

Title	決済の理論モデル
Sub Title	Theoretical model of payment
Author	前多, 康男(Maeda, Yasuo)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2021
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.114, No.1 (2021. 4) ,p.101- 111
JaLC DOI	10.14991/001.20210401-0101
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20210401-0101

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究ノート

決済の理論モデル

前多康男*

1 はじめに

フリーマン (Freeman (1996)) のモデルは決済システム (payment system) をモデル化したもので、モデル自体が決済システムの以下の 3 つの特徴を持っている。(1) 人々が債券を発行して財を購入する、(2) 債券は貨幣で償還される、(3) 債券の流通市場が存在する。本研究ノートでは、フリーマン (Freeman (1996)) のモデルを、細かい部分まで補足を行いながら詳細に解説する。フリーマンのモデルでは、個人が発行した債券を貨幣で決済することになるが、債券の決済を行うための貨幣が経済において不足している状態を流動性不足と定義しており、流動性が不足したときに、中央

銀行が適切に経済に貨幣を供給することが経済の効率性を向上することを示している。⁽¹⁾フリーマンのこの研究は、その後の決済システムに関する理論的研究の嚆矢となった。

2 モデルの基本構造

2.1 モデルの時間的空間的構造

■島の構造 全体のモデルは 2 期の世代重複モデルである。モデルの空間構造としては、中央に 1 つの島 (中央島) があり、その島の周りに全体で I 個 (偶数個) の島が組になって取り囲んでいる状況になっている。組になっている島の一方を債権者島 (creditor island)、他方を債務者島 (debtor island) と呼ぶ。それぞれの島において、各期 t ($t \geq 1$) に N 人の

本研究ノートは慶應義塾大学学事振興資金の研究援助を受けた。記して感謝の意を表したい。

* 慶應義塾大学経済学部

- (1) 貨幣の需要は季節によって大幅な変動があったが、フリードマンとシュワルツ (Friedman and Schwartz (1963)) は、連邦準備制度の発足とともにその変動が大きく減少したことを指摘している。中央銀行の行う流動性供給が実質的に効果を持った事例である。

2 期間生きる個人が生まれる。

■**財の初期保有** 経済に存在する財は 2 種類あり、いずれの財も保存不可能である。つまり、期を越えて持ち越すことができない。債務者島に生まれる個人を債務者 (debtor) (借り手、タイプ d の個人) と呼ぶ。債務者は若年期に x 単位の債務者島に特有な財を初期保有しており、老年期には財の初期保有はない。この財を x 財と呼ぶ。債権者島に生まれる個人を債権者 (creditor) (貸し手、タイプ c の個人) と呼ぶ。債権者は若年期に y 単位の債権者島に特有の財を初期保有しており、老年期には財の初期保有はない。この財を y 財と呼ぶ。

■**効用関数** 債務者は、若年期に債務者島の財 (x 財) と債権者島の財 (y 財) のそれぞれの財の消費から効用を得る。(老年期の消費からは効用を得ない。) 債務者の効用関数を $v(d_{x,t}, d_{y,t})$ とする。ここで、 $d_{x,t}$ は債務者 (タイプ d の個人) の t 期における x 財の消費で、 $d_{y,t}$ は t 期における y 財の消費である。この関数 v は加法分離的とし、分離されたそれぞれの関数について厳密に増加的、厳密に凹、2 回連続微分可能であるとする。また、この効用関数の無差別曲線は軸に交わらないとする。

各債権者は、若年期に債権者島の財 (y 財) から、老年期に債務者島の財 (x 財) から消費により効用を得る。債権者の効用関数を $u(c_{y,t}, c_{x,t+1})$ とする。ここで、 $c_{y,t}$ は債権者 (タイプ c の個人) の t 期における y 財の消費

で、 $c_{x,t+1}$ は $t+1$ 期における x 財の消費である。この効用関数についても債務者の効用関数と同様の仮定を置く。

■**初期時点の老人** 初期時点に $\frac{NI}{2}$ 人の老人の債権者が中央島に存在している。⁽²⁾ この初期時点の老人は老年期に x 財の消費から効用を得るものとする。また各個人が m 単位の貨幣を保有しているとする。

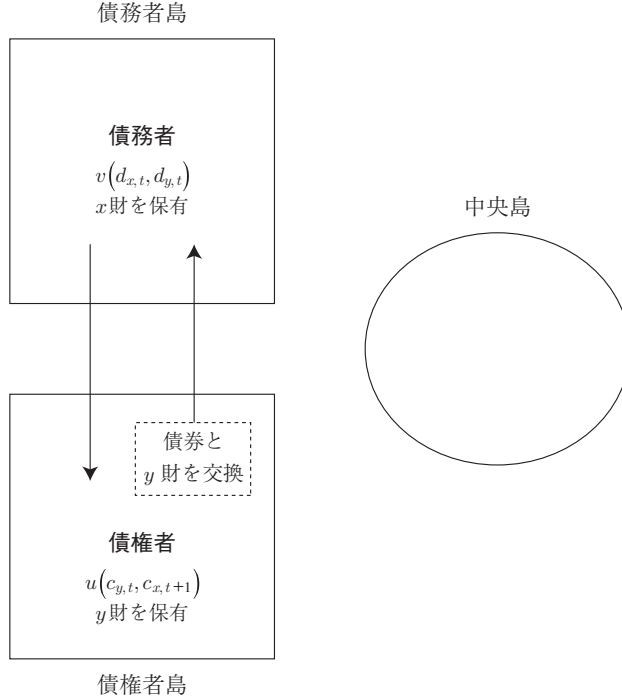
3 取引の構造

3.1 債務者の行動

■**債務者の若年期の第 1 ステージの行動** 各期は便宜上 2 つのステージに分けられているとする。債務者島に t 期に生まれた t 世代の債務者は、 t 期の第 1 ステージで組になっている債権者島を訪れて、そこにいる若者の債権者と相対で取引を行う。債務者が消費したい財は x 財と y 財の両方であり、債務者は x 財を保有している。一方、債権者が若年期に消費したい財は y 財であり、保有している財も y 財である。この相対の取引は要求が一重に一致しているケースであって、物々交換は起らない。債務者は債務証書 (債券) を発行し、それと引き換えに債権者から y 財を受け取る。ここで債権者が債務者の発行する債券を受け取る理由は、その債券が購買力となつて、老年期に x 財を消費できる期待があるからである。⁽³⁾ この取引は図 1 にまとめてある。

(2) $N = 1$ に基準化しているので、実際は $\frac{1}{2}$ 人の老人の債権者が中央島に存在している。

図 1 モデルの基本構造 (t 期の第 1 ステージ)



■債務者の若年期の第 2 ステージの行動 債権者島を訪れた債務者はその期の第 2 ステージで元の債務者島へ戻る。債務者が戻った頃に老人の債権者が債務者島を訪れる。老人の債権者は貨幣を保有しており、債務者が保有している x 財を欲している⁽⁴⁾ので、貨幣と x 財の交換が起きる。債務者は第 1 ステージで発行した債券を次期に決済するために貨幣を欲している⁽⁵⁾。

■債務者の予算制約 債務者島に t 期に生まれた (t 世代の) 債務者の第 1 ステージにおける債権者との相対取引は、債務者が発行する債券の名目価値額 (枚数) を h_t とすると、

$$p_{y,t}d_{y,t} = h_t \quad (1)$$

と表すことができる⁽⁶⁾。ここで、 $p_{y,t}$ は t 期の y 財の価格である。債務者が貨幣を需要する理由は、次の期に自分が発行した債券を決済

-
- (3) 正確に言うと、次の期に債券を貨幣で返済してもらい、その貨幣の購買力で老年期に x 財を購入することになる。
- (4) 老年期の債権者と若年期の債務者は、この後二度と会うことはないので、取引が行われるためには、債権者が貨幣を保有している必要がある。老年期の債権者は、この債務者島において生涯を終わることになる。
- (5) 第 1 期には、便宜上中央島に貨幣を保有して存在していた初期時点で老人である債権者が債務者島を訪れて取引を行う。
- (6) 各島において同じことが起きる対称的な均衡に焦点を当てるので、各島で同一の価格が実現していることを想定している。

するためであり、このことは、

$$m_t = h_t \quad (2)$$

と表すことができる⁽⁷⁾。つまり、債券の名目価値総額（額面総額）だけの貨幣を需要することになる。債務者の若年期の第2ステージの予算制約は、

$$p_{x,t}d_{x,t} + m_t = p_{x,t}x \quad (3)$$

となる。ここで、 $p_{x,t}$ は t 期の x 財の価格である。

(2)式を(3)式に代入し、さらに(1)式を代入すると、

$$p_{x,t}d_{x,t} + p_{y,t}d_{y,t} = p_{x,t}x \quad (4)$$

となり、債務者の予算制約が導出できる。

■債務者の最適化問題 したがって、債務者が解く問題は、

$$\begin{aligned} \max \quad & v(d_{x,t}, d_{y,t}) \\ \text{subject to} \quad & \\ & p_{x,t}d_{x,t} + p_{y,t}d_{y,t} = p_{x,t}x \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。この問題の1階の条件は、

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{p_{x,t}}{p_{y,t}} \quad (6)$$

となる⁽⁸⁾。

■債務者の老年期の行動 債務者が老年期に行う行動は、貨幣を持って中央島へ行き、中央島を訪れている債権者が保有している債券を貨幣で決済（返済）することだけである。債務者は老年期には消費を行わないので、返済を終えたら、そのまま中央島に留まり、生涯を終えることになる。

老年期も2つのステージに分かれているが、債務者のうち λ の割合の人は老年期の第1ステージに中央島へ到着する。残りの $1 - \lambda$ の割合の人は老年期の第2ステージにならないと到着しない。このタイミングのずれが、中央島において貨幣が不足する原因となる。

3.2 債権者の行動

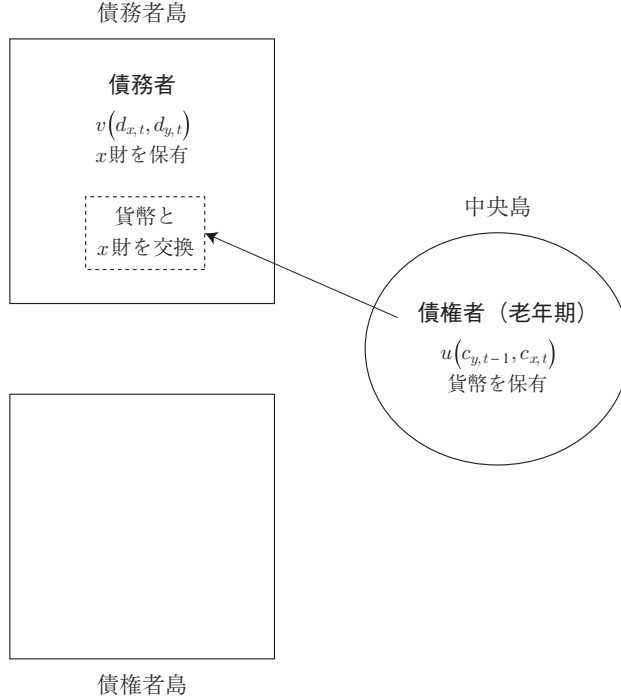
■債権者の若年期の行動 債権者は若年期に債権者島を訪れる若者の債務者と相対で取引を行う。債務者の発行する債券を受け入れ、代わりに初期保有している y 財を渡す。

■債権者の老年期の行動 債権者は次期の期首に中央島へ移動する。中央島において保有している債券の発行者（債務者）を待ち、債務者が到着したら債券を貨幣でもって償還してもらう。貨幣を得た債権者は自分の生まれた島と組になっている債務者島を訪れ、そこにいる若者の債務者と貨幣と x 財の交換を行い、 x 財を消費する。そのまま、債権者島で生涯を終える。

(7) ここでは、債務の額面に対して利子が0で返済が行われる。したがって、債務者は、債券の額面と同額の貨幣を調達している。ここで、利子を導入しても、その利子は財の価格で調整されるだけであり、配分に影響を与えないことが分かる。

(8) ここで、 v_x は関数 v の第1変数による偏微分、 v_y は関数 v の第2変数による偏微分を表している。

図2 モデルの基本構造 (t 期の第2ステージ)



ここで債権者の移動に関する以下の想定を置く。債権者のうち全体の α の割合の人は、第2ステージまで中央島に留まり、その後債務者島へ移動する。第2ステージまで留まることにより、遅く到着する債務者も待つことができ、自分の保有する債券が確実に貨幣に変換される。しかし、債権者のうち全体の $1-\alpha$ の割合の人は、第1ステージの終わりに債務者島へ移動してしまう。この段階では、中央島に遅く到着する債務者は到着しておらず、保有する債券を発行者に償還してもらうことができない。このときには、債券を第1ステージに割り引くことによって貨幣を手にし、債務者島へ移動することになる。

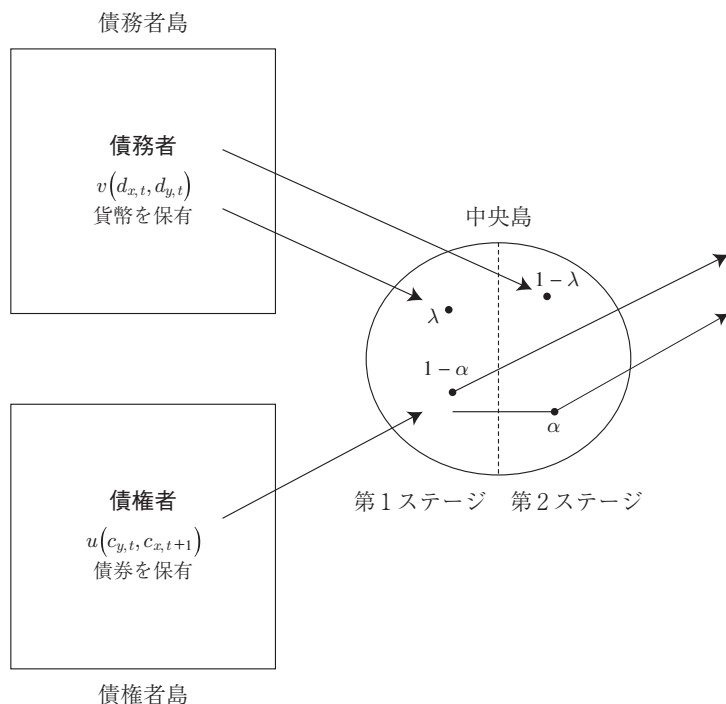
■**債権者の若年期の予算制約** 債権者が購入する（債務者の発行する）債券の名目価値額を l_t とする。または債券の額面を1円として、購入する債券の枚数を l_t と考えてもよい。債権者の若年期の予算制約は、

$$p_{y,t}c_{y,t} + l_t = p_{y,t}y \quad (7)$$

となる。

■**債権者の老年期の予算制約** 債権者は、老年期に債券を持って中央島へ移動する。しかし、第1ステージの終わりに中央島から去ることになる債権者は、自分の保有する債券を発行した債務者が、自分が去る前に到着しない可能性も生じる。その場合には、中央島で第

図3 モデルの基本構造 ($t+1$ 期)



2ステージまで留まる債権者のうちで貨幣を持っている個人に、債券を割り引いてもらう必要がある。この割引価格を ρ_{t+1} ($\rho_{t+1} \leq 1$) とする。

早く去ることになる債権者は、 l_t の名目価値を持つ債券を保有しているが、債券の発行者が早く到着したときには、 l_t の貨幣で返済される。このことが起きる確率は λ である。しかし、 $1-\lambda$ の確率で債務者が遅く到着し、その結果、 $\rho_{t+1}l_t$ の価値の貨幣しか得ることができないことになる。このことを式で表すと、

$$p_{x,t+1}c_{x,t+1} = \rho_{t+1}(1-\lambda)l_t + \lambda l_t \quad (8)$$

となる。

■**債権者の結託** ここで、(8)式に対して2つの点を指摘しておく。まず、モデルの設定をそのまま素直に考えれば、早く去ることになる債権者は、自らが保有する債務者が早く到着するか、遅く到着するかで状態が異なり、それぞれの場合を分けて予算制約を立てる必要がある。(8)式のように、期待値を用いて1本の予算制約式で書けるためには、債券が多数の債務者に分散されている想定が必要になる。または、早く去ることになる債務者は期首の早い時期にそのことを知ることができ、その時点で、そのような債権者が結託して、保険契約を締結するという想定も考えられる。ここでは、これらの想定のもとに、(8)式を用いて分析を進めていく。

また、(8)式の左辺の第1項は、割引率 ρ_{t+1} で保有している債券 l_t がすべて割り引かれることが想定されている。早く去る債権者は債券をそのまま保有していても、債務者島では紙クズになるので、どのような割引率であれ、すべての債券を割り引いてもらうことになる。この債権者が保有している債券は l_t であるので、その割引価値である $\rho_{t+1}l_t$ が、(8)式の右辺の第1項に入っていることが分かる。

■遅くまで留まる債権者 中央島に第2ステージまで留まる債権者は、自らの保有する債券をその発行元の債務者から返還してもらったときには、貨幣を保有している。このような債権者は、早く去る債権者の所有する債券を割り引くことが可能になる。割り引いた債券は、遅く到着する債務者から貨幣でもって返還されることになる。このことを予算制約として書くと、

$$p_{x,t+1}c_{x,t+1}^* = l_t + (1 - \rho_{t+1})q_t \quad (9)$$

となる。ここで、遅くまで留まる債権者の x 財の消費を $c_{x,t+1}^*$ としている。また、ここで q_t は割り引く債券の額面值（枚数）を表している。ここでも、債権者を一団として捉えたときの各個人の予算制約になっている⁽⁹⁾。したがって、債権者の一団が保有する債券のうち、第1ステージで返済されるものは λ の割合があるので、割引に使用できる資金としては、 λl_t が用意できる。割引に使用できる資金によって割引額が制約されるので、

$$\rho_{t+1}q_t \leq \lambda l_t \quad (10)$$

という制約がかかることになる。この制約を流動性制約（liquidity constraint）と呼ぶ。

■債権者の最適化問題 債権者の最適化問題をまとめると、

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha u(c_{y,t}, c_{x,t+1}^*) + (1 - \alpha)u(c_{y,t}, c_{x,t+1}) \\ \text{subject to} \quad & \end{aligned} \quad (11)$$

$$p_{y,t}y = p_{y,t}c_{y,t} + l_t$$

$$\rho_{t+1}(1 - \lambda)l_t + \lambda l_t = p_{x,t+1}c_{x,t+1}$$

$$l_t + (1 - \rho_{t+1})q_t = p_{x,t+1}c_{x,t+1}^*$$

$$\lambda l_t - \rho_{t+1}q_t \geq 0$$

となる。

$\rho_{t+1}, p_{y,t}, p_{x,t+1}$ を所与として、 $c_{y,t}, c_{x,t+1}, c_{x,t+1}^*, l_t, q_t$ について最適化を行う。各予算制約を財について解き、効用関数へ代入することによって、この問題を整理すると、

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha u\left(\frac{p_{y,t}y - l_t}{p_{y,t}}, \frac{l_t + (1 - \rho_{t+1})q_t}{p_{x,t+1}}\right) \\ & + (1 - \alpha)u\left(\frac{p_{y,t}y - l_t}{p_{y,t}}, \frac{\rho_{t+1}(1 - \lambda)l_t + \lambda l_t}{p_{x,t+1}}\right) \\ \text{subject to} \quad & \lambda l_t - \rho_{t+1}q_t \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。流動性制約に係るラグランジュ乗数を μ と置くと、この問題の1階の条件は、

(9) 各島の債権者が一団となって、中央島に存在する債券の流通市場と取引を行っていると考える。

$$\begin{aligned}
l_t : \quad & u_y \cdot \left(-\frac{1}{p_{y,t}} \right) + \alpha u_x^* \cdot \left(\frac{1}{p_{x,t+1}} \right) + \\
& + (1 - \alpha) u_x \cdot \left(\frac{\rho_{t+1}(1 - \lambda) + \lambda}{p_{x,t+1}} \right) \\
& + \mu \lambda = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

および,

$$q_t : \quad \alpha u_x^* \cdot \left(\frac{1 - \rho_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right) - \mu \rho_{t+1} = 0 \tag{14}$$

となる。

4 均衡の計算

4.1 流動性制約がバインドしていないとき

■**流動性制約** 流動性制約がバインドしていないとき、つまり、経済における流動性が問題となっていないときには、債権者の最適化問題(11)を解くときに設定した、流動性制約に係るラグランジュ乗数 μ は $\mu = 0$ となり、(14)式より

$$\rho_{t+1} = 1 \tag{15}$$

が成立する。つまり、債券の流通市場における価格は額面通りとなる。(15)式を用いると、(8)式から、

$$c_{x,t+1} = \frac{l_t}{p_{x,t+1}},$$

(9)式から、

$$c_{x,t+1}^* = \frac{l_t}{p_{x,t+1}}$$

となる。 $c_{x,t+1} = c_{x,t+1}^*$ となるので、(13)式は、

$$u_y \cdot \left(-\frac{1}{p_{y,t}} \right) + u_x \cdot \left(\frac{1}{p_{x,t+1}} \right) = 0$$

と単純化される。ここから、

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{p_{y,t}}{p_{x,t+1}} \tag{16}$$

が導出される。

4.2 流動性制約がバインドしているとき

■**流動性制約** 流動性制約がバインドしているときは、 $\mu > 0$ となり、(14)式より

$$\rho_{t+1} < 1 \tag{17}$$

が成立する。つまり、債券を割り引いて得る貨幣は、額面より少なくなる。またこのときに、 $c_{x,t+1}^* > c_{x,t+1}$ となり、中央島に留まる債権者の効用が[§]、早く去る債権者に比べて高くなることが分かる。

■**債券市場の市場均衡条件** 債券の割引市場に債券を供給する個人は、中央島を早く去ることになった債権者のうち、保有している債券の発行者がまだ到着していない個人である。このような債権者の個人々が保有している債券の名目額は l_t であるので、経済全体での供給量は、 $(1 - \alpha)(1 - \lambda)l_t$ と計算できる。この債券を割り引くための資金は遅くまで中央島に留まる債権者のうち、保有している債券の発行者がすでに到着している個人である。経済全体の資金量は、 $\lambda \alpha l_t$ と計算できる。

したがって、債券の割引市場の市場均衡条件は、

$$\rho_{t+1}(1 - \alpha)(1 - \lambda)l_t = \lambda \alpha l_t$$

となり、ここから、割引価格が[§]、

$$\rho_{t+1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (18)$$

と計算できる。

流動制約が発生する（バインドする）条件は、

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1$$

であるが、この式を整理すると、

$$1 - \alpha < \lambda \quad (19)$$

となる。つまり、早く去ることになる債権者の割合が、遅く到着する債務者の割合より大きいときに流動性制約が発生する。

■債権者の問題 (18)式を(8)式へ代入すると、

$$\begin{aligned} p_{x,t+1}c_{x,t+1} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \lambda l_t + \lambda l_t \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lambda l_t \end{aligned} \quad (20)$$

と計算できる。流動性制約（(10)式）がバインドしているときには、

$$\rho_{t+1}q_t = \lambda l_t$$

となり、この式から、

$$q_t = \frac{\lambda l_t}{\rho_{t+1}} \quad (21)$$

となる。(18)式と(21)式を(9)式へ代入することによって、

$$p_{x,t+1}c_{x,t+1}^* = \frac{1-\lambda}{\alpha} l_t \quad (22)$$

と計算できる。また、(13)式に(18)式を代入すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{p_{x,t+1}}{p_{y,t}} u_y \left[y - \frac{l_t}{p_{y,t}} \right] + \lambda u_x \left[\frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{l_t}{p_{x,t+1}} \right] \\ & + (1-\lambda) u_x^* \left[\frac{1-\lambda}{\alpha} \frac{l_t}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。⁽¹⁰⁾

4.3 定常均衡

■定常均衡 ここで以下の定常均衡を求めていくことにする。 $l_t = l$, $p_{x,t} = p_x$, $p_{y,t} = p_y$, $L = \frac{l}{p_y}$, $H = \frac{h}{p_y}$, $P = \frac{p_x}{p_y}$ とそれぞれの変数の定常値を定義する。

■債権者の問題 (3)式から

$$d_{x,t} = x - \frac{m_t}{p_{x,t}} = x - \frac{H}{P}$$

となる。(1)式から

$$d_{y,t} = \frac{h_t}{p_{y,t}} = H$$

となる。したがって、(6)式は、

$$-v_x \left[x - \frac{H}{P} \right] + P v_y [H] = 0 \quad (24)$$

となる。

■債務者の問題 (23)式から

$$\begin{aligned} & -P u_y [y - L] + \lambda u_x \left[\frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{L}{P} \right] \\ & + (1-\lambda) u_x^* \left[\frac{1-\lambda}{\alpha} \frac{L}{P} \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。

■定常均衡の求め方 このモデルの定常均衡は、(24)式と(25)式、および均衡条件 $H = L$

(10) 角括弧は変数を明示的に示すことに使用している。

を連立して解くことになる。

(24)式を全微分すると、

$$\begin{aligned} v_{xx} \cdot \frac{1}{P} dH - v_{xx} \cdot \frac{H}{P^2} dP + P v_{yy} dH &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{P} x_{xx} + P v_{yy} \right) dH - \frac{H}{P^2} v_{xx} dP &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となり、ここから、

$$\frac{dH}{dP} = \frac{-\frac{H}{P^2}}{\frac{1}{P} x_{xx} + P v_{yy}} < 0$$

となることが分かる。

(25)式を全微分すると、

$$\begin{aligned} - \left(u_y + \lambda u_{xx} \cdot \frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{L}{P^2} \right. \\ \left. + (1-\lambda) u_{xx}^* \cdot \frac{1-\lambda}{\alpha} \frac{L}{P^2} \right) dP \\ + \left(u_{yy} P + \lambda u_{xx} \cdot \frac{\lambda}{(1-\alpha)P} \right. \\ \left. + (1-\lambda) u_{xx}^* \cdot \frac{1-\lambda}{\alpha P} \right) dL = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

ここで、(27)式の第1項の括弧内が正になることの十分条件を求めることにする。第1項の括弧内が正になることを式で表して、変形していくと、

$$-\frac{\lambda}{P} \frac{u_{xx}}{u_y} \cdot x - \frac{1-\lambda}{P} \frac{u_{xx}^*}{u_y} \cdot x^* < 1 \quad (28)$$

と計算できる。ここで原論文では、 $-c_x \frac{u_{xx}}{u_x}$ で測られた相対的リスク回避度が1以下であることを仮定すると、(28)式が一番下の不等式が成立し、(27)式の第1項の括弧内が正になると議論している。しかし、(28)式の左辺の各項の分母に入っているものは u_y である。し

たがって、 $u_y = u_x$ であり、かつ、流動性制約がそれほど強くなく、 y 財の消費量と x 財の消費量が近い場合にのみ成立する。ここでは、このような状況に分析を限定し、(27)式の第1項の括弧内が正になることを想定することにする。

(27)式の第2項の括弧内は負であるので、 $\frac{dL}{dP} > 0$ となる。したがって、右上がりの債券の需要関数と、右下がりの債券の供給関数を描くことができ、均衡が得られることが期待できる。

■流動性制約の影響 (25)式を L と λ に関して全微分すると、

$$\begin{aligned} \left(u_{yy} P + \lambda u_{xx} \cdot \frac{\lambda}{(1-\alpha)P} \right. \\ \left. + (1-\lambda) u_{xx}^* \cdot \frac{1-\lambda}{\alpha P} \right) dL \\ + \left(u_x + \frac{1}{1-\alpha} \frac{L}{P} \lambda u_{xx} - u_x^* \right. \\ \left. - (1-\lambda) \frac{1}{\alpha} \frac{L}{P} u_{xx}^* \right) d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

となる。(29)式の左辺の2項目の括弧の中は、

$$\begin{aligned} u_x + c_x u_{xx} - u_x^* - c_x^* u_{xx}^* \\ = \left(1 + c_x \frac{u_{xx}}{u_x} \right) u_x - \left(1 + c_x^* \frac{u_{xx}^*}{u_x^*} \right) u_x^* \end{aligned} \quad (30)$$

となるが、ここで、相対的リスク回避度が一定であることを仮定する。つまり、 $-c_x \frac{u_{xx}}{u_x} = \sigma$ と置くと、(30)式は $(1-\sigma)(u_x - u_x^*)$ と計算できる。 $u_x < u_x^*$ であるので、相対的リスク回避度が1より小さいときには、 $(1-\sigma)(u_x - u_x^*) > 0$ となる。したがって、

$\frac{dL}{d\lambda} > 0$ となる。

5 効率性

ここで、定常均衡の効率性について考察を行う。効率的な配分を分析するために、実現可能性条件を制約として θ と $1 - \theta$ でウェイト付けした期待効用を最大化する問題を考える。つまり、

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta v(d_x, d_y) + (1 - \theta)(\alpha u(c_y, c_x^*) \\ & + (1 - \alpha)u(c_y, c_x)) \end{aligned} \quad (31)$$

subject to

$$y = d_y + c_y \quad (32)$$

$$x = d_x + (1 - \alpha)c_x + \alpha c_x^* \quad (33)$$

を考える。この問題の 1 階の条件は、

$$\theta v_x = \mu^x \quad (34)$$

$$\theta v_y = \mu^y \quad (35)$$

$$(1 - \theta)u_y = \mu^y \quad (36)$$

$$(1 - \theta)u_x^* = \mu^x \quad (37)$$

$$(1 - \theta)u_x = \mu^x \quad (38)$$

と計算でき、(37)式と(38)式から $u_x = u_x^*$ が導出され、ここから

$$c_x = c_x^*$$

が計算される。また、(34)式、(35)式、(36)式、(38)式より、

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{v_y}{v_x}$$

が計算される。つまり、均衡は、負債の割引がない状態 ($\rho_{t+1} = 1$) のときに効率的になることが分かる。負債が割引かれる場合 ($\rho_{t+1} < 1$) は、中央島に留まる債権者が、早く立ち去る者の犠牲のもとに利益を得ることになる。このことが、債権者の事前のリスクを増加させることになる。

5.1 政策

流動性が制約されている均衡は効率的ではないことが明らかになった。ここで、中央島にある金融当局が、中央島に留まる債権者（銀行と呼ぶことにする）に対して、保有している負債に対して貨幣を発行して貸し付けることを考える。この中央銀行の貸付は、遅く到着する債務者の到着時点で、返済されることになる。中央銀行貸付の名目粗利率を 1 に設定すると、流動制約がバインドしなくなり、効率的な配分が実現される。

参 考 文 献

- Freeman, Scott (1996) “The Payments System, Liquidity, and Rediscounting,” *American Economic Review*, Vol.86, pp. 1126–1138.
- Friedman, Milton and Anna J. Schwartz (1963) *A Monetary History of the United States 1867–1960*, Princeton University Press.