi_k^i}{\partial x_h} \right\} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{l} \{ X^i \xi_k^j - X^j \xi_k^i \} \frac{\partial v}{\partial x_k}.
\end{aligned}
$$

これで $4^\circ$ が示された。 （証了）

微分作用素 $X^i$ の初等的性質として最後にその独立・従属の関係を述べておこう。

**定義**　すべての $v \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ に対して

$$
\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x)(X^i v)(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in \Omega \tag{5}
$$

を満たす，すべてが恒等的には 0 でない函数 $\lambda_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が存在するとき（ここで $\lambda_i$ はすべての $v$ に共通），$X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次従属（pseudo linearly dependent）であるという。この作用素系が擬一次従属でない場合，それは擬一次独立（pseudo linearly independent）であるという。[7]

ただしここで，函数 $\lambda_i$ には（連続性，滑らかさなど）特定の性質は要請されていないことに注意しよう。また(5)は簡単に

$$
\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i = 0 \tag{5'}
$$

(7)　ここでは $\lambda_i$ が定数ではなく $\Omega$ 上の函数なので，通常の一次従属・独立の概念と区別するために，仮に擬一次従属・独立という用語を工夫したのである。
　念のため書き添えるが，擬一次従属というのは，恒等的には 0 でない $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ がすくなくともひとつ存在することを意味する。

と書いても誤解はあるまい。

5° 次の同値関係が成り立つ。

(i) $X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次従属 $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x)\xi_k^i(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in \Omega,\ k = 1, 2, \cdots, l \tag{6}$$

を満たす，すべてが恒等的には 0 でない函数 $\lambda_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が存在する。

(ii) $X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次独立 $\Longleftrightarrow$

$$\text{rank } (\xi_k^i(x)) = r \quad \text{for all} \quad x \in \Omega.^{(8)} \tag{7}$$

**証明** (i) 定義により，$v \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = \sum_{k=1}^{l} \left( \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_k^i \right) \frac{\partial v}{\partial x_k}. \tag{8}$$

したがって(6)を満たす（すべてが恒等的には 0 でない）函数 $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が存在するならば，この $\lambda_i$ について

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i v = 0 \quad \text{for all} \quad v \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}). \tag{9}$$

つまり $X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次従属である。逆に，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ が擬一次従属と仮定し，（すべてが恒等的には 0 でない）ある函数 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ に対して(9)が成り立つとしよう。いま仮に，この $\lambda_i$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\bar{x})\xi_{\bar{k}}^i(\bar{x}) \neq 0 \tag{10}$$

となる $\bar{k}$ と $\bar{x} \in \Omega$ とが存在するものとしてみると(9)に矛盾が生ずる。実際，$\bar{v} \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ を特定化して $\bar{v}(x) = x_{\bar{k}}$ とすれば，この $\bar{v}$ については(8)により

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\bar{x})(X^i \bar{v})(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{l} \left( \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\bar{x})\xi_k^i(\bar{x}) \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k}(\bar{x})$$

---

(8) ここで $(\xi_k^i(x))$ は $\xi_k^i(x)$ を $k$ 行 $i$ 列要素とする $l$ 行 $r$ 列の行列を表わす。

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\bar{x}) \xi_k^i(\bar{x})$$
$$\neq 0 \qquad ((10)\text{による})$$

これは(9)に矛盾。こうして (i) の同値関係が示された。

(ii)　(6)を行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1(x) & \xi_1^2(x) & \cdots & \xi_1^r(x) \\ \xi_2^1(x) & \xi_2^2(x) & \cdots & \xi_2^r(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_l^1(x) & \xi_l^2(x) & \cdots & \xi_l^r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \vdots \\ \lambda_r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

左辺の係数行列を $\varXi(x)$ と書く。まず $r \leqq l$ の場合には，rank $\varXi(x) \leqq r$。すべての $x \in \varOmega$ においてrank $\varXi(x) = r$ の場合は，(6)を成り立たしめる $\lambda_i$ は

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \cdots = \lambda_r(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in \varOmega$$

に限る。したがって (i) により，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次独立である。ある $\bar{x} \in \varOmega$ においてrank $\varXi(x) < r$ が成り立つならば，この $\bar{x}$ において，(11)は解 $(\lambda_1(\bar{x}), \lambda_2(\bar{x}), \cdots, \lambda_r(\bar{x})) \neq 0$ を有する。ゆえに再び (i) により，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次従属である。$r > l$ の場合はrank $\varXi(x) \leqq l < r$ であるから，(7)の $\Longleftrightarrow$ の両側はともに成り立たない。（証了）

いま $X^1, X^2, \cdots, X^r$ は擬一次独立であるが，これに $X^{r+1}$ をつけ加えた系は擬一次従属とする。各 $X^i$ の係数ベクトルを $\xi^i = {}^t(\xi_1^i, \xi_2^i, \cdots, \xi_l^i)$ $(i = 1, 2, \cdots, r+1)$ と記せば，$\xi^{r+1}(x)$ は $\xi^1(x), \xi^2(x), \cdots, \xi^r(x)$ の一次結合として表現できるので[(9)]，

$$\xi^{r+1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x) \xi^i(x), \ x \in \varOmega \tag{12}$$

(9)　一次方程式(11)は右辺を $\xi^{r+1}(x)$ に替え，

$$(\xi^1(x), \xi^2(x), \cdots, \xi^r(x)) \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \vdots \\ \lambda_r(x) \end{pmatrix} = \xi^{r+1}(x)$$

を解けばよい。rank $\varXi(x) = \text{rank}(\xi^1(x), \xi^2(x), \cdots, \xi^r(x), \xi^{r+1}(x)) = r$ であるから，上記の方程式はすべての $x$ について解ける。

なる函数 $\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$ が存在する。$u \in \mathfrak{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ が連立方程式(12)，つまり $X^i u = 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$ の解であるならば，$u$ は $X^{r+1}u=0$ をも満たす。実際,

$$\begin{aligned} X^{r+1}u &= \sum_{k=1}^{l} \xi_k^{r+1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \underset{(12)}{=} \sum_{k=1}^{l} \left( \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_k^i \right) \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left( \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \lambda_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X^i u = 0. \end{aligned}$$

したがって(2)の形の連立微分方程式を解くためには，一般性を失うことなく，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ が擬一次独立な場合を考えればよいのである。

## II.　完全系の連立方程式

$\mathfrak{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ 上の微分作用素の系 $X^i(i=1,2,\cdots,r)$ を前節の(1)と同様に定義し，これらのペアを括弧でくくった $(X^i,X^j)$ を，前項 $4^\circ$ に現われた $\mathfrak{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ 上の微分作用素

$$v \mapsto X^i(X^j v) - X^j(X^i v), \quad v \in \mathfrak{C}^2(\Omega,\mathbb{R}) \tag{1}$$

を表わすものとする。すなわち簡略に記せば

$$(X^i,X^j) = X^i X^j - X^j X^i, \quad i,j=1,2,\cdots,r \tag{1'}$$

であり，$(X^i,X^j) : \mathfrak{C}^2(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ の形式を有する。前節 $4^\circ$ により

$$(X^i,X^j)v = \sum_{k=1}^{l} \{X^i \xi_k^j - X^j \xi_k^i\} \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad v \in \mathfrak{C}^2(\Omega,\mathbb{R}), \quad i,j=1,2,\cdots,r \tag{2}$$

である。この $(X^i,X^j)$ の記法を **Jacobi の括弧**（Jacobi's bracket）と称する。

Jacobi の括弧については，次の公式が成り立つことは明白であろう。

$$(X^i,X^j) = -(X^j,X^i), \tag{3}$$

$$(X^i + X^j, X^h) = (X^i,X^h) + (X^j,X^h). \tag{4}$$

**定義**　微分作用素の系 $X^i(i=1,2,\cdots,r)$ が擬一次独立で，しかも任意の $i,j$ に対して

$$(X^i,X^j) = \sum_{h=1}^{r} \lambda_h^{i,j} X^h \tag{5}$$

を満たす函数 $\lambda_h^{i,j}: \Omega \to \mathbb{R}(i,j,h=1,2,\cdots,r)$ が存在するとき, $X^1, X^2, \cdots, X^r$ は**完全系**（complete system）を成すという。

**注意**　$X^1, X^2, \cdots, X^r$ が擬一次独立で，これに $(X^i, X^j)$ を加えた系が擬一次従属ならば，$(X^i, X^j)$ は必ず(5)の如く表現される。（前節の最後を参照）

擬一次独立な系 $X^1, X^2, \cdots, X^r$ が完全系でないとしよう。この場合にも，これに有限個の微分作用素をつけ加えて拡大することにより，当初の系を含む完全系を得ることができる。[(10)]

(3)によれば，$(X^i, X^j)$ と $(X^j, X^i)$ は符号が異なるにすぎないから区別せずに扱うことにすると，このようなペアは全部で $\binom{r}{2}$ 組存在する。このなかに(5)の形に表現できないものがすくなくともひとつ存在するので，それを $(X^{i_0}, X^{j_0})$ としよう。当初の系 $X^1, X^2, \cdots, X^r$ にこの $(X^{i_0}, X^{j_0})$ をつけ加えた拡大系を記号を変えて $Y^1, Y^2, \cdots, Y^{r+1}$ とすれば，上記の注意により，これは擬一次独立である。さらにこれが完全系になってもいれば，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^{r+1}$ が所望の拡大系である。もしこれが完全系でなければ，$\binom{r+1}{2}$ 組の $(Y^i, Y^j)$ のなかに

$$(Y^i, Y^j) = \sum_{h=1}^{r+1} \theta_h^{i,j} Y^h,\ \theta_h^{i,j}: \Omega \to \mathbb{R}, \quad i,j,h = 1,2,\cdots,r+1$$

の形に表現することのできない $(Y^{i_1}, Y^{j_1})$ がすくなくともひとつ存在する。$Y^1, Y^2, \cdots, Y^{r+1}$ に $(Y^{i_1}, Y^{j_1})$ をつけ加えた拡大系[(11)]を記号を変えて $Z^1, Z^2, \cdots, Z^{r+2}$ とすれば，これは擬一次独立である。$Z^1, Z^2, \cdots, Z^{r+2}$ が完全系であれば，これが当初の系を含む所望の拡大である。もしこれが完全系でない場合は，同様の手続きでひとつずつ系の拡大を続けてゆくと，必ず有限回のステップで，当初の系を含む完全系に到達する。実際，拡大系を構成する作用素の数が $(l+1)$ 以上ならば，この系は擬一次従属となるので，上記のプロセスはそれ以前に終結するのである。（p. 54 を見よ。）

この結果を定理としてまとめておこう。

**定理 1**　微分作用素の系 $X^1, X^2, \cdots, X^r$ が擬一次独立であるとき，これに有限個の微分作用素をつけ加えた拡大系で完全系を成すものが存在する。

---

（10）$X^1, X^2, \cdots, X^r$ にいくつかの微分作用素をつけ加えて得られる新たな系を，当初の系の**拡大**（extension）と称する。完全系については Carathéodory [2] pp. 31–33，藤原 [5] pp. 498–501 などを参照した。

（11）$Z^1, Z^2, \cdots, Z^{r+2}$ は $X^1, X^2, \cdots, X^r$ の拡大でもある。

$X^1, X^2, \cdots, X^r$ を拡大した完全系を $Y^1, Y^2, \cdots, Y^s$（$r \leqq s$）とし，ふた組の連立偏微分方程式

$$X^i u = 0,\ i = 1, 2, \cdots, r, \tag{6}$$

$$Y^j u = 0,\ j = 1, 2, \cdots, s \tag{7}$$

を比べてみよう。$\{Y^j\}_{j=1}^s$ は $\{X^i\}_{i=1}^r$ の拡大系であるから，(7)の解はもちろん(6)の解でもある。つまり連立線形一階の偏微分方程式の解法は，完全系の定める偏微分方程式を解くことに帰着するのである。

次に $\mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ 上のふたつの微分作用素系

$$\begin{aligned} \{X^i\} &= \{X^1, X^2, \cdots, X^r\}, \\ \{Y^i\} &= \{Y^1, Y^2, \cdots, Y^r\} \end{aligned} \tag{8}$$

を考える。いま

$$\begin{aligned} &\text{a.} \quad Y^i(x) = \sum_{j=1}^{r} \kappa_j^i(x) X^j(x), \quad i = 1, 2, \cdots, r, \\ &\text{b.} \quad \det(\kappa_j^i(x_0)) \neq 0 \quad \text{for some} \quad x_0 \in \Omega \end{aligned}$$ [12]

を満たす $\kappa_j^i \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$（$i, j = 1, 2, \cdots, r$）が存在するとしよう。このとき $\{X^i\}$ と $\{Y^i\}$ とは同等であるといい，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ は，$x_0$ の十分に小さな近傍 $\Omega'$ において，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ の一次式として解ける。[13]

次の定理は $X^i$ や $Y^i$ を $\mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ではなく $\mathfrak{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$ 上の微分作用素とみなして（つまり局所的に）成り立つものである。煩雑を避けるために繰り返して述べないが，そのように理解していただきたい。

**定理 2**　(8)のふたつの系が同等で，しかも $\{X^i\}$ が完全系ならば，$\{Y^i\}$ も完全系である。

**証明**　$a, b$ が満たされているものとすれば，$v \in \mathfrak{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ に対して

---

(12)　$(\kappa_j^i(x_0))$ は $\kappa_j^i(x_0)$ を第 $i$ 行第 $j$ 列要素とする行列。
(13)　もちろん $\Omega'$ 内において，$\{X^i(x)\}$ が $\{Y^i(x)\}$ の一次式として解けるという意味である。

$$
\begin{aligned}
(Y^i, Y^j)v &= \left(\sum_k \kappa_k^i X^k, \sum_h \kappa_h^j X^h\right) v \\
&= \sum_{k,h} \{\kappa_k^i X^k(\kappa_h^j X^h) - \kappa_h^j X^h(\kappa_k^i X^k)\} v = \sum_{k,h} \left[\kappa_k^i \left\{X^k \kappa_h^j \cdot X^h v + X^k(X^h v)\kappa_h^j\right\}\right] \\
&\quad - \sum_{k,h} \left[\kappa_h^j \left\{X^h \kappa_k^i \cdot X^k v + X^h(X^k v)\kappa_k^i\right\}\right] \qquad \text{（I,3° による）} \qquad (9) \\
&= \sum_{k,h} \kappa_k^i \kappa_h^j (X^k, X^h) v + \sum_{k,h} [\kappa_k^i X^k \kappa_h^j \cdot X^h v - \kappa_h^j X^h \kappa_k^i \cdot X^k v].
\end{aligned}
$$

$X^1, X^2, \cdots, X^r$ は完全系なので，(9)の右辺第一項は $X^1 v, X^2 v, \cdots, X^r v$ の一次式として表わされる。第二項はもとより $X^1 v, X^2 v, \cdots, X^r v$ の一次式である。したがって(9)の右辺は $Y^1 v, Y^2 v, \cdots, Y^r v$ の一次式を以て表現される。すなわち $Y^1, Y^2 \cdots, Y^r$ が完全系であることが示されたのである。（証了）

## III.　変数変換

ふたつの開集合 $V \subset \Omega, W \subset \mathbb{R}^l$ の間に，$\mathfrak{C}^2$-級の全単射 $\varphi : V \to W$ が存在するものとしよう。煩雑を避けるために，まず単一の微分作用素

$$
Xv(x) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} v(x), \quad v \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R}) \qquad (1)
$$

を考える。函数の定義域を $V$（あるいはそれに対応する $W = \varphi(V)$）に限定することとし，$x = \varphi^{-1}(y)$ を(1)に代入すれば，

$$
Xv(\varphi^{-1}(y)) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial v}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y)). \qquad (2)
$$

ここで $\widehat{v} : W \to \mathbb{R}$ を $\widehat{v}(y) = v(\varphi^{-1}(y))$ とおき[(14)]，

$$
\frac{\partial v}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y)), \quad \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_k}(y)
$$

の関係を求めよう[(15)]。結果は(4)のとおりである。実際，合成函数の微分律により

$$
D_y \widehat{v}(y) = D_y v(\varphi^{-1}(y)) = Dv(\varphi^{-1}(y)) D\varphi^{-1}(y) = Dv(\varphi^{-1}(y)) D\varphi(\varphi^{-1}(y))^{-1}
$$

---

(14) $v \in \mathfrak{C}^1(V, \mathbb{R})$ に対して $\widehat{v} \in \mathfrak{C}^1(W, \mathbb{R})$ を対応せしめる作用素 $T : v \mapsto \widehat{v}$ は全単射である。$\widehat{v}$ の逆像は $v(x) = \widehat{v}(\varphi(x))$ で与えられる。

(15) $D_y \widehat{v}(y)$ は $\widehat{v}$ の $y$ についての導函数を表わす。注意を促すために $y$ を書き添えたまでである。$Dv(\cdot)$ は $v$ の $\cdot$ における導函数，$D\varphi^{-1}(\cdot)$ は同じく $\cdot$ における $\varphi^{-1}$ の導函数である。

であるから,

$$\begin{aligned}Dv(\varphi^{-1}(y)) &= D_y \widehat{v}(y) D\varphi(\varphi^{-1}(y)) \\ &= \Bigl(\sum_j \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(y)), \cdots,\ \sum_j \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y)), \\ &\qquad \cdots,\ \sum_j \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(\varphi^{-1}(y))\Bigr).\end{aligned} \tag{3}$$

つまり

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y)) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y)), \quad k = 1, 2, \cdots, l \tag{4}$$

である。そこで(4)を(2)に代入すれば,

$$\begin{aligned}Xv(\varphi^{-1}(y)) &= \sum_{k=1}^{l} \xi_k(\varphi^{-1}(y)) \left[\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y))\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l} \left[\sum_{k=1}^{l} \xi_k(\varphi^{-1}(y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(y))\right] \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y) \\ &= \sum_{j=1}^{l} X\varphi_j(\varphi^{-1}(y))\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y).\end{aligned}$$

既に述べたとおり(p. 58 の注(14)), $\mathfrak{C}^1(V,\mathbb{R})$ と $\mathfrak{C}^1(W,\mathbb{R})$ とは $v \mapsto \widehat{v} = v \circ \varphi^{-1}$ を媒介として過不足なく一対一に対応するのであった。そこで $\mathfrak{C}^1(W,\mathbb{R})$ 上の微分作用素 $\widehat{X}$ を $\widehat{X}\,\widehat{v}(y) = Xv(\varphi^{-1}(y))$ と定義すれば,上記の計算は次のような公式として整理される。

$$\widehat{X}\,\widehat{v}(y) = \sum_{j=1}^{l} X\varphi_j(\varphi^{-1}(y))\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y_j}(y). \tag{5}$$

ふたつの方程式

$$a.\quad Xu = 0, \quad b.\quad \widehat{X}\,\widehat{u} = 0$$

を比べ, $u$ が $a$ の解であることと, $\widehat{u} = u \circ \varphi^{-1}$ が $b$ の解であることとは同値である。

**定理 3** $X^1, X^2, \cdots, X^r$ が完全系ならば, $\widehat{X^1}, \widehat{X^2}, \cdots, \widehat{X^r}$ も完全系である。[16]

**証明** $X^1, X^2, \cdots, X^r$ が完全系であれば, $i$ と $j$ の各組合せに対して

(16) もちろん函数の定義域を $V, W$ に限定して考えるのである。

$$(X^i, X^j) = \sum_{h=1}^{r} \lambda_h^{i,j} X^h, \tag{6}$$

つまり

$$(X^i, X^j)v(x) = \sum_{h=1}^{r} \lambda_h^{i,j}(x) X^h v(x) \quad \text{for} \quad v \in \mathfrak{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \tag{6'}$$

を満たす函数 $\lambda_h^{i,j} : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j, h = 1, 2, \cdots, r)$ が存在する。$(6')$ の $x$ を $\varphi^{-1}(y)$ で書きかえると，（ここで $\widehat{\lambda_h^{i,j}}(y) = \lambda_h^{i,j}(\varphi^{-1}(y))$ と記す）

$$(\widehat{X^i}, \widehat{X^j})\, \widehat{v}\,(y) = \sum_{h=1}^{r} \widehat{\lambda_h^{i,j}}(y) \widehat{X^h}\, \widehat{v}\,(y). \tag{7}$$

(7) は任意の $\widehat{v} \in \mathfrak{C}^2(W, \mathbb{R})$ について成り立つ。つまり $(\widehat{X^i}, \widehat{X^j})$ は $\widehat{X^h}$ に函数 $\widehat{\lambda_h^{i,j}}$ を乗じ，それを加え合せたものに等しい。こうして $\widehat{X^1}, \widehat{X^2}, \cdots, \widehat{X^r}$ が完全系であることが知られた。　（証了）

## IV.　Jacobi 系

**定義**　微分作用素の系 $X^1, X^2, \cdots, X^r$ が

$$(X^i, X^j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r, \tag{1}$$

すなわち

$$(X^i, X^j)v = 0 \quad \text{for all} \quad v \in \mathfrak{C}^2(\Omega, \mathbb{R}), \quad i, j = 1, 2, \cdots, r \tag{1'}$$

を満たすとき，これを **Jacobi 系**（Jacobian system）と称する。[17]

Jacobi 系は自動的に完全系である。

次の定理は，微分作用素の完全系によって定義される連立線形一階の偏微分方程式の解法は，結局 Jacobi 系によって定まる方程式を解くことに帰着するという洞察を正当化するものである。

**定理 4**　$X^1, X^2, \cdots, X^r$ が完全系を成すとき，これと同等な Jacobi 系が存在する。

（17）Jacobi 系については Carathéodory [2] pp. 33–36，藤原 [5]pp. 501–504。

**証明** $X^i = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$

を完全系とする。完全系は擬一次独立なので

$$\mathrm{rank}\ (\xi_k^i(x)) = r, \quad x \in \Omega.$$

（これはIの5°による。）したがって行列（$\xi_k^i(x)$）の $r$ 次の小行列式のうち，すくなくともひとつ0でないものが存在する。一般性を失うことなく，点 $x_0 \in \Omega$ では

$$\det(\xi_k^i(x_0)) \neq 0, \quad i,\ k = 1, 2, \cdots, r$$

と仮定してよい[18]。したがって $\xi_k^i$ の連続性により，$x_0$ の十分に小さな近傍 $\Omega'$ においては

$$\det(\xi_k^i(x)) \neq 0 \quad \text{for all} \quad x \in \Omega',\ i, k = 1, 2, \cdots, r \tag{2}$$

が成り立つ。すると

$$X^i v(x) = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x_k} v(x), \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

は（各 $x \in \Omega'$ を固定したとき）$\partial v/\partial x_1, \partial v/\partial x_2, \cdots, \partial v/\partial x_r$ について解くことができ，それは $X^1 v, \cdots, X^r v$ および $\partial v/\partial x_{r+1}, \cdots, \partial v/\partial x_l$ の一次式を以て表わされる。$\partial v/\partial x_k (k = 1, 2, \cdots, r)$ を表わすこの一次式のうち，$X^1 v, \cdots, X^r v$ の一次式の部分を一括して $Y^k v$ と書くことにすれば，

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(x) = Y^k v(x) - \left( \theta_{r+1}^k(x) \frac{\partial v}{\partial x_{r+1}}(x) + \cdots + \theta_l^k(x) \frac{\partial v}{\partial x_l}(x) \right),\ k = 1, 2, \cdots, r,$$

したがって

$$Y^k v(x) = \frac{\partial v}{\partial x_k}(x) + \left( \theta_{r+1}^k(x) \frac{\partial v}{\partial x_{r+1}}(x) + \cdots + \theta_l^k(x) \frac{\partial v}{\partial x_l}(x) \right),\ k = 1, 2, \cdots, r \tag{3}$$

が $x \in \Omega'$ において成り立つ。これを行列で表現すれば

---

（18）（$\xi_k^i(x)$）の $r$ 次の小行列式で0でないものが各 $x \in \Omega$ ごとに存在するが，小行列式の行と列をどのように取り出すかは点 $x$ の位置に依存する。しかし行列の要素はすべて連続函数であるから，ある点の十分に小さな近傍を選べば，その範囲では同じ形の小行列式が $\neq 0$ となる。

$$\begin{pmatrix} Y^1 v \\ \vdots \\ Y^r v \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \theta^1_{r+1} & \cdots & \theta^1_l \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \theta^r_{r+1} & \cdots & \theta^r_l \end{array}\right) \begin{pmatrix} \partial v/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial v/\partial x_r \\ \hline \partial v/\partial x_{r+1} \\ \vdots \\ \partial v/\partial x_l \end{pmatrix}. \tag{$3'$}$$

もちろん各要素の値は $x \in \Omega'$ において評価するのである。

$(3')$ から，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ が擬一次独立であることはただちに知られる。

一方[(19)],

$$Y^k v(x) = \mu^k_1(x) X^1 v(x) + \cdots + \mu^k_r(x) X^r v(x), \quad k = 1, 2, \cdots, r. \tag{4}$$

任意の $v \in \mathfrak{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$ に対して $\lambda_1(x) Y^1(x) + \lambda_2(x) Y^2 v(x) + \cdots + \lambda_r(x) Y^r v(x) = 0$ であるとすれば，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ の擬一次独立性から，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ でなければならない。また一方では同じ式を書き直して，

$$\begin{aligned} \lambda_1 Y^1 v + \lambda_2 Y^2 v + \cdots + \lambda_r Y^r v &= \lambda_1 \sum_{j=1}^r \mu^1_j X^j v + \cdots + \lambda_r \sum_{j=1}^r \mu^r_j X^j v \\ &= \left( \sum_{k=1}^r \lambda_k \mu^k_1 \right) X^1 v + \cdots + \left( \sum_{k=1}^r \lambda_k \mu^k_r \right) X^r v \qquad (5) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{（(4)による）} \\ &= 0 \end{aligned}$$

がすべての $v \in \mathfrak{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$ について成り立つためには，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ の擬一次独立性から

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \mu^k_1 = 0, \quad \cdots, \quad \sum_{k=1}^r \lambda_k \mu^k_r = 0 \tag{6}$$

でなければならない。しかるにこの解は $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ に限るのであるから

$$\det(\mu^k_j(x)) \neq 0, \quad x \in \Omega'. \tag{7}$$

こうして $X^1, X^2, \cdots, X^r$ と $Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ とは同等であること，したがって定理 2 により，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ も完全系であることが知られた。

---

(19) 定義より，$Y^k v(x)$ は $X^1 v(x), \cdots, X^r v(x)$ の一次結合である。$\mu^k_1(x), \cdots, \mu^k_r(x)$ はその係数である。

それゆえ $(Y^i, Y^j)$ は(3)を用いて

$$
\begin{aligned}
(Y^i, Y^j)v &= \sum_{k=1}^{r} \kappa_k^{i,j} Y^k v \\
&= \sum_{k=1}^{r} \kappa_k^{i,j} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_k} + \left( \theta_{r+1}^k \frac{\partial v}{\partial x_{r+1}} + \cdots + \theta_l^k \frac{\partial v}{\partial x_l} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

他方，(3)および I の $4^\circ$ によれば

$$
(Y^i, Y^j)v = \sum_{k=r+1}^{l} (Y^i(\theta_k^j) - Y^j(\theta_k^i)) \frac{\partial v}{\partial x_k}. \tag{9}
$$

(9)の右辺には $\partial v/\partial x_1, \cdots, \partial v/\partial x_r$ の項は現われない。(8)の右辺におけるこれらの項の係数は $\kappa_k^{i,j}$（$k = 1, 2, \cdots, r$）であるから

$$
\kappa_k^{i,j}(x) = 0, \quad x \in \Omega', \quad k = 1, 2, \cdots, r. \tag{10}
$$

(8)，(10)から $(Y^i, Y^j)v = 0$ $(v \in \mathfrak{C}^2(\Omega', \mathbb{R}))$ を得，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ が Jacobi 系であることが示されたのである。（証了）

## V.　完全系連立方程式の解法

$\mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ 上の微分作用素

$$
X^i = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{1}
$$

によって定義される連立偏微分方程式

$$
X^i u = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{2}
$$

の具体的な解法について論じよう。ここで各 $\xi_k^i \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ は所与の函数であることもこれまでと同じである。定理 1 により，$X^1, X^2, \cdots, X^r$ はこれを含む完全系に拡大することができるので，結局，一般性を失うことなく，(1)は完全系であることを仮定して解けばよい。以下，そのように仮定する。[20]

連立方程式(2)のなかのひとつ，たとえば $X^1 u = 0$ だけをまず考えよう。単独の線形一階の偏微分方程式についての Monge-Cauchy の基本定理[21]から，$X^1 u = 0$ は正常点の近傍において局所的に

(20) したがって，一般性を失うことなく $r \leqq l$ の場合だけを考えればよい。(I の $5^\circ$ による。)

$$J=\frac{\partial(\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_l)}{\partial(x_2,x_3,\cdots,x_l)}=\det\begin{pmatrix}\partial\eta_2/\partial x_2 & \cdots & \partial\eta_2/\partial x_l\\ \vdots & & \vdots\\ \partial\eta_l/\partial x_2 & \cdots & \partial\eta_l/\partial x_l\end{pmatrix}\neq 0 \tag{3}$$

を満たす $(l-1)$ 個の解 $\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_l$ が存在する。これに適当な函数 $\eta_1$ をつけ加え

$$J=\frac{\partial(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_l)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_l)}\neq 0 \tag{4}$$

が成り立つようにすることができる[22]。(4)を満たす点の近傍において，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_l)$ を媒介にして，ふたつの開集合 $V\subset\mathbb{R}^l$ と $W\subset\mathbb{R}^l$ の間に全単射の関係を定めることができる。III で述べた変数変換 $y=\eta(x)$ を施すと[23]，方程式(2)は

$$\widehat{X^1}\,\widehat{u}\,(y)=\sum_{j=1}^{l}X^1\eta_j(\eta^{-1}(y))\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_j}(y)=0 \tag{5}$$

の形に変換される[24]。仮定により，$X^1,X^2,\cdots,X^r$ は完全系なので，定理 3 により，$\widehat{X^1},\widehat{X^2},\cdots,\widehat{X^r}$ も完全系である。

$\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_r$ は $X^1u=0$ の解であるから，$\widehat{\eta_2}\,,\widehat{\eta_3}\,,\cdots,\widehat{\eta_r}$ は方程式 $\widehat{X^1}\,\widehat{u}\ =0$ の解となる[25]。ここでもちろん $\widehat{\eta_i}\,(y)=\eta_i\circ\eta^{-1}(y)(i=1,2,\cdots,l)$ である。したがって(5)により，

$$\widehat{X^1}\,\widehat{u}\,(y)=X^1\eta_1(\eta^{-1}(y))\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1}(y)=\widehat{X^1}\,\widehat{\eta_1}\,(y)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1}(y)=0. \tag{6}$$

ここで $\widehat{X^1}\,\widehat{\eta_1}\ =0$ となることは不可能である。実際，仮に $\widehat{X^1}\,\widehat{\eta_1}\ =0$ とするならば，$X^1\eta_1=0$（脚注(25)を見よ）であるから

---

(21) 南雲 [11] pp. 26–29，細矢・廣 [6] の定理 2（pp. 252–255）を見よ。
(3) に現われる $x_2,x_3,\cdots,x_l$ は，他の $(l-1)$ 個の変数の組み合せの場合もありうるが，一般性を失うことなく，このように特定化して考えてもよいであろう。

(22) たとえば $\eta_1(x)=x_1$ とすればよい。このとき

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \partial\eta_2/\partial x_1 & \partial\eta_2/\partial x_2 & \cdots & \partial\eta_2/\partial x_l\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial\eta_l/\partial x_1 & \partial\eta_l/\partial x_2 & \cdots & \partial\eta_l/\partial x_l\end{vmatrix}\neq 0.$$

ここで，つけ加えた $\eta_1$ は $X^1u=0$ の解であるとは限らない。

(23) 記号法は III におけるそれと同様であるが，III の $\varphi$ にあたる函数がここでは $\eta$，$\widehat{v}\ =v\circ\eta^{-1},\widehat{X}\ \widehat{v}\,(y)=X^1v(\eta^{-1}(y))$ である。

(24) 同じく III の公式(5)による。

(25) III の公式(5)につづいて述べた，ふたつの方程式 $a,b$ の比較を見直していただきたい。

$$X^1\eta_i = \sum_{k=1}^{l} \xi_k^1 \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l,$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \partial\eta_1/\partial x_1 & \cdots & \partial\eta_1/\partial x_l \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\eta_l/\partial x_1 & \cdots & \partial\eta_l/\partial x_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_l^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

が成り立たねばならない。ここで（正常点の近傍では）$(\xi_1^1, \cdots, \xi_l^1) \neq 0$ であるから，左辺の係数行列の行列式 $J$ は 0 である。だがこれは(4)に反する。したがって $\widehat{X^1}\,\widehat{\eta_1} \neq 0$ が確かめられた。

こうして，もし $\widehat{X^1}\,\widehat{u} = 0$ ならば，(6)により $\partial\,\widehat{u}\,/\partial y_1(y) = 0$ であり，$\widehat{u}$ は $y_2, y_3, \cdots, y_l$ だけの函数となって，$y_1$ からは独立である。ゆえに(6)は

$$\widehat{X^1}\,\widehat{u} = \frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1} = 0 \tag{8}$$

に置き換えて解けばよい。

定理 4 によれば，$\widehat{X^i}\,\widehat{u} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ にはこれと同等な，次の形式をもつ Jacobi 系が存在する。（IV の(3)式を見よ。）

$$\begin{aligned} Y^1 v &= \frac{\partial v}{\partial y_1}, \\ Y^2 v &= \frac{\partial v}{\partial y_2} + \theta_{r+1}^2 \frac{\partial v}{\partial y_{r+1}} + \cdots + \theta_l^2 \frac{\partial v}{\partial y_l} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y^r v &= \frac{\partial v}{\partial y_r} + \theta_{r+1}^r \frac{\partial v}{\partial y_{r+1}} + \cdots + \theta_l^r \frac{\partial v}{\partial y_l}. \end{aligned} \tag{9}$$

右辺を行列で表現すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & \mathbf{0} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \theta_{r+1}^2 & \cdots & \theta_l^2 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & \theta_{r+1}^r & \cdots & \theta_l^r \end{array}\right) \begin{pmatrix} \partial v/\partial y_1 \\ \partial v/\partial y_2 \\ \vdots \\ \partial v/\partial y_l \end{pmatrix}. \tag{10}$$

IV の(9)で計算した結果によれば，

$$(Y^1, Y^i)v = \frac{\partial \theta_{r+1}^i}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial y_{r+1}} + \cdots + \frac{\partial \theta_l^i}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial y_l}, \quad i = 2, 3, \cdots, r. \tag{11}$$

であるが，$Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ は Jacobi 系なので

$$(Y^1, Y^i)v = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, r. \tag{12}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} \partial\theta^2_{r+1}/\partial y_1 & \cdots & \partial\theta^2_l/\partial y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\theta^r_{r+1}/\partial y_1 & \cdots & \partial\theta^r_l/\partial y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial v/\partial y_{r+1} \\ \vdots \\ \partial v/\partial y_l \end{pmatrix} = 0 \tag{12'}$$

ここで $\partial v/\partial y_{r+1}, \cdots, \partial v/\partial y_l$ は任意の値をとりうるのであるから,

$$\frac{\partial\theta^i_k}{\partial y_1} = 0, \quad \begin{array}{l} i = 2, \cdots, r, \\ k = r+1, \cdots, l. \end{array} \tag{13}$$

こうして原方程式(2)は，これと同等な，変数が $(l-1)$ 個，方程式が $(r-1)$ 本の完全・Jacobi 系の方程式

$$Y^i v = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, l \tag{14}$$

を解くことに帰着する。(14)の解は $y_1$ には依存しないので，$Y^1 v = 0$ はもちろん満たされる。

さらに(14)に上記と同様の手続きを施せば，$Y^2 v = 0$ の $(l-1) - 1 = (l-2)$ 個の独立な[26]解が得られ，これは $Y^1 v = 0$ をも満足する。次に変数が $(l-2)$ 個，方程式が $(r-2)$ 本の，(14)と同等な Jacobi 系を作り，同様の手続きを $(r-1)$ 回繰り返す。最終的には，変数が $l-(r-1)$ 個，方程式は 1 本だけの方程式に達し，独立な $(l-r)$ 個の解が得られるのである。(ここで $r \leqq l$ を仮定していることに注意しよう。その根拠については p. 63 の脚注(20)を見よ。)[27]

## VI. 解法の事例

連立線形一階の偏微分方程式が与えられたとき，その拡大である完全系の方程式が必ず存在し，さらにこれと同等な Jacobi 系の方程式を構成することができる。Jacobi 系の方程式には解が存在し，したがってこれが当初の方程式の解にもなっているのである。

これが前節までに述べた理論の大要である。

次の方程式は具体的事例としてしばしば供覧されるものであるが，ここでもその解法を幾分丁寧に示して参考に供したい。[28]

考える微分方程式は $\mathbb{R}^4$ で定義される，二本の方程式から成る連立系である。

---

(26)「独立な」という意味は，$(l-2)$ 個の解の，$y_3, \cdots, y_l$ に関する函数行列式（Jacobian）が 0 でないということである。

(27) Jacobi 系の連立方程式については Carathéodory [2] chap. 4 および藤原 [5] pp. 508–512。

(28) たとえば藤原 [5] pp. 506–507。

$$X^1u = x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial u}{\partial x_4},$$
$$X^2u = x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^2\frac{\partial u}{\partial x_3} + x_4^2\frac{\partial u}{\partial x_4}.$$

1° まずこれは完全系であることが直接計算によって確かめられる。実際,

$$\begin{aligned}(X^1, X^2)u &= X^1X^2u - X^2X^1u \\ &= \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(X^2u) - \sum_{j=1}^{4} x_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j}(X^1u) \\ &= X^2u\end{aligned}$$

が成り立つ[(29)]。

したがってこの方程式には必ず解があるので，それを具体的に求めてみよう。

2° $X^1u = 0$ を解く。その特性方程式[(30)]は

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_4}{x_1}$$

である。これを解いて

$$\frac{x_2}{x_1} = \alpha, \quad \frac{x_3}{x_1} = \beta, \quad \frac{x_4}{x_1} = \gamma$$

（$\alpha, \beta, \gamma$ は定数）であるから

$$\eta_2(x) = \frac{x_2}{x_1}, \quad \eta_3(x) = \frac{x_3}{x_1}, \quad \eta_4(x) = \frac{x_4}{x_1}$$

と定義すると，特性方程式の解に沿ったこれらの値は定数である。したがって $\eta_2, \eta_3, \eta_4$ は $X^1u = 0$ の解である[(31)]。

これに $\eta_1(x) = x_1$ なる函数を追加すると $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ の函数行列式については $\det D\eta(x) \neq 0$（つまり rank $D\eta(x) = 4$）が成り立つ[(32)]。

3° ここで III において述べた変数変換を用いる。$\mathbb{R}^4$ のふたつの開集合 $V, W$ を適当に選ぶと，$\eta$ を媒介にして，$V$ と $W$ との間には過不足のない一対一の関係が成り立つ。

---

（29）途中の単純な微分計算は省略した。

（30）南雲 [11] pp. 21–29，細矢・虞 [6] pp. 251–255。

（31）細矢・虞 [6] pp. 251–252 を見よ。

（32）$D\eta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 & 0 \\ -x_3/x_1^2 & 0 & 1/x_1 & 0 \\ -x_4/x_1^2 & 0 & 0 & 1/x_1 \end{pmatrix}.$

$$\eta(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right),\ x \in V,$$
$$\eta^{-1}(y) = (y_1, y_1y_2, y_1y_3, y_1y_4),\ y \in W$$

である。III と同様に

$$\widehat{u}\,(y) = (u \circ \eta^{-1})(y),$$
$$\widehat{X^i}\,\widehat{u}\,(y) = X^i\,\widehat{u}\,(\eta^{-1}(y)), \quad i = 1, 2$$

と表記すれば，III の公式(5)により，$\widehat{X^1}\,\widehat{u}$ および $\widehat{X^2}\,\widehat{u}$ を次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}
\widehat{X^1}\,\widehat{u}\,(y) &= \sum_{j=1}^{4} X^1\eta_j(\eta^{-1}(y))\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_j}(y) \\
&= x_1\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1}(y) + \left(-\frac{x_2}{x_1^2}x_1 + \frac{x_2}{x_1}\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_2}(y) \\
&\quad + \left(-\frac{x_3}{x_1^2}x_1 + \frac{x_3}{x_1}\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_3}(y) + \left(-\frac{x_4}{x_1^2}x_1 + \frac{x_4}{x_1}\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_4}(y) \\
&= x_1\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1}(y) = 0.
\end{aligned}$$

したがって（$x_1 \neq 0$ として）$\widehat{u}$ は $y_1$ から独立である。さらに

$$\begin{aligned}
\widehat{X^2}\,\widehat{u}\,(y) &= \sum_{j=1}^{4} X^2\eta_j(\eta^{-1}(y))\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_j}(y) \\
&= x_1^2\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_1} + x_2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_2} + x_3\left(\frac{x_3}{x_1} - 1\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_3} \\
&\quad + x_4\left(\frac{x_4}{x_1} - 1\right)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_4} \quad \text{（第一項} = 0\text{）} \\
&= y_1y_2(y_2 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_2} + y_1y_3(y_3 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_3} + y_1y_4(y_4 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4°　最後に，$y_2, y_3, y_4$ の函数として，$\widehat{X^2}\,\widehat{u} = 0$ なる $\widehat{u}$ を求める。（$\widehat{u}$ は $y_1$ に依存しないので $\widehat{X_1}\,\widehat{u} = 0$ はもちろん満たされる。）$\widehat{X^2}\,\widehat{u} = 0$ を解くには

$$\widehat{X^2}\,\widehat{u} = y_2(y_2 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_2} + y_3(y_3 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_3} + y_4(y_4 - 1)\frac{\partial\,\widehat{u}}{\partial y_4} = 0$$

を考察すればよい。特性方程式は

$$\frac{dy_3}{dy_2} = \frac{y_3(y_3 - 1)}{y_2(y_2 - 1)}, \quad \frac{dy_4}{dy_2} = \frac{y_4(y_4 - 1)}{y_2(y_2 - 1)}.$$

これを解けば[33],

$$\frac{y_2-1}{y_3-1}\cdot\frac{y_3}{y_2}=\alpha,\quad \frac{y_2-1}{y_4-1}\cdot\frac{y_4}{y_2}=\beta\quad (\alpha,\beta \text{ は定数})$$

を得る。この左辺を $\theta_1(y_2,y_3,y_4),\theta_2(y_2,y_3,y_4)$ とし，これらの値を特性方程式の解に沿って計算すれば定数である。ゆえに $\theta_1,\theta_2$ が $\widehat{X^2}\,\widehat{u}\,(y)=0$ の解[34]で

$$\text{rank } D(\theta_1,\theta_2)=2.$$

したがって任意の微分可能な函数 $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して

$$S\left(\frac{y_2-1}{y_2}\cdot\frac{y_3}{y_3-1},\quad \frac{y_2-1}{y_2}\cdot\frac{y_4}{y_4-1}\right)$$

が求める一般解である[35]。分母・分子に $y_1$ を乗じて整理したうえで，変数を元へ戻せば，一般解は

$$S\left(\frac{x_3(x_2-x_1)}{x_2(x_3-x_1)},\quad \frac{x_4(x_2-x_1)}{x_2(x_4-x_1)}\right)$$

として求められる。

連立方程式を構成する方程式の数がさらに多数の場合は，上記と同様の手続きを反復し，漸次変数を減じながら，最終的に単独の方程式に帰着せしめるのである。

しかし一般には，具体的に解を計算することは困難であり現実的ではない。解の具体的算定が困難な場合でも，解の“存在”を保証する条件が既に確認されているのであるから，ある範囲内で解析を施すことは可能である。

## VII.　G.B. Antonelli の積分可能性条件

Walras 以来の一般均衡理論においては，効用函数の極大化をつうじて需要函数が導出され，それが均衡体系の不可欠な一構成要素となった。しかし『純粋経済学要論』刊行当時より，量としての測定が困難な効用概念を科学のなかで用いることに対しては多くの批判が下されたのであった。

とりわけ 1900 年，数学者 H. Laurent による攻撃は，Walras を著しく動揺させたように思われる。

〈満足が観測可能であるなどという見解をどうして受け入れることができましょうか。数学者は

(33) 部分々数に分解して解けばよい。
(34) 正確には $y_2,y_3,y_4$ が 1 でない範囲で。
(35) Monge-Cauchy の定理による。

断じてそれに同意することができないのでございます。[36]〉

これに対して Walras は同年5月22日付の Laurent 宛書簡で効用の可測性を否定する見解を述べるとともに，自説の弁護に努めた。

〈経済学の問題は，…（中略）…$\mu$ ［価値尺度財の限界効用―引用者］が尺度になるとか，それ自体可測的であるとか仮定することなしに…（中略）…解決されるという事実に大いに注目していただきたいと存じます。私自身としては，効用および限界効用の尺度を全く用いずに議論しているわけなのです。[37]〉

こう答えてみたものの，Walras は一抹の疑念を拭い去ることができず，H. Poincaré に書簡を送ってその見解を尋ねたことは，学史上よく知られたとおりである。[38]

しかし需要函数（あるいは逆需要函数）が観測可能であるとして，これを生成する効用函数を溯って理論的に求めうるならば，効用函数は直接に観察できないまでも，需要函数を導く基礎概念として正当化されるのではなかろうか。

素朴な経験主義者であった V. Pareto も，需要函数の背後にある効用函数を析出する問題に考察を加えたが，これを可能にする正確な数学的条件を明示することができなかった。[39]

むしろ Pareto に先立って，問題の数学的骨格を初めて簡明に表現しえたのは Antonelli の小著 [1] である。Antonelli の分析の本質は本稿で述べた Jacobi 系の連立偏微分方程式の基礎理論である。

いま消費の対象となる財の種類を $l$ とし，消費量のベクトルを $x=(x_1,x_2,\cdots,x_l)$，逆需要函数を $P(x)=(P_1(x),P_2(x),\cdots,P_l(x))$ で表わす。第1財を価値尺度財（したがって $P_1(x)\equiv 1$）とし，各 $P_i$ には十分な滑らかさを仮定する。もし $P(x)$ を生成する効用函数 $u$ が存在するならば，$u$ は偏微分方程式

$$X^i u=\frac{\partial u}{\partial x_i}-P_i\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad i=2,3,\cdots,l \tag{1}$$

を満たさなければならない。[40] この方程式に解が存在すれば，これが求める効用函数とみなしうるものと Antonelli は考えた。

---

（36）Laurent から Walras 宛 1900 年 5 月 13 日付書簡。Jaffé [9] Vol.III, p. 116，書簡番号 1452。

（37）Jaffé [9] Vol.III, p. 119，書簡番号 1454。

（38）Walras-Poincaré の往復書簡についての詳細は丸山 [10]pp. 158–162。1901 年 9 月 30 日付，Poincaré から Walras に宛てた書簡は序数的効用理論の核心を過不足なく整理し，併せて Walras の方法を肯定・擁護するものであった。Jaffé [9] Vol.III, pp. 164–165，書簡番号 1496。

（39）Pareto [13],[14]. Pareto のこの問題をめぐる所見の評価については須田 [17] およびそこに挙示された文献を参照せよ。

Jacobi の括弧 $(X^i, X^j)$（$i, j = 2, 3, \cdots, l$）を直接計算によって求めてみよう。

$$\begin{aligned} X^i X^j u &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - P_j \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - P_i \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - P_j \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_1} - P_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} \\ &\quad - P_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_1} + P_i \frac{\partial P_j}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_i P_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

$X^j X^i u$ も同様に計算すればよい。これから

$$\begin{aligned} (X^i, X^j)u &= X^i X^j u - X^j X^i u \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\left[P_i \frac{\partial P_j}{\partial x_1} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - P_j \frac{\partial P_i}{\partial x_1} + \frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

が導かれる。（$\partial u/\partial x_1 \neq 0$ として）(2)が 0 となるためには

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - P_i \frac{\partial P_j}{\partial x_1} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} - P_j \frac{\partial P_i}{\partial x_1} \tag{3}$$

の成り立つことが必要十分である。すべての $i, j = 2, 3, \cdots, l$ に対して(3)が成り立つ場合（かつその場合に限って），方程式(1)は Jacobi 系，したがって完全系となるので，条件(3)が満たされるならば，V の解法に基づき，(1)は解を有する。

(3)の左辺を $a_{ij}$，つまり $a_{ij} = \partial P_j/\partial x_i - P_i \cdot \partial P_j/\partial x_1$ と書けば，右辺は $a_{ji}$ である。(3)は $a_{ij}$ を第 $i$ 行第 $j$ 列とする行列(41)の対称性を述べているのである。

方程式(1)の解法として Antonelli が考案した数理は，やや補足を加えつつ整理すれば以上の如きものと思われる。

Samuelson [16] はさらに，Antonelli 行列（$a_{ij}$）の対称性条件は Slutsky の代替項の対称性，また所謂 Frobenius の条件(42)とも同値であることを証明した(43)。

最後にひとつだけ注意しておきたいことは，微分方程式(1)に解が存在したとしても，これを極大化することをつうじて導かれる需要函数が当初観察された需要函数と一致するかどうかは保証の限りではないという一事である。もし両者が一致しない場合は，以上の試みは十分な解決とはいえないであろう。ひとつの完全な解決は Hurwicz and Uzawa [8] によって与えられた(44)。

---

(40) $i = 1$ の場合，$P_1(x) \equiv 1$ であるから，いかなる函数 $u$ に対しても(1)が成り立つ。また $\partial u/\partial x_1 = 0$ ならば $\partial u/\partial x_i = 0$（$P_i \neq 0$ として）であるから，$\partial u/\partial x_1 \neq 0$ の条件を満たすように $u$ を求める問題と考えてよい。

(41) 後にこの行列は Antonelli 行列と称されるようになった。

(42) Frobenius[4] が原典である。

(43) 細矢・廣 [6] pp. 158–161 をも参照のこと。

## 参 考 文 献


[1] Antonelli, G.B., *Sulla teoria matematica della economia politica*, (Nella Topografia del Folchetto, Pisa) 1886, *Giornale degli economisti*, **10** (nuova serie)(1951), 223–263 に再録. Chipman et al. [3] Chap. 16 には J.S. Chipman および A.P. Kirman による英訳が掲載されている.

[2] Carathéodory, C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, Vol.1, translated by R.B. Dean and J. Brandstatter, (Holden-Day, San Francisco) 1965.

[3] Chipman, J.S., L. Hurwicz, M.K. Richter and H.F. Sonnenschein eds., *Preferences Utility, and Demand*, (Harcourt Brace Jovanovich, New York/ Chicago/ San Francisco/Atranta) 1971.

[4] Frobenius, G., „Ueber das Pfaffsche Problem“ , *J. Reine angew Math.*, **82** (1877), 230–315.

[5] 藤原松三郎『微分積分學』第二巻（内田老鶴圃新社）昭和 14 年.

[6] 細矢祐誉・虞朝聞「偏微分方程式と逆需要関数の積分可能性」『三田学会雑誌』**105**（2012），247–270.

[7] ――――・―――「偏微分方程式と需要関数の積分可能性」『三田学会雑誌』**105**（2012），461–479.

[8] Hurwicz, L. and H. Uzawa, “On the Integrability of Demand Functions”, in Chipman et al. eds. [3] Chap. 6.

[9] Jaffé, W. ed., *Correspondence of Léon Walras and Related Papers*, 3 Vol’s, (North Holland, Amsterdam) 1965.

[10] 丸山徹『ワルラスの肖像』（勁草書房）平成 20 年.

[11] 南雲道夫『偏微分方程式』I（岩波書店）昭和 32 年.

[12] ――――『偏微分方程式論』（朝倉書店）昭和 49 年.

[13] Pareto, V., “Considerazioni sui principi fondamentali dell’economia pura”, *Giornale degli economisti*, **4** (1892), 389–420, 485–512; **5** (1892), 119–157; **6** (1893), 1–37; **7** (1893), 279–321. Pareto [15] に収載，また英訳 R. Marchionatti and F. Mornati eds., *Considerations on the Fundamental Principles of Pure Political Economy*, (Routledge, Oxford/New York) 2007 も刊行されている.

[14] ――――, *Manuel d’économie politique*, (Giard & Brière, Paris) 1909. *Œuvres complètes*, tome VII, (Droz, Genève) 1966 に収載.

[15] ――――, *Ecrits d’économie politique pure*, G. Busino ed., *Œuvres complètes*, tome XXVI, (Droz, Genève) 1982.

[16] Samuelson, P.A., “The Problem of Integrability in Utility Theory”, *Economica*, **17** (1950), 355–385.

[17] 須田伸一「パレートと積分可能性問題」『三田学会雑誌』**99**（2007），637–655.

[18] Wold, H., “A Synthesis of Pure Demand Analysis”, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **26** (1943), 85–118, 220–263; **27** (1944), 69–120.



**附記** 匿名の審査者は私の寄稿をきわめて丁寧かつ綿密に読まれ，誤謬やわかりにくい表現をご指摘下さった。本稿が幾分でも読みやすく改善されているとすれば，それは審査者からのご教示に負うところが大きいのである。深く感謝の意を表する。


---

（44）Hurwicz and Uzawa [8] の理論およびその数学的な根拠を成す Nikliborc の定理については細矢・虞 [7] を見よ。