Title	動学的変量効果モデルに対する静学的変量効果モデルの検定
Sub Title	A test for static random effect models against dynamic random effect models
Author	長倉, 大輔(Nagakura, Daisuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2020
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.113, No.1 (2020. 4) ,p.89- 100
JaLC DOI	10.14991/001.20200401-0089
Abstract	本稿では動学的変量効果モデルに対して静学的変量効果モデルを帰無仮説としたラグランジュ乗数検定を提案する。具体的には動学的変量効果モデルにおいて説明変数として1時点前の被説明変数を含むモデルを考え, その係数が0であるという帰無仮説を検定する。帰無仮説の下ではモデルは静学的変量効果モデルとなる。提案した検定に対し, シミュレーションによってその小標本における実際のサイズおよび検出力を確認する。また提案した統計量の有用性を示すために, 実際のデータを用いた分析も行う。 In this paper, we propose a Lagrange multiplier test for static random effect models against dynamic random effect models. Specifically, the proposed test examines whether the coefficient of a lagged dependent variable in a dynamic random effect model is 0. Under the null hypothesis, the model reduces to a static random effect model. We check the performances of the proposed test in small samples by simulation, and conduct an empirical analysis to show the usefulness of the proposed test.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20200401-0089

「三田学会雑誌」113 巻 1 号（2020 年 4 月）

動学的変量効果モデルに対する静学的変量効果モデルの検定

長倉大輔 *

A Test for Static Random Effect Models against Dynamic Random Effect Models

Daisuke Nagakura *

Abstract: In this paper, we propose a Lagrange multiplier test for static random effect models against dynamic random effect models. Specifically, the proposed test examines whether the coefficient of a lagged dependent variable in a dynamic random effect model is 0. Under the null hypothesis, the model reduces to a static random effect model. We check the performances of the proposed test in small samples by simulation, and conduct an empirical analysis to show the usefulness of the proposed test.

Key words: Panel data model, random effect model, static random effect model, dynamic random effect model, Lagrange multiplier test

JEL Classifications: C12, C23

---

* 慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University
nagakura@z7.keio.jp
匿名の査読者からの有意義なコメントにより内容が非常に改善されたことに感謝したい。いうまでもなく，ありうべきすべての間違いは著者の責任である。

1. はじめに

それぞれの個別主体について複数の時点にわたって観測されるデータをパネルデータという。パネルデータは個体と時点の両方に依存するのが特徴である[(1)]。パネルデータを用いた分析はパネルデータ分析と呼ばれ，通常の横断面データ（個別主体の 1 時点のデータ）や時系列データでは扱えないような問題を扱うことができる。例えば，パネルデータ分析の長所の 1 つとして，モデルに「個別効果」を導入することにより個別主体の異質性を考慮できるという点があげられる。線形パネルデータ分析においては被説明変数は説明変数の線形の関数であるとしてモデル化されるが，この場合，個別効果はそれぞれの個別主体が異なる（ただし時間を通じては一定の）「切片」を持つとして表現される。また，線形パネルデータ分析は「固定効果モデル」と「変動効果モデル」の 2 つに大別される。固定効果モデルは個別効果（個別主体ごとに異なる切片）を未知パラメーターとして扱い推定するモデルであるのに対して，変動効果モデルは個別効果を確率変数と見なし，その期待値および分散のみを推定するというモデルである。本稿では変動効果モデルの枠組みで問題を考える。線形パネルデータモデルについてより詳しくは松浦，マッケンジー(2009)および Hsiao (2015)等を参照されたい。

パネルデータ分析において，モデルの説明変数として過去の被説明変数を含んでいるモデルは動学的，含んでいないモデルは静学的と呼ばれる。一般的に動学的パネルデータモデルは静学的パネルデータモデルより扱いが難しく，推定もより高度な推定法を用いる必要がある。例えば，静学的固定効果モデルの係数の推定によく用いられる代表的な推定量の 1 つに最小二乗ダミー変数推定量（Least square dummy variable estimator; LSDM）と呼ばれる推定量があるが，LSDM によって動学的固定効果モデルの係数を推定した場合，時点数 T を固定し，個別主体数 N を無限大とする漸近論の下では一致性がないことが知られている。通常，動学的固定効果モデルの係数の一致推定には一般化モーメント法（Generalized method of moment; GMM）が用いられる。また GMM 推定量も用いる操作変数やモーメント条件によりいくつか種類があり，1 階階差 GMM 推定量，レベル GMM 推定量，システム GMM 推定量の 3 つが動学的固定効果モデルの代表的な GMM 推定量である。これらについては千木良，早川，山本(2011)を参照されたい。

静学的変量効果モデルの推定に用いられる一般化最小二乗法（Generalized least square method; GLS method）による推定量は，動学的変量効果モデルにおいても T 固定，$N \to \infty$ で一致性を持つことが知られており，また誤差項に正規分布を仮定した最尤推定量についても一致性があることが知られている（ただしこれらの結果は初期値に対する仮定に依存し，最尤推定法においては必ずしもす

(1)　概念的には，2 つのインデックスに依存したデータということであるが，個別主体と時点がもっともよく用いられるインデックスであるため，パネルデータというとほぼこの 2 つに依存したデータとして記述される。

べての未知パラメーターについて一致性を持つわけではない)。よって，動学的変量効果モデルは比較的容易に扱うことができる。ただし変量効果が説明変数と相関していないなど，より強い仮定が必要となる。これらについては Hsiao (2015) を参照のこと。

本稿では動学的変動効果モデルに対して静学的変動効果モデルを検定するラグランジュ乗数検定統計量を提案する[(2)]。尤度比検定，ワルド検定，ラグランジュ乗数検定は統計学の分野での 3 大検定であるが，ワルド検定や尤度比検定が対立仮説の下でのモデルを最尤推定する必要があるのに対して（尤度比検定は帰無仮説の下でのモデルの最尤推定も必要とする）ラグランジュ乗数検定は帰無仮説の下でのモデルを最尤推定するだけで検定統計量を計算できるため，本稿の問題のように，帰無仮説の下での最尤推定が容易な場合は非常に有用な検定方法である。

提案した検定統計量の小標本における実際のサイズおよび検出力を小規模なシミュレーションによって調べたところ，提案した統計量は帰無仮説をやや過剰に棄却する傾向があるが，N が大きくなるとその傾向は弱まり，実用上問題となるほどではないことが確認された。最後に，提案した検定統計量を実際のデータに適用した応用例も提示される。

2.　モデルおよび検定統計量

この章では本稿で扱うモデルおよび，本稿で提案する検定統計量を導出する。具体的には 2.1 節で本稿で扱うモデルおよび仮定について述べ，2.2 節で 2.1 節で述べたモデルにおける AR(1) 係数が 0 であるという制約を検定する LM 検定統計量を導出する。

2.1　動学的変動効果モデルとその尤度関数

本稿では対立仮説として，以下の動学的パネルデータモデルを考える。

$$y_{i,t} = \phi y_{i,t-1} + \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}, \quad u_{it} = \eta_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \ldots, N, t = 0, \ldots, T \tag{1}$$

ここで $\mathbf{x}_{it}$ は 定数項を含む $q \times 1$ 説明変数ベクターで外生的に与えられるとし，ε_{it} は $E(\varepsilon_{it}) = 0$ および $\mathrm{var}(\varepsilon_{it}) = \sigma^2$ を満たす誤差項，η_i はランダムな個別効果を表し，$E(\eta_i) = 0$ および $\mathrm{var}(\eta_i) = \omega^2$

---

(2)　ラグランジュ乗数検定はスコア検定とも呼ばれ，統計学の分野ではこちらの呼び方もよく用いられる。歴史的には Rao (1948) がスコア検定を提案し，ラグランジュ乗数検定という呼び方は，後に Silvey (1959) が同様の検定をラグランジュ乗数検定という呼び方で提案したのが始まりである（関連論文として Aitchison and Silvey (1958) と Aitchison and Silvey (1960) も参照されたい)。計量経済学の分野では Breusch and Pagan (1980) などがラグランジュ乗数検定という呼び方でこの検定方法を広めたためもあって，ラグランジュ乗数検定という呼び方が主流となっており本稿ではこれに従う。スコア検定とラグランジュ乗数検定について，歴史的な経緯も含めて，より詳しくは Bera and Bilias (2001) を参照されたい。

とする。本稿では ε_{it}, η_j および $\mathbf{x}_{ks}$ はすべての i, j, t, k, s に対して互いに無相関，すなわち $E(\varepsilon_{it}\eta_j)=0$ および $E(\mathbf{x}_{it}\eta_j)=E(\mathbf{x}_{it}\varepsilon_{js})=\mathbf{0}$ と仮定し，さらに $\varepsilon_{it}\sim i.i.d.N(0,\sigma^2)$ および $\eta_i\sim i.i.d.N(0,\omega^2)$ を仮定する。また $y_{i,0}$ は外生的に与えられているとする。このモデルにおいて，本稿で検定する帰無仮説は

$$H_0:\quad \phi=0 \tag{2}$$

である。本稿ではこの帰無仮説を検定するラグランジュ乗数検定統計量を導出する。

κ を $\kappa=\omega^2/\sigma^2$ と定義すると，このモデルにおける未知パラメーターは $\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{\beta}',\sigma^2,\kappa,\phi]'$ となる。以下ではまずこの未知パラメーターに関する尤度関数を導出する。

今，$T\times 1$ ベクトル $\mathbf{y}_i=[y_{i,1},y_{i,2},\ldots,y_{i,T}]'$, $N\times 1$ ベクトル $\mathbf{y}^*=[y_{1,0},y_{2,0},\ldots,y_{N,0}]'$ および $q\times T$ 行列 $\mathbf{X}_i=[\mathbf{x}_{i1},\mathbf{x}_{i,2},\ldots,\mathbf{x}_{i,T}]$, $i=1,\ldots,N$ が観測されるとする。このとき，$\mathbf{y}^*$ および $q\times NT$ 行列 $\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_N]$ が与えられた下での $NT\times 1$ ベクトル $\mathbf{y}=[\mathbf{y}_1',\mathbf{y}_2',\ldots,\mathbf{y}_N']'$ の（条件付き）結合密度関数 $f_N(\mathbf{y})$ は

$$f_N(\mathbf{y})=f_N(\mathbf{y}_N)f_{N-1}(\mathbf{y}_{N-1})\cdots f_1(\mathbf{y}_1)$$

と表される。ここで $f_i(\mathbf{y}_i)$ は $\mathbf{y}_i$ の $\mathbf{X}_i$ および $y_{i,0}$ で条件付けした条件付き結合密度関数である。$\mathbf{y}_i^{(-1)}=[y_{i,0},y_{i,1},\ldots,y_{i,T-1}]'$ とすると，$\mathbf{u}_i=[u_{i,1},u_{i,2},\ldots,u_{i,T}]'$ は

$$\mathbf{u}_i=\mathbf{y}_i-\phi\mathbf{y}_i^{(-1)}-\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}$$

と表される。また，仮定より $\mathbf{u}_i\sim i.i.d.N(\mathbf{0}_{T,1},\boldsymbol{\Omega})$ である。ここで $\mathbf{0}_{s,t}$ は要素がすべて 0 の $s\times t$ 行列を表すとし，$T\times T$ 行列 $\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\boldsymbol{\Omega}=\sigma^2(\mathbf{I}_T+\kappa\mathbf{E}_T)$$

によって与えられる。ここで $\mathbf{E}_k$ は要素がすべて 1 の $k\times k$ 行列とする(3)。これらの結果より，$\mathbf{y}_i$ の結合密度関数は

$$f_i(\mathbf{y}_i)=(2\pi)^{-T/2}|\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i\right),\quad \mathbf{u}_i=\mathbf{y}_i-\phi\mathbf{y}_i^{(-1)}-\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}$$

であることがわかり，その対数をとったものは

$$\log f_i(\mathbf{y}_i)=-\frac{T}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Omega}|-\frac{1}{2}\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i$$

となる。よってこのモデルの対数尤度関数は

$$\log L(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{N}\log f_i(\mathbf{y}_i)=-\frac{NT}{2}\log 2\pi-\frac{N}{2}\log|\boldsymbol{\Omega}|-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \tag{3}$$

となる。

---

(3)　$\boldsymbol{\iota}_k$ を要素がすべて 1 である $k\times 1$ ベクトルとすると，$\mathbf{E}_k=\boldsymbol{\iota}_k\boldsymbol{\iota}_k'$ である。

2.2　ラグランジュ乗数検定

次に本稿で提案するラグランジュ乗数検定統計量の導出に必要なスコアベクトルを計算する（補論では，ラグランジュ乗数検定について一般的な場合について簡単に説明する。ラグランジュ乗数検定の詳細な導出については，例えば Davidson and Mackinnon (1993) や難波 (2015) を参照されたい）。

上述の対数尤度関数に対して，スコアベクトルを

$$\mathbf{s}_\theta(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\sigma(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\kappa(\boldsymbol{\theta}) \\ s_\phi(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

と定義する。補論の計算より，これらの明示的な形は

$$\mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i = \mathbf{X}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}$$

$$s_\sigma(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_i - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i\right) = -\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left[\mathbf{u}'\mathbf{u} - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}\right]$$

$$s_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{NT}{2(1+T\kappa)} + \frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i = -\frac{NT}{2(1+T\kappa)} + \frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_T)\mathbf{u}$$

および

$$s_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i = \mathbf{y}^{(-1)\prime}(\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1})\mathbf{u}$$

によって与えられる。ここで $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \cdots, \mathbf{u}_N']'$ および $\mathbf{y}^{(-1)} = \left[\mathbf{y}_1^{(-1)\prime}, \mathbf{y}_2^{(-1)\prime}, \cdots, \mathbf{y}_N^{(-1)\prime}\right]'$ である。

これらより帰無仮説 $H_0 : \phi = 0$ を検定する LM 統計量は

$$LM_N = \widetilde{\mathbf{s}}_\phi^2 \mathbf{R}(N\mathbf{V}_N)^{-1}\mathbf{R}'$$

と定義される。ここで $\widetilde{\mathbf{s}}_\phi = \mathbf{s}_\phi(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)$, $\mathbf{R} = [\mathbf{0}_{1,q+2}, 1]$, $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_N', \widetilde{\sigma}_N^2, \widetilde{\kappa}_N, 0]'$ とし，$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_N, \widetilde{\sigma}_N^2, \widetilde{\kappa}_N$ はそれぞれ対立仮説のモデル（ここでは動学的パネルデータモデル）において，帰無仮説（$\phi = 0$）を制約とした $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \kappa$ の制約付き最尤推定量（restricted maximum likelihood estimators）である。(4) $\mathbf{V}_N$ は

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}E_0\left(\frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right)\right]$$

(4)　$\phi = 0$ という制約の下では動学的パネルデータモデルは静学的パネルデータモデルになるので，この制約付き最尤推定量は帰無仮説の下でのモデル（今回の場合は静学的パネルデータモデル）の通常の最尤推定量と一致する。

で定義される $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の推定量である。ここで $E_0(.)$ は帰無仮説の下での期待値を意味する。$\mathbf{V}_N$ としていくつか考えられるが，本稿では以下で定義される OPG（Outer Products of Gradients）推定量を使用する。

$$\mathbf{V}_N^{opg}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{s}_i(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)\mathbf{s}_i(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'$$

ここで

$$\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log f_i(\mathbf{y}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \\ -\dfrac{T}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\left(\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_i - \dfrac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i\right) \\ -\dfrac{T}{2(1+T\kappa)} + \dfrac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i^{(0)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, N$$

である。OPG 推定量はスコアの計算さえできれば計算できるため，$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の簡便な推定量としてよく用いられる。

よって，本稿で提案する LM 検定統計量は

$$LM_N = \widetilde{s}_\phi^2\mathbf{R}\left[N\mathbf{V}_N^{opg}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)\right]^{-1}\mathbf{R}' \tag{4}$$

となる。LM_N は帰無仮説 $H_0: \phi = 0$ の下で漸近的に自由度 1 のカイ二乗分布に従う。よって $LM_N > 3.84$ であれば有意水準 5%，$LM_N > 6.63$ であれば有意水準 1%で帰無仮説を棄却することになる。

次章ではこの統計量の小標本における性質をシミュレーションにより評価する。Bera and McKenzie (1986)で議論されたように，LM 検定統計量の構築において漸近分散の推定量として OPG 推定量を用いた場合，小標本においては（帰無仮説が正しい場合に）帰無仮説を過剰に棄却する傾向があることが知られている。提案された検定統計量についてもやはりこの傾向がみられるが，実用上問題となるほどではないことが確認される。

3. シミュレーション

本章では前章で提案した LM 統計量の小標本における実際のサイズおよび検出力を確認するためにシミュレーションを行う。

以下では(1)式よりシミュレーションを行う。ここで $\mathbf{x}_{it}$ は $\mathbf{x}_{it} = [1, x_{it}]'$, $x_{it} \sim N(0,1)$ とし，$\boldsymbol{\beta} = [1,1]'$ および $\sigma^2 = \kappa = 1$ に固定する。また ϕ の値として $\phi = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ の 4 つの値を用いる。さらに $T = 3$ に固定し，N は $N = 25, 50, 100$ の 3 つの値を用いる。以下の手順で行う。

表 1　LM 検定の小標本における実際のサイズと検出力（%表示）

(a) $T = 3$ の場合

	$N=25$				$N=50$				$N=100$			
	ϕ				ϕ				ϕ			
	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1%	3.1	10.14	55.9	93.2	1.9	15.9	97.9	99.6	1.6	17.4	98.6	100
5%	9.5	23.56	78.4	99.0	7.7	35.0	99.6	99.9	6.7	37.5	99.8	100

(b) $T = 6$ の場合

	$N=25$				$N=50$				$N=100$			
	ϕ				ϕ				ϕ			
	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1%	3.0	13.14	93.9	100	1.7	21.5	100	100	1.1	48.9	100	100
5%	9.7	28.9	98.6	100	7.1	43.9	100	100	6.2	72.6	100	100

（注）第 1 列の 1%，5% は名目のサイズを表す。$\phi = 0$ の列が実際のサイズ，それ以外の列が実際の検出力を表す。

(i)　$\mathbf{x}_{it} = [1, x_{it}]'$, $x_{it} \sim N(0,1)$ を発生させ，(1)式で定義したモデルより y_{it}, $i = 1, \ldots, N$, $t = 1, \ldots, T$ を発生させる。

(ii)　手順(i)で発生させた y_{it} および $\mathbf{x}_{it}$ より(4)式で定義された LM 統計量を計算し，有意水準 1% および 5% で検定を行う。

(iii)　手順(i)–(ii)を 5000 回繰り返し，そのうち棄却された割合を実際のサイズ（$\phi = 0$ のとき）および検出力（$\phi = 0.1, 0.5, 0.9$ のとき）とする。

結果は表 1 のようになった。これより，この検定は N が比較的小さいとき，実際のサイズは名目のサイズよりかなり大きく，帰無仮説を過剰に棄却する傾向が確認される。この傾向は N が増えるにつれて弱まっていくが $N = 50$ でも若干観察される。ただし，$N = 100$ では実用上問題となるほどではなくなっている。検出力に関しては，$N = 50$ 程度でも $\phi = 0.3$ に対して，1% 有意水準でもほぼ 100% 棄却しており非常に高いといえる（ただしこの結果はサイズを調整したものではないことに注意が必要）。また，ここでは結果は報告しないが，T が増えるにつれてこれらのサイズおよび検出力はともに改善されることも確認している。実際の応用では $N = 50$（および $T = 3$）程度（やそれ以上）の観測数が得られることは珍しいことではないため，提案された LM 検定の実際のサイズおよび検出力は実際の分析においても問題なく，この検定は有用であると考えられる。

4.　実証分析

この章では提案された LM 検定を実際のデータに応用する。分析するデータは 2003 年から 2007 年の地銀，第二地銀，信金 367 社のデータである[(5)]。これらは badloan（不良債権額），capgap（自己資本比率），yokin（預金額），public（公的資本ダミー），kyujin（本店所在地有効求人倍率），listed（上場ダミー）という 6 つの変数より成るパネルデータである。松浦，マッケンジー(2009)ではこれらの変数に対して badloan を被説明変数として，静学的パネルデータモデルを適用し実証分析を行っている。本稿では，これらのデータに対して，

$$
\begin{aligned}
\log(\mathrm{badloan}_{it}) = \beta_0 &+ \beta_1 \log(\mathrm{yokin}_{i,t-1}) + \beta_2\,\mathrm{capgap}_{i,t-1} + \beta_3\,\mathrm{public}_{i,t-1} \\
&+ \beta_4 \mathrm{kyujin}_{it} + \beta_5\,\mathrm{listed}_{it} + \phi \log(\mathrm{badloan}_{it}) + \eta_i + \varepsilon_{it}, \\
& i = 1, \ldots, 367,\ t = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

という動学的変量効果モデルを考える（$t = 1$ は 2004 年に対応）。ここで η_i および ε_{it} は(1)式で述べられた仮定を満たすとする。このモデルに対して，提案された LM 検定によって帰無仮説 $H_0 : \phi = 0$ を検定する。

LM 検定量の値は $LM = 6.60$ となった。有意水準 5%の検定の場合，$LM > 3.84$ で棄却であるので，棄却となるが，有意水準 1%では $LM > 6.63$ で棄却なので，かろうじて棄却されないという結果になった。

5.　結び

本稿では動学的変量効果モデルに対して静学的変量効果モデルを検定するラグランジュ乗数検定統計量を提案した。提案した統計量の有限標本における実際のサイズと検出力をシミュレーションによって確認し，やや過剰棄却の傾向があるものの，応用上問題となるほどではないことを示した。提案した検定を実際のデータに適用した実証分析例では，AR(1) 係数が 0 であるという帰無仮説は有意水準 5%で棄却されたが 1%では棄却されなかった。

検定統計量を導出する際に変量効果モデルを基にしたため，説明変数と個別効果の間に相関はないというやや強い仮定が必要となった。この仮定は，対立仮説として動学的固定効果モデルを考えることや，または Mundlak (1978)のように説明変数として説明変数の時間についての平均を加え

(5)　このデータは松浦，マッケンジー(2009)によって用いられたデータからすべてのデータがそろった銀行のみ抜きだしたものである。

ることにより，弱めることができる可能性がある。またより高次のラグを含むモデルに拡張する必要もあるであろう。さらに Bera and McKenzie（1986）で議論されたように漸近分散の推定量として OPG 推定量以外のものを使用することにより小標本におけるサイズの歪みが改善される可能性がある。これらについては今後の研究の課題としたい。

参 考 文 献

Aitchison, J., and Silvey, S.D. (1958) “Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints.” *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 813–828.

Aitchison, J., and Silvey, S.D. (1960) “Maximum-likelihood estimation procedures and associated tests of significance.” *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 22, 154–171.

Bera, A.K., and Bilias, Y. (2001) “Rao’s score, Neyman’s $C(\alpha)$ and Silvey’s LM tests: an essay on historical developments and some new resuts.” *Journal of Statistical Planning and Inference*, 97, 9–44.

Bera, A.K., and Mckenzie, C.R. (1986) “Alternative forms and properties of the score test.” *Journal of Applied Statistics*, 13, 13–25.

Breusch, T.S., and Pagan, A.R. (1980) “The Lagrange multiplier test and its applications to mode specification in econometrics.” *Review of Economic Studies*, 47, 239–253.

Davidson, R., and Mackinnon, J.G. (1993) *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press.

Hsiao, C. (2015) *Analysis of Panel Data*, 3rd ed., Cambridge University Press.

Mundlak, Y. (1978) “On the pooling of time series and cross section data.” *Econometrica*, 46, 69–85.

Rao, C.R. (1948) “Large samle tests of statitical hypotheses concerning several parameters with application to problems of estimation.” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44, 50–57.

Silvey, S.D. (1959) “The Lagrange multiplier tests.” *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 389–407.

千木良弘明，早川和彦，山本拓（2011）『動学的パネルデータ分析』，知泉書館 [Chigira, Hiroaki, Hayakawa, Kazuhiko, Yamamoto, Taku, *Dogakuteki Panel Data Bunseki*, Chisenshokan, 2011.]

難波明生（2015）『計量経済学講義』，日本評論社 [Namba, Akio, *Keiryo Keizaigaku Kogi*, Nihon Hyoronsha, 2015.]

松浦克己，コリン・マッケンジー（2009）『ミクロ計量経済学』，東洋経済新報社 [Matsuura, Katsumi, McKenzie, Colin, *Micro Keiryo Keizaigaku*, Toyo Keizai Shinposha, 2009.]

補論 1：スコアベクトルの計算

この補論では $\mathbf{s}_\theta(\boldsymbol{\theta})$ を計算する。まず $\mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta})$ を計算する。$\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i$ は

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \\
&= (\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)} - \mathbf{X}_i'\beta)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)} - \mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}) \\
&= (\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)}) - (\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} \\
&= (\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)}) - 2(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\frac{\partial \mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)}) + 2\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} = -2\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i
$$

を得る。これより

$$
\mathbf{s}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i
$$

を得る。

次に $s_\sigma(\boldsymbol{\theta})$ と $s_\kappa(\boldsymbol{\theta})$ を計算する。以下の結果を用いる。

$$
\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{I}_T - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{E}_T\right), \quad |\boldsymbol{\Omega}| = \sigma^{2T}(1+T\kappa)
$$

これより

$$
\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_i - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i\right)
$$

であり，またこれらを偏微分することにより

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \log|\boldsymbol{\Omega}|}{\partial \sigma^2} = \frac{T\sigma^{2(T-1)}(1+T\kappa)}{\sigma^{2T}(1+T\kappa)} = \frac{T}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\left(\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_i - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i\right) \\
&\frac{\partial \log|\boldsymbol{\Omega}|}{\partial \kappa} = \frac{T}{(1+T\kappa)}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i}{\partial \kappa} = -\frac{1}{\sigma^2(1+T\kappa)^2}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i
\end{aligned}
$$

を得る。これらより

$$
\begin{aligned}
s_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = -\frac{NT}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{u}_i'\mathbf{u}_i - \frac{\kappa}{1+T\kappa}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i\right) \\
s_\kappa(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} = -\frac{NT}{2(1+T\kappa)} + \frac{1}{2\sigma^2(1+T\kappa)^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i'\mathbf{E}_T\mathbf{u}_i
\end{aligned}
$$

を得る。

最後に $s_\phi(\boldsymbol{\theta})$ を計算する。$\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i$ は

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i \\
&= (\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)}) - 2(\mathbf{y}_i - \phi\mathbf{y}_i^{(-1)})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} \\
&= \mathbf{y}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i - 2\phi\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i + \phi^2\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i^{(-1)} \\
&\quad - 2\mathbf{y}_i^{(1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} + 2\phi\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

と書き直せることに注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_i'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i}{\partial \phi} &= -2\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i + 2\phi\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}_i^{(-1)} + 2\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i'\beta \\ &= -2\mathbf{y}_i^{(-1)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i\end{aligned}$$

を得る。よって

$$s_\phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(-2\mathbf{y}_i^{(0)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{y}_i^{(0)\prime}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_i$$

を得る。

補論 2：ラグランジュ乗数検定の説明

ここではラグランジュ乗数検定について，一般的な場合を想定し簡単に説明する。

確率変数 $y_i,\ i = 1, \ldots, N$ は独立でその密度関数（離散型の場合は確率関数）$f_i(\mathbf{y}_i)$（説明変数に依存してもよい）は未知パラメーターベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に依存するとする。このとき，対数尤度関数は $\log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N}\log f_i(\mathbf{y}_i)$ と定義される。未知パラメーターベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1', \boldsymbol{\theta}_2']'$ と分けたときに，帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{0}$ を検定する問題を考える。$\boldsymbol{\theta}_1$ の次元を q, $\boldsymbol{\theta}_2$ の次元を r とする。

スコアベクトル $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ を対数尤度関数の未知パラメーターベクトルによる 1 階微分，すなわち

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{s}_2(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

と定義する。また帰無仮説の下での未知パラメーターベクトル $\boldsymbol{\theta}_1$ の推定量を $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{1,N}$ とし，$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N = [\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{1,N}', \mathbf{0}']'$ を定義する。このとき，ラグランジュ乗数検定統計量は

$$LM = \frac{1}{N}\mathbf{s}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'\mathbf{V}_N^{-1}\mathbf{s}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)$$

と定義される。ここで $\mathbf{V}_N$ は

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}E_0\left(\frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)\right]$$

で定義される $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ の推定量である。ここで $E_0(.)$ は帰無仮説の下での期待値を表す。情報行列等式：$-E_0\left(\frac{\partial^2 \log f_i(\mathbf{y}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) = E_0\left(\frac{\partial \log f_i(\mathbf{y}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\frac{\partial \log f_i(\mathbf{y}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)$ より $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}E_0[\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})']\right)$ と書き表すこともできる。ここでは詳しくは述べないが，追加的ないくつかの条件が満たされるときに LM_N は帰無仮説の下で漸近的に自由度 r のカイ二乗分布に従うことを示すことができる。

推定量 $\mathbf{V}_N$ の逆行列 $\mathbf{V}_N^{-1}$ を

$$\mathbf{V}_N^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N^{11} & \mathbf{V}_N^{12} \\ \mathbf{V}_N^{21} & \mathbf{V}_N^{22} \end{bmatrix}$$

と分割しよう（$\mathbf{V}$ ではなくその逆行列の分割行列であることに注意）。最尤推定量 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{1,N}$ は（1 階の条件より）$\mathbf{s}_1(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) = \mathbf{0}$ を満たすので，上記の LM 統計量は

$$\begin{aligned} LM_N &= \frac{1}{N}\left[\mathbf{s}_1(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)', \mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'\right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N^{11} & \mathbf{V}_N^{12} \\ \mathbf{V}_N^{21} & \mathbf{V}_N^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) \\ \mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{N}\left[\mathbf{0}', \mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'\right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N^{11} & \mathbf{V}_N^{12} \\ \mathbf{V}_N^{21} & \mathbf{V}_N^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{N}\mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'\mathbf{V}_N^{22}\mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N) \end{aligned}$$

と書くこともできる。また $\mathbf{V}_N^{22} = \mathbf{R}\mathbf{V}_N^{-1}\mathbf{R}'$，$\mathbf{R} = [\mathbf{0}_{1,q_1}, \mathbf{I}_{q2}]$（ここで $\mathbf{0}_{r,s}$ は要素がすべて 0 の $r \times s$ 行列，$\mathbf{I}_k$ は k 次単位行列を表す），および $N^{-1}\mathbf{V}_N^{-1} = (N\mathbf{V}_n)^{-1}$ であるので

$$LM_N = \mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)'\mathbf{R}(N\mathbf{V}_N)^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{s}_2(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_N)$$

と書くこともできる（本稿ではこの表現を用いている）。

要旨: 本稿では動学的変量効果モデルに対して静学的変量効果モデルを帰無仮説としたラグランジュ乗数検定を提案する。具体的には動学的変量効果モデルにおいて説明変数として 1 時点前の被説明変数を含むモデルを考え，その係数が 0 であるという帰無仮説を検定する。帰無仮説の下ではモデルは静学的変量効果モデルとなる。提案した検定に対し，シミュレーションによってその小標本における実際のサイズおよび検出力を確認する。また提案した統計量の有用性を示すために，実際のデータを用いた分析も行う。

キーワード: パネルデータモデル，変動効果モデル，静学的変動効果モデル，動学的変動効果モデル，ラグランジュ乗数検定