Title	貨幣と債券についての理論的考察
Sub Title	Theoretical consideration on money and bonds
Author	前多, 康男(Maeda, Yasuo)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2022
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.115, No.1 (2022. 4) ,p.97- 106
JaLC DOI	10.14991/001.20220401-0097
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20220401-0097

「三田学会雑誌」115 巻 1 号（2022 年 4 月）

研究ノート

貨幣と債券についての理論的考察

前多康男 *

1　はじめに

本研究ノートでは，シュレフト・スミス（Schreft and Smith（1997））のモデルの解説を行う。このモデルは実物モデルであるダイヤモンド（Diamond（1965））のモデルに金融システムを導入することにより，金融モデルを構築している。また，モデルに組み込まれている銀行システムは，ダイヤモンド・ディビッグ（Diamond and Dybvig（1983））が展開した仕組みであり，経済に流動性を提供する役割を果たしている。さらに，政策当局が債券（国債）と貨幣を発行することを導入している。(1)

モデルを分析した結果，貨幣が正の価値を持ち，かつ正の名目利子を持つ債券が存在する 2 つの定常均衡が存在することが示される。1 つは資本水準が高い均衡で，もう 1 つは資本水準が低い均衡である。高い資本水準の均衡においては，政策当局は債券市場において貸し手になっている。この状態で貨幣量を増加させると，政策当局の（銀行への）貸出量も増加し，民間部門の資本形成を促進することになる。一方，低い資本水準の均衡においては，民間銀行部門は政策当局の発行する債券（国債）を購入している。この状態で貨幣量を増加させると，民間銀行部門の債券購入量が増加し，民間の資本形成を阻害することになる。低い資本水準の定常均衡では，1 人

本稿は慶應義塾大学学事振興資金の研究援助を受けた。記して感謝の意を表したい。

＊　慶應義塾大学経済学部

（1）　本稿で扱う債券は，原則的に政策当局が発行するもので，国債として解釈できるものであるが，複数均衡の内の 1 つの均衡では，政策当局の発行する債券量が負の値になる。この場合は，政策当局は民間部門に貸出を行っている状態になっており，例えば，民間部門が発行する債券を政策当局が購入して，民間部門に資金を供給していることになる。そのため，本稿では政策当局の発行する債券を国債ではなく単に債券と呼んでいる。

あたりの資本ストックが低く，銀行は資本の保有に比べて債券を大量に保有している。これは，銀行システムが十分に開発されていない経済で観察される状況に似ている。高い資本水準の定常均衡では，名目金利が比較的低く，銀行システムの運用が比較的効率的であることを示している。

実際の経済において，金融市場は，資本蓄積や実物活動のレベルに大きな影響を与えており，経済成長の分析に中心的な役割を持つものである。しかし，新古典派の枠組みで分析される成長モデルは，明示的な金融市場の導入を省略しているものであった。シュレフト・スミス（Schreft and Smith（1997））は新古典派成長モデルに金融市場を本質的な形で組み込んだモデルの嚆矢として捉えることができる。

2　モデル

2.1　モデルの解説

■経済環境　2 期間の世代重複モデルを考える。また, 経済には 2 つのロケーション（location）があると想定する。各期 $t = 0, 1, 2, \cdots$ に若者（若年期の個人）は 2 つのロケーション内の 1 つに生まれる。ロケーションは $j = 1, 2$ で表すことにする。各場所に若者は $[0, 1]$ の連続体で存在しているとする。すべての若者は生まれたときには同質的で，1 単位の労働を初期保有している。各個人は老年期の消費のみから効用を得る。効用関数は $\ln(\cdot)$ で特定化する。

■資産　経済には, 貨幣, 債券, 資本の 3 つの資産が存在する。各ロケーションにおける 1 人あたりの貨幣量を M_t，1 人あたりの債券量を B_t とする。p_t を価格水準とし，$m_t \equiv M_t/p_t$, $b_t \equiv B_t/p_t$ とする。t 期に保有している債券 1 単位に対して $t+1$ 期に I_t の名目粗利子が支払われる。

■個人　世代 t の個人は t 期首に，財，労働，資産の取引を各ロケーションで行う。その後に各個人の集合 $[0, 1]$ から π の割合の個人がランダムに選択され, 他のロケーションへ移動させられる。この移動の際に貨幣のみを持っていく。このようなロケーションの移動に関する決定は t 期末に行われ，その後実際に移動を行う。そして，$t+1$ 期に消費を行う。

このランダムな移動は, ダイヤモンド・ディビッグ（Diamond and Dybvig（1983））における流動性選好ショックと同じ役割を果たし，個人が集まって銀行という組織を形成し，このリスクをプーリングすることにより，資源配分の効率性を向上させることができることになる。ロケーションを移動する個人が貨幣を銀行から引き出し，その後に移動を行うことになる。

■資産　各ロケーションの初期時点の老人は, 1 人あたり $k_0 > 0$ の資本ストックと $M_0 > 0$ 単位の貨幣を初期保有している。貨幣供給は, 政策当局が σ を政策的に決定して,

$$M_{t+1} = \sigma M_t \qquad (1)$$

で変化していくものとする。債券の流列

$\{B_t\}_{t=1}^{\infty}$ は政策当局の予算制約により決定される。ここでは $\sigma > 1$ を想定する。

2.2　市場と銀行

■生産要素市場　各ロケーションで行われる生産は，K を資本，L を労働として，規模に関して収穫一定の生産関数 $F(K, L)$ に従うものとする。$k \equiv K/L$ として，$f(k) \equiv F(k, 1)$ とする。ここで，$f'(k) > 0 > f''(k)$，$f(0) \geq 0$ を仮定する。また f は稲田条件を満たしているとする。

完全に競争的な生産要素市場を想定する。r_t を t 期の資本のレンタル価格とし，w_t を t 期の実質賃金とすると，

$$r_t = f'(k_t)$$

および

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \equiv w(k_t)$$

となる。ここで，$\Omega(k) \equiv \frac{k}{w(k)}$ を定義し，

$$\Omega'(k) > 0 \tag{2}$$

を仮定する。また，$w(0) > 0$ を仮定する。

■コブ・ダグラス型生産関数　生産関数を

$$f(k) = Ak^{\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1, A > 0$$

のコブ・ダグラス型で特定化すると，

$$\Omega(k) = \frac{k}{Ak^{\alpha}(1-\alpha)} > 0$$

となり，仮定(2)が満たされていることがわかる。

■銀行　t 世代の預金者（個人）はすべての所得 w_t を銀行へ預金する。銀行は m_t 単位の（実質）貨幣，b_t 単位の（実質）債券，i_t 単位の資本を保有する。t 期の銀行の資産ポートフォリオ選択の制約は，

$$m_t + b_t + i_t \leq w_t \tag{3}$$

となる。

ロケーションを移動する預金者は預金を引き出す。その引き出しに備えて銀行は貨幣を保有している必要がある。ロケーションを移動する預金者に支払う短期金利（t 期から $t+1$ 期の間の粗実質短期金利）を d_t^m とすると，

$$\pi d_t^m w_t \leq m_t(p_t/p_{t+1}) \tag{4}$$

が成り立つ必要がある[(2)]。この短期金利は，各個人が実際に消費を行う $t+1$ 期の消費財の単位で測られている。債券の（粗）実質収益率を $R_t \equiv I_t(p_t/p_{t+1})$[(3)]，ロケーションを移動しない預金者に支払う長期金利を d_t^n とすると，

$$(1-\pi)d_t^n w_t \leq R_t b_t + r_{t+1} i_t \tag{5}$$

が成立する。この長期金利も，各個人が実際に消費を行う $t+1$ 期の消費財の単位で測られている。ここで，$I_t > 1$ を仮定する。

預金準備比率を $\gamma_t \equiv m_t/w_t$ で定義し，預金債券比率を $\beta_t \equiv b_t/w_t$ で定義すると，預金投資比率は $1 - \gamma_t - \beta_t$ となる。これらの比率を用いると，(4)式は

$$d_t^m \leq \frac{\gamma_t(p_t/p_{t+1})}{\pi},$$

(5)式は

$$d_t^n \leq \frac{R_t\beta_t + r_{t+1}(1-\gamma_t-\beta_t)}{(1-\pi)}$$

と書き直すことができる。

2.3　効用の最大化

■預金者の効用の最大化　預金者の効用の最大化問題は，

$$\max \pi \ln\left(d_t^m w_t\right) + (1-\pi)\ln\left(d_t^n w_t\right)$$

と書くことができ，この問題は，

$$\max \pi \ln\left(\frac{\gamma_t(p_t/p_{t+1})}{\pi}w_t\right) + (1-\pi)\ln\left(\frac{R_t\beta_t + r_{t+1}(1-\gamma_t-\beta_t)}{(1-\pi)}w_t\right)$$

となる。

この問題の一階の条件は，

$$\gamma_t : (p_t/p_{t+1})\frac{\pi}{\gamma_t(p_t/p_{t+1})} - r_{t+1}\frac{1-\pi}{R_t\beta_t + r_{t+1}(1-\gamma_t-\beta_t)} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{\gamma_t} - r_{t+1}\frac{1-\pi}{R_t\beta_t + r_{t+1}(1-\gamma_t-\beta_t)} = 0 \qquad (6)$$

となる。

（無裁定条件）　無裁定条件は，

$$R_t = r_{t+1}$$

であるので，最終的に

$$R_t = I_t(p_t/p_{t+1}) = f'(k_{t+1}) \qquad (7)$$

---

(2)　t 期に預金者は W_t 単位の財を預金する。その預金の一部を用いて銀行は M_t 単位の貨幣を保有する。$t+1$ 期に π の割合の預金者が移動することになるので，その移動者にすべての貨幣を払い戻すとすると，$\frac{M_t}{\pi}$ 単位の貨幣を受け取ることができる。ここから，

$$\frac{M_t}{\pi} = W_t\left(\frac{M_t}{W_t\pi}\right)$$

と計算できる。したがって，（粗）名目金利は $\frac{M_t}{W_t\pi}$ となることがわかる。

実質単位で考えてみると，t 期に預金者は $w_t = \frac{W_t}{p_t}$ 単位の財を預金する。それに対して払い戻される貨幣は実質単位で，$\frac{M_t}{\pi p_{t+1}}$ となる。ここから，

$$\frac{M_t}{\pi p_{t+1}} = w_t\left(\frac{M_t}{w_t\pi p_{t+1}}\right) = w_t\left(\frac{p_t m_t}{w_t\pi p_{t+1}}\right) = w_t\left(\frac{m_t\frac{p_t}{p_{t+1}}}{w_t\pi}\right)$$

と計算できる。したがって，（粗）実質金利は $\frac{m_t\frac{p_t}{p_{t+1}}}{w_t\pi}$ となることがわかる。

実際，(4)式を等号で成立させて変形すると，

$$d_t^m = \frac{m_t\frac{p_t}{p_{t+1}}}{w_t\pi}$$

となっていることがわかる。

(3)　債券の（粗）名目収益率は I_t であるので，B_t 単位の名目の t 期の投資が，$t+1$ 期には元利合計で I_tB_t 単位に増加する。実質単位で考えてみると，$\frac{B_t}{p_t}$ 単位の財が債券に投資される。その投資から，$\frac{I_tB_t}{p_{t+1}}$ 単位の財が得られる。ここから

$$\frac{I_tB_t}{p_{t+1}} = \frac{B_t}{p_t}\left(\frac{I_tp_t}{p_{t+1}}\right)$$

と計算できるので，債券の（粗）実質収益率は，$I_t\frac{p_t}{p_{t+1}}$ となることがわかる。

が導出される。

(預金者の効用の最大化の解) 無裁定条件を用いると，(6)式は，

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{\gamma_t} - r_{t+1}\frac{1-\pi}{r_{t+1}\beta_t + r_{t+1}(1-\gamma_t-\beta_t)} = 0\\ &\quad\Rightarrow \frac{\pi}{\gamma_t} - r_{t+1}\frac{1-\pi}{r_{t+1}(1-\gamma_t)} = 0\\ &\quad\Rightarrow \frac{\pi}{\gamma_t} = \frac{1-\pi}{1-\gamma_t}\\ &\quad\Rightarrow \pi(1-\gamma_t) = \gamma_t(1-\pi)\end{aligned}$$

と変形でき，ここから

$$\gamma_t = \pi \tag{8}$$

となる。つまり預金準備比率 γ_t をロケーションを移動する個人の割合 π に合わせることで，効用最大化が実現できることになる。

2.4 市場均衡

■市場均衡条件 貨幣市場と資本市場の均衡を考えることにする。貨幣市場の均衡条件は，

$$m_t = \pi w_t = \pi w(k_t) \tag{9}$$

となり，資本市場の均衡条件は，

$$k_{t+1} = w(k_t) - m_t - b_t \tag{10}$$

となる。

■政策当局の予算制約 政策当局の予算制約は，

$$I_{t-1}B_{t-1} = M_t - M_{t-1} + B_t$$

と書ける。この式を変形して，

$$R_{t-1}b_{t-1} = (M_t - M_{t-1})/p_t + b_t \tag{11}$$

を得る。

3 定常均衡

3.1 定常均衡の導出

■金融資産の裁定条件 ここでは経済の定常均衡を分析する。定常均衡においては $p_t/p_{t+1} = 1/\sigma$ が成立する[(4)]。この関係を(7)式に使用すると，

$$I = \sigma f'(k) \tag{12}$$

となる。この式は金融資産の裁定条件から導出されるので，AR 式と呼ぶことにする。債券の名目金利と資本の収益率を名目化したものが等しくなることを示している。

縦軸に名目利子率 I，横軸に資本 k を取ると，(12)式は，資本の限界生産力が逓減することから右下がりの曲線になる。この曲線を AR 曲線と呼ぶことにする。

(4) 定常状態では，$m_t = m_{t+1}$ が成立する。このことは，$\frac{M_t}{p_t} = \frac{M_{t+1}}{p_{t+1}}$ を意味し，ここから，

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{M_t}{M_{t+1}}$$

となる。(1)式を用いると，

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{1}{\sigma}$$

が導出される。

■政策当局の予算制約式　政策当局の予算制約式（(11)）から

$$f'(k_t)b_{t-1} = b_t + \frac{M_t}{p_t} - \frac{M_{t-1}}{p_{t-1}}\frac{p_{t-1}}{p_t}$$
$$\Rightarrow f'(k_t)b_{t-1} = b_t + m_t - m_{t-1}\frac{1}{\sigma}$$
$$\Rightarrow f'(k_t)b_{t-1} = b_t + \frac{\sigma-1}{\sigma}m_t \qquad (13)$$

と計算できる。したがって，添字のない変数を定常均衡値とすると，定常均衡においては，

$$b(f'(k)-1) = \frac{\sigma-1}{\sigma}m \qquad (14)$$

となる。この式を b について解いて，

$$b = \frac{(\sigma-1)m}{\sigma(f'(k)-1)} \qquad (15)$$

を得る。(12)式を(15)式に用いて，

$$b = \frac{(\sigma-1)}{I-\sigma}m \qquad (16)$$

となる。この式は，政策当局の予算制約式から導出された定常均衡における m と b の関係式である。また，(16)式は，(9)式を用いて，

$$b = \frac{(\sigma-1)\pi w(k)}{I-\sigma} \qquad (17)$$

となる。

(16)式から

$$m+b = m + \frac{(\sigma-1)m}{I-\sigma}$$
$$= \frac{\sigma m - m + Im - \sigma m}{I-\sigma}$$
$$= \frac{-m+Im}{I-\sigma} = \frac{(I-1)m}{I-\sigma}$$

となり，最終的に，

$$m+b = \frac{(I-1)}{I-\sigma}m \qquad (18)$$

が導出されることがわかる。

■kI 曲線　(9)式から，定常均衡では，

$$m = \pi w(k)$$

が成立する。したがって，(10)式および(18)式を用いて，

$$\Omega(k) = \frac{k}{w(k)} = \frac{w(k)-m-b}{w(k)}$$
$$= 1 - \frac{m+b}{w(k)} = 1 - \frac{(I-1)}{I-\sigma}m\frac{1}{w(k)}$$
$$= 1 - \pi\frac{(I-1)}{I-\sigma} = \frac{(1-\pi)I+\pi-\sigma}{I-\sigma}$$

となる。つまり，

$$\Omega(k) = \frac{(1-\pi)I+\pi-\sigma}{I-\sigma} \qquad (19)$$

が成立する。(19)式を満たす (k,I) で描かれる曲線を kI 曲線と呼ぶことにする。

ここで，(19)式の右辺を

$$H(I) = \frac{(1-\pi)I+\pi-\sigma}{I-\sigma} \qquad (20)$$

と置くことにする。

■kI 曲線の性質

$$H'(I) = \frac{\pi(\sigma-1)}{(I-\sigma)^2}$$

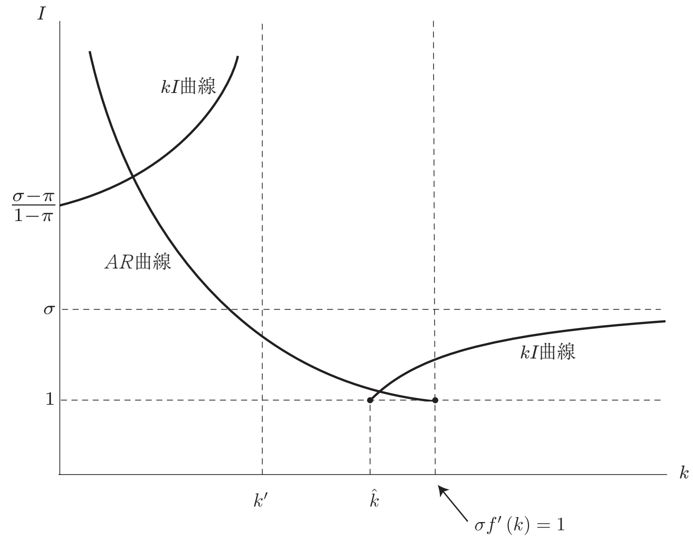
と計算でき，$\sigma > 1$ を想定しているので，$H'(I) > 0$ となる。したがって，$\Omega'(k) > 0$（仮定(2)）より，kI 曲線は増加的であることがわかる。(21)式を陽表的に解いた関数を，

$$I = \Phi(k)$$

と置くことにする。k' を $\Omega(k') = 1-\pi$ を満たす資本量とし，$\hat{k}$ を $\Omega(\hat{k}) = 1$ を満たす資本量とする。(5)

$H(I) = 0$ を解くと，$\frac{I=\sigma-\pi}{1-\pi}$ となるので，$\frac{\Phi(0)=\sigma-\pi}{1-\pi}$ であることがわかる。つまり，kI

図 1　曲線の形状



曲線は $(0, \frac{\sigma-\pi}{1-\pi})$ を通ることになる。また，

$$H(I) = \frac{1-\pi+\frac{\pi-\sigma}{I}}{1-\frac{\sigma}{I}} \tag{21}$$

と変形できるので，kI 曲線上では，

$$\lim_{I\to\infty} \Omega(k) = 1-\pi$$

となり，$k \to k'$ のときに，$I \to \infty$ となることがわかる。つまり，$\lim_{k\to k'-0} \Phi(k) = \infty$ となる。したがって，$k \in [0, k')$ のときの kI 曲線の形状は，図 1 に描かれているように，$k = k'$ に漸近する右上がりの曲線になる。

$H(1) = 1$ であるので，$\Phi(\hat{k}) = 1$ となることが確認できる。このことは，kI 曲線は，$(\hat{k}, 1)$ を通ることを意味する。また，$\lim_{I\to\sigma-0} H(I) = \infty$ であり，脚注(5)より $\lim_{k\to\infty} \Omega(k) = \infty$ であるので，$\lim_{k\to\infty} \Phi(k) = \sigma$ となる。したがって，$k \in [\hat{k}, \infty)$ のときの kI 曲線の形状は，図 1 に描かれているように，$I = \sigma$ に漸近する右上がりの曲線になる。

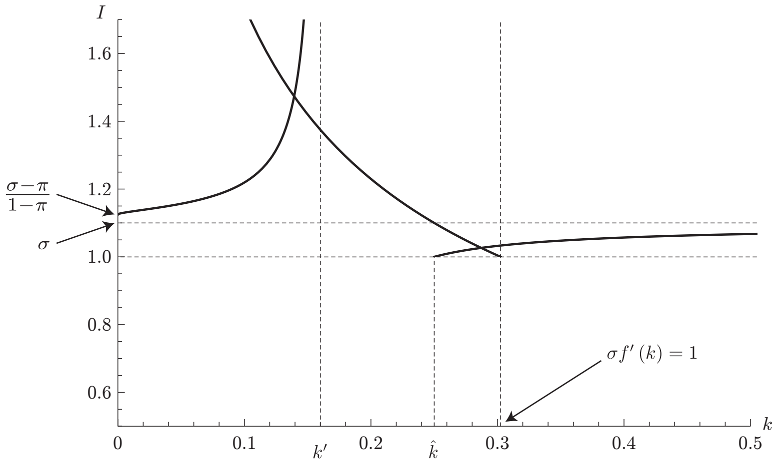
■複数均衡　ここで，$\sigma f'(\hat{k}) > 1$ となることを仮定する。この場合は，図 1 に描かれているように複数の均衡が存在することになる。

右の均衡（高い資本水準の均衡）においては，$I < \sigma$ であるので，(16)式から $b < 0$ となる。この場合には，政策当局は債券市場において貸し手になっている。この状態で貨幣量を増加させると，政策当局の（銀行への）貸出量も増加し，民間部門の資本形成を促進することになる。

左の均衡（低い資本水準の均衡）においては，$I > \sigma$ であるので，(16)式から $b > 0$ となる。

(5)　$\Omega(k) = \frac{k}{w(k)}$ であり，$w(0) > 0$ が仮定されているので $\Omega(0) = 0$ となる。$\frac{k}{w(k)} > \frac{k}{f(k)}$ であり，ロピタルの定理および稲田条件より，$\lim_{k\to\infty} \Omega(k) = \infty$ となる。仮定(2)より $\Omega(k)$ は厳密に増加的であるので，k' および $\hat{k}$ は一意に存在する。また，$k' < \hat{k}$ となることもわかる。

図 2　複数均衡



つまり，民間銀行部門が政策当局の発行する債券（国債）を購入している状態である。この場合に貨幣量を増加させると，銀行の国債購入量が増加し，民間の資本形成を阻害することになる。

3.2　数値例

■$\boldsymbol{AR}$ 式の計算　生産関数を

$$f(k)=Ak^{\alpha};\quad 0<\alpha<1, A>0$$

のコブ・ダグラス型で特定化する。

$$\Omega(k)=\frac{k}{Ak^{\alpha}(1-\alpha)}>0$$

となることは既に計算した。

(12)式（AR 式）は，

$$I=\sigma A\alpha\frac{1}{k^{1-\alpha}}$$

と計算できる。

■関数 $\Phi(k)$ の計算　関数 $\Phi(k)$ は，(19)式より，

$$\frac{k}{Ak^{\alpha}(1-\alpha)}=\frac{(1-\pi)I+\pi-\sigma}{I-\sigma}$$

を I について解いて求めることができる。計算すると，

$$\Phi(k)=\frac{k\sigma-(\alpha-1)Ak^{\alpha}(\pi-\sigma)}{k-(\alpha-1)A(\pi-1)k^{\alpha}}$$

を得る。

■パラメータの特定化　$A=1, \alpha=0.5, \sigma=1.1, \pi=0.2$ でパラメータを特定化する。これらの値を代入すると，AR 式は，

$$I=\frac{0.55}{k^{0.5}},$$

関数 $\Phi(k)$ は

$$\Phi(k)=\frac{1.1k-0.45k^{0.5}}{k-0.4k^{0.5}}$$

と計算できる。

また，$\hat{k}=0.25$，$k'=0.16$，$\sigma f'(k)=1$ の解は $k=0.3025$ と計算できる。グラフは図 2 に描いている。複数の均衡が存在することが確認できる。実際に計算してみると。左側の

図 3　貨幣成長率の変化（資本の動き）

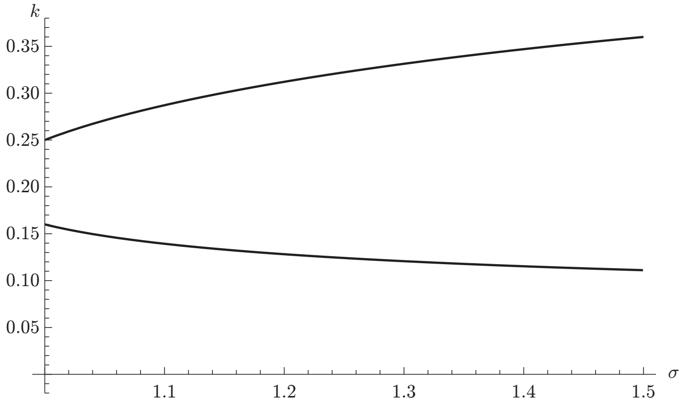
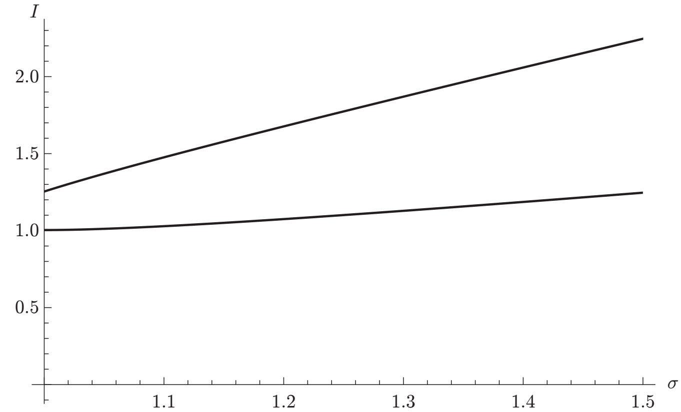


図 4　貨幣成長率の変化（利子率の動き）



均衡は $(I = 1.4736, k = 0.1393)$，右側の均衡は $(I = 1.0263, k = 0.2871)$ となる。

■貨幣成長率の変化　貨幣成長率 σ を 1 から 1.5 まで動かしたときの均衡における資本の動きを図 3 に，利子率の動きを図 4 に示している。図 3 より貨幣成長率が増加すると，右の均衡（高い資本水準の均衡）では資本水準がより高くなっていき，左の均衡（低い資本水準の均衡）においては，資本水準がより低くなっていくことがわかる。図 4 より貨幣成長率が増加すると，両方の均衡において利子率が高くなっていくことがわかる。右の均衡（低い利子率の均衡）では利子率が緩やかに上昇し，左の均衡（高い利子率の均衡）においては，利子率がやや急に上昇することがわかる。

参　考　文　献

Diamond, Douglas W. and Philip H. Dybvig (1983) “Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity,” *The Journal of Political Economy*, Vol. 91, pp. 401–419.

Diamond, Peter A. (1965) “National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, Vol. 55, pp. 1126–1150.

Schreft, Stacey L. and Bruce D. Smith (1997) "Money, Banking, and Capital Formation," *Journal of Economic Theory*, Vol. 73, pp. 157–182.