Title	経済数学覚書4 : 帰納法雑録
Sub Title	Notes on math of economics 4 : miscellaneous induction
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2022
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.115, No.3 (2022. 10) ,p.261 (49)- 279 (67)
JaLC DOI	10.14991/001.20221001-0049
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20221001-0049

「三田学会雑誌」115 巻 3 号（2022 年 10 月）

解　説

経済数学覚書 4
——帰納法雑録——

中山幹夫 *

1.　はじめに

すべての自然数について成り立つ公式などを，特別なアイディアに頼ることなく機械的計算だけで証明する場合に役立つ方法が数学的帰納法である。たとえば

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

の証明は，$(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)^3 - k^3\Big)$ を利用することに思い至らなくても，数学的帰納法では単純計算で証明できる。また，ジャンセンの不等式のように数学的帰納法が標準的な証明方法のような例もある(1)。

帰納法は証明における単なる機械的利便性だけでなく，さらに最適化理論やゲーム理論では解や均衡の定義にしばしば不可欠な役割を果たす推論法である。たとえば，有限の離散的な動的計画法の状態方程式の確定や展開形ゲームのサブゲーム完全均衡などは帰納法，特に後ろ向き（逆向き）帰納法の典型的な例である。

本稿では，授業やゼミで取り上げた架空の帰納法的パズルや物語などから始めて，ゲーム理論や最大化問題，また組み合わせ論その他を散策しながら帰納法的推論の効能と魅力に迫ってみたい。

＊　慶應義塾大学名誉教授
寄せられたコメントにより記述を改善できたので，査読者に感謝いたします。
（1）　中山 [11].

2. 帰納法的説話

数学的帰納法にまつわるパラドックスやパズルは数多くあるが，ここではジョークのような「禿げ頭のパラドックス」から「煤だらけのお嬢さん」などのヴァージョンでも知られている帰納法物語や，著名な数学者が論じた「ケーキの分割問題」などについて述べてみよう。

2.1. 禿げ頭のパラドックス． 髪の毛が 0 本の人は禿げ頭である。n 本の人も禿げ頭ならば 1 本多い $n+1$ 本の人も相変わらず禿げ頭である。ゆえにすべての人は禿げ頭である。(2)

髪の毛の本数はどれほど多くても有限個であり，禿げ頭でない人もいるのでこの論理はある有限本数までしか正しくないことは言うまでもない。これと同類のジョークに「すべての自然数は興味深い」という「命題（？）」がある。まず，0 は確かに興味深い数である。$1, 2, \ldots, n$ も興味深い数であるとすると，もし $n+1$ が興味深くない数ならば，突然に興味深くなくなるという意味で興味深い数になるので矛盾である。ゆえに $n+1$ も興味深い数となって，すべての自然数は興味深いことが示された！

2.2. 不意打ち試験． 毎週月曜日から金曜日の 1 限にクラスをもつ教授が言うには，「来週，不意打ち試験をする。ただし，君たちが試験日は今日だと言い当てることができたなら試験はやめる。」さて，試験はできただろうか。

金曜日は最終日だからできない。すると木曜日が最終日となりやはりできない。以下同様にして月曜日もできない。つまり試験はできない。これは死刑執行人のパラドックス（Hangman's Paradox）とも呼ばれ，ナッシュも引用している物語である。(3)

学生たちはこうして試験ができないことを確信するので，教授は任意の曜日に試験を実行すれば不意打ち試験は大成功である。

2.3. ウサギの運命． n 頭の肉食動物が前向きに 1 列に並んでいる。どの動物も前にいる動物を食べたいが，食べると必ず後ろの動物に食べられてしまう。しかし食べなければ安泰である。先頭に 1 羽のウサギがいるとすると，ウサギの運命は？

荒唐無稽な問題であるが，結果は n が偶数ならウサギは生き残り，奇数ならば食べられてしまうこ

(2) この珍命題も次の「すべての自然数は興味深い」も Elwes [4] 参照。
(3) Roth [16] はナッシュが実験へのコメントにこの物語を引用していることに言及している。

ととなる。

$n=1,2$ ならば自明である。$n \geq 3$ まで結果が正しいと仮定すると，n が偶数ならばウサギの後ろの動物は食べないのでウサギの位置に追加された1頭の動物はウサギを食べることができる。奇数ならばウサギの位置に追加された動物は食べられてしまうので，ウサギを食べることはできない。こうして $n+1$ の場合にも n の場合と同じ結果になるので上に述べた答は正しい。

次節に述べる情報の拡散停止を分析した論文[(4)]の初版に対するレフェリーコメントに，帰納法による拡散停止集合の定義は，このウサギと肉食動物たちが直面している状況において，平和主義国（ウサギ）は，侵略をもくろむ好戦国（肉食動物）に侵略されるかどうかという話に似ているとの指摘があった。このようなパズルもゲーム理論のクラスなどで語られているのかもしれない。

2.4. 煤だらけのお嬢さん. 窓を開け放ったコンパートメントに偶然乗り合わせた3人のお嬢さんたちを運ぶ列車は，やがて煙を吐きながらトンネルに入った。トンネルを出たらこのお嬢さんたちは何やらクスクスと笑っている。ところが，しばらくして突然3人一斉にハンカチを取り出して顔を拭き始めた。顔が煤だらけであることに気付いたのである。どうして気付いたのだろうか[(5)]？

これは，「泥だらけの子供たち」とか「帽子のパズル」などのいくつかのヴァージョンがある帰納法的物語である。3人のうちの任意の1人の推論は次のとおりである。もし自分の顔が煤だらけでなかったなら，笑っている2人は互いの顔の煤を見て笑っているのだから自分の顔は煤だらけだと気付くはずだ。ところがしばらく笑い続けているというのは，つまり私の顔が煤だらけではないという仮定が間違っているのだ（対偶），さあ大変。こうして3人とも一斉に顔を拭き始める。

これを n (≥ 4) 人のお嬢さんたちに拡張するには，コンパートメントに大勢が入れるはずがないことをまず忘れよう。$n-1$ 人の場合，しばらく笑い続けているが，任意の1人は，他の $n-2$ 人は気が付いて顔を拭くはずなのに笑っているのは自分も煤だらけだからと気付いて，$n-1$ 人一斉に顔を拭き始めるとする。n 人の場合，しばらく笑い続けているが，任意の1人は他の $n-1$ 人は一斉に顔を拭くはずなのに笑っているのは自分も煤だらけだからと気が付く。こうして n 人一斉に顔を拭き始めることになる[(6)]。

この物語はヨーロッパでは知られていたが，これを「奇妙顔の三婦人」と名付けて紹介しているリトルウッドによれば，この推論は純粋な数学的推論であるとして本に書いているのは自分が最初

---

(4) Nakayama, Quintas and Muto [9].

(5) 出典は Gamow and Stern [5]，原題は「煤だらけになった3つの顔」。

(6) たとえば車掌が来て「顔が煤だらけの人が少なくとも1人います。今から，自分が煤だらけとわかった人は手を挙げてください，と時間をおいて n 回尋ねます」と言ったのでそのとおりにすると，$n-1$ 回目までは誰も手を挙げず n 回目で n 人一斉に手を挙げた，という話にすれば推論はよりわかりやすくなる。

ではないだろうかと述べている。[7]

2.5. バナッハ－クナスター解. ブランデーを n 人で公正に分けるには[8]？

これは厳密には帰納法的問題ではないが，著名な数学者バナッハと KKM 定理のクナスターの考案になる公正な分割法で，「理論的」には任意の n で成り立つ解法であることからここに述べておこう。まず，順序をくじ引きなどで決めることから始める。

- 2 人の場合：最初の人がデカンターから 1 人分と思う量を 2 つのグラスに注ぎ，次の人が好ましいと思うグラスを取る。
- 3 人の場合：最初の人はデカンターから 1 人分と思う量を 1 個のグラスに注ぐ。次の人は何もしないか，あるいはそのグラスの量が多すぎると思う場合に限って，そのグラスから少しデカンターに戻す。最後の人は何もしないか，あるいはそのグラスの量が多すぎると思う場合に限って，そのグラスから少しデカンターに戻す。こうして，最後にグラスからデカンターに戻した人がそのグラスを取る。誰も戻さない場合は最初の人がグラスを取る。その後，2 人の場合に戻る。

このルールでは，もちろん，ブランデーの量が皆同じになるわけではないが，誰も不平を言えないという意味で公正な量が実現する。この解法がそのまま n 人に拡張できることは明らかであろう。

1940 年代，ポーランドのリボフではシュタインハウスやバナッハなどを中心とする数学者たちがスコティッシュ・カフェで長時間にわたって数学の議論をしていたことが知られているが[9]，純粋数学の抽象論だけでなくこのようなパズルも論じられていたものと思われる。

3. ゲーム理論の帰納法

ゲーム理論では有限回繰り返しゲームや展開形ゲームにおけるサブゲーム完全均衡などが後ろ向き帰納法で与えられることはよく知られている。また，戦略形ゲームや提携形ゲームにおいても帰納法によって均衡や解を定義するものがある。ここではこのような例をいくつか見てみよう。

---

(7) Bollóbas [2] にこのような記述がある。
(8) オリジナルはケーキの分割問題である。Steinhaus [18] 参照。
(9) Ulam [19].

3.1. アイスクリームの分割. 2人のプレイヤーAとBがアイスクリームの分割をめぐって，以下のように交互に分割を提案する n ラウンドの交渉をする。アイスクリームの大きさは n とし，1ラウンドごとに大きさ1ずつ溶けていくとする。どのような分割が実現するだろうか。

これはルービンシュタインによる交渉ゲーム(10)を単純化したもので，展開形ゲームのサブゲーム完全均衡の例示として授業などで使われることがある問題である。ここでは動的計画法の応用例として考察する。交渉のルールは以下のとおりである。

第1ラウンド：アイスクリームの大きさは n である。

- Aが自分の取り分 $x \in [0, n]$ を提示する。
  - ・Bが同意すれば交渉は $(x,\ n-x)$ で妥結する。
  - ・Bが拒否すれば交渉は第2ラウンドに入る。

第2ラウンド：アイスクリームの大きさは $n-1$ である。

- Bが自分の取り分 $y \in [0, n-1]$ を提示する。
  - ・Aが同意すれば交渉は $(n-1-y,\ y)$ で妥結する。
  - ・Aが拒否すれば交渉は第3ラウンドに入る。

第3ラウンドではアイスクリームの大きさは $n-2$ になって，提案者はAに戻って同じルールに従って交渉し，以下第 n ラウンドまで同様である。

さて，第 k ラウンドで妥結したとして，提案者の取り分を**状態評価関数** $J(k)$ にとると，$J(k)$ が満たすべき再帰方程式は第 k ラウンドでのアイスクリームの大きさ $n-k+1$ を考慮すれば，最終ラウンドからの後ろ向き帰納法によって

$$
\begin{aligned}
&J(n) = 1 \\
&J(k) = n-k+1-J(k+1)\ , \quad k = n-1, \ldots, 2, 1
\end{aligned}
$$

と与えることができる。これは最終ラウンドでは提案者はすべてを獲得し，また第 k ラウンドで提案が拒否されないためには，相手が次のラウンドで確保できる値を保証しなければならないことを記述している。この背景には第 k ラウンドにおいて「提案者は $J(k)$ を提示する；相手は自分の取り分が $J(k+1)$ 以上ならば同意し，それ未満ならば拒否する」というナッシュ均衡が隠れている。それゆえ，$J(k)$ はこのゲームのサブゲーム完全均衡が記述する提案者の取り分の列を与えている。この交渉は第1ラウンドで妥結するので $J(1)$ を求めてみよう。まず $J(k)$ を次のように書き換える。

---

(10) Rubinstein [17].

$$J(k) = n - k + 1 - \Big(n - (k+1) + 1 - J(k+2)\Big) = 1 + J(k+2)$$

すると，n が奇数ならば

$$J(1) = 1 + J(3)$$
$$J(3) = 1 + J(5)$$
$$\cdots\cdots$$
$$J(n-2) = 1 + J(n)$$

奇数 $n - 2 = 2h - 1$ とすると $h = \frac{n-1}{2}$ であるから

$$J(1) = 1 \times \frac{n-1}{2} + J(n) = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

となる。n が偶数ならば，$J(n-1) = 2 - J(n) = 1$ に注意し，$J(n-3) = 1 + J(n-1)$ として $J(1)$ から $J(n-3)$ まで加算すると，$n - 3 = 2h - 1$ すなわち $h = \frac{n-2}{2}$ であるから

$$J(1) = 1 \times \frac{n-2}{2} + J(n-1) = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$$

が得られる。こうしてこの交渉は,（A の取り分, B の取り分）として, n が奇数ならば $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$, n が偶数ならば $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ という分割で妥結する。

3.2. 結託耐性ナッシュ均衡. $G := \Big(N, \{X^S\}_{S\subseteq N}, \{u_i\}_{i\in N}\Big)$ は提携をともなう戦略形ゲームであるとする。ただし $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ はプレイヤーの集合，$X^S := \prod_{i\in S} X^i$ は提携 $S \subseteq N$ の戦略集合，u_i はプレイヤー $i \in N$ の利得関数である。戦略プロファイル $x \in X := X^N$ における提携 S の離反戦略とは

$$u_i(y^S, x^{N\setminus S}) > u_i(x) \quad \forall i \in S$$

を満たす $y^S \in X^S$ をいう。どの提携も離反戦略をもたない戦略プロファイル $x \in X$ は強ナッシュ均衡と呼ばれるが，結託耐性ナッシュ均衡とはすべての離反ではなく，以下に述べる意味で確実に実行できると考えられる離反に限定した均衡概念である。

定義 1. 戦略プロファイル $x \in X$ において，$y^S \in X^S$ が提携 $S \subseteq N$ の**確定的離反戦略**（**credible deviation**）であるとは，y^S は離反戦略であって，$(y^S, x^{N\setminus S})$ において S のいかなる真部分集合 $T \subsetneq S$ も確定的離反戦略をもたないことをいう。

戦略プロファイル $x \in X$ において，いかなる部分集合 $S \subseteq N$ も**確定的離反戦略**をもたないとき，x を**結託耐性ナッシュ均衡**（**coalition-proof Nash equilibrium**）という。(11)

まず, 1 人のプレイヤーによる離反は常に確定的な離反であることに注意しよう。1 人提携 $\{i\}$ には空でない真部分集合は存在しないからである。すると，戦略プロファイル $x \in X$ において提携 S が確定的離反戦略をもつかどうかは 1 人提携 $\{i\} \subseteq S$ から始めて提携サイズの順に各提携 $\{i\} \subseteq T \subsetneq S$ に離反戦略があるかどうかによって帰納的に決まる。たとえば囚人のジレンマでは，ナッシュ均衡からの 2 人による離反は確定的ではないので，このナッシュ均衡は結託耐性をもつことになる。

結託耐性ナッシュ均衡の存在については，ナッシュ均衡の存在に類するような一般的条件は知られていないが,

> もし戦略プロファイル $x \in X$ が任意の空でない部分集合 $S \subseteq N$ に限定した部分ゲーム $G|x^{N \setminus S}$ において $x^S \in X^S$ を**唯一のナッシュ均衡**として与えるならば，x はゲーム G の結託耐性ナッシュ均衡となる。

これは，まず x は G の唯一のナッシュ均衡であり，N および N のいかなる部分集合 $S \subseteq N$ の離反戦略 $y^S \neq x^S$ もナッシュ均衡ではない以上，ある $i \in S$ による離反，すなわち確定的な離反を引き起こすからである。この，やや特殊なケースが成り立つ例としては，たとえば「戦略的純粋交換ゲーム」では誰も交換しようとしない行動の組が唯一の結託耐性ナッシュ均衡になるという結果がある。(12)

3.3. 自己拘束的提携. 結託耐性ナッシュ均衡は，離反という提携行動を通して精緻化されたナッシュ均衡である。この提携行動を最悪の事態でも実行可能な離反に変更すると，ナッシュ均衡ではなく協力ゲームのコアとの関連が出てくる。

戦略プロファイル $x \in X$ において，$y^S \in X^S$ が提携 $S \subseteq N$ の **$\boldsymbol{\alpha}$ 離反戦略**であるとは，任意の $z \in X$ に対して

$$u_i(y^S, z^{N \setminus S}) > u_i(x) \quad \forall i \in S$$

となること，すなわち利得ベクトル $\Big(u_i(x)\Big)_{i \in S}$ を**独力で改善**できることをいう。

（11）Bernheim, Peleg and Whinston [1] によるオリジナルな定義と同値である。

（12）中山 [12, 命題 8].

定義 2. 戦略プロファイル $x \in X$ において，$y^S \in X^S$ が提携 $S \subseteq N$ の**確定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 離反戦略**であるとは，y^S は α 離反戦略であって，任意の $z \in X$ に対し $(y^S, z^{N \setminus S})$ において S のいかなる真部分集合 $T \subsetneq S$ も**確定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 離反戦略**をもたないことをいう。

任意の $S \subseteq N$ について，戦略 $x^S \in X^S$ が S の**自己拘束的戦略**（**self-binding strategy**）であるとは，任意の $z \in X$ に対し，$(x^S, z^{N \setminus S})$ において確定的 α 離反戦略をもつ $T \subseteq S$ が存在しないことをいう。また，自己拘束的戦略をもつ提携を**自己拘束的提携**と呼ぶ。

ここでも 1 人提携の α 離反戦略は確定的 α 離反戦略であり，提携 S が確定的 α 離反戦略をもつかどうかは確定的離反戦略の場合と同様にして帰納的に決まる。

$S \subseteq N$ が自己拘束的提携ならば，S のプレイヤーたちは $N \setminus S$ の戦略にかかわらず一定の利得を確保できる。(13) TU ゲームではこの自己拘束的提携 S は，提携値 $v(S)$ を確保することに相当するので，次のように定義してみよう。(N, v) を TU ゲームとして

> $S \subseteq N$ が自己拘束的提携であるとは，$\sum_{i \in S} r_i \leq v(S)$，$r_i \geq v(\{i\})\ \forall i \in S$ を満たすある利得ベクトル $r_S := (r_i)_{i \in S}$ をとれば，S の任意の自己拘束的部分提携 $T \subsetneq S$ に対して $\sum_{i \in T} r_i \geq v(T)$ が成り立つことをいう。

1 人提携は自己拘束的であり，$S \subseteq N$ が自己拘束的であるかどうかはこれまでと同様，帰納的に決まる。S が自己拘束的ならば，S のいかなる自己拘束的部分提携 $T \subsetneq S$ についても $\sum_{i \in T} r_i \geq v(T)$ であるから T は $r_T := (r_i)_{i \in T}$ を独力で改善することはできない。逆に S が自己拘束的でなければ，上で定義したどのような r_S に対してもある自己拘束的部分提携 $T \subsetneq S$ については $v(T) > \sum_{i \in T} r_i$，つまりこの T は r_T を独力で改善することができるので，S の提携としての拘束力は毀損される。

この定義から，N が自己拘束的であることとコアが空でないことは同値であることが，以下に述べる戦略形での命題と同様に確かめることができる。すなわち，どの提携も α 離反戦略をもたない戦略プロファイル $x \in X$ の集合を**戦略的 $\boldsymbol{\alpha}$ コア**と呼べば

$$N \text{ は自己拘束的提携} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{戦略的 } \alpha \text{ コア} \neq \emptyset$$

となる。(14) 戦略プロファイル $x \in X$ が戦略的 α コアに属するならば，x には α 離反戦略は存在しないので確定的 α 離反戦略は存在せず，x は N の自己拘束的戦略である。逆に，任意の x においてある $S \subseteq N$ が α 離反戦略をもてば S または S のある真部分集合は必ず確定的 α 離反戦略をもつか

(13) 自己拘束的提携は Ray [15] の credible coalition の戦略形ヴァージョンである。
(14) Nakayama [7, Proposition 2(i)].

ら[15] x は自己拘束的戦略ではない。コアはこのように提携を自己拘束的提携に限定しても影響を受けない協力解である。

3.4. 情報の拡散停止集合. プレイヤー $1 \in N$ を希少情報の初期保有者とし，各プレイヤー $i \in N$ の利得は情報の保有者の数 h の減少関数 $u_i(h) \equiv E(h)$ とする。情報の保有者となって利得を確保するには，さらなる拡散による利得の減少というリスクを避けるために売り手との間で転売しないという合意が必要である。拡散停止集合とはこの合意が**自己強制的**（**self-enforcing**）となって情報が拡散せずに共有されるプレイヤーの集合である。[16]

定義 3. $H \subseteq N$ が**拡散停止集合**であるとは，$1 \in H$ であって $H \cup T \subseteq N$ が**拡散停止集合**となる任意の空でない $T \subseteq N \setminus H$ に対し，

$$E(|H|) \geq (1 + |T|)\ E(|H \cup T|)$$

となることである。（$|S|$ は集合 $S \subseteq N$ のプレイヤーの数）

この定義では，空でない $T \subseteq N \setminus N$ が存在しないので N は自動的に拡散停止集合である。初期保有者 1 を含む集合が拡散停止集合であるかどうかは，N から始まり逆方向に帰納的に決まっていく。たとえば，集合 $N \setminus \{i\} \ni 1$ が拡散停止集合であるかどうかは $E(|N \setminus \{i\}|) \geq (1+1)E(|N|)$ であるかどうかで決まる。以下同様である。

拡散停止集合 H のプレイヤー $i \in H$ が，獲得した情報を集合 T の各プレイヤーに転売しないという合意のもとで転売しようとしても，最大価格 $E(|H \cup T|)$ でさえ利得は増加しないので，どのプレイヤー $i \in H$ も転売することはない。つまり，拡散停止集合 H においては転売しないという行動は**ナッシュ均衡**になっている。さらに，$H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N$ が各々拡散停止集合ならば，この列の各集合で転売しないという行動は**サブゲーム完全均衡**を構成していると見ることができる。

なお，この拡散停止集合の列においては

$$|H_1|E(|H_1|)\ \geq\ |H_2|E(|H_2|)\ \geq\ \cdots\ \geq\ |N|E(|N|)$$

（15）Nakayama, op.cit. [Lemma 1]. TU ゲームでは，利得ベクトル r_N を独力で改善する最小の部分提携 T をとれば，それが r_T を改善する自己拘束的提携となる。

（16）Nakayama, Quintas and Muto, op.cit., and, Nakayama and Quintas [8].

となってサイズが小さいほど提携利得は大きい[17]。これは希少情報や場合によっては秘密情報の共有形態の本質を現すものと言える。

4.　制約条件付き最大化問題

最初に取り上げるのはミクロ経済学の効用最大化問題，次はエントロピー最大化問題である。いずれもラグランジュ乗数法で容易に解くことができる問題であるが，動的計画法に定式化することによりラグランジュ乗数法にはない利点，すなわち，最適解に至る帰納的なプロセスに沿って答が求められるという利点を示すことができる。

4.1. 予算制約下の効用最大化. $\max \prod_{i=1}^{n} x_i \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\ .$

ただし，価格 p_i および所得 I はすべて正であるとする[18]。
$x_1, \ldots, x_{k-1}$ が決まったあと，残った I の値 y を $x_k, \ldots, x_n$ に割り当てて得られる $\prod_{i=k}^{n} x_i$ の最大値を，動的計画法の状態評価関数 $J_k(y)$ としよう。すると，まず

$$J_1(I) = \max \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I\ ,\quad x_i > 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n \right)$$

であり，後ろから逆向きに

$$\begin{aligned} J_n(y) &= \frac{y}{p_n} \\ &\cdots\cdots \\ J_k(y) &= \max \left(x_k J_{k+1}(y - p_k x_k) \mid 0 < p_k x_k \leq y \right), \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1 \end{aligned}$$

と与えることができる。この再帰方程式から $J_1(y) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y}{n p_i} \right)$ であることを示そう。

$$\begin{aligned} J_n(y) &= \frac{y}{p_n} \\ J_{n-1}(y) &= \max \left(x_{n-1} J_n(y - p_{n-1} x_{n-1}) \mid 0 < p_{n-1} x_{n-1} \leq y \right) \\ &= \max \left(x_{n-1} \left(\frac{y - p_{n-1} x_{n-1}}{p_n} \right) \;\middle|\; 0 < p_{n-1} x_{n-1} \leq y \right) = \frac{1}{p_n p_{n-1}} \left(\frac{y}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

（17）Nakayama, Quintas and Muto, op.cit. [Proposition 3.1].
（18）効用関数 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ は準凹である: 中山 [11, 系 1].

であるから，$J_k(y) = \frac{1}{p_n p_{n-1} \cdots p_k} \left(\frac{y}{n-k+1}\right)^{n-k+1}$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} J_{k-1}(y) &= \max\left(x_{k-1} J_k(y - p_{k-1}x_{k-1}) \mid 0 < p_{k-1}x_{k-1} \leq y \right) \\ &= \max\left(\frac{x_{k-1}}{p_n p_{n-1} \cdots p_k} \left(\frac{y - p_{k-1}x_{k-1}}{n-k+1}\right)^{n-k+1} \middle| \ 0 < p_{k-1}x_{k-1} \leq y \right) \\ &= \frac{1}{p_n p_{n-1} \cdots p_{k-1}} \left(\frac{y}{n-k+2}\right)^{n-k+2} \end{aligned}$$

となって $k-1$ においても成り立つことが示された。この最後の等式は，$x(y-px)^{n-k+1}$ を最大化する

$$x = x_{k-1} = \frac{y}{p_{k-1}(n-k+2)}$$

を求めればよい[(19)]。こうして後ろ向き帰納法によって $J_1(y) = J_{2-1}(y) = \frac{1}{p_n p_{n-1} \cdots p_1} \left(\frac{y}{n}\right)^n$ が成り立つので，$y = I$ として

$$J_1(I) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{I}{np_i}\right)$$

が得られた。

ここで，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ とすると

$$J_1(I) = \left(\frac{I}{n}\right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i, \quad x_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots n$$

となるが，これは**相加平均 $\geq$ 相乗平均**を示す不等式である。つまり，この効用最大化問題の解はこの不等式の別証明を与えることがわかる[(20)]。

最適消費は $J_1(I) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{I}{np_i}\right)$ から $x_i = \frac{I}{np_i}$ であることが予想されるが，まず，$y = I$, $k = 2$ として $x_1 = x_{2-1} = \frac{I}{p_{2-1}(n-2+2)} = \frac{I}{np_1}$ であり，次に $x_2 = \frac{I}{np_2}, \cdots, x_{k-1} = \frac{I}{np_{k-1}}$ であると仮定すると

$$x_k = \frac{I - \sum_{i=1}^{k-1} p_i x_i}{p_k(n-k+1)} = \frac{I - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{I}{n}}{p_k(n-k+1)} = \frac{I - (k-1)\frac{I}{n}}{p_k(n-k+1)} = \frac{I}{np_k}$$

が成り立つ。こうして，$i = 1, 2, \ldots, n$ について $x_i = \frac{I}{np_i}$ が示された。

計算は多少手間取るが，徹頭徹尾，数学的帰納法である。動的計画法の，ラグランジュ乗数法にはない利点は，以上のように最適解に到達するプロセスを再帰方程式が記述し，帰納法がそれを実行することである。

---

(19) $f(x) := x(y-px)^{n-k+1}$ とすると，$x \lesseqgtr \frac{y}{p(n-k+2)} \Longrightarrow f'(x) \gtreqless 0$ となる。

(20) 中山 [11] ではこの不等式から効用最大化問題の解を導いている。

4.2. エントロピー最大化. $\max\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i\right) \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \ p_i > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

制約条件付き最大化問題としては，ほかにも情報理論などに現れるエントロピー最大化問題がある。ラグランジュ乗数法によるとすぐに均等確率 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ によって最大化されることがわかるが，(21) 上の効用最大化問題と同様，後ろ向き帰納法による動的計画法で解くこともできる。以下では，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，$p_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$ および $0 < y \leq 1$ とし，計算は省略して概要だけを述べよう。

まず，$J_1(y) = \max\Big(-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i\Big)$ として

$$J_n(y) = -y \ln y$$
$$J_k(y) = \max\Big(-p_k \ln p_k + J_{k+1}(y - p_k)\Big)$$

と定式化すると，効用最大化問題で実行した帰納的計算過程を経て

$$J_k(y) = -y \ln \frac{y}{n-k+1}, \qquad k = n, n-1, \ldots, 2, 1$$

を得ることができる。ゆえに最大値は $J_1(1) = -\ln \frac{1}{n} = \ln n$ 。また，これを実現する $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は，$J_k(y)$ を与える確率

$$p_k = \frac{y}{n-k+1}$$

および，$p_1 = \frac{1}{n}$，$y = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$ によって，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ であることが帰納的に確かめられる。

5. 組み合わせ論その他

ここでは公式などの証明に使う帰納法, つまり数学的帰納法の応用例を見てみよう。最初に扱う二項展開もその次の組み合わせ公式も，意味を考えれば証明は容易であるが，機械的計算だけで完結する数学的帰納法も多少の工夫を要するという冒頭に述べた証明法としての利便性に逆行（？）するかのような例である。次に述べる差の公式や和の公式，n 次の多項式およびド・モアブルの公式は数学的帰納法のストレートな応用である。最後のド・モアブルの公式は高校数学にも現れるようであるが，ここでは帰納法によらない電光石火の証明にも触れておこう。

(21) 中山 [11] ではジャンセンの不等式から最適解を導いている。

5.1. 二項展開. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$

これは，$(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ において $a^{n-r}b^r$ の個数は直線状に並んだ n 個の場所から b のために r 個の場所を選ぶ組み合わせの総数 $\binom{n}{r}$ に等しいので，r についての総和を求めれば得られる。帰納法による機械的計算には次の補題が必要である。

補題 1. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

この補題も意味の上からは明らかである。すなわち，$n+1$ 個から任意の 1 個 x を選んでおくと，$\binom{n+1}{k+1}$ の計算は，まず x が選ばれない場合の値 $\binom{n}{k+1}$ と，n 個から選んだ k 個の各々の組み合わせに x を追加した組み合わせの数 $\binom{n}{k}$ を加えれば得られる。単純計算による証明も容易である。

証明.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= n!\left(\frac{n-k}{(n-k-1)!(n-k)(k+1)!} + \frac{1}{(n-k)!k!}\right) \\
&= n!\left(\frac{n-k}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{k+1}{(n-k)!(k+1)!}\right) \\
&= n!\left(\frac{n+1}{(n-k)!(k+1)!}\right) = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

さて，帰納法で二項展開を証明するには，$n = 1, 2$ の場合は自明だから，$n \geq 3$ でも正しいことを示すため，$n-1$ で正しいと仮定する。

証明. 以下の等式において，下から 2 番目の等式に補題 1 を使っている。なお，$0! := 1$ に注意する。

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)\ (a+b)^{n-1} \\
&= (a+b)\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\ a^{n-1-r}b^r = \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\ \left(a^{n-r}b^r + a^{n-(1+r)}b^{r+1}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\ a^{n-r}b^r + \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\ a^{n-(1+r)}b^{r+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n-1}{0} a^n b^0 + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} a^{n-r} b^r + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r-1} a^{n-r} b^r + \binom{n-1}{n-1} a^0 b^n \\
&= \binom{n-1}{0} a^n b^0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \right) a^{n-r} b^r + \binom{n-1}{n-1} a^0 b^n \\
&= \binom{n}{0} a^n b^0 + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \binom{n}{n} a^0 b^n \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r
\end{aligned}
$$

□

5.2. $m+n$ 個から j 個を選ぶ組み合わせ. $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} \binom{m}{j-i} = \binom{m+n}{j}$

n 個から i 個を選ぶ行為と，m 個から $j-i$ 個を選ぶ行為は互いに独立であるから，その組み合わせは $\binom{n}{i}\binom{m}{j-i}$ 個である。これを $i \in \{0,1,2,\ldots,j\}$ について加算すれば $m+n$ 個から j 個を選ぶ組み合わせの総数が得られる。帰納法による証明には，ここでも補題 1 が必要になる。なお，$\binom{m}{r}$ は $r<0$ ならば定義されないものとする。

証明. m を任意に固定して証明する。まず, $n=1$ ならば $\binom{1}{0}\binom{m}{j}+\binom{1}{1}\binom{m}{j-1} = \binom{m}{j}+\binom{m}{j-1} = \binom{m+1}{j}$ となって命題は成り立つ。$n=2$ ならば，$j=1,2$ に対して

$$
\binom{2}{0}\binom{m}{j}+\binom{2}{1}\binom{m}{j-1}+\binom{2}{2}\binom{m}{j-2} = \binom{m}{j}+\binom{m}{j-1}+\binom{m}{j-1}+\binom{m}{j-2} = \binom{m+2}{j}
$$

となって命題は正しい。最後の等式は $j=2$ に対して補題 1 を 2 度使っている。

命題が $n \geq 3$ でも正しいことを示すため，$n-1$ で正しいと仮定しよう。4 番目と最後から 2 番目の等式には帰納法の仮定，また最後の等式には補題 1 を使っている。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i}\binom{m}{j-i} &= \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{j-i} \frac{n!}{(n-i)!\ i!} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{j-i} \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!\ i!} \left(\frac{n}{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{n-1}{i}\binom{m}{j-i} \left(1+\frac{i}{n-i}\right) \\
&= \binom{m+n-1}{j} + \sum_{i=1}^{j} \binom{n-1}{i}\binom{m}{j-i} \left(\frac{i}{n-i}\right) \\
&= \binom{m+n-1}{j} + \sum_{i=1}^{j} \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!\ i!} \times \frac{i}{(n-1-i)+1} \binom{m}{j-i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{m+n-1}{j} + \sum_{i=1}^{j} \frac{(n-1)!}{(n-1-(i-1))!\,(i-1)!}\binom{m}{j-i} \\
&= \binom{m+n-1}{j} + \sum_{i=1}^{j} \binom{n-1}{i-1}\binom{m}{j-i} \\
&= \binom{m+n-1}{j} + \binom{n-1}{0}\binom{m}{j-1} + \binom{n-1}{1}\binom{m}{j-2} + \cdots + \binom{n-1}{j-1}\binom{m}{0} \\
&= \binom{m+n-1}{j} + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{n-1}{i}\binom{m}{(j-1)-i} = \binom{m+n-1}{j} + \binom{m+n-1}{j-1} \\
&= \binom{m+n}{j}
\end{aligned}
$$

□

5.3. 補題 1 の精緻化. $\displaystyle\sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

これが成り立てば $\sum_{r=k}^{n-1}\binom{r}{k} = \binom{n}{k+1}$ であるから補題 1 が得られる。$\sum_{r=k}^{n-1}\binom{r}{k}$ は $\binom{n}{k}$ 以外の，x を含まない組み合わせの総数を与えている。すなわち，x を含まないが y を必ず含む組み合わせ，x, y を含まないが z を必ず含む組み合わせ，x, y, z を含まないが w を必ず含む組み合わせ，以下同様である。証明は数学的帰納法による。

証明. $n = 1$ については，補題 1 と $\binom{1}{1} = \binom{0}{0}$ に注意して

$$
\binom{1+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} + \binom{1}{k} = \sum_{r=k}^{0}\binom{r}{k} + \binom{1}{k} = \sum_{r=k}^{1}\binom{r}{k}
$$

また，$n = 2$ については，やはり補題 1 と $n = 1$ の結果を使って

$$
\binom{2+1}{k+1} = \binom{2}{k+1} + \binom{2}{k} = \sum_{r=k}^{1}\binom{r}{k} + \binom{2}{k} = \sum_{r=k}^{2}\binom{r}{k}
$$

こうして，$n = 1, 2$ については命題が成り立つ。 $n \geq 3$ についても成り立つことは，$n-1$ において $\displaystyle\binom{(n-1)+1}{k+1} = \sum_{r=k}^{n-1}\binom{r}{k}$ が成り立つと仮定して補題 1 より

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n-1}\binom{r}{k} + \binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k}$$

□

5.4. 差の公式. $x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right)$

証明. $n = 1,\ 2$ では各々，$(x-y)x^0y^0 = x-y,\ (x-y)(x^1y^0 + x^0y^1) = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ となって命題は正しい。$n \geq 3$ でも正しいことは，$n-1$ まで正しいとして次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}
x^n - y^n &= (x+y)\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right) - xy\left(x^{n-2} - y^{n-2}\right)\\
&= (x+y)(x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k}y^k\right) - xy(x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-3} x^{n-3-k}y^k\right)\\
&= (x+y)(x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k}y^k\right) - (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-3} x^{n-2-k}y^{k+1}\right)\\
&= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k}y^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-3} x^{n-2-k}y^{k+1}\right)\\
&= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k}y^k + x^{n-2-(n-2)}y^{n-2+1}\right)\\
&= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k}y^k + x^0y^{n-1}\right)\\
&= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right)
\end{aligned}$$

□

5.5. 和の公式. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

この公式は冒頭に述べた和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ より次数が高いにもかかわらず計算はより簡単である。

証明. $n = 1, 2$ については自明。$n \geq 3$ でも成り立つことは，$n-1$ で成り立つならば以下のように直ちに確かめられる。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3 = \frac{(n-1)^2n^2+4n^3}{4}$$
$$= \frac{n^2\Big((n-1)^2+4n\Big)}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

□

5.6. n 次の多項式. $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ は $x + \dfrac{1}{x}$ の n 次多項式である。

証明. $n = 1,\ 2$ では各々，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^1$，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$ であり，主張は正しい。$n \geq 3$ については，$n-1$ まで正しいとすると

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) - \left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

であり，帰納法の仮定より $x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$，$x^{n-2} + \dfrac{1}{x^{n-2}}$ は各々，$x + \dfrac{1}{x}$ の $n-1$ 次，$n-2$ 次の多項式だから，$x^n + \dfrac{1}{x^n}$ は $x + \dfrac{1}{x}$ の n 次多項式となる。

□

5.7. ド・モアブル (de Moivre) の公式. $\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$

証明. $n = 1$ の場合は自明。$n \geq 2$ においても成立することは，$n-1$ の場合に成立するとすれば以下のように三角関数の加法公式によって確かめられる。$j := \sqrt{-1}$ であるから

$$\begin{aligned}
\Big(\cos\theta + j\sin\theta\Big)^n &= \Big(\cos\theta + j\sin\theta\Big)^{n-1}\Big(\cos\theta + j\sin\theta\Big) \\
&= \Big(\cos{(n-1)\theta} + j\sin{(n-1)\theta}\Big)\Big(\cos\theta + j\sin\theta\Big) \\
&= \cos{(n-1)\theta}\cos\theta - \sin{(n-1)\theta}\sin\theta \\
&\qquad + j\Big(\sin{(n-1)\theta}\cos\theta + \cos{(n-1)\theta}\sin\theta\Big) \\
&= \cos n\theta + j\sin n\theta
\end{aligned}$$

□

高校数学ならば虚数単位 j と加法公式を使う数学的帰納法のよい練習問題であるが，大学では工学などで使われている**オイラーの公式**（**Euler's formula**）[(22)]：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

によると，直ちに

$$\Big(\cos\theta + j\sin\theta\Big)^n = \Big(e^{j\theta}\Big)^n \ = \ e^{jn\theta} \ = \ \cos n\theta + j\sin n\theta$$

が得られる。加法公式も以下のとおりである。

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + j\sin(x+y) &= e^{j\ (x+y)} \\ &= e^{jx}e^{jy} = (\cos x + j\sin x)\ (\cos y + j\sin y) \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + j\ \Big(\sin x\cos y + \cos x\sin y\Big)\ .\end{aligned}$$

6. おわりに

帰納理論（recursion theory）という数学の分野がある。用語としては同じ「帰納」であるが，それはたとえば次の関数 $h(x,y)$ の定義に現れるような**帰納**（**recursion**）である[(23)]。変数も関数も自然数の値をとるとして，関数 $h(x,y)$ をすでに定義されている $f(x)$ と $g(x,y,z)$ を用いて

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ \ h(x,0) = f(x) \\ &\text{(ii)}\ \ h(x,y+1) = g\big(x,y,h(x,y)\big)\end{aligned}$$

によって定義すると，まず (i) から $h(x,0)$ が決まり，(ii) から $h(x,1)$ が決まる。さらに再び (ii) から $h(x,2)$ が決まり以下，同様にして $h(x,3),\ldots$ が決まって関数 $h(x,y)$ が定義される。このように，すでに決まった値から次の値が決まるという意味では本稿での帰納（induction）をも包摂する高度に一般的な「帰納」であると言える。

帰納理論は帰納的関数論（recursive function theory）ないし計算論（computability）とも呼ばれ，このような帰納的演算といくつかの原始的演算から構成された計算可能関数を土台に置いて，ゲーデルの不完全性定理やヒルベルトの 10 番問題の解決などを守備範囲に収めるような数学の基礎論である。筆者はゼミやセミナーでゲーム理論に関連する計算論の初歩に触れたこともあり[(24)]，機会があ

（22）この公式については筆者の大学 2 年時の教科書 Pipes [14] を参照した。
（23）Cutland [3, p.32].
（24） 中山 [10].

れば解説してみたい。

なお，本稿の前編「経済数学覚書 3」における cone の訳語は錘ではなく，正しくは**錐**でした。ここに訂正します。

参 考 文 献

[1] Bernheim, B.D., B. Peleg and M.D. Whinston, “Coalition-proof Nash equilibria I. Concepts,” *Journal of Economic Theory* **42**, 1987.

[2] Bollóbas, B. (ed.), *Littlewood’s miscellany*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. 邦訳は金光滋訳『リトルウッドの数学スクランブル』近代科学社，1990 年。

[3] Cutland, N.L., *Computability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[4] Elwes, R., *Mathpedia 1000*, Discover 21, printed in Japan, 宮本寿代訳，2016 年。

[5] Gamow, G. and M. Stern, *PUZZLE-MATH*, The Viking Press Inc., 1958. 邦訳は由良統吉訳『数は魔術師』白揚社，1958 年。

[6] Hirai, T., T. Masuzawa and M. Nakayama, “Coalition-proof Nash equilibria and cores in a strategic pure exchange game of bads,” *Mathematical Social Sciences* **51**, 2006.

[7] Nakayama, M., “Self-binding coalitions,” *Keio Economic Studies* **35 (1)**, 1998.

[8] Nakayama, M. and L. Quintas, “Stable payoffs in resale-proof trades of information,” *Games and Economic Behavior* **3**, 1991.

[9] Nakayama, M., L. Quintas and S. Muto, “Resale-proof trades of information,” *The Economic Studies Quarterly* **42 (4)**, 1991.

[10] 中山幹夫「ゲームと戦略の計算可能性について」『三田学会雑誌』91 巻，4 号，1999 年。

[11] 中山幹夫「経済数学覚書――凹関数，ジャンセンの不等式，および最適化――」『三田学会雑誌』 111 巻，2 号，2018 年。

[12] 中山幹夫「経済数学覚書 2――ゲーム理論からの寄せ集め――」『三田学会雑誌』112 巻，3 号，2019 年。

[13] 中山幹夫「経済数学覚書 3――コブ - ダグラス型の不等式，ミンコフスキーの不等式およびヘルダーの不等式――」『三田学会雑誌』 113 巻，3 号，2020 年。

[14] Pipes, A.L., *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1958.

[15] Ray, D., “Credible coalitions and the core,” *International Journal of Game Theory* **18**, 1989.

[16] Roth, A.E., “The early history of experimental economics,” *Journal of the History of Economic Thought* **15**, 1993.

[17] Rubinstein, A., “Perfect equilibrium in a bargaining model,” *Econometrica* **50**, 1982.

[18] Steinhaus, H., “The problem of fair division,” *Econometrica* **16**, 1948.

[19] Ulam, S.M., *Adventures of a Mathematician*, Chales Scribner’s Sons, New York, 1976. 邦訳は志村利雄訳『数学のスーパースターたち』東京図書，1979 年。