Title	経済数学覚書3 : コブ-ダグラス型の不等式, ミンコフスキーの不等式およびヘルダーの不等式
Sub Title	Notes on math of economics 3 : Cobb-Douglas-type inequality, Minkowski's inequality and Hölder's inequality
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2020
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.113, No.3 (2020. 10) ,p.399 (107)- 409 (117)
JaLC DOI	10.14991/001.20201001-0107
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20201001-0107

「三田学会雑誌」113 巻 3 号（2020 年 10 月）

解　説

経済数学覚書3
――コブ－ダグラス型の不等式，ミンコフスキーの不等式およびヘルダーの不等式――

中山幹夫 *

1.　はじめに

コブ－ダグラス型関数 $f\colon \Re^n_{++} \to \Re$，ただし

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \quad \text{with} \ \ p_1 > 0, \cdots, p_n > 0$$

が $p := \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ を満たすとすると，端正な形の不等式

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(x_i + y_i\Big)^{p_i} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} + \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}$$

が成立する。$n = 1$ ならばこの不等式は自明であるが，$n > 1$ ならば証明を要する。この不等式が成立するのは，関数 f が任意の p に対し準凹関数であり[(1)]，$p = 1$ ならば 1 次同次凹関数となるからである。コブ－ダグラス型関数は経済学ではよく知られており，効用関数としては凸選好のもとで普通に用いられている関数である。しかし，この不等式ではその凸選好の表現が 1 次同次性によってデフォルメされているので，教室でこの形に言及されることはない。

これに対し，似た形の有名な不等式がある。次の**ミンコフスキーの不等式**（**Minkowski's inequality**）である： w，$z \in \Re^n$ ならば

＊　慶應義塾大学名誉教授
査読者から参考文献 [1] には fourth edition があるとご教示いただき，感謝いたします。

（1）　中山 [6] では対数変換を用いて初等的に証明している。

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i+z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{where} \quad \mathrm{p} \ge 1.$$

これはたとえば解析学において，2 点 $x, y \in X \subseteq \Re^n$ に対して定義される関数

$$\rho(x,\ y) := \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{where} \quad \mathrm{p} \ge 1$$

が距離の三角形公理を満たすことを証明するために使われる不等式である。この不等式の証明は多くの文献に紹介されているが[(2)]，1 次同次準凸関数が凸関数になることから導く証明は，文献を網羅したわけではないが見たことがない。

これらの不等式の数学的意義は必ずしも入門的な経済数学の核心に触れるものではないが，凸性についての初等的な知識だけで証明できるという利点から教室での講義・演習に利用することができる。

本稿ではまず **1 次同次関数が準凹ならば凹になる**ことを示す。これは Berge[2] に洗練された証明が与えられている定理であるが，ここでは学部学生に向けた初等的な証明を試みる。次に，この事実の直接の結果として上に述べたコブ－ダグラス型の不等式とミンコフスキーの不等式を導く。最後に，ミンコフスキーの不等式の証明にも用いられることのある**ヘルダーの不等式**（**Hölder's inequality**）も凹関数の定義だけから証明できることを示す。

2. 準凹関数，凹関数および錘

証明に先立って，ここでは必要な定義や関連する命題をいくつか準備する。命題はいずれも授業でも扱う入門的なものであるが，証明を付けて述べておこう。

定義 1. 関数 $f\colon \Re^n_+ \to \Re$ が**準凹関数**であるとは

$$x, y \in \Re^n_+\ ,\quad 0 \le \lambda \le 1 \quad \Rightarrow \quad f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \ge \min\Big(f(x),\ f(y)\Big)$$

であることをいう（このとき $-f$ を**準凸関数**という）。

命題 1. $f\colon \Re^n_+ \to \Re$ が準凹関数 $\iff$ $G := \{x \in \Re^n_+ \mid f(x) \ge c\}$ がすべての $c \in \Re$ に対して凸集合。

証明. 任意の 2 点 $x,\ y \in G$ をとり，$f(x) \ge f(y) \ge c$ とすると，f が準凹ならば $f\Big(\lambda x+(1-\lambda)y\Big) \ge$

---

(2)　たとえば伊藤 [3]，Kolmogorov and Fomin [4]，丸山 [5]，大関・大関 [7]，Royden [9] など。

$f(y) \geq c$ であるから，G は凸集合。逆に，G が凸集合ならば，$x, y \in G$，$f(y) = c$ とすれば $f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \geq c = f(y)$ となって f は準凹関数である。

□

注意 1.　この命題は f を準凸関数，G を $H := \{x \in \Re^n_+ \mid f(x) \leq c\}$ に置き換えても同様に成立する。

定義 2.　関数 $f\colon \Re^n_+ \to \Re$ が**凹関数**であるとは

$$x, y \in \Re^n_+\ ,\quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

であることをいう（このとき $-f$ を**凸関数**という）。

命題 2.　$f\colon \Re^n_+ \to \Re$ が凹関数 $\iff$ $F := \{(x, x_{n+1}) \in \Re^{n+1}_+ \mid f(x) \geq x_{n+1}\}$ が凸集合（この F を f の**ハイポグラフ（hypograph）**という）。

証明.　f が凹で $f(x) \geq x_{n+1}$，$f(y) \geq y_{n+1}$ とすると，$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \geq \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)y_{n+1}$. ゆえに，$\lambda(x, x_{n+1}) + (1-\lambda)(y, y_{n+1}) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)y_{n+1}\Big) \in F$ となって F は凸集合。逆に，$(x, f(x))$，$(y, f(y)) \in F$ であるから，F が凸集合ならば $\lambda(x, f(x)) + (1-\lambda)(y, f(y)) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\Big) \in F$. つまり，$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. ゆえに f は凹関数。

□

注意 2.　この命題は f を凸関数，F を $E := \{(x, x_{n+1}) \in \Re^{n+1}_+ \mid f(x) \leq x_{n+1}\}$ に置き換えても同様に成立する。この E を f の**エピグラフ（epigraph）**という。

注意 3.　凹関数（resp. 凸関数）は準凹関数（resp. 準凸関数）であることは定義からあきらかである。

命題 3.　$x \in \Re^n_+$ ，$\lambda \in \Re^n_+$（ただし $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$）とすると

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\ .$$

証明.　$x_i > 0 \quad i = 1, \cdots, n$ と仮定する。そうでなければ不等式は自明である。単調増加凹関数 $\ln\colon \Re_{++} \to \Re$ についての**ジャンセンの不等式**[(3)]より，

---

(3)　たとえば中山 [6] など。

$$\ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i \;\leq\; \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

となるから求める不等式が得られる。

□

定義 3. 集合 $K \subseteq \Re_+^n$ が**錘**（**cone**）であるとは K が**非負のスカラー倍**（**nonnegative scalar multiplication**）に関して閉じていること，すなわち，任意の $t \geq 0$ に対して $x \in K \;\Rightarrow\; tx \in K$ となることである。また，錘 K が凸集合であるとき，K を**凸錘**（**convex cone**）という[(4)]。

命題 4. 集合 $K \subseteq \Re_+^n$ が**凸錘**（**convex cone**）$\iff$ K は**和**（**addition**）と非負のスカラー倍に関して閉じている。

証明. 2 点 $x, y \in K$ をとる。K が凸錘ならば $z := \frac{x+y}{2} \in K$. すると $x + y = 2z \in K$ だから $x + y \in K$. ゆえに K は和に関して閉じている。

逆に，$x, y, x + y \in K$ とすると，任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して $\lambda x \in K$ かつ $(1 - \lambda)y \in K$ であるから $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. ゆえに K は凸錘である。

□

定義 4. 関数 $f\colon \Re_+^n \to \Re$ が 1 次同次であるとは，任意の $t > 0$ に対し，$f(tx) = tf(x)$ となることをいう。

注意 4. $f\colon \Re_+^n \to \Re$ が 1 次同次ならば，$f(0) = f(t0) = tf(0) = 0$ である。

命題 5. 関数 $f\colon \Re_+^n \to \Re$ は 1 次同次であるとすると，

$$f \text{ は凹関数} \iff f(x + y) \geq f(x) + f(y).$$

証明. 任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対し，$f(\lambda z) = \lambda f(z)$，$f(\lambda w) = \lambda f(w)$ であるから f が凹ならば $f\Big(\lambda z + (1-\lambda)w\Big) \geq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(w) = f(\lambda z) + f\Big((1-\lambda)w\Big)$. ゆえに，$x := \lambda z$，$y := (1-\lambda)w$ とすれば $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ を得る。

逆は，

$$f\Big(\lambda x + (1 - \lambda)y\Big) \geq f(\lambda x) + f\Big((1 - \lambda)y\Big) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

（4） Rockafellar [8] は錘を正のスカラー倍で定義しているが，ここでは原点を含む集合とする。

であり，$\lambda = 0,\ 1$ ならば不等式は自明だから f は凹である。

$\square$

注意 5. この命題は f を凸関数，不等式を逆向きの $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ に置き換えても同様に成立する。

以上の準備のもとで次の定理を証明する。(5)

定理 1. 1 次同次関数 $f\colon \Re^n_+ \to \Re$ （ただし $f(x) > 0, \forall x \neq 0$）について：

$$f \text{ は準凹関数（resp. 準凸関数）} \iff f \text{ は凹関数（resp. 凸関数）}.$$

証明. 注意 3 より凹関数は準凹関数だから逆を示せばよい。f は準凹であるとする。f の**ハイポグラフ**

$$F := \{\ (x, x_{n+1}) \in \Re^{n+1}_+ \mid\ f(x) \geq x_{n+1}\ \}$$

はまず原点 $(0, 0) \in \Re^{n+1}_+$ を含む。仮定より f は 1 次同次，かつ $x \neq 0$ に対しては $f(x) > 0$ なので，$(x, x_{n+1}) \in F$ ならば任意の $t > 0$ に対して $f(tx) = tf(x) \geq tx_{n+1}$，すなわち $(tx, tx_{n+1}) = t(x, x_{n+1}) \in F$ となって，F は**錘**であることがわかる。命題 2 より，f が凹関数であることを示すには，F が凸集合であることを示せばよい。

$x_{n+1} \leq y_{n+1}$ を満たす任意の 2 点 (x, x_{n+1}) と (y, y_{n+1}) を F にとり，**線分**

$$l_{x_{n+1}, y_{n+1}} := \{\lambda(x, x_{n+1}) + (1-\lambda)(y, y_{n+1}) \in \Re^{n+1}_+ \mid \lambda \in [0, 1]\ \}$$

に注目する。まず，$c := x_{n+1} = y_{n+1} \geq 0$ と仮定し，$l_{c,c} := l_{x_{n+1}, y_{n+1}}$ を平面

$$P_c := \{(x, x_{n+1}) \in \Re^{n+1}_+ \mid x_{n+1} = c\}$$

上の線分としよう。f は準凹で $f(x) \geq c,\ f(y) \geq c$ だから，命題 1 より

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \geq c = x_{n+1} = y_{n+1} \quad \forall \lambda \in [0, 1]\ .$$

ゆえに，任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対し，

$$\lambda(x, x_{n+1}) + (1-\lambda)(y, y_{n+1}) = \lambda(x, c) + (1-\lambda)(y, c) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)y,\ c\Big) \in F\ .$$

こうして，線分 $l_{c,c}$ は平面 P_c 上で F に含まれる。

---

(5) Berge [2] の簡潔で洗練された証明は Theorem 3, §8, Chapter VIII.

次に，$c = x_{n+1} < y_{n+1}$ であるとしよう。このとき，$c > 0$ としておけば十分である。なぜなら，F が $c > 0$ で凸になるならば $c = 0$ でも凸となることは F の定義からあきらかだからである。仮定より (x, x_{n+1})，$(y, y_{n+1}) \in F$ であって F は錘だから，平面 P_c 上に 2 点 (s, c)，$(r, c) \in \Re_{+}^{n+1}$ を，$t_s = 1$ と，ある $t_r > 0$ を選んで

$$(s, c) = (x, x_{n+1}) = t_s(x, x_{n+1}) \in F, \quad (r, c) = t_r(y, y_{n+1}) \in F$$

が満たされるようにとることができる。すると，上で示したように，平面 P_c 上の線分

$$l := \{\lambda(s, c) + (1 - \lambda)(r, c) \in \Re_{+}^{n+1} \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

は F に含まれる。また，この線分 l の作り方より，任意の $(z, z_{n+1}) \in l_{x_{n+1}, y_{n+1}}$ に対し，ある $(w, c) \in l$ とある $t > 0$ をとって

$$(z, z_{n+1}) = t(w, c)$$

とすることができる。すると，$(w, c) \in F$ であって F は錘だから，$(z, z_{n+1}) = t(w, c) \in F$ となる。ゆえに線分 $l_{x_{n+1}, y_{n+1}}$ は F に含まれるので F は凸集合であり，それゆえ関数 f は凹関数であることが示された。

f が準凸関数ならば，F を**エピグラフ**（注意 2）に置き換えて同様な論法によって関数 f の凸性が示される。

□

3.　コブ－ダグラス型関数

コブ－ダグラス型関数は，$x \in \Re_{++}^{n}$ に対して $f(x) > 0$，また $p = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ならば任意のスカラー $t > 0$ に対して

$$f(tx) = \prod_{i=1}^{n} (tx_i)^{p_i} = \prod_{i=1}^{n} t^{p_i} x_i^{p_i} = t^p \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = tf(x)$$

を満たすので **1 次同次**である。さらに冒頭で述べたように f は**任意の $p > 0$ に対して準凹**であるから[6]，定理 1 より f は凹関数となる。よって命題 5 から

$$\prod_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right)^{p_i} = f(x + y) \geq f(x) + f(y) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} + \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}$$

が得られる。これが本稿でコブ－ダグラス型の不等式と呼んでいる不等式である。

コブ－ダグラス型関数 f の性質として，中山 [6] では準凹性のほかに，$\sum_{i=1}^{n} p_i > 1$ ならば f は凹でないことも示したが，定理 1 を使うとこの結果を次のようにリファインすることができる。

---

(6)　脚注(1)。また Berge [2] は対数変換と単調増加凹関数を使って簡潔な証明を与えている。

命題 6.　コブ－ダグラス型関数 $f\colon \Re^n_{++} \to \Re$ について，

$$f \text{ は凹関数} \iff p = \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1 \ .$$

証明. $p \leq 1$ ならば f は凹関数になることを示す。最初に $p = 1$ とすると，上で確かめたように f は 1 次同次である。また，f は準凹であるから定理 1 より凹関数となる。

次に $p < 1$ としよう。(7) $p_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i$ とすれば，$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_0} = 1$ であるから，関数

$$h(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{p_i}{1-p_0}}$$

は凹である。そこで，$g\colon \Re_{++} \to \Re$ を単調増加凹関数 $g(z) := z^{1-p_0}$ とすれば

$$g\Big(\big(h(x)\big)^{1-p_0}\Big) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = f(x)$$

となるから f は凹関数である。

$\square$

経済学者ではない Berge は関数 f をコブ－ダグラス型関数と呼んではいないが，Berge [2] において f が準凹であり，定理 1 の応用として $p \leq 1$ ならば凹であることを証明している（cf. 命題 6）。この関数に関心をもつ数学者がいたとは興味深いことであるが，経済学の文献でこの命題に触れているものとしては，たとえば Wolfstetter [10] や Berck and Sydsæter [1] などがある。しかし，前者に述べられている証明は定理 1 の部分を省略したものであり，後者はタイトルからわかるように証明を省いた数学マニュアルである。

4.　ミンコフスキーの不等式

ここでは，まず，非負象限 $\Re^n_+$ で定義された関数

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{where} \;\; p \geq 1$$

について，不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{where} \;\; \mathrm{p} \geq 1$$

が成立することを示す。これをミンコフスキー型の不等式と呼んでおこう。

（7）　この部分は Berge [2] による。

証明. $p=1$ ならば自明であるから $p>1$ と仮定する。まず，任意の $t>0$ に対して，

$$f(tx)=\left(\sum_{i=1}^{n}(tx_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(t^p\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=t\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=tf(x)$$

となるので関数 f は 1 次同次である。以下では 1 次同次関数 f が準凸であることを示す。これにより，定理 1 から f は凸となる。

集合 H を

$$H:=\{x\in\Re_+^n\mid f(x)\leq c\}$$

と定義すると，命題 1 と注意 1 によって，f が準凸であることと集合 H が任意の $c\in\Re$ に対して凸であることは同値である。そこで任意の 2 点 $x,\ y\in H$ をとれば

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq c\ ,\quad \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq c\ .$$

すると，$p>1$ に注意すれば，関数 $g\colon\Re_+\to\Re$，ただし $g(z)=z^p$ は単調増加凸関数であるから，まず

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^p\leq c^p,\quad \sum_{i=1}^{n}y_i^p\leq c^p.$$

次に，任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して $g\Big(\lambda z+(1-\lambda)w\Big)\leq\lambda g(z)+(1-\lambda)g(w)$ であるから

$$\Big(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i\Big)^p\leq\lambda x_i^p+(1-\lambda)y_i^p\ .$$

辺々加えて

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i\Big)^p\leq\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^p+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}y_i^p\leq\lambda c^p+(1-\lambda)c^p=c^p.$$

ここで，関数 $h(z)=z^{\frac{1}{p}}$ は $z\in\Re_+$ に関して単調増加だから，両辺を $\frac{1}{p}$ 乗すると

$$f\Big(\lambda x+(1-\lambda)y\Big)=\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(c^p)^{\frac{1}{p}}=c\ .$$

こうして $\lambda x+(1-\lambda)y\in H$ であり，集合 H は凸であることが示された。ゆえに，f は準凸関数であり，1 次同次関数であるから定理 1 によって f は凸関数である。すると，f の 1 次同次性と注意 5 から求める結果，つまりミンコフスキー型の不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=f(x+y)\leq f(x)+f(y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

が得られた。

□

ミンコフスキーの不等式は $\Re^n$ で成立する不等式であるが，これを確かめるには $w\ ,z \in \Re^n$ ならば $|\ w_i+z_i\ | \le |\ w_i\ |+|\ z_i\ |$ であるから，関数 f が単調増加であること，つまり，$x_i \le y_i \quad (i=1,\cdots,n)$ を満たす $x,\ y \in \Re^n_+$ に対して $f(x) \le f(y)$ となることを示せばよい。これは対数をとれば次のように確認することができる。

$$\ln f(x) = \frac{1}{p}\ln\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ \le\ \frac{1}{p}\ln\sum_{i=1}^{n} y_i^p = \ln f(y)\ .$$

こうして，任意の $w,\ z \in \Re^n$ に対してミンコフスキーの不等式が成立する：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i+z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\Big(|w_i|+|z_i|\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{where}\ \ \mathrm{p}\ge 1\ .$$

5.　ヘルダーの不等式

最後にヘルダーの不等式の簡単な証明を述べておこう。この不等式は，たとえば Kolmogorov and Fomin [4] などではミンコフスキーの不等式の証明に用いられている不等式で，$a,\ b \in \Re^n_+$ に対して次のように与えられる：

$$p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \text{ならば} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ \le\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\ .$$

証明. 最初に $a,\ b \neq 0$ および $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq 0$ と仮定する。そうでない場合，不等式は自明である。

$\alpha,\ \beta>0,\ \ \lambda \in (0,1)$ とすると，命題 3 で $n=2$ とすれば

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda} \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\,\beta$$

が得られる。そこで，任意の $t,\ s>0$ をとり，$a_i>0,\ b_i>0$ について

$$\alpha=(ta_i)^p,\ \beta=(sb_i)^q, \qquad \text{および} \quad \lambda=\frac{1}{p},\ 1-\lambda=\frac{1}{q}$$

とすれば

$$tsa_ib_i = \Big((ta_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big((sb_i)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}t^p a_i^p + \frac{1}{q}s^q b_i^q\ .$$

辺々加えて

$$ts\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ \le\ \frac{1}{p}t^p\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}s^q\sum_{i=1}^{n} b_i^q \quad \cdots \quad (*)$$

ここで

$$t := \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad s := \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

とすると，$(*)$ より

$$ts\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)}\sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

これより

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

となって，ヘルダーの不等式が得られた。

□

6. おわりに

凸性のもとで成立する不等式としては，ジャンセンの不等式やこれから導かれる命題 3 の不等式，相加・相乗平均不等式などが初等的な代表例であるが，Berge [2] にはミンコフスキーの不等式もヘルダーの不等式も凸集合のゲージ（**gauge**）と呼ばれる関数を使う洗練された証明が与えられている。このように，これらの不等式には凸性が本質的にかかわっていることがわかる。

ミンコフスキーの不等式は，伊藤 [3]，Kolmogorov and Fomin [4]，Royden [9] などではヘルダーの不等式を用いて証明されている。伊藤 [3] や Royden [9] は p 乗可積分空間 L^p での不等式を扱っていて経済の学部学生向きではないが，Royden 第 3 版ではヘルダーの不等式を経由せずに凸性を直接に用いた簡潔な証明を与えている。また，大関・大関 [7] にはこれらの不等式をある種の最適化問題を解くことによる証明が紹介されているが，これも凸性との深いかかわりがあってこその結果だといえるだろう。

参 考 文 献

[1] Berck, P. and K.Sydsæter, *Economists' Mathematical Manual*, Second Edition, Springer-Verlag, 1991. 邦訳は鈴村興太郎監訳，丹野忠晋訳『エコノミスト数学マニュアル』日本評論社，1997 年。

[2] Berge, C., *Topological Spaces*, translated by E.M.Patterson, Dover Publications, Inc., 1997.

[3] 伊藤清三『ルベーグ積分入門』裳華房，1970 年。

[4] Kolmogorov, A.K. and S.V.Fomin『函数解析の基礎』第 2 版，山崎三郎訳，岩波書店，1972 年。

[5] 丸山徹『経済数学』知泉書館，2002 年。

[6] 中山幹夫「経済数学覚書——凹関数，ジャンセンの不等式，および最適化——」『三田学会雑誌』111 巻，2 号，2018 年。

[7] 大関信雄・大関清太『不等式』近代科学社，1987 年。
[8] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.
[9] Royden, H.L., *Real Analysis*, Second Edition, Macmillan Publishing Company, 1968.
[10] Wolfstetter, E., *Topics in Microeconomics*, Cambridge University Press, 1999.