

Title	確率的単位根検定に対する誤差項の尖度の影響について
Sub Title	On influences of degrees of kurtosis of error term on some tests for unit root processes against stochastic unit root models
Author	長倉, 大輔(Nagakura, Daisuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2021
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.114, No.2 (2021. 7) ,p.173 (59)- 198 (84)
JaLC DOI	10.14991/001.20210701-0059
Abstract	<p>係数が確率的に変動する次数1の自己回帰過程において、その係数が期待値1を取る場合は確率的単位根過程と呼ばれる。本稿では確率的単位根過程において、確率的に変動するとされる係数が実際には定数かどうかの検定に用いられるいくつかの検定方法の性質をシミュレーションによって明らかにする。より具体的には、モデルの誤差項と確率的係数の間の相関およびこれら2つの確率変数の周辺分布の非正規性、特に分布の裾の厚さ(尖度)、がこれらの検定の小標本における実際の有意水準および検出力にどのような影響を与えるかに焦点を当てシミュレーションを行う。シミュレーションの結果、誤差項および確率的係数の分布の両方について、裾が厚くなるほど、有限標本において検出力が低下することがわかった。また、その影響は誤差項の分布の裾の厚みの方が大きいことも示唆された。</p> <p>A first-order autoregressive model in which the autoregressive coefficient randomly fluctuates with mean one is called a stochastic unit root model. Several tests examine the null hypothesis of a unit root process against the alternative of a stochastic unit root model in the literature. In this paper, we investigate the properties of three of those tests by a method of simulation. Specifically, we examine the influence of increases of kurtoses of the random coefficient and the error term of the model on finite sample performances of those three tests. We find that although they both reduce the power of the three tests, the influence of increases of kurtosis of the error term is larger than that of the random coefficient.</p>
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20210701-0059

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

確率的単位根検定に対する誤差項の尖度の影響について

長倉大輔*

On Influences of Degrees of Kurtosis of Error Term on Some Tests for Unit Root Processes against Stochastic Unit Root Models

Daisuke Nagakura*

Abstract: A first-order autoregressive model in which the autoregressive coefficient randomly fluctuates with mean one is called a stochastic unit root model. Several tests examine the null hypothesis of a unit root process against the alternative of a stochastic unit root model in the literature. In this paper, we investigate the properties of three of those tests by a method of simulation. Specifically, we examine the influence of increases of kurtoses of the random coefficient and the error term of the model on finite sample performances of those three tests. We find that although they both reduce the power of the three tests, the influence of increases of kurtosis of the error term is larger than that of the random coefficient.

Key words: stochastic unit root model, lagrange multiplier test, locally best invariant test

JEL Classifications: C12, C22

匿名の査読者からの有意義なコメントにより内容が非常に改善されたことに感謝したい。言うまでもなく、ありうべき全ての間違ひは著者の責任である。

* 慶應義塾大学経済学部

Faculty of Economics, Keio University

nagakura@z7.keio.jp

1 はじめに

確率的単位根過程 (Stochastic Unit Root Process; 以後は STUR 過程) とは次数 1 の自己回帰過程 (Autoregressive model of order 1; 以後は AR (1) モデル) において, その係数が期待値 1 の確率変数であるモデルのことである。STUR 過程は通常の (自己回帰) 単位根過程 (Unit Root Process; 以後は UR 過程) の代替モデルとして, Wu and Chen (1997), Bleaney *et al.* (1999), Sollis *et al.* (2000), および Bleaney and Leybourne (2003) などのファイナンスの実証研究において使用されている。その性質は通常の UR 過程とは非常に異なることが知られており, 例えば, 非定常過程である UR 過程とは異なり, STUR 過程は確率的な係数の分布がある条件を満たす場合は強定常過程になる。STUR 過程の性質および関連した事柄については McCabe and Tremayne (1995), Leybourne *et al.* (1996a), Leybourne *et al.* (1996b), Granger and Swanson (1997), Taylor and van Dijk (2002), Yoon (2006), および Nagakura (2009a,b) などの論文に詳しい説明がある。

STUR 過程を実際のデータに応用する際の問題の 1 つとして, 係数が確率的に変動するというモデルの仮定が実際のデータと整合的かどうか, ということがあげられる。もし係数が確率的に変動しておらず, 1 で一定なのであればそれは通常の UR 過程に他ならない。STUR 過程に関して確率的係数の分散が 0 かどうかを検定する方法はいくつか提案されており, 前述の実証論文などでは McCabe and Tremayne (1995) による局所最良不変検定 (locally best invariant test; 以下では LBI 検定) を使用し上記の仮説の検定を行っている。以下ではこの検定を MT 検定と呼ぶことにする。その他の検定としては Distaso (2008) によるラグランジュ乗数検定 (Lagrange multiplier test; 以下では LM 検定), Lee (1998) による LBI 検定などがあげられる。これらの検定をそれぞれ Distaso 検定, Lee 検定と呼ぶことにする。Lee 検定はもともとは定常な確率的係数 AR (1) モデル (Random Coefficient AR (1) モデル; 以後は RCA (1) モデル) において, その係数の分散が 0 かどうかを検定することを目的としており, 係数一定の帰無仮説のもとでは定常な AR (1) モデルとなることを想定している。Lee (1998) は提案した統計量が帰無仮説のもとで漸近的に標準正規分布に従うことを証明したが, 帰無仮説のもとで単位根過程となる場合については考察しなかった。しかしながら Nagakura (2009a) によって Lee 検定は単位根過程のもとでも漸近的に正規分布に従うことが証明され, これによって STUR 過程における単位根の検定にも Lee 検定を用いることができることが明らかになった。また Nagakura (2009a) の行ったシミュレーションでは, Lee 検定は MT 検定よりも小標本でのパフォーマンスがよいことが示されている。ただし, Nagakura (2009a) および McCabe and Tremayne (1995) や Distaso (2008) の行ったシミュレーションではモデルの誤差項と, 確率的係数の相関が 0 である場合, およびそれらの周辺分布が正規分布である場合しか調べていない。

これに対して, Su and Roca (2012) はモデルの誤差項と確率的係数の相関が 0 でない場合にこれ

ら MT 検定, Lee 検定, Distaso 検定の性質をシミュレーションによって調べ, 相関の値によって検定の小標本における検出力が非常に異なることを発見している (相関が問題になるのは対立仮説のもとでのみであることに注意)。具体的には, MT 検定, Lee 検定は対立仮説のもとで確率的係数の分散が小さい時 (帰無仮説からの乖離が小さい時) には相関が大きくなるにつれて検出力が上昇する傾向があるのに対して, 確率的係数の分散が大きい時 (帰無仮説からの乖離が大きい時) には相関が大きくなるにつれて検出力が低下する傾向があることを発見している。また Distaso 検定については, 確率的係数の分散が小さい時には Lee 検定, MT 検定と同様の傾向があるが, この分散が大きい時には相関が大きくなるにつれて当初は検出力が下がるが, より相関が大きくなるにつれ検出力が上昇するという, 検出力と相関との間により複雑な関係があることを発見している。さらに Su and Roca (2012) は一般的に Distaso 検定と Lee 検定は MT 検定より検出力が高いこと, これら 2 つの検定のどちらがより高い検出力を持つかは相関の値に依存すること, なども発見している。これらの結果は相関の値を考慮することにより, より検出力の高い検定を選択, 構成することができる可能性を示唆しており興味深い。

Su and Roca (2012) は, しかしながら, 誤差項および確率的係数の両方に正規分布を仮定しており, この点では従来の研究におけるシミュレーションと変わりがない。McCabe and Smith (1998) は MT 検定の局所漸近検出力を導出したが, 彼らの導出した局所漸近検出力は誤差項の分布の裾が厚いほど (尖度が大きいほど) 小さくなり, この結果は小標本において MT 検定の検出力は誤差項の裾が厚いほど小さくなることを示唆している。Lee 検定, Distaso 検定については同様の局所漸近検出力はいまだ導出されておらず, 小標本においてこれらの検定の検出力と誤差項の尖度の大きさにどのような関係があるかを調べた研究も現時点では筆者の知る限り存在しない。また, MT 検定および Lee 検定は, 誤差項が正規分布に従っていない場合でも漸近的には想定された漸近分布に従うが, Su and Roca (2012) で考察された Distaso 検定は誤差項が正規分布に従わない場合, 想定した漸近分布には従わないことにも注意する必要がある。

本稿では Su and Roca (2012) で考察されたこれら 3 つの検定の性質をシミュレーションによって調べる。本稿のシミュレーションではモデルの誤差項および確率的係数と誤差項の間の相関, およびそれらの周辺分布の非正規性, 特に分布の裾の厚さ (尖度), が小標本における検定の実際の有意水準および検出力にどのように影響するかに焦点を当て, シミュレーションのデザインを設計する。シミュレーションを行うにあたり, 相関を任意の値に設定でき周辺分布が正規分布よりも裾の厚い 2 変量確率分布からサンプリングする必要があるが, これらの条件を満たす 2 変量確率分布の簡便な構成方法も提案する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず次節で本稿で考察する STUR 過程と考察対象である 3 つの検定の検定統計量の定義を明示的に述べる。次に 3 節でシミュレーションで用いる 2 変量確率分布の構成方法を説明する。4 節で実際にシミュレーションを行い, その結果についての考察を述べ

る。5節で本稿のまとめと課題について述べる。補論では本稿では取り上げなかった方法について簡単に説明する。

2 モデルおよび検定統計量

本稿では以下の STUR モデルについて考察する。

$$y_t = (\phi + \eta_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \phi = 1, \quad \text{for } t = 1, \dots, \quad (1)$$

ここで $[\eta_t, \varepsilon_t]'$ は iid 確率ベクトルであり $E(\eta_t) = E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = \omega^2 \geq 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$, $E(\varepsilon_t^3) = 0$ および $\text{var}(\varepsilon_t^2) = \kappa_\varepsilon^2$, $0 < \kappa_\varepsilon^2 < \infty$ を満たすとする。確率変数 ε_t と η_t の相関の値は特に仮定しない。 y_0 については $y_0 = O_p(1)$ を満たすとする。もし $\omega^2 = 0$, つまり $\eta_t = 0$ が全ての t について成り立つ時, STUR 過程は通常の UR 過程に帰着する。UR 過程と STUR 過程は非常に異なった統計的性質を持っていることが知られており, 例えば確率的係数の分布がある条件を満たす場合, STUR 過程は強定常過程となる。一方 UR 過程は非定常過程である。STUR 過程の性質についてより詳しくは, 例えば Nagakura (2009b) を参照されたい。

今, 観測値として $\{y_t\}_{t=0}^n$ が与えられているとする。McCabe and Tremayne (1995) は (1) 式で与えられる STUR 過程に対して, 誤差項に正規分布を仮定し,

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \omega^2 = 0 \text{ および 対立仮説 } H_1 : \omega^2 > 0$$

に対する LBI 検定統計量を導出した。この LBI 検定統計量に関して漸近的に無視できる部分を除き, 誤差項が正規分布の仮定を満たさない場合でも漸的にピボタルになるように局外パラメータ (nuisance parameter) の推定値を用いて修正した検定統計量は以下で与えられる (McCabe and Tremayne (1995, Corollary 3) で提案された検定統計量および Su and Roca (2012) で考察された MT 検定と同じもの)。

$$MT_n = \frac{n^{-3/2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 [(\Delta y_t)^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2]}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\kappa}_\varepsilon} \quad (2)$$

ここで $\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1}$, $\hat{\kappa}_\varepsilon \equiv \{n^{-1} \sum_{t=1}^n [(\Delta y_t)^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2]^2\}^{1/2}$, および $\hat{\sigma}_\varepsilon \equiv [n^{-1} \sum_{t=1}^n (\Delta y_t)^2]^{1/2}$ である。検定統計量 MT_n は帰無仮説のもとで漸的にある非標準的な分布に従う。McCabe and Tremayne (1995) はこの分布に対して検定の臨界値をシミュレーションによって求めた。その値は McCabe and Tremayne (1995) の表 1 に記載されている。

次に Lee 検定の検定統計量を定義する。Lee 検定はもともとは STUR 過程ではなく RCA (1) モデルの係数の一定性を検定するために提案され, 対立仮説のもとでは共分散定常な RCA (1) モデルに従うことを想定している。これは (1) 式において $\phi \neq 1$ として, ϕ と ω^2 が帰無仮説のもとでは

$|\phi| < 1$, 対立仮説のもとでは $\omega^2 + \phi^2 < 1$ を満たすことを意味しているが, この仮定のもとでは帰無仮説のもとで UR 過程にはなりえず, また対立仮説のもとでも STUR 過程ではないことに注意されたい。Lee (1998) は上述の仮定および誤差項と確率的係数が正規分布に従うという仮定のもとで LBI 検定を導出し, さらに正規分布の仮定が満たされない場合にも統計量が漸的に標準正規分布に従うように局外パラメーターの推定値を用いて修正した検定統計量を提案した。MT 検定の場合と同様, 漸的に無視できる部分を除き, さらに $\phi = 1$ を維持仮説として仮定し簡略化した Lee 検定統計量は以下で与えられる (これは Su and Roca (2012) で考察された Lee 検定と同じもの)。

$$L_n \equiv \frac{\sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 [(\Delta y_t)^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2]}{\hat{\kappa}_\varepsilon \left[\sum_{t=1}^n \left(y_{t-1}^2 - \overline{y_{t-1}^2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

ここで $\overline{y_{t-1}^2} = n^{-1} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2$ である。Nagakura (2009a) は $E(\varepsilon_t^3) = 0$ という追加的な仮定のもとで, この統計量が UR 過程のもとでも漸的に標準正規分布に従うことを示した⁽¹⁾。これはこの Lee 検定によって STUR 過程に対しても係数の一定性を検定することができることを意味している。Nagakura (2009a) はシミュレーションによって, Lee 検定は MT 検定より小標本において検出力が高いことを発見した。Lee 検定およびその UR 過程のもとの漸近分布についてより詳しくは Lee (1998) および Nagakura (2009a) を参照されたい。

この節の最後に Distaso (2008) によって導出された LM 検定統計量の定義を述べる。Distaso (2008) は(1)式で与えられるモデルにおいて $\phi = 1$ という制約を課さないモデル, すなわち RCA (1) モデルを考慮し, 帰無仮説 $H_0: \omega^2 = 0$ に対して, 誤差項と確率的係数に正規分布を仮定し LM 検定統計量を導出した。 $\phi = 1$ を維持仮説として仮定した場合, Distaso 検定統計量は以下のように定義される (これは Su and Roca (2012) で考察された Distaso 検定と同じもの)。

$$D_n \equiv \frac{\left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 [(\Delta y_t)^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2] \right\}^2}{2\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{t=1}^n y_{t-1}^4 [2(\Delta y_t)^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2]} \quad (3)$$

Distaso (2008) は ε_t が正規分布に従っているという仮定のもとで, D_n が従う漸近分布を導出した。この漸近分布は非標準的であり, Distaso (2008) はシミュレーションによってその臨界値を求め表としてまとめている。この検定統計量 D_n の留意すべき点として, D_n は MT_n や L_n と違い, ε_t が正規分布という仮定が満たされない時, 想定した漸近分布には従わないということがある。4 節のシミュレーションによると ε_t が正規分布より裾の厚い分布に従っている時はサイズのゆがみがかな

(1) Nagakura (2009a) ではさらに, この仮定が満たされない場合でも漸的に標準正規分布に従うように Lee 検定を改良した, 改良 Lee 検定も提案している。

り大きくなることがわかる。これは正しい漸近分布を使用していないことが原因であるため、標本が大きくなっても解決しない問題である。よって、正規性の仮定のもとで D_n のパフォーマンスが MT_n や L_n よりよかったとしても、実際の応用においては正規性の仮定が満たされるとは限らないため、問題があると言えよう。なお、 MT_n や L_n のように局外パラメーターの推定値を用いることによって、 D_n を修正し漸近的にピボタルな統計量を構築することは可能であり、Nagakura (2020) において考えられている。

3 シミュレーションのための2変量確率分布

この節では今回のシミュレーションで用いる2変量確率分布について説明する。本稿の目的は前節で説明した確率的単位根検定の小標本における実際の有意水準と検出力が、(1)式の誤差項 ε_t と確率的係数の確率項 η_t の同時分布および周辺分布の形状、具体的にはそれらの変数間の相関および周辺分布の裾の厚さからどのような影響を受けるか調べることである。

ここでの問題点は、 ε_t と η_t のどちらかを正規分布ではないとした時に、それら2つの確率変数の相関をどのようにモデル化するかということである。ともに平均0の正規分布であれば

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma^2 & \rho\lambda\gamma \\ \rho\lambda\gamma & \lambda^2 \end{bmatrix} \right)$$

という相関 ρ の2変量正規分布からサンプリングすることは容易である。しかしながら、どちらか（もしくは両方）に正規分布よりも裾が厚い周辺分布を仮定する場合、さらに ε_t と η_t の周辺分布が異なる場合には問題が少し複雑になる。特に周辺分布が異なる場合は（より正確には周辺分布が同じ位置尺度族 (location-scale family) の分布に属していない場合は）相関の値は1や-1にはなりえず、取りうる相関には上限および下限が存在する。さらにシミュレーションで使用するための分布であることからサンプリングすることが容易である必要もある。以下では周辺分布が正規分布より裾が厚く、周辺分布が互いに異なり、さらにサンプリングするのが容易である2変量確率分布を構成するための1つの方法を考える。

3.1 片方が正規分布でもう片方は正規分布より裾が厚い分布にしたい場合

ここでは、 x の周辺分布は正規分布よりも裾の厚い分布であり、 y の周辺分布は正規分布、 x と y の相関は ρ 、 x と y の平均と分散はともに0と1であるような2変量確率変数 (x, y) を構成する方法を考える。

まず x^* と y^* はともに、平均0、分散1であり、相関が ρ^* の2変量標準正規分布に従う確率変数とする。さらに σ^2 を x^* と y^* と独立で正の値を取り、 $E(\sigma^2) = 1$ 、 $E(\sigma^4) < \infty$ である確率変数

とする。これらの確率変数より x と y を

$$x = \sigma x^* \text{ および } y = y^* \quad (4)$$

と定義する。この時、 y の周辺分布は明らかに正規分布であり（1変量の標準正規分布）、また x の周辺分布は期待値 0、分散 1 で正規分布より裾の厚い分布に従っていることを示すことができる。 x の期待値が 0、分散が 1 となることは容易に示すことができるので、以下では x の周辺分布が正規分布より裾が厚い（ x の尖度が 3 以上である）ことを示す。まず $\text{var}(\sigma^2) = E(\sigma^4) - 1 \geq 0$ より

$$E(\sigma^4) \geq 1 \quad (5)$$

である。次に $E(x) = 0$ 、 $\text{var}(x) = 1$ であることに注意すると、(5)より x の尖度 $K_x^{(2)}$ は

$$K_x \equiv \frac{E\{[x - E(x)]^4\}}{[\text{var}(x)]^2} = E(\sigma^4)K_x^* = 3E(\sigma^4) \geq 3 \quad (6)$$

を満たすことがわかる。ここで $K_x^* \equiv E(x^{*4}) = 3$ は標準正規分布に従う x^* の尖度である。この時、 x と y の相関 ρ は、 x と y の期待値はともに 0、分散はともに 1 であることに注意すると、(4)より

$$\rho = E(xy) = E(\sigma)E(x^*y^*) = E(\sigma)\rho^* \quad (7)$$

となる。これより、 σ^2 の分布を特定化し $E(\sigma)$ を計算し、 ρ^* を適当な値にすれば ρ を任意の値にできることがわかる。ただし $\text{var}(\sigma) = 1 - [E(\sigma)]^2 \geq 0$ より $E(\sigma) \leq 1$ なので ρ には上限と下限があり、それらは

$$-E(\sigma) \leq \rho \leq E(\sigma) \quad (8)$$

で与えられる。

このように構成した (x, y) は任意の相関 ρ （ただし上限と下限がある）を持ち、片方は正規分布に従い、もう片方は正規分布より裾の厚い分布に従うという条件を満たすものとなる。残る問題は σ^2 の分布をどのように定式化するかということである。これによって尖度や相関（の取りうる範囲）が決まる。これについては後述する。

(2) 本稿では尖度は(6)によって定義する。ここで定義された尖度 K_x から正規分布の尖度 3 を引いた $K_x - 3$ を単に分布の「尖度」として定義している文献もあるので注意しておく。通常 $K_x - 3$ は尖度ではなく（正規分布の尖度 3 からどれだけ超過しているか表しているため）超過尖度（excess kurtosis）と呼ばれる。

3.2 両方とも正規分布より裾が厚いが、違う周辺分布にしたい場合

ここでは3.1節において y も正規分布より裾の厚い分布に従い、さらに x と y の周辺分布が異なるような場合を考える。前節同様 (x^*, y^*) をともに平均 0, 分散 1, 相関 ρ^* の 2 変量正規分布とする。 δ^2 を, σ^2 , x^* , および y^* と独立で正の値を取り, $E(\delta^2) = 1$, $E(\delta^4) < \infty$ を満たす確率変数とする。この時, x と y を

$$x \equiv \sigma x^* \text{ および } y \equiv \delta y^* \quad (9)$$

と定義する。確率変数 y の周辺分布が正規分布より裾が厚い分布であることは前節の x の場合と同様に示すことができる。この時, x と y の相関 ρ は

$$\rho = E(xy) = E(\sigma)E(\delta)E(x^*y^*) = E(\sigma)E(\delta)\rho^* \quad (10)$$

となる。これより σ^2 と δ^2 の分布を特定化し, $E(\sigma)E(\delta)$ を計算し, ρ^* を適当な値にすれば ρ の値を任意の値に設定できる。ただし ρ の上限と下限は

$$-E(\sigma)E(\delta) \leq \rho \leq E(\sigma)E(\delta) \quad (11)$$

となる。

このように構成した x と y はともに正規分布よりも裾の厚い分布を持ち, σ^2 と δ^2 の分布が異なれば, 異なる周辺分布を持ち, 任意の相関 ρ (ただし上限と下限がある) を持つ 2 変量分布となる。

3.3 両方とも正規分布よりも裾が厚く、さらに同じ周辺分布にしたい場合

$\sigma^2 = \delta^2$ とし, 3.2 節と同様に x と y を構成すれば, x と y の周辺分布は同じになり,

$$\rho = E(\sigma x^* \sigma y^*) = E(\sigma^2)E(x^* y^*) = \rho^*$$

となる。この場合は x と y の相関 ρ は ρ^* と等しくなり, $-1 \leq \rho \leq 1$ の範囲の任意の値を取れる。 x と y の周辺分布を同じにするだけであれば σ^2 と δ^2 が同じ分布を取るだけでよいが, 相関 ρ が ρ^* と等しくなるためには $\sigma^2 = \delta^2$ とする必要がある。

3.4 本稿で用いる σ^2 (および δ^2) の分布

ここでは本稿で扱う σ^2 (および δ^2) の分布を説明する。

$\tilde{\sigma}^2$ は以下の密度関数を持つ逆ガンマ分布 $IGam(\alpha, \beta)$ であるとする。

$$f(\tilde{\sigma}^2; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha \tilde{\sigma}^{2(-\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{\beta}{\tilde{\sigma}^2}\right), \quad \alpha > 2, \quad \beta > 0 \quad (12)$$

ここで $\Gamma(t)$ はガンマ関数である。この時,

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad \text{var}(\tilde{\sigma}^2) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad (13)$$

である。この $\tilde{\sigma}^2$ より σ^2 を

$$\sigma^2 \equiv \frac{\tilde{\sigma}^2}{E(\tilde{\sigma}^2)} \quad (14)$$

と定義すると、この σ^2 は $E(\sigma^2) = 1$ および

$$E(\sigma^4) = (\alpha - 1)/(\alpha - 2) \quad (15)$$

を満たし、その密度関数は

$$f(\sigma^2; \alpha) = \frac{(\alpha - 1)^\alpha \sigma^{2(-\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha - 1}{\sigma^2}\right), \quad \alpha > 2$$

で与えられる (β が消えていることに注意)。この σ^2 を用いて(4)式 (もしくは(9)式) で x を定義すると、(6)式および(15)式より x の尖度 K_x は

$$K_x = \frac{3(\alpha - 1)}{\alpha - 2} \quad (16)$$

となる。また $\int_0^\infty x^{-a-1} \exp[-(a-1)/x] dx = \Gamma(a)/(a-1)^a$ が成り立つので

$$\begin{aligned} E(\sigma) &= \int_0^\infty \sigma f(\sigma^2; \alpha) d\sigma^2 \\ &= \frac{(\alpha - 1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{2[-(\alpha-\frac{1}{2})-1]} \exp\left(-\frac{\alpha-1}{\sigma^2}\right) d\sigma^2 \\ &= \sqrt{\alpha - 1} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。よって、(14)式の σ^2 と(4)式で定義した x, y の場合、 x と y の相関 ρ は

$$\rho = \sqrt{\alpha - 1} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \rho^* \quad (18)$$

となる。また、 $\tilde{\delta}^2 \sim IGam(\psi, \theta)$,

$$\delta^2 = \frac{\tilde{\delta}^2}{E(\tilde{\delta}^2)} \quad (19)$$

とし、(14)式と(19)式の σ^2 と δ^2 と(9)式で x と y を定義した時、 x, y の相関 ρ は

$$\rho = \sqrt{(\alpha - 1)(\psi - 1)} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})\Gamma(\psi - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\psi)} \rho^* \quad (20)$$

となる。

ここまでの議論で、(4)式または(9)式で定義される x と y の相関 ρ は x^* と y^* の相関 ρ^* の値に依存し、 σ^2 および δ^2 がそれぞれ(14)式および(19)式で定義される時には、それらの間には(18)式または(20)式の関係があることが示された。ここでシミュレーションにおいて ρ の値を(8)式または(11)式の不等式を満たす任意の値にするには、 x と y の定義に応じて、 ρ^* の値を

$$\rho^* = \frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\alpha-1} \Gamma(\alpha-\frac{1}{2})} \rho \quad \text{もしくは} \quad \rho^* = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\psi)}{\sqrt{(\alpha-1)(\psi-1)} \Gamma(\alpha-\frac{1}{2})\Gamma(\psi-\frac{1}{2})} \rho$$

と設定すればよいことが(18)式および(20)式よりわかる。ここで ρ は分析者が設定したい任意の値である（シミュレーションを行う際に、相関 ρ の値は直接は設定できず ρ^* の値を通じて間接的に設定しなければならないことに注意）。

(9)式、(14)式、および(19)式で定義した2変量確率変数 x と y はともに平均0、分散1であるので、任意の定数 $\gamma > 0$ および $\lambda > 0$ を用いて

$$u = \gamma x \quad \text{および} \quad v = \lambda y \tag{21}$$

と定義すると、この u と v の分散はそれぞれ γ^2 と λ^2 となる。任意の定数をかけても相関および尖度は変わらないので、 u と v の尖度はそれぞれ x と y の尖度と同じであり、 u と v の相関も ρ と同じである。

以後は、(21)式で定義した確率変数 u の周辺分布を $u \sim T(\alpha, \gamma^2)$ と書き⁽³⁾、(21)式が(9)式、(14)式、(19)式、および $\sigma^2 \neq \delta^2$ として定義された場合の u と v の同時分布を $(u, v) \sim T_2(\alpha, \gamma^2, \psi, \lambda^2, \rho)$ と表す。また、(21)式が(9)式、(14)式、および $\sigma^2 = \delta^2$ として定義された場合の u と v の同時分布に従うことを $(u, v) \sim T_2^s(\alpha, \gamma^2, \lambda^2, \rho)$ と表すことにする。さらに3.1節の場合のように周辺分布の片方が正規分布、もう片方が正規分布より裾の厚い分布に従い、相関が ρ で任意の分散を持つ2変量分布を構成するために、(21)式において v の定義を $v = \lambda y^*$ （この時、 $v \sim N(0, \lambda^2)$ である）で置き換えて定義された u と v の2変量分布に従うことを $(u, v) \sim TN(\alpha, \gamma^2, \lambda^2, \rho)$ と表すことにする。ここで (u, v) と並んでいる時に、 v の周辺分布が正規分布であることに注意。例えば $(z, w) \sim TN(\dots)$ であれば w の方にある変数が周辺的に正規分布に従っていることになる。

(3) この時、 u の分布は $\frac{\gamma}{\sqrt{2\alpha E(\sigma^2)}} \sqrt{2\alpha \tilde{\sigma}^2} x^*$ の分布と同じである。ここで $\gamma > 0$ 、 $\tilde{\sigma}^2$ は(12)式の密度関数で定義される逆ガンマ分布、 x^* は標準正規分布に従う。(12)式の密度関数で定義される逆ガンマ分布は $\alpha = 0.5m$ (m は4より大きい自然数)、 β が0.5の時、自由度 2α のカイ二乗分布の逆数の分布になるので、 $\sqrt{2\alpha \tilde{\sigma}^2} x^*$ は $\beta = 0.5$ 、 α が0.5の倍数である時、自由度 2α の t 分布 ($t_{2\alpha}$) となる。すなわち、 $T(\alpha, \gamma^2)$ は $t_{2\alpha}$ に従う確率変数を分散が γ^2 になるように定数をかけた分布（尖度は式(16)で与えられる）と同じである。

表 1 小標本における名目有意水準 5%に対する実際の有意水準 (%)

ε_t	$n = 100$			$n = 500$			$n = 1000$		
	MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n
N	5.01	6.42	7.70	5.24	5.47	5.59	5.40	5.47	5.77
T5	4.75	7.12	15.30	5.10	6.20	15.26	5.36	5.86	16.15
T9	4.47	7.32	19.60	5.11	6.55	23.45	5.20	6.10	24.38

4 シミュレーション

本節では 2 節で説明した 3 つの検定の有限標本でのパフォーマンスをシミュレーションによって調べる。特に周辺分布の尖度と、確率的係数と誤差項の相関がどのような影響を与えるかに焦点を当てて調べる。4.1 節では帰無仮説のもとでのパフォーマンス、4.2 節では対立仮説のもとでのパフォーマンスを調べる。

4.1 帰無仮説のもとでの実際の有意水準

まず帰無仮説のもとで、有限標本における実際の有意水準 (サイズ) を調べる。 ε_t の分布として (N) $N(0, 1)$, (T5) $T(3.5, 1)$, および (T9) $T(2.5, 1)$ の 3 つの場合を考える。(T5) と (T9) において ε_t の尖度は(16)式より、それぞれ 5 および 9 となる (よって T5 および T9 としている)。

(1)式の STUR 過程において $y_0 = 0$ とし、 ε_t の確率分布として上述の 3 つに対して、帰無仮説 $H_0: \omega^2 = 0$ のもとで大きさが $n = 100, 500, 1000$ の標本を発生させ、2 節で説明した、MT 検定、Lee 検定、Distaso 検定を計算し、名目有意水準 5%に対する実際の有意水準を計算したものが表 1 である。ここで臨界値として、それぞれの検定統計量の漸近分布から計算したものとなるべく近い値を使用することとし、MT 検定の場合は McCabe and Tremayne (1995) の Table 1 (p.1022) における $T = 1000$ の値、すなわち 0.81、Lee 検定についてはその漸近分布である標準正規分布の上側 5%点である 1.64、Distaso 検定については Distaso (2008) の Table 1 (p.594) における $n = 1000$ の値、すなわち 1.964⁽⁴⁾ を用いる。なおシミュレーションの回数は 10000 とした。表 1 より、誤差項が正規分布である場合にはいずれの検定も $n = 500$ 程度で実用上十分な精度で名目有意水準の 5%を近似できているのがわかる (L_n と D_n においては、 $n = 100$ の時やサイズのゆがみが見られる)。しかしながら、 ε_t が正規分布よりも裾の厚い分布に従っている場合は、 MT_n にはサイズのゆがみは見られず、 L_n も実用上は問題ない程度のサイズのゆがみであるのに対して、 D_n については名目の

(4) McCabe and Tremayne (1995) と Distaso (2008) は有限標本の特定の値における臨界値もモンテカルロシミュレーションで求めているが、これらは ε_t が正規分布をしているという仮定に依存しているため、本稿では用いない。

サイズ 5% に対して、実際のサイズは約 15%–25% となり、実に 3 倍から 5 倍にも達している。また、誤差項の尖度が 5 から 9 と大きくなるとサイズのゆがみも大きくなっていることがわかる。さらに表 1 からは D_n のサイズのゆがみは n が大きくなっても、改善されていないことも見て取れる。 D_n のこのサイズのゆがみは、正規分布の仮定が成立しない場合、 D_n は想定した漸近分布に従わないことから起こる問題であるため、 n が大きくなることによって解決しないからである。実際の応用においては ε_t の分布が正規分布に従っているとは限らないため、この結果からは応用上 D_n を使用することは問題があると言えよう。

4.2 対立仮説のもとでの有限標本での検出力

次に対立仮説のもとでの 3 つの検定の実際の検出力を調べるためにシミュレーションを行う。以下では ε_t と η_t の分布として以下の 9 つの組み合わせを考える。ここで $E(u) = E(v) = 0$ である 2 変量確率変数 u, v に対して、 $(u, v) \sim N_2(\sigma_u^2, \sigma_v^2, \rho)$ は分散と相関がそれぞれ $\text{var}(u) = \sigma_u^2$, $\text{var}(v) = \sigma_v^2$, $\text{corr}(u, v) = \rho$ である 2 変量正規分布を表すとする。下記において、(NT5) と (NT9) においては ε_t が正規分布に従っていることに注意（よってここだけ (η_t, ε_t) という順番で書かれている）。

$$(NN): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim N_2(1, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 3, K_\eta = 3, \rho \in [-1.0, 1.0]$$

$$(NT5): (\eta_t, \varepsilon_t) \sim TN(3.5, \omega^2, 1, \rho), \quad K_\varepsilon = 3, K_\eta = 5, \rho \in \left[-\frac{16}{15}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}, \frac{16}{15}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}\right] \approx [-0.952, 0.952]$$

$$(NT9): (\eta_t, \varepsilon_t) \sim TN(2.5, \omega^2, 1, \rho), \quad K_\varepsilon = 3, K_\eta = 9, \rho \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right] \approx [-0.921, 0.921]$$

$$(T5N): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim TN(3.5, 1, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 5, K_\eta = 3, \rho \in \left[-\frac{16}{15}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}, \frac{16}{15}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}\right] \approx [-0.952, 0.952]$$

$$(T5T5): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim T_2^s(3.5, 1, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 5, K_\eta = 5, \rho \in [-1.0, 1.0]$$

$$(T5T9): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim T_2(3.5, 1, 2.5, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 5, K_\eta = 9, \rho \in \left[-\frac{32\sqrt{15}}{45\pi}, \frac{32\sqrt{15}}{45\pi}\right] \approx [-0.877, 0.877]$$

$$(T9N): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim TN(2.5, 1, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 9, K_\eta = 3, \rho \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right] \approx [-0.921, 0.921]$$

$$(T9T5): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim T_2(2.5, 1, 3.5, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 9, K_\eta = 5, \rho \in \left[-\frac{32\sqrt{15}}{45\pi}, \frac{32\sqrt{15}}{45\pi}\right] \approx [-0.877, 0.877]$$

$$(T9T9): (\varepsilon_t, \eta_t) \sim T_2^s(2.5, 1, \omega^2, \rho), \quad K_\varepsilon = 9, K_\eta = 9, \rho \in [-1.0, 1.0]$$

1 列目が ε_t と η_t の周辺分布の組み合わせを表し（例えば適当な定数 a, b に対して $\varepsilon_t \sim T(3.5, a)$, $\eta_t \sim T(2.5, b)$ の場合 T5T9 など）、2 列目は ε_t と η_t の同時分布を表す。3 列目の K_ε と K_η はそれぞれの場合における ε_t と η_t の尖度をそれぞれ表し、4 列目はそれぞれの場合において取りうる ε_t と η_t の相関の範囲を (8) 式、(11) 式および (17) 式を元に計算したものである。どの組み合わせにおいても ε_t の分散は 1 で、 η_t の分散は ω^2 としている。

4.1 節で見たように、 ε_t が正規分布でない場合は、Distaso 検定は帰無仮説のもとでサイズのゆがみが大きく、その場合、他の検定との検出力の意味のある比較ができないため、 ε_t が正規分布でない場合は、MT 検定と Lee 検定のみシミュレーションを行う。結果は表 2 にまとめてある。まず、

表 2 実際の検出力 (%)

(a) ケース (NN)

ρ	ω^2	$n = 100$			$n = 500$			$n = 1000$		
		MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n
-0.99	0.0001	6.3	8.0	10.6	18.2	29.0	51.9	26.2	41.1	81.8
	0.001	11.8	18.7	27.3	27.9	41.1	70.6	31.9	40.8	59.9
	0.01	18.9	35.9	43.4	28.3	37.9	49.2	36.8	45.0	64.1
	0.1	20.3	41.8	53.0	46.4	81.1	90.8	54.2	95.2	97.6
-0.9	0.0001	6.4	8.4	9.8	17.2	27.9	46.9	26.3	41.0	79.1
	0.001	12.3	18.5	24.8	27.8	41.7	81.1	33.9	43.0	82.0
	0.01	18.8	35.0	56.7	45.3	57.0	81.4	62.2	76.2	90.2
	0.1	35.6	68.9	71.2	54.1	99.5	99.4	56.0	100	100
-0.75	0.0001	6.5	7.7	8.8	16.5	24.8	37.4	24.7	39.9	71.8
	0.001	10.8	16.4	19.4	29.0	43.7	80.9	38.2	48.0	88.5
	0.01	22.7	38.0	46.6	57.2	76.1	82.1	74.6	92.7	93.9
	0.1	41.6	86.0	80.1	54.5	100.0	100	56.2	100	100
-0.5	0.0001	5.7	7.2	8.2	13.9	19.2	20.0	22.3	34.7	45.8
	0.001	10.8	14.0	11.6	33.5	47.5	52.6	50.3	64.2	69.2
	0.01	29.8	46.1	33.6	68.2	93.9	91.7	81.8	99.6	99.4
	0.1	42.2	94.9	88.9	54.0	100.0	100	56.3	100	100
-0.25	0.0001	5.5	6.7	7.3	11.9	13.9	9.0	21.9	28.8	22.9
	0.001	10.2	11.3	7.1	39.8	57.5	46.7	57.7	81.9	76.6
	0.01	32.7	52.4	30.3	71.6	98.9	97.9	84.0	100	100
	0.1	41.7	97.4	93.0	54.1	100	100	56.6	100	100
0	0.0001	5.8	7.3	7.5	12.4	11.3	5.9	23.1	26.9	15.2
	0.001	10.9	11.4	5.9	41.5	63.6	48.2	61.5	91.1	86.1
	0.01	33.9	55.7	30.5	72.3	99.6	99.0	85.1	100	100
	0.1	41.8	97.9	94.2	54.2	100	100	56.8	100	100
0.25	0.0001	5.6	7.1	7.6	12.4	13.8	9.5	22.4	30.1	23.3
	0.001	10.6	12.0	6.8	39.6	57.9	47.2	58.5	82.0	76.7
	0.01	33.7	52.7	31.5	71.2	98.7	97.7	84.1	100	100
	0.1	42.7	97.2	93.0	54.6	100	100	56.7	100	100
0.5	0.0001	6.1	7.5	8.1	13.9	19.6	19.6	22.4	35.0	45.9
	0.001	10.4	13.5	11.6	33.7	47.2	52.3	49.2	63.4	68.9
	0.01	29.6	45.5	33.0	67.9	93.7	91.6	81.6	99.7	99.4
	0.1	41.9	94.8	88.6	54.0	100	100	56.9	100	100
0.75	0.0001	5.9	7.6	8.7	16.7	25.3	37.7	24.4	38.7	71.9
	0.001	11.1	16.6	19.5	28.5	43.1	81.6	39.0	48.7	88.0
	0.01	22.4	37.9	46.0	58.3	76.6	82.1	74.3	92.8	93.9
	0.1	40.9	85.0	79.1	53.2	100	100	55.9	100	100
0.9	0.0001	6.7	8.0	9.6	17.6	28.4	46.3	25.4	39.6	79.4
	0.001	11.8	18.0	24.3	28.2	42.4	81.5	33.9	43.1	81.5
	0.01	19.6	35.9	56.5	45.6	57.5	81.8	62.2	76.1	90.0
	0.1	35.8	68.6	70.9	54.0	99.4	99.4	56.9	100	100
0.99	0.0001	5.9	8.4	10.3	19.2	29.9	51.3	26.1	41.2	81.6
	0.001	12.5	19.8	27.6	29.1	42.1	70.1	33.4	41.8	60.8
	0.01	18.4	34.8	42.8	28.6	38.1	49.0	35.4	43.2	61.7
	0.1	18.8	40.9	51.5	46.9	81.3	90.4	54.9	94.4	97.2

注: 3つの検定の検出力のうち一番高い値を太字にしている。

(続き) 表2 実際の検出力 (%)

(b) ケース (NT5)

ρ	ω^2	$n = 100$			$n = 500$			$n = 1000$		
		MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n
-0.95	0.0001	6.4	8.3	10.3	18.3	29.8	50.1	25.4	39.8	80.7
	0.001	12.0	18.4	26.0	28.3	42.0	74.9	33.0	42.2	70.9
	0.01	17.4	34.4	49.0	36.0	47.1	70.7	50.2	62.8	84.3
	0.1	25.9	53.8	64.9	45.0	95.8	97.3	48.4	99.8	99.8
-0.9	0.0001	6.0	7.6	9.8	17.6	28.2	46.5	26.9	42.1	79.9
	0.001	11.6	17.6	25.0	27.9	42.2	80.9	33.3	43.0	81.8
	0.01	18.3	35.2	54.2	42.8	55.9	80.9	58.7	74.8	90.4
	0.1	30.6	65.6	71.2	46.5	99.2	99.3	49.1	100	100
-0.75	0.0001	6.0	7.6	8.9	16.4	25.5	37.2	24.8	39.4	71.8
	0.001	10.6	15.7	20.0	28.5	42.6	80.8	38.2	47.5	88.3
	0.01	21.2	37.2	47.8	54.6	75.0	82.1	69.9	92.1	93.9
	0.1	34.3	82.6	78.3	46.5	100	100	49.3	100	100
-0.5	0.0001	5.8	7.2	8.4	13.9	19.7	20.4	22.4	34.7	46.2
	0.001	10.4	13.5	10.8	32.8	47.4	52.9	49.6	63.2	68.9
	0.01	26.4	43.2	32.0	64.4	92.8	91.3	77.4	99.5	99.3
	0.1	37.3	92.9	87.4	47.2	100	100	48.3	100	100
-0.25	0.0001	5.2	7.0	7.3	12.4	14.0	9.4	22.0	29.2	22.4
	0.001	11.0	12.3	7.2	39.0	56.7	46.2	58.0	81.9	76.9
	0.01	31.8	51.4	30.8	67.4	98.4	97.4	80.1	100	100
	0.1	37.6	96.2	91.9	46.0	100	100	49.7	100	100
0	0.0001	5.5	7.2	7.4	12.4	11.1	5.9	23.7	27.7	16.2
	0.001	11.0	11.4	5.7	41.3	62.5	48.5	59.7	89.9	84.6
	0.01	32.2	53.6	31.1	70.0	99.3	98.8	81.2	100	100
	0.1	37.5	97.0	93.2	47.5	100	100	49.9	100	100
0.25	0.0001	5.4	7.1	7.2	12.4	14.2	9.1	21.8	28.6	21.9
	0.001	10.7	12.0	7.4	38.5	56.4	46.8	57.7	81.4	76.5
	0.01	30.5	49.9	29.5	67.4	98.5	97.7	81.2	100	100
	0.1	38.0	96.1	91.8	47.1	100	100	49.2	100	100
0.5	0.0001	5.4	6.8	8.3	14.3	19.6	21.2	22.3	35.1	45.9
	0.001	10.3	13.8	11.1	33.8	48.0	53.7	49.5	62.9	68.4
	0.01	27.4	43.4	32.3	64.9	93.1	91.2	77.8	99.4	99.2
	0.1	36.5	92.2	87.0	47.3	100	100	48.9	100	100
0.75	0.0001	5.5	7.9	9.4	15.8	24.8	36.5	24.8	38.7	72.2
	0.001	11.0	16.0	19.3	28.0	42.3	81.5	38.1	47.7	88.0
	0.01	21.2	37.0	46.8	55.5	75.9	82.7	70.2	92.1	93.4
	0.1	35.4	81.8	77.9	46.5	100	100	49.0	100	100
0.9	0.0001	6.2	7.9	9.7	17.6	27.8	47.0	25.5	40.3	79.3
	0.001	12.0	18.4	24.3	27.5	41.2	80.5	34.0	43.7	80.9
	0.01	18.5	35.7	54.1	44.3	57.0	81.0	58.8	75.1	90.5
	0.1	30.3	64.8	70.5	47.1	99.2	99.3	48.9	100	100
0.95	0.0001	6.5	8.1	10.6	18.6	29.3	49.3	26.2	40.4	81.0
	0.001	12.0	18.2	26.1	27.7	41.0	74.9	33.3	42.8	70.9
	0.01	18.3	34.8	48.9	34.5	46.2	70.9	50.2	62.6	84.7
	0.1	25.8	54.7	65.8	45.0	96.0	97.3	48.3	99.8	99.8

注: 3つの検定の検出力のうち一番高い値を太字にしている。

(続き) 表2 実際の検出力 (%)

(c) ケース (NT9)

ρ	ω^2	$n = 100$			$n = 500$			$n = 1000$		
		MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n	MT_n	L_n	D_n
-0.9	0.0001	5.7	7.9	9.8	18.6	28.4	46.6	26.2	40.8	79.8
	0.001	11.5	16.9	23.8	27.4	41.7	79.9	32.9	42.9	80.9
	0.01	18.1	33.9	52.8	39.3	53.7	79.9	54.6	72.7	90.1
	0.1	27.7	62.0	69.9	42.9	98.6	99.0	44.8	100	100
-0.75	0.0001	5.7	7.7	9.1	16.5	25.3	37.7	23.8	37.9	71.9
	0.001	11.3	16.0	19.4	28.0	42.5	81.0	37.8	47.5	87.7
	0.01	20.9	35.9	47.7	53.0	74.6	83.4	66.9	91.5	94.0
	0.1	32.1	79.8	77.2	44.3	100	100	45.9	100	100
-0.5	0.0001	5.8	7.2	7.6	13.4	19.3	19.7	22.2	35.1	46.4
	0.001	10.0	13.4	11.0	32.1	46.8	53.0	48.5	62.9	70.0
	0.01	26.3	41.9	32.3	61.1	91.9	90.3	74.7	99.4	99.2
	0.1	35.1	91.0	86.6	44.1	100	100	46.1	100	100
-0.25	0.0001	5.4	6.9	7.2	12.7	14.1	9.7	22.3	29.2	23.4
	0.001	10.2	11.9	7.2	38.3	55.9	46.1	55.4	80.6	75.8
	0.01	30.4	49.4	30.6	64.4	98.2	97.2	77.3	100	100
	0.1	36.0	95.3	91.7	44.2	100	100	46.0	100	100
0	0.0001	5.4	6.5	7.1	12.1	11.5	6.4	22.3	26.5	15.4
	0.001	10.8	10.9	5.9	40.1	61.8	47.5	59.5	89.6	84.1
	0.01	30.7	51.3	29.5	66.0	99.4	98.8	77.5	100	100
	0.1	35.9	95.8	92.1	44.5	100	100	45.8	100	100
0.25	0.0001	5.4	6.4	7.4	12.6	14.0	9.6	21.8	28.5	22.6
	0.001	10.4	11.9	7.5	38.6	56.3	46.1	56.7	81.8	76.4
	0.01	30.5	49.1	30.3	64.5	98.3	97.3	76.5	100	100
	0.1	35.3	94.7	90.9	44.1	100	100	45.9	100	100
0.5	0.0001	5.5	7.2	8.2	14.0	19.7	20.2	22.2	34.7	45.5
	0.001	10.0	13.7	11.2	32.6	46.6	53.2	47.9	62.5	69.5
	0.01	26.0	42.0	32.6	62.1	92.2	90.9	73.3	99.2	99.0
	0.1	34.8	91.1	86.6	43.9	100	100	45.9	100	100
0.75	0.0001	5.7	7.7	9.3	16.0	25.5	37.0	24.8	39.4	71.4
	0.001	10.6	16.4	19.1	28.1	42.7	81.0	36.8	46.6	87.6
	0.01	20.3	36.4	48.1	52.9	75.0	83.4	66.2	91.2	93.7
	0.1	33.2	80.8	77.9	44.7	100	100	45.7	100	100
0.9	0.0001	6.1	7.8	9.7	17.3	27.2	45.9	25.9	40.9	80.2
	0.001	11.6	17.6	24.3	28.0	41.6	80.6	32.9	42.9	81.3
	0.01	18.3	34.5	52.8	39.4	54.3	79.3	55.1	73.1	89.3
	0.1	27.4	61.7	69.9	43.9	98.6	98.9	45.7	100	100

注: 3つの検定の検出力のうち一番高い値を太字にしている。

(続き) 表2 実際の検出力 (%)

(d) ケース (T5N)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.95	0.0001	5.8	8.7	15.7	23.9	23.3	37.4
	0.001	10.4	16.2	24.8	39.7	31.2	41.6
	0.01	17.8	34.1	36.3	46.8	51.2	63.4
	0.1	29.3	56.3	52.5	96.6	55.8	99.8
-0.9	0.0001	5.6	8.3	15.4	23.1	22.5	36.4
	0.001	10.6	16.2	25.7	39.9	32.0	42.1
	0.01	18.6	34.1	44.1	56.4	60.3	75.2
	0.1	34.7	67.5	53.8	99.4	55.3	100
-0.75	0.0001	5.4	7.6	13.9	20.1	21.8	34.5
	0.001	9.6	14.1	26.2	41.1	36.8	47.5
	0.01	21.3	35.9	55.6	75.1	71.8	91.6
	0.1	39.5	84.1	54.1	100	56.3	100
-0.5	0.0001	5.1	7.5	12.1	16.0	19.5	29.9
	0.001	9.0	12.4	31.1	44.3	46.8	61.2
	0.01	27.1	42.7	65.3	92.4	79.3	99.3
	0.1	41.8	93.9	54.3	100	56.2	100
-0.25	0.0001	4.9	7.4	11.0	11.7	19.0	24.2
	0.001	9.3	11.0	35.3	51.4	53.4	77.0
	0.01	31.1	49.0	69.3	97.9	81.9	100
	0.1	43.2	96.7	54.2	100	56.8	100
0	0.0001	5.4	7.4	10.1	10.2	19.2	21.1
	0.001	9.1	10.6	36.7	54.6	56.8	85.3
	0.01	31.1	51.0	70.0	99.0	83.1	100
	0.1	42.2	97.4	54.9	100	56.6	100
0.25	0.0001	5.5	7.5	10.8	12.4	18.9	24.1
	0.001	8.7	11.0	35.1	51.0	54.0	77.7
	0.01	30.0	48.2	69.0	98.0	82.2	100
	0.1	42.3	96.7	54.7	100	56.6	100
0.5	0.0001	5.2	7.8	11.7	15.5	18.8	29.2
	0.001	9.0	12.6	30.8	44.7	46.9	61.2
	0.01	27.1	42.1	65.9	91.9	79.2	99.3
	0.1	41.1	93.7	54.3	100	56.4	100
0.75	0.0001	5.5	7.7	13.9	20.8	21.5	35.2
	0.001	9.9	14.5	26.4	40.8	36.2	47.0
	0.01	21.1	36.6	55.4	74.3	70.9	91.6
	0.1	39.3	83.8	54.3	100	55.8	100
0.9	0.0001	5.7	8.0	15.7	23.7	23.4	36.5
	0.001	10.4	16.0	25.5	39.7	31.2	41.7
	0.01	17.8	33.7	44.1	56.9	59.7	74.5
	0.1	34.6	67.6	54.0	99.4	56.2	100
0.95	0.0001	5.7	8.5	15.8	23.6	23.3	37.2
	0.001	10.4	15.8	25.8	40.2	31.1	40.9
	0.01	17.5	33.5	36.9	47.8	50.4	62.8
	0.1	29.6	56.8	52.8	96.6	56.6	99.8

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

(e) ケース (T5T5)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.99	0.0001	5.3	8.4	14.9	22.7	22.8	36.9
	0.001	9.7	15.3	24.4	38.7	30.3	40.9
	0.01	15.8	31.6	25.8	37.2	34.3	44.0
	0.1	18.4	40.4	42.4	81.3	48.3	95.0
-0.9	0.0001	5.8	8.0	14.1	21.1	21.4	35.3
	0.001	9.5	14.2	25.3	40.7	30.0	41.5
	0.01	16.4	32.2	42.5	56.4	57.7	74.5
	0.1	31.8	66.3	48.0	99.4	48.3	100
-0.75	0.0001	5.2	7.7	13.4	20.0	20.7	32.7
	0.001	9.4	13.3	24.8	40.0	34.6	47.2
	0.01	19.6	33.9	52.7	74.1	68.7	91.7
	0.1	35.3	81.9	46.4	100	49.2	100
-0.5	0.0001	5.1	7.5	11.7	15.4	18.3	28.5
	0.001	8.8	12.3	29.4	43.6	44.7	60.2
	0.01	23.8	37.9	60.8	91.4	75.2	99.2
	0.1	36.7	90.8	47.3	100	48.6	100
-0.25	0.0001	5.1	7.6	10.1	11.6	17.7	22.1
	0.001	8.7	10.5	34.0	49.7	50.7	75.3
	0.01	28.0	44.2	64.0	97.5	77.4	100
	0.1	36.8	94.2	47.1	100	49.2	100
0	0.0001	5.0	7.5	9.9	9.4	18.5	20.2
	0.001	8.4	10.8	35.5	52.0	53.7	83.2
	0.01	27.8	45.6	65.2	98.6	77.2	100
	0.1	36.6	95.4	46.8	100	49.0	100
0.25	0.0001	5.1	7.4	10.1	11.6	18.0	22.8
	0.001	8.7	10.1	33.8	49.1	51.9	76.0
	0.01	28.1	44.6	63.7	97.1	76.5	99.9
	0.1	37.8	94.4	46.6	100	48.3	100
0.5	0.0001	5.2	7.9	11.9	15.6	19.0	28.6
	0.001	8.9	11.8	28.4	42.3	45.5	61.1
	0.01	25.2	40.1	60.2	90.9	75.4	99.3
	0.1	37.2	91.8	47.2	100	49.2	100
0.75	0.0001	5.3	8.5	13.0	19.1	20.4	32.9
	0.001	9.3	13.2	24.6	40.1	34.6	46.3
	0.01	18.8	33.3	54.1	75.7	68.1	91.6
	0.1	35.2	81.9	47.3	100	49.3	100
0.9	0.0001	5.7	7.7	14.7	21.5	23.0	36.7
	0.001	9.8	14.4	25.1	40.5	30.7	42.3
	0.01	16.5	32.2	40.8	55.9	57.8	74.7
	0.1	32.0	66.7	47.6	99.3	49.4	100
0.99	0.0001	5.5	7.9	15.4	23.4	22.7	37.3
	0.001	10.0	15.5	24.4	39.2	30.1	41.1
	0.01	15.5	31.5	25.7	37.4	33.9	43.5
	0.1	18.0	40.8	41.9	81.8	47.6	95.0

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

(続き) 表2 実際の検出力 (%)

(f) ケース (T5T9)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.87	0.0001	5.4	8.1	14.8	21.9	22.2	36.3
	0.001	9.9	14.8	25.4	40.3	31.4	42.0
	0.01	17.2	33.1	42.2	58.5	56.8	77.6
	0.1	27.7	65.4	43.9	99.4	45.9	100
-0.75	0.0001	5.5	8.0	13.8	20.0	21.4	34.5
	0.001	9.3	14.1	25.6	40.3	35.9	46.8
	0.01	19.1	34.4	50.1	72.5	65.6	90.5
	0.1	32.1	79.0	43.7	100	46.0	100
-0.5	0.0001	5.3	7.7	11.6	15.4	18.9	29.4
	0.001	9.1	11.9	29.3	43.2	44.5	60.3
	0.01	25.2	39.4	60.5	90.9	71.5	99.0
	0.1	34.2	90.1	44.5	100	45.5	100
-0.25	0.0001	5.0	7.6	11.1	12.2	19.6	24.4
	0.001	9.5	11.0	35.0	50.9	52.7	76.9
	0.01	27.6	45.2	63.4	97.5	75.6	100
	0.1	35.6	94.3	44.6	100	46.6	100
0	0.0001	5.1	7.0	10.6	9.9	19.2	21.3
	0.001	9.1	10.7	36.0	54.1	54.0	83.3
	0.01	28.9	47.1	64.4	98.6	76.3	100
	0.1	35.5	95.3	44.1	100	45.4	100
0.25	0.0001	5.2	7.4	10.4	11.6	18.5	23.0
	0.001	9.6	10.7	33.8	49.6	52.8	76.2
	0.01	28.1	45.2	63.2	97.3	75.1	100
	0.1	35.0	94.3	44.5	100	46.6	100
0.5	0.0001	5.3	7.8	11.6	15.6	18.9	28.9
	0.001	9.5	12.4	29.5	43.4	45.6	61.0
	0.01	25.3	39.7	59.3	90.6	72.2	99.1
	0.1	34.8	90.5	43.1	100	47.1	100
0.75	0.0001	5.2	7.7	13.8	20.1	21.1	34.1
	0.001	9.5	14.2	25.1	39.8	34.9	46.4
	0.01	19.3	34.2	50.6	73.0	65.3	90.5
	0.1	32.6	79.5	44.2	99.9	45.5	100
0.87	0.0001	5.3	7.6	14.7	22.7	22.3	36.2
	0.001	10.3	15.6	25.5	40.0	32.0	42.8
	0.01	17.5	33.7	40.9	57.7	57.2	77.8
	0.1	28.8	65.4	43.7	99.3	44.4	100

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

(g) ケース (T9N)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.9	0.0001	5.3	7.8	13.9	20.5	21.2	34.2
	0.001	9.7	15.2	25.1	40.2	30.5	41.7
	0.01	18.0	33.9	42.0	55.3	59.4	74.7
	0.1	34.0	66.8	53.7	99.2	56.7	100
-0.75	0.0001	5.2	8.3	12.7	17.9	19.6	31.0
	0.001	9.0	13.5	24.4	39.6	34.5	46.2
	0.01	20.9	35.0	54.3	74.3	70.3	91.1
	0.1	39.7	83.4	54.0	100	56.1	100
-0.5	0.0001	4.7	7.5	10.9	13.9	17.8	26.8
	0.001	9.2	12.4	28.1	41.3	43.5	58.9
	0.01	27.3	41.3	63.6	91.0	77.5	99.0
	0.1	41.0	93.1	53.9	100	55.2	100
-0.25	0.0001	5.1	7.9	9.2	10.5	17.4	21.0
	0.001	8.4	11.0	32.1	46.4	51.9	74.2
	0.01	28.7	45.5	67.2	97.4	80.6	99.9
	0.1	41.8	96.2	54.7	100	57.4	100
0	0.0001	4.5	7.7	9.0	9.2	17.2	17.8
	0.001	8.7	10.0	34.1	49.4	52.3	79.9
	0.01	30.2	48.2	67.1	98.3	81.9	100
	0.1	42.2	97.0	53.7	100	56.2	100
0.25	0.0001	4.9	7.7	10.2	11.4	16.1	19.8
	0.001	8.4	11.1	33.0	47.8	51.3	73.9
	0.01	28.9	45.5	67.0	97.0	80.9	99.9
	0.1	42.2	96.3	53.8	100	56.2	100
0.5	0.0001	5.0	7.3	11.0	14.3	17.8	26.2
	0.001	9.0	11.6	28.7	41.5	44.1	59.4
	0.01	25.5	40.5	63.1	90.7	78.0	99.1
	0.1	41.6	93.0	53.3	100	56.8	100
0.75	0.0001	5.4	8.2	12.3	18.3	19.4	31.0
	0.001	9.2	13.6	24.9	39.7	34.4	46.6
	0.01	20.6	35.5	54.3	73.9	70.1	91.3
	0.1	39.6	83.1	53.9	100	56.2	100
0.9	0.0001	5.3	8.0	13.4	20.1	20.6	33.4
	0.001	9.7	14.9	24.0	38.7	30.0	41.7
	0.01	17.7	33.2	42.4	55.4	58.6	73.9
	0.1	33.1	66.3	53.2	99.2	55.5	100

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

(続き) 表 2 実際の検出力 (%)

(h) ケース (T9T5)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.87	0.0001	5.3	7.7	13.4	19.6	20.7	33.3
	0.001	9.3	14.7	23.7	38.6	30.9	42.1
	0.01	17.0	32.9	42.3	58.2	59.0	78.9
	0.1	31.0	68.9	46.3	99.6	49.6	100.0
-0.75	0.0001	4.8	7.5	11.7	17.1	20.0	32.0
	0.001	9.0	13.3	24.7	39.0	33.9	45.9
	0.01	19.6	34.8	51.9	73.2	67.4	90.6
	0.1	34.3	80.6	47.1	100.0	49.1	100.0
-0.5	0.0001	4.9	7.8	10.6	13.4	17.2	26.2
	0.001	8.6	11.5	28.1	41.5	43.5	59.3
	0.01	25.0	40.0	60.5	90.2	74.6	99.0
	0.1	37.3	91.4	46.5	100.0	49.4	100.0
-0.25	0.0001	4.9	7.9	10.0	10.9	17.1	21.5
	0.001	8.1	9.9	33.2	46.5	49.7	73.5
	0.01	27.8	44.4	64.3	96.9	77.9	99.9
	0.1	36.8	95.0	47.0	100.0	49.5	100.0
0	0.0001	5.0	7.7	8.9	9.6	17.3	19.0
	0.001	8.6	10.2	34.3	50.3	52.0	79.7
	0.01	29.6	46.6	65.8	98.2	78.5	100.0
	0.1	37.0	95.5	46.9	100.0	49.0	100.0
0.25	0.0001	4.7	7.7	9.8	11.2	16.3	20.4
	0.001	9.0	10.6	32.6	46.6	50.0	74.1
	0.01	27.8	43.4	63.9	96.7	77.9	99.9
	0.1	36.9	94.9	47.3	100.0	49.2	100.0
0.5	0.0001	5.0	7.7	10.9	13.7	17.2	26.1
	0.001	8.1	11.7	28.8	41.9	43.3	59.0
	0.01	25.5	39.8	60.7	90.6	75.5	98.8
	0.1	35.9	91.4	47.6	100.0	50.4	100.0
0.75	0.0001	5.3	8.0	12.2	17.2	19.9	31.2
	0.001	9.5	13.8	24.7	39.2	34.7	46.2
	0.01	19.3	34.0	51.8	72.7	67.9	90.9
	0.1	34.3	79.3	46.7	100.0	48.5	100.0
0.87	0.0001	5.5	7.9	13.3	19.9	20.7	33.1
	0.001	9.9	15.0	24.3	39.0	31.4	42.7
	0.01	17.7	33.3	42.3	58.3	59.1	78.3
	0.1	30.1	67.6	46.9	99.4	48.7	100.0

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

(i) ケース (T9T9)

ρ	ω^2	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		MT_n	L_n	MT_n	L_n	MT_n	L_n
-0.99	0.0001	5.1	7.8	12.7	19.4	19.5	32.2
	0.001	8.8	13.2	22.5	37.8	28.0	39.9
	0.01	14.8	29.9	24.1	37.3	32.0	43.6
	0.1	18.1	40.6	40.9	82.2	46.2	95.0
-0.9	0.0001	4.9	8.0	12.5	18.5	20.0	31.7
	0.001	8.3	13.0	22.1	37.4	28.3	41.5
	0.01	15.2	30.1	39.6	55.3	55.6	74.5
	0.1	30.8	65.5	43.8	99.0	45.5	100
-0.75	0.0001	5.3	7.9	11.9	16.3	18.5	29.0
	0.001	7.8	11.9	22.1	37.4	32.6	46.3
	0.01	17.5	31.0	50.3	73.3	64.4	90.8
	0.1	32.8	79.9	45.2	99.9	46.4	100
-0.5	0.0001	4.8	7.5	9.6	13.2	16.4	24.5
	0.001	7.7	11.4	26.0	39.2	42.2	59.1
	0.01	22.5	36.0	56.4	89.0	70.3	98.7
	0.1	34.5	89.1	45.5	100	46.5	100
-0.25	0.0001	4.8	7.5	9.5	10.4	16.2	19.3
	0.001	7.5	10.0	30.0	43.8	47.4	71.5
	0.01	25.0	39.3	59.7	95.5	72.0	99.8
	0.1	35.3	92.8	44.6	100	45.9	100
0	0.0001	5.0	8.2	9.0	9.3	16.4	17.9
	0.001	7.9	9.5	31.2	45.7	49.7	77.4
	0.01	26.4	41.1	60.3	97.1	72.2	99.9
	0.1	34.5	94.0	43.9	100	45.8	100
0.25	0.0001	4.8	7.5	9.3	10.6	15.7	19.2
	0.001	7.6	10.3	30.1	43.5	46.8	70.8
	0.01	25.3	40.0	60.0	95.9	72.2	99.9
	0.1	34.5	91.5	44.0	100	46.4	100
0.5	0.0001	5.0	8.0	10.3	13.2	16.5	24.0
	0.001	7.5	11.4	26.8	40.1	41.2	58.6
	0.01	22.3	35.6	57.1	89.3	70.3	98.6
	0.1	35.4	89.7	43.7	100	45.5	100
0.75	0.0001	5.1	8.1	12.0	16.6	18.3	29.1
	0.001	8.0	11.8	22.8	37.2	32.5	45.7
	0.01	18.2	30.9	49.7	72.4	64.3	90.7
	0.1	33.6	80.1	44.8	100	46.7	100
0.9	0.0001	4.9	7.9	12.4	17.8	19.0	31.8
	0.001	8.8	13.3	22.1	37.7	28.3	41.0
	0.01	15.3	30.0	39.9	55.2	55.3	74.2
	0.1	30.2	65.3	44.0	99.2	46.9	100
0.99	0.0001	5.3	8.1	12.4	19.0	20.2	32.8
	0.001	8.6	13.7	21.8	37.0	27.5	40.1
	0.01	15.2	30.2	24.7	37.5	32.0	43.2
	0.1	17.2	40.4	41.4	82.0	46.7	95.1

注: 2つの検定の検出力のうち高い値を太字にしている。

3つの検定の検出力と誤差項 ε_t と STUR 過程の係数 $1 + \eta_t$ との相関 ρ の関係を確認する。図1と図2はそれぞれ (NN) と (NT9) の $n = 500$ の場合の検出力を図にしたものである。縦軸が検出力、横軸が η_t と ε_t の相関 ρ の値である（これらの図は Su and Roca (2012) の Figure 1 に相当するが、Su and Roca (2012) は ρ が正の場合しか考えなかったのに対して、ここでは ρ が負の場合の関係も見ている）。ここでは (NN) と (NT9) の場合を見ているが、そのほかの場合でもほぼ同様のパターンが見られる。すなわち、

- (1) ω^2 が小さい時には ρ の絶対値が大きくなるほど3つの検定の検出力は高くなる、
- (2) ω^2 が比較的大きくなってくると逆に ρ の絶対値が大きいほど MT 検定と Lee 検定の検出力は下がるのに対して、Disataso 検定は必ずしもそうではない⁽⁵⁾、
- (3) MT 検定はほぼ全ての場合において Lee 検定と Distaso 検定より検出力がかなり低い、
- (4) Lee 検定と Distaso 検定については ρ と ω^2 の値に依存して、どちらの検出力が高いかわ変わってくる、

ことが確認された。これらは Su and Roca (2012) などの既存の研究で確認されたことと（相関が負の場合にも同様のことが成り立つことを確認した以外は）ほぼ同じである。

次に、 η_t の裾の厚みが増した時に、それぞれの検定統計量の検出力にどのような影響があるかを見てみよう。図3-図5はそれぞれ MT 検定、Lee 検定、Distaso 検定について、 ε_t を標準正規分布に固定し、 η_t の分布をそれぞれ (N) $N(0, \omega^2)$, (T5) $T(3.5, \omega^2)$, (T9) $T(2.5, \omega^2)$ とした時の検出力と相関の関係を図示したものである。これらの図より、

- (5) MT 検定において、 ω^2 が大きくなるにつれて、 η_t の裾が厚くなるほど検出力が低下する傾向が見られる、
- (6) この傾向は Lee 検定と Distaso 検定でも若干見られるが、MT 検定と比較し、それほど顕著ではない（検出力低下の大きさは小さく、ほぼ同じ検出力）、

ことがわかる。

最後に ε_t の裾の厚みが増すとともに、それぞれの検定統計量の検出力にどのような影響があるかを確認する。ただし、 ε_t が裾の厚い分布に従う時は Distaso 検定はサイズのゆがみがひどく、検出力の意味のある比較ができないため、MT 検定と Lee 検定についてのみ考える。図6-図7は

(5) Distaso 検定の検出力が Su and Roca (2012) と異なっているが、Su and Roca (2012) では Distaso 検定の臨界値としてどのような値を用いたのか明確に示されていないため、本稿とは異なり、Distaso (2008) の Table 1 で計算した（特定の）有限標本に対する臨界値を用いている可能性がある。

図1 (NN) 相関 ρ に対する検出力 ($n = 500$)

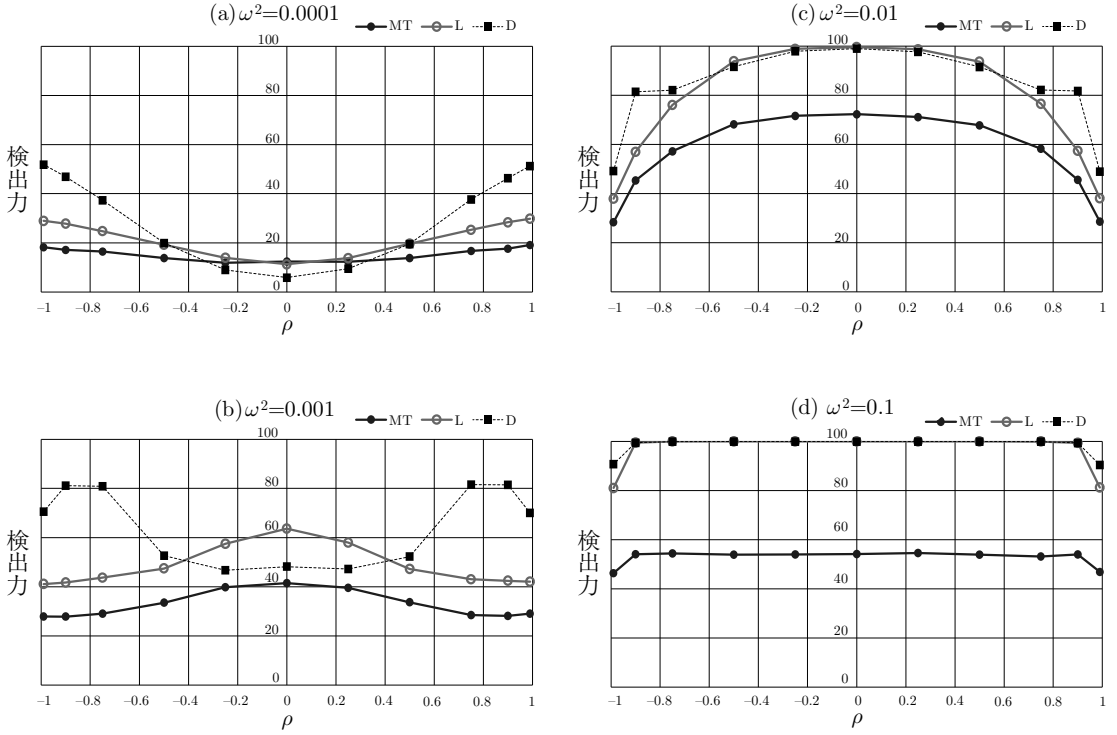


図2 (NT9) 相関 ρ に対する検出力 ($n = 500$)

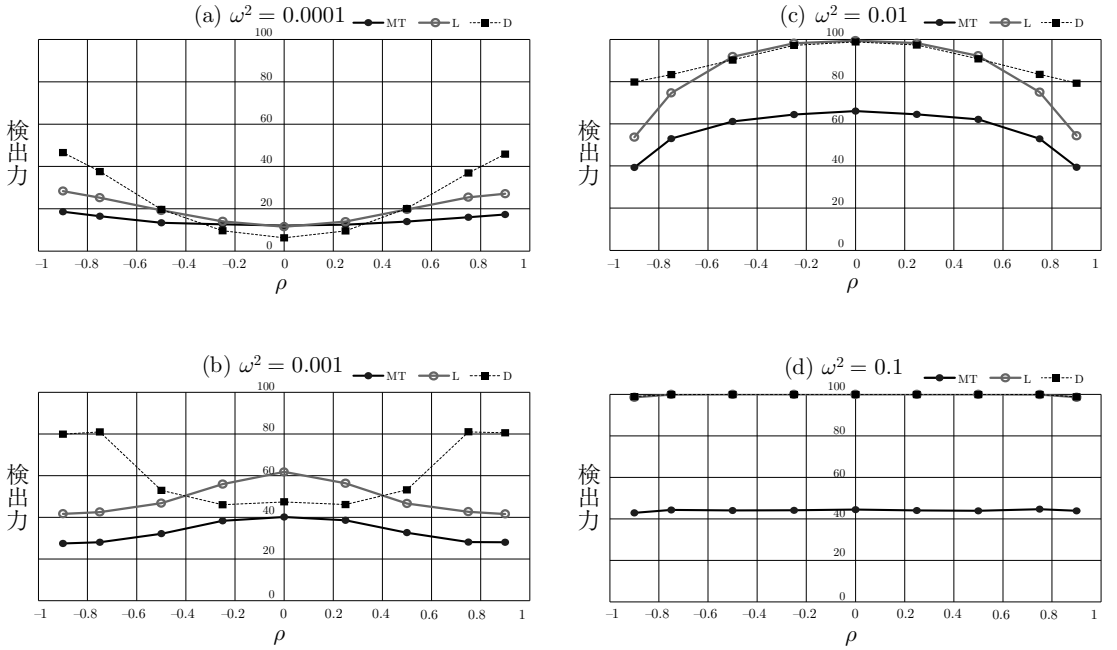
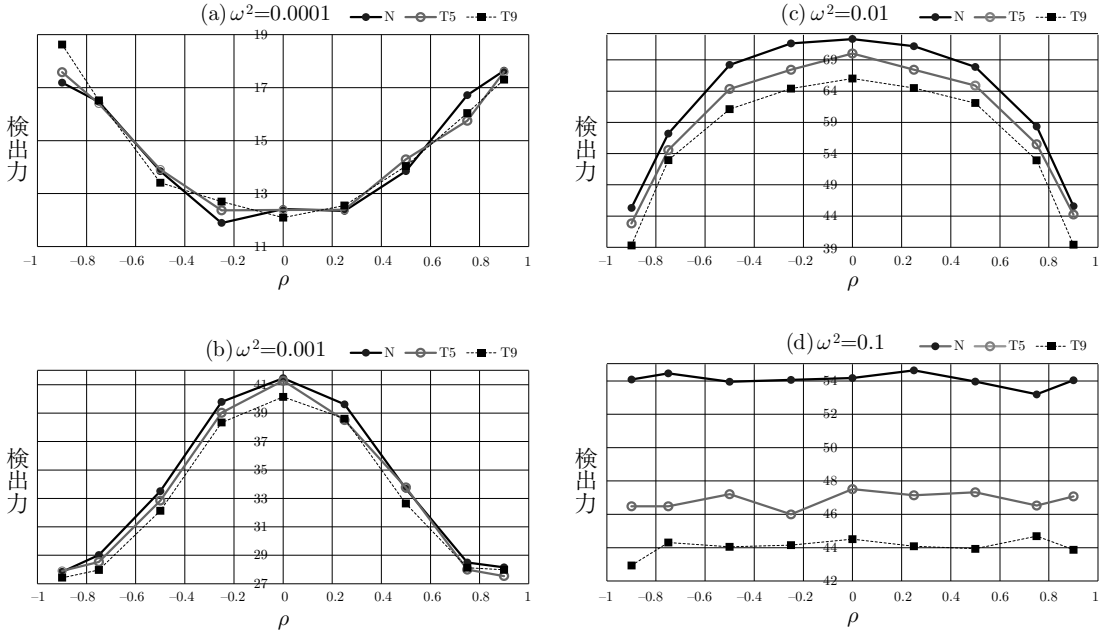
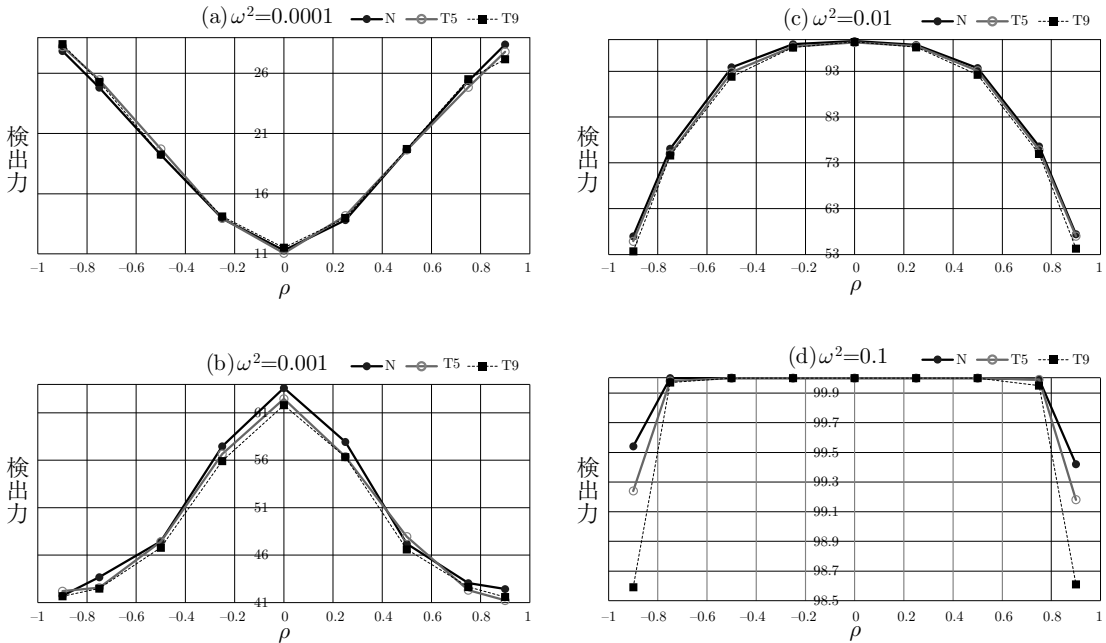


図3 MT 検定の, η_t の異なる分布に対する検出力と相関 ρ の関係



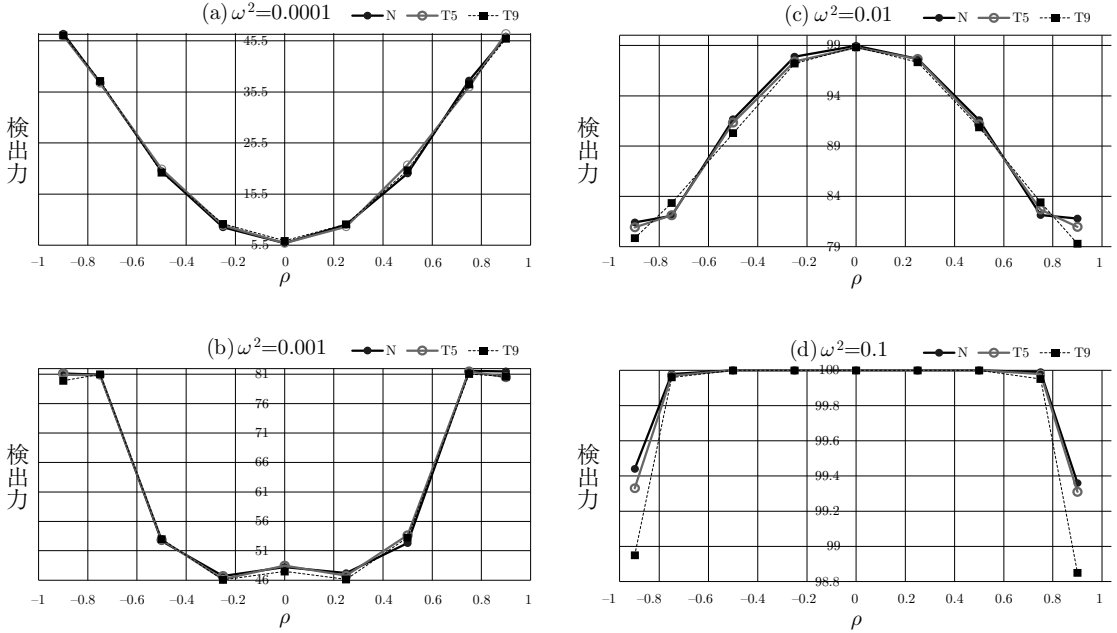
MT 検定において, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ と固定し, η_t を (N) $N(0, \omega^2)$, (T5) $T(3.5, \omega^2)$, (T9) $T(2.5, \omega^2)$ とした時の検出力と相関 ρ の関係。それぞれの図において縦軸の範囲が異なることに注意 (横軸は同じ)。

図4 Lee 検定の, η_t の異なる分布に対する検出力と相関 ρ の関係



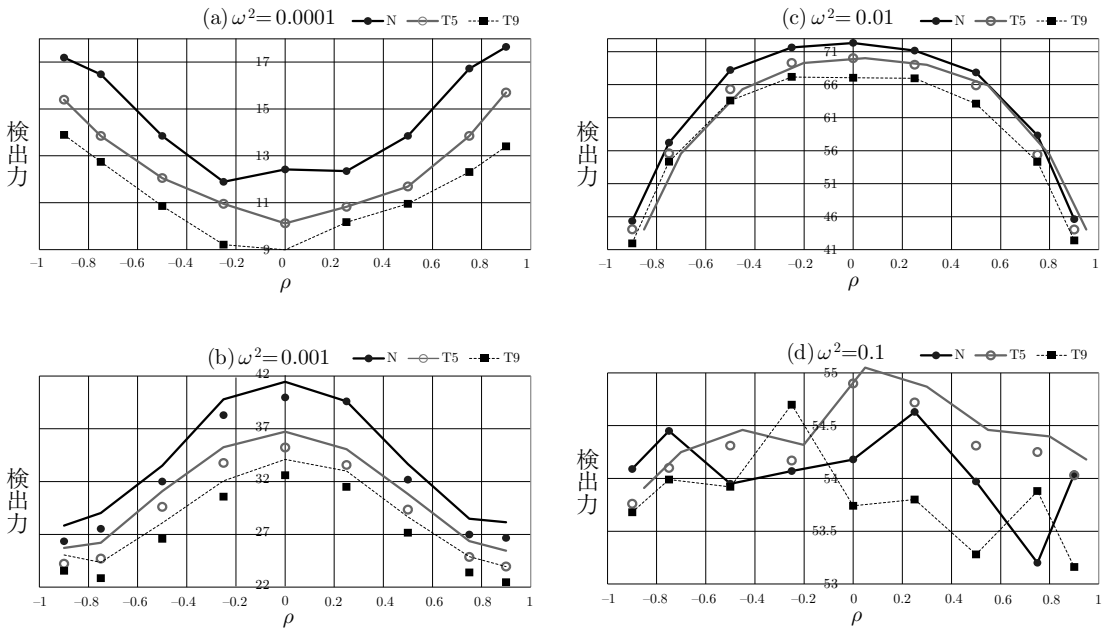
Lee 検定において, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ と固定し, η_t を (N) $N(0, \omega^2)$, (T5) $T(3.5, \omega^2)$, (T9) $T(3.5, \omega^2)$ とした時の検出力と相関 ρ の関係。それぞれの図において縦軸の範囲が異なることに注意 (横軸は同じ)。

図5 Distaso 検定の, η_t の異なる分布に対する検出力と相関 ρ の関係



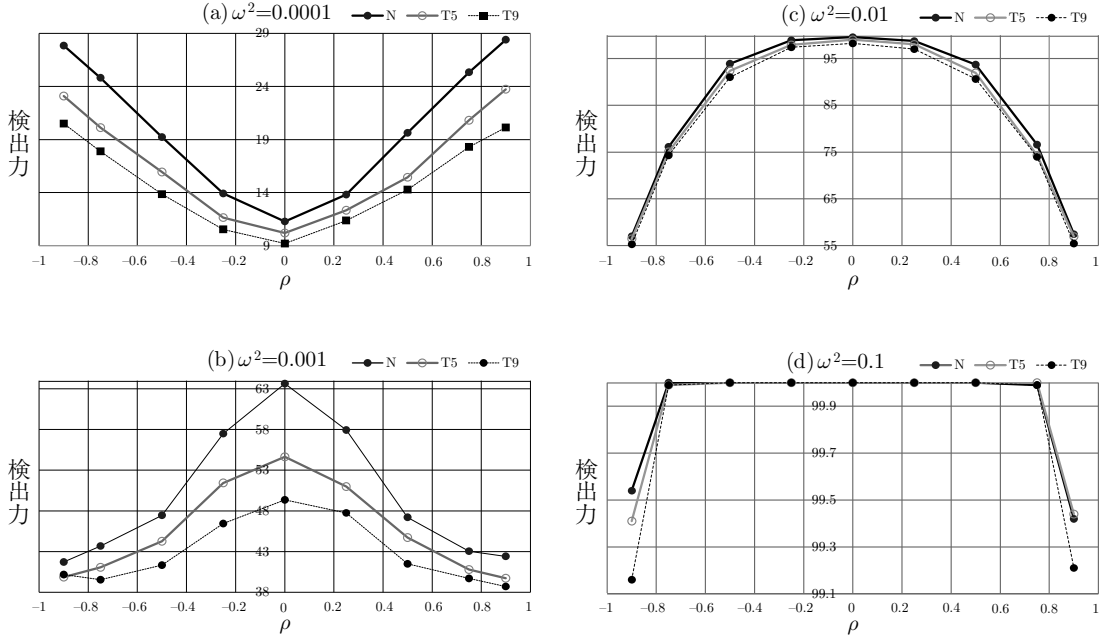
Distaso 検定において, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ と固定し, η_t を (N) $N(0, \omega^2)$, (T5) $T(3.5, \omega^2)$, (T9) $T(2.5, \omega^2)$ とした時の検出力と相関 ρ の関係。それぞれの図において縦軸の範囲が異なることに注意 (横軸は同じ)。

図6 MT 検定の, ε_t の異なる分布に対する検出力と相関 ρ の関係



MT 検定において, $\eta_t \sim N(0, \omega^2)$ とし, ε_t を (N) $N(0, 1)$, (T5) $T(3.5, 1)$, (T9) $T(2.5, 1)$ とした時の検出力と相関 ρ の関係。それぞれの図において縦軸の範囲が異なることに注意 (横軸は同じ)。

図 7 Lee 検定の, ε_t の異なる分布に対する検出力と相関 ρ の関係



Lee 検定において, $\eta_t \sim N(0, \omega^2)$ とし, ε_t を (N) $N(0, 1)$, (T5) $T(3.5, 1)$, (T9) $T(2.5, 1)$ とした時の検出力と相関 ρ の関係。それぞれの図において縦軸の範囲が異なることに注意 (横軸は同じ)。

$\eta_t \sim N(0, \omega^2)$ とし, ε_t を (N) $N(0, 1)$, (T5) $T(3.5, 1)$, (T9) $T(2.5, 1)$ とした時の, それぞれ MT 検定と Lee 検定の検出力と相関 ρ の関係を図示したものである。図より

- (7) ε_t の裾の厚みが増すにつれて, MT 検定と Lee 検定はともに検出力が落ちるというパターンが, ω^2 の値にかかわらず, 顕著に見られる。この検出力の低下の大きさは前記(5)の η_t の場合よりも大きい,

ということが確認された。

これらの結果より, 検定の検出力は, 確率的係数および誤差項の分布の両方の裾の厚みから影響を受けるが (厚くなるほど低くなる), その影響力は誤差項の裾の方が大きいということが言える。

5 まとめ

本稿では STUR 過程に対して, その係数の一定性を検定する既存の 3 つの検定, MT 検定, Lee 検定, および Distaso 検定, についてその小標本におけるパフォーマンスをシミュレーションによって調べた。Su and Roca (2012) のような既存の研究では, 確率的係数および誤差項の両方が正規分

布に従っている場合しか考えていないのに対し、本稿では確率的係数および誤差項のそれぞれの分布の裾の厚さが検定力にどのように影響するのかに焦点を当てて調べた。Su and Roca (2012) の研究同様、確率的係数と誤差項の間に相関がある場合を考えシミュレーションを行った。シミュレーションの結果、確率的係数および誤差項が正規分布に従っている時は、Su and Roca (2012) とほぼ同様の結果（誤差項と確率的係数の相関の絶対値が検出力に影響を与える）を得たのに対して、誤差項および確率的係数の分布の裾が正規分布より厚い場合は、裾が厚くなるほど検出力が下がり、またその影響は誤差項の分布の裾の厚みの方が顕著に大きいことが確認された。これらの結果は、誤差項の分布に裾の厚い分布を仮定し、何らかの形で相関の大きさを考慮した検定統計量を構築することによって、より検出力の高い検定を構築できる可能性を示唆している。

補論

正規分布より裾の厚い分布の相関

3.2 節では、正規分布より裾が厚く、また異なる周辺分布を持ち、任意の相関 ρ を持つ 2 変量確率変数 (x, y) を構成した。しかしながらこれらの変数は正規分布より裾の厚い周辺分布を持つ代わりに、それらを構成する元の正規分布より相関の取りうる範囲が狭くなる、という問題があった。ここでは 2 変量確率変数 x と y について裾の厚さを維持しつつ相関がより広い範囲を取れるような構成方法を考える。

$\sigma^2, \delta^2, x^*, y^*$ を 3.2 節（および 3.1 節）で定義した変数と同じとする。ここでさらに τ^2 を正の値を取り、これらの変数と独立で $E(\tau^2) = 1$ および $E(\tau^4) < \infty$ を満たす確率変数とする。この時、 x と y を

$$x \equiv \sigma x^* \text{ および } y \equiv \tau \sigma y^* \quad (22)$$

と定義する。3.2 節（および 3.1 節）と同様の議論により、 x と y の尖度は

$$K_x = 3E(\sigma^4), \quad K_y = 3E(\tau^4)E(\sigma^4) \quad (23)$$

となる。また相関 ρ は

$$-E(\tau) \leq \rho \leq E(\tau) \quad (24)$$

の範囲の任意の値を取れる。ここで $E(\tau^4)E(\sigma^4) = E(\delta^4)$ となるような τ を選べば、裾の厚さは (9) 式で定義した x と y と同じである。しかしながら、この時、 x と y の相関の取りうる範囲は (9) 式で定義した x と y の相関の取りうる範囲よりも大きくなりうる。

例えば σ^2 と τ^2 を $\sigma^2 \equiv \tilde{\sigma}^2/E(\tilde{\sigma}^2)$, $\tau^2 \equiv \tilde{\tau}^2/E(\tilde{\tau}^2)$, $\tilde{\sigma}^2 \sim IGam(7/2, \beta)$, $\tilde{\tau}^2 \sim IGam(13/4, \beta)$ (β の値は任意) とし、(22) 式によって x と y を定義すると、 x と y の尖度は (15) 式および (23) 式より

$$K_x = 5, \quad K_y = 3 \times \frac{5}{3} \times \frac{9}{5} = 9$$

となる。一方この時、 x と y の相関の取りうる範囲は(17)式および(24)式より

$$|\rho| \leq E(\tau) = \sqrt{2.25} \frac{\Gamma(2.75)}{\Gamma(3.25)} \approx 0.946$$

であり、これは $(x, y) \sim T_2(3.5, 1, 2.5, 1, \rho)$ (この時 x の尖度は 5, y の尖度は 9) の時に x と y の相関が取りうる範囲

$$|\rho| \leq 0.876\dots$$

よりも広い。よって分布の裾の厚さを維持しつつ相関の取りうる範囲を広くすることに成功している。ただしこの時 y の周辺分は $T(2.5, 1)$ とは異なる分布である。

参 考 文 献

- Bleaney, M.F., and Leybourne, S.J., 2003. Real exchange rate dynamics under the current float: a re-examination, *Manchester School*, 71, 156–171.
- Bleaney, M.F., Leybourne, S.J., and Mizen, P., 1999. Mean reversion of real exchange rates in high-inflation countries, *Southern Economic Journal*, 65, 839–854.
- Distaso, W., 2008. Testing for unit root processes in random coefficient autoregressive models, *Journal of Econometrics*, 142, 581–609.
- Granger, C.W.J., and Swanson, N.R., 1997. An introduction to stochastic unit-root processes, *Journal of Econometrics*, 80, 35–62.
- Lee, S., 1998. Coefficient constancy test in a random coefficient autoregressive model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 74, 93–101.
- Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., and Tremayne, A.R., 1996a. Can economic time series be differenced to stationarity? *Journal of Business & Economic Statistics*, 14, 435–446.
- Leybourne, S.J., McCabe, B.P.M., and Mills, T.C., 1996b. Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: theory and applications, *Journal of Forecasting*, 15, 253–270.
- McCabe, B.P., and Tremayne, A.R., 1995. Testing a time series for difference stationary, *Annals of Statistics*, 23(3), 1015–1028.
- McCabe, B.P., and Smith, R.J., 1998. The power of some tests for difference stationarity under local heteroscedastic integration, *Journal of the American Statistical Association*, 93(442), 751–761.
- Nagakura, D., 2009a. Testing for coefficient stability of AR(1) model when the null is an integrated or stationary process, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 2731–2745.
- Nagakura, D., 2009b. Asymptotic theory for explosive random coefficient autoregressive models and inconsistency of a unit root test against a stochastic unit root process, *Statistics and Probability Letters*, 79, 2476–2483.
- Nagakura, D., 2020. Influences of thick-tailed error distributions on some stochastic unit root tests: a simulation study, mimeo.
- Sollis, R., Leybourne, S.J., and Newbold, P., 2000. Stochastic unit root modeling of stock price indices, *Applied Financial Economics*, 10, 311–315.

- Su, J.-J., and Roca, E., 2012. Examining the power of stochastic unit root tests without assuming independence in the error processes of the underlying time series, *Applied Economics Letters*, 19(4), 373–377.
- Taylor, A.M.R., and van Dijk, D., 2002. Can tests for stochastic unit roots provide useful portmanteau tests for persistence? *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 64, 381–397.
- Yoon, G., 2006. A note on some properties of STUR processes, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 8, 253–260.
- Wu, J.-J., and Chen, S.-L., 1997. Can nominal exchange rates be differenced to stationarity? *Economics Letters*, 55, 397–402.

要旨: 係数が確率的に変動する次数 1 の自己回帰過程において、その係数が期待値 1 を取る場合は確率的単位根過程と呼ばれる。本稿では確率的単位根過程において、確率的に変動するとされる係数が実際には定数かどうかの検定に用いられるいくつかの検定方法の性質をシミュレーションによって明らかにする。より具体的には、モデルの誤差項と確率的係数の間の相関およびこれら 2 つの確率変数の周辺分布の非正規性、特に分布の裾の厚さ（尖度）、がこれらの検定の小標本における実際の有意水準および検出力にどのような影響を与えるかに焦点を当てシミュレーションを行う。シミュレーションの結果、誤差項および確率的係数の分布の両方について、裾が厚くなるほど、有限標本において検出力が低下することがわかった。また、その影響は誤差項の分布の裾の厚みの方が大きいことも示唆された。

キーワード: 確率的単位根過程, ラグランジュ乗数検定, 局所最良不変検定