「三田学会雑誌」112 巻 4 号（2020 年 1 月）

解　説

成長と割引：リーマン－スティルティエス積分

尾崎裕之 *

「経済学部の某先生，入院したんだってね。大丈夫かしら？」「でも，もう退院したらしいよ。」「酷いストレスが原因で，血糖値が急上昇したらしいわね。」「血糖値は起床時，空腹時，等々で，常に激しく上下動しているから，血糖値自体の上昇はそれほど問題ではないんだよ。彼の入院の原因は，HbA1c（ヘモグロビン・エイワンシー）が急に高くなったからみたいだよ。」「HbA1c って何？」「血糖値のリーマン積分さ。」

慶大生の会話

1　はじめに

本稿では，リーマン積分とリーマン－スティルティエス積分を取り上げることにする。どちらも，実直線上で定義された実数値関数に実数を割り当てる規則のことで，数学では「汎関数」と呼ばれるものの一種である。しかし，その直感的な意味は非常に簡単である。実直線を考えているので，そこでは普通に「長さの単位」を定義することができる。この「長さ」×「そこでの関数の値」を計算してあげると，関数を縦に切ってできる短冊形の面積が求まる。長さの単位には当然幅があるので，「そこでの」関数の値というのは全く正確ではない。そのあたりについては，本文で正確に述べるので，今は無視してほしい。この短冊を足し合わせることにより，ある区間における，実直線（x 軸と言ってもよい）と当該の関数に挟まれた図形の面積が求まる。これがリーマン積分に他ならない。実直線上の「普通の」長さを，伸ばしたり縮めたりしてできる “長さ” を用いて同じことをするとリーマン－スティルティエス積分になる。

同様のことは，平面上に「面積の単位」を定義すると，その平面上で定義される実数値関数につ

匿名のチェッカーの方から有益なコメントを頂戴した。ここに記して感謝します。

＊　慶應義塾大学経済学部

いてもあてはまる。関数を縦に切ることによってできる直方体の「体積」を求めて，それを全領域にわたって足し合わせることにより，平面と当該の関数に挟まれた図形の「体積」が求まる。これもリーマン積分と呼ばれ，面積を伸ばしたり縮めたりすれば（平面上の）リーマン－スティルティエス積分になる。

さらに，上の段落で「長さ」や「体積」と呼んだものを，より抽象的に数学的に厳密に定義すると「測度」と呼ばれるものになる。測度が定義できるのは何も実直線上や平面上に限らない。非常に抽象的な空間上に定義された測度を用いて，その空間上で定義された実数値関数の（非常に抽象化された，面積や体積のようなもの）を定義するのが，「ルベーグ積分（Lebesgue integral）」である。もはや，実直線上とは限らない抽象的な空間で定義された関数を扱っているので，関数を短冊形に縦に切る，などということはできず，関数を空間に沿って「横に」スライスするのがルベーグ積分の特徴である。

数学は，ルベーグ積分を学習することにより俄然面白くなる。(そう感じるのは筆者だけかもしれないが。)ルベーグ積分の理論から，さらに多くの積分の概念が派生してきて，それらは経済学で盛んに応用されるようになっている。筆者が世界的にそこそこの経済学者として広く認知されているのも[(1)]，ある積分概念を経済学で用いることの有用性を示したことによる。

ルベーグ積分についても，いずれ「解説」を書いてみたいが，本稿では最初に述べたように，直線上のリーマン－スティルティエス積分をもっぱら取り上げる。しかし，これも，動学マクロ分析では必須の数学ツールとなっているので，あながち（特に学部学生にとっては）意味のないことではないと思う。

2　リーマン積分

ざっくりと言ってしまうと，「リーマン積分（Riemann integral）」とは，実数値関数が与えられたときにそれに実数を対応させる，いわゆる「汎関数（functional）」と呼ばれる数学オブジェクトの一種である。本節では，リーマン積分を正確に定義し，その基本的な性質をいくつか紹介することにしよう。

閉区間 $[a,b]$（$a,b \in \mathbb{R}$ かつ $a<b$ とする）が与えられたとき，有限個の点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ が存在して，$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ となるときに，集合 $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ の「分割」と呼ぶ[(2)]。今，実数値関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を考え，これが「有界」であると仮定する。すなわち，

$$(\exists M > 0)(\forall x \in [a,b]) \quad |f(x)| < M$$

(1)　筆者本人の個人的な感想です。

(2)　集合論で用いられる「分割」とは異なる定義である。

を仮定する。この関数 f について，ある分割 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ が与えられたときに，実数 M_i^P と m_i^P $(i=1,2,\ldots,n)$ を次によって定義する。

$$M_i^P := \sup\{\, f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\,\} \quad \text{かつ} \quad m_i^P := \inf\{\, f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\,\}\,. \tag{1}$$

ただし，$\sup A$（A は実数の部分集合）は，A の要素の中で最大のものか，あるいは，それが存在しない場合には A の要素のどれよりも大きいものの中で最小のもの，を表している。これを集合 A の「上限」と呼ぶ。（ここではその詳細には触れないが，）実数の性質から，上限は必ず存在する。また，同様に，$\inf A$ は，A の要素の中で最小のものか，あるいは，それが存在しない場合には A の要素のどれよりも小さいものの中で最大のもの，を表し，集合 A の「下限」と呼ばれる。上限と同様に，下限は必ず存在する。M_i^P と m_i^P を使って，さらに次を定義する。

$$S_P f := \sum_{i=1}^{n} M_i^P (x_i - x_{i-1}) \quad \text{かつ} \quad s_P f := \sum_{i=1}^{n} m_i^P (x_i - x_{i-1})\,. \tag{2}$$

最後に，以上の準備のもと，

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{\, S_P f \mid P \text{ は } [a,b] \text{ の分割 } \} \tag{3}$$

$$\text{および} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{\, s_P f \mid P \text{ は } [a,b] \text{ の分割 } \} \tag{4}$$

を定義する。

(3)を関数 f の $[a,b]$ 上における「ダルブー（Darboux）の上積分」，(4)を関数 f の $[a,b]$ 上における「ダルブー（Darboux）の下積分」と呼ぶ。ダルブーの上積分とダルブーの下積分は，関数 f の有界性の仮定から常に実数値として存在する。明らかに，(3) $\geq$ (4) が成立するが，これに加え，(3) $=$ (4) となるときに，関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上で「リーマン積分可能」であると言い，その共通の値を

$$\int_a^b f \quad \text{あるいは} \quad \int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

と書く。ここで，“x” を「積分変数」と呼ぶが，この記号は，y でも z でも何でもよい。（どんな文字を使っても，積分の値は変わらない。）

注意するべき最初のポイントは，すべての有界関数がリーマン積分可能であるとは限らないことである。次の例はこのことを示す。

例 1　関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次によって定義する：

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \text{ は有理数} \\ 1 & \text{if} \quad x \text{ は無理数} \end{cases}$$

このとき，関数 f はどのような閉区間 $[a,b]$（$a<b$）上でも有界な関数となるが，$[a,b]$ 上でリーマン積分可能ではない。ダルブーの上積分は常に $b-a$ であるのに対し，ダルブーの下積分は常に 0 であるため，両者が一致することはないからである。 □

ただし次の定理から，実用的な（？）関数については，それがリーマン積分可能であることが証明できる。（定理の証明は省略する。参考文献を参照のこと。）

定理 1　関数 f が閉区間 $[a,b]$ 上で連続であるならば（したがって，f は $[a,b]$ 上で有界である），f は $[a,b]$ 上でリーマン積分可能である。

以下では，関数 f が閉区間 $[a,b]$ 上でリーマン積分可能であるときに，「関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上で $f\in\mathscr{R}$」と書いたりすることがある。

2.1　微積分学の基本定理

本節でこれまで紹介したように，リーマン積分の本来の定義は，実直線上の「長さ」（本節では「分割」で表現されていた）を利用して，その上で定義されている関数に対して実数を割り当てる方法と言うべきものであった。これを大胆に一般化して言うならば，「積分」とは，「長さ」「面積」「体積」などの適当な「測度[(3)]」を用いて，そこで定義されている関数を実数（場合によってはもっと複雑な何か）で表現する方法のことを指す。

その一方で，高校数学では，積分は微分の「逆演算」として定義されている。（少なくとも，筆者は大昔にそのように習った。）これは大いなるミスリーディングであると筆者は考えており，上の段落で描写した積分が，結果として，微分の逆演算のようなかたちで非常に美しく表現できるということが，「定理」として厳密に示されると考える方が，積分を理解する上で（少なくとも筆者の考えでは）はるかに有益である。

以下では，今述べた結果に関する 2 つの事実を，「定理」として厳密に述べることにする。（ただし，やはり定理の証明は省略する。参考文献を参照のこと。）

定理 2　関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上で $f\in\mathscr{R}$ を満たすとする。このとき，実数値関数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を次によって定義すると

$$(\forall x\in[a,b])\quad F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$$

(3)　本稿では行わないが，「長さ」等々の一般化として，数学では「測度」と呼ばれるオブジェが正確に定義される。

F は $[a,b]$ 上で連続となる。さらに，f が点 $x_0 \in (a,b)$ で連続であったとするならば，F は x_0 で微分可能であり，

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

が成立する。

定理 3（微積分学の基本定理） 関数 f は閉区間 $[a,b]$ 上で $f \in \mathscr{R}$ であるとする。このとき，$[a,b]$ 上で微分可能な実数値関数 F が存在して，しかも $F' = f$ が $[a,b]$ 上で成立しているのであるならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

となる。

関数 f が $f \in \mathscr{R}$ であるときに，上の定理でその存在が保証されている $F' = f$ となるような関数 F を，f の「原始関数（anti-derivative)」と呼び，

$$\int f \quad \text{あるいは} \quad \int f(x)\,dx$$

と書く。原始関数は一意には定まらない。例えば，ある原始関数に任意の定数を加えたものも，同じ関数の原始関数となる。また，原始関数の記号と，リーマン積分のそれとを混同しないこと。

次の例の多項式のように，「基本定理」を使うと，あるクラスの関数のリーマン積分の値を簡単に計算できることがある。(4)

例 2 任意の自然数を n とし，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を任意の定数とするとき，

$$\left(\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_n x\right)' = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right)dx \\
&= \left[\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_n x\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{a_0}{n+1}(1)^{n+1} + \frac{a_1}{n}(1)^n + \cdots + a_n(1)\right) - \left(\frac{a_0}{n+1}(0)^{n+1} + \frac{a_1}{n}(0)^n + \cdots + a_n(0)\right) \\
&= \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

となる。（ここで，2 行目の書き方は原始関数の端点による評価でよく用いられる記号法である。） □

(4) もちろん，ガウス分布のリーマン積分のように，積分の計算に非常にトリッキーな「技」を必要とする場合も多い。

実際に積分を計算する際に非常に便利な定理をさらにひとつ紹介しておく。

定理 4（部分積分の公式） 閉区間 $[a, b]$ 上で微分可能な実数値関数 F と G で，$F' = f \in \mathscr{R}$ かつ $G' = g \in \mathscr{R}$ となるものを考える。このとき，次が成立する：

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx\,.$$

証明：関数 FG は微分可能，したがって，連続であるから，明らかに $FG \in \mathscr{R}$ である（定理 1）。また，微分の公式から，$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$ であるので，これに基本定理を応用することにより，結果が直ぐに従う。 □

2.2 「広義の」リーマン積分

本小節では，ある関数（「被積分関数」と呼ぶ）のリーマン積分を計算しようとする際に，積分を取る端点に注意を払うことによって，リーマン積分の概念の拡張を図る。このように定義されるリーマン積分のことを，「広義の」リーマン積分（“improper” Riemann integral）と呼ぶ。

実数 a, b が $a < b$ を満たすとする。半開区間 $[a, b)$ 上で定義される実数値関数 f が与えられたとき，f が任意の $x \in [a, b)$ について，$[a, x]$ 上で $f \in \mathscr{R}$ であると仮定する。以上に加えて，f が $[a, b)$ 上で有界ではないと仮定する。すなわち

$$\lim_{x \uparrow b} f(x) = +\infty \quad \text{あるいは} \quad \lim_{x \uparrow b} f(x) = -\infty$$

であると仮定する。このとき，任意の $x < b$ について

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

が存在することは，そこで $f \in \mathscr{R}$ となっているとする仮定から分かるが，もし

$$\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(t)\,dt$$

が（実数の範囲で）存在するならば，f は $[a, b)$ 上で「広義に（improperly）」（リーマン）積分可能であると言い，この値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。

また，無限区間 $[a, +\infty)$ で定義された実数値関数 f について，それが，任意の $x \in [a, +\infty)$ について $[a, x]$ 上で $f \in \mathscr{R}$ であり，

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

が（実数の範囲で）存在するならば，f は $[a,+\infty)$ 上で，やはり，「広義に（imporperly）」（リーマン）積分可能であると言い，この値を

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

と書く。

半開区間 $(a,b]$，および，無限区間 $(-\infty,b]$ についても同様に定義する。

広義のリーマン積分を定義することにより，積分可能となる関数は格段に増加する。その一端を以下の一連の例で見てみよう。

例 3　半開区間 $[0,1)$ 上で定義された実数値関数 $f(x):=1/\sqrt{1-x}$ を考える。（$x=1$ のときには，この関数は定義されないことに注意。）今，

$$(\forall x\in[0,1))\quad F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

とおくと，微積分学の基本定理より，

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt=\left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x=2-2\sqrt{1-x}$$

となるから，広義のリーマン積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=\lim_{x\uparrow 1}F(x)=\lim_{x\uparrow 1}2-2\sqrt{1-x}=2$$

のように，その値が確定する。 □

例 4（指数分布）　定数 λ は $\lambda>0$ を満たすとし，e を自然対数の底（ネイピア数）とすると，

$$f(x):=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{if}\quad x\geq 0\\ 0 & \text{if}\quad x<0\end{cases}$$

は「指数関数」の確率密度関数と呼ばれるものとなる。指数分布は「待ち時間」の分布を表現しているものとして，統計学その他で多用されているものである。これが実際に「確率分布」になっていることを示すには，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1 \tag{6}$$

となっていることを確認しなければならない。これは，（値が定まれば）広義のリーマン積分である。

では，(6)が成立することを以下で確認しよう。まず，$b<\infty$ とし，

$$\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}dx$$

を計算しよう。これは，普通の（狭義の）リーマン積分なので，確かに存在する。基本定理を用いると，

$$\int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^b = 1 - e^{-\lambda b}$$

となり，$\lim_{b\to\infty} 1 - e^{-\lambda b} = 1$ であるから，確かに(6)が成立することが分かった。 □

例 5（指数分布の平均） 次に，指数分布の平均（分布の重心のようなもの）を計算しよう。これは，正確には，

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \tag{7}$$

として定義される。これもまた，広義のリーマン積分である。

計算してみよう。部分積分の公式（定理 4）を使う[5]。定数 b を $b < \infty$ とし，$F(x) := \lambda x$，$G(x) := -e^{-\lambda x}/\lambda$ とおく。（$f = F' = \lambda$，$g = G' = e^{-\lambda x}$ である。）すると，部分積分の公式から，

$$\begin{aligned}\int_0^b \lambda x e^{-\lambda x} dx &= (\lambda b)\left(-e^{-\lambda b}/\lambda\right) - (\lambda 0)\left(-e^{-\lambda 0}/\lambda\right) - \int_0^b \lambda\left(-e^{-\lambda x}/\lambda\right) dx \\ &= -be^{-\lambda b} - \int_0^b -e^{-\lambda x} dx \\ &= -be^{-\lambda b} - \left[e^{-\lambda x}/\lambda\right]_0^b \\ &= -be^{-\lambda b} - \left(e^{-\lambda b}/\lambda - 1/\lambda\right)\end{aligned}$$

を得る。ただし，3 番目の等式では基本定理を使っている。まず，第 1 項について，$\lambda > 0$ に注意してロピタル・ルール（L'Hôpital's rule）を適用すると

$$\lim_{b\to\infty} \frac{-b}{e^{\lambda b}} = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda b}} = 0$$

となり，第 2 項については，$\lim_{b\to\infty} -\left(e^{-\lambda b}/\lambda - 1/\lambda\right) = 1/\lambda$ となる。したがって，指数分布の平均は広義のリーマン積分としてきちんと定義され，その値は $1/\lambda$ となる[6]。 □

3　リーマン–スティルティエス積分

リーマン積分の概念を自然に拡張すると，「リーマン–スティルティエス積分（Riemann-Stieltjes integral）」が定義できる。この積分は，後に見るように経済学（特にマクロ経済学）ではなじみ深いものである。

---

(5)　「置換積分の公式」を使ってもできるが，ここではしない。

(6)　確率分布の平均が定義されることは決して自明なことではなく，例えば，コーシー分布では平均が定義できない。

リーマン–スティルティエス積分の定義は，リーマン積分のそれとほとんど同様になされる。以下，それを見てみよう。

閉区間 $[a,b]$（$a,b\in\mathbb{R}$ かつ $a<b$ とする）が与えられていて，$[a,b]$ 上で，広義[(7)]の増加実数値関数 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ が定義されている。閉区間 $[a,b]$ の任意の分割 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ が与えられたときに，

$$(\forall i=1,2,\ldots,n)\quad \Delta\alpha_i:=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$$

と書くことにすると，明らかに $(\forall i)\,\Delta\alpha_i\geq 0$ である。

いま，$[a,b]$ 上の有界な実数値関数 f について，(2)を真似て，

$$S_P(f,\alpha):=\sum_{i=1}^{n}M_i^P\Delta\alpha_i\quad\text{かつ}\quad s_P(f,\alpha):=\sum_{i=1}^{n}m_i^P\Delta\alpha_i \tag{8}$$

を定義しよう。ただし，$(\forall i)\,M_i^P$ および m_i^P は(1)で定義されたものと同様である。

最後に，「ダルブーの意味の上積分」と「ダルブーの意味の下積分」を，(3)と(4)を真似て，

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha:=\inf\{\,S_P(f,\alpha)\mid P\ \text{は}\ [a,b]\ \text{の分割}\ \} \tag{9}$$

$$\text{および}\quad \underline{\int_a^b} f\,d\alpha:=\sup\{\,s_P(f,\alpha)\mid P\ \text{は}\ [a,b]\ \text{の分割}\ \} \tag{10}$$

で定義する。

明らかに，(9) $\geq$ (10) が成立するが，これに加え，(9) $=$ (10) となるときに，関数 f は α について，閉区間 $[a,b]$ 上で「リーマン–スティルティエス積分可能」であると言い，その共通の値を

$$\int_a^b f\,d\alpha\quad\text{あるいは}\quad\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \tag{11}$$

と書く。関数 α が $(\forall x)\,\alpha(x)=x$ と定義されるならば，リーマン–スティルティエス積分はリーマン積分に帰着するので，前者が後者の拡張になっていることは明らかであろう。

また，f が α について，$[a,b]$ 上でリーマン–スティルティエス積分可能であるときに，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$ と書く。

3.1　リーマン積分とリーマン–スティルティエス積分の関係

これまで述べてきた 2 つの積分の間には密接な関係がある。定理の形で書いておこう。

定理 5　閉区間 $[a,b]$ 上で定義された広義の増加関数 α について，α は微分可能であり，しかも，$\alpha'\in\mathscr{R}$ であると仮定する。さらに，f が $[a,b]$ 上の有界な実数値関数であるならば，$f\in\mathscr{R}$ のとき，かつ，そのときに限り，$f\alpha'\in\mathscr{R}$ であり，

(7)　増加関数 α が「広義の意味で」増加関数であるとは，$x<y\Rightarrow\alpha(x)\leq\alpha(y)$ となることを言う。

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx \tag{12}$$

が成立する。

正確な証明については「5 参考文献と少しのコメント」を参照して欲しいが，式(12)が成立することの直観的な意味はそれほど難解ではない。分割の定義から，$[a,b]$ の任意の分割について，$(\forall i)\ \Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ であるが，α の微分可能性と「中間値の定理（the mean value theorem）」から

$$(\forall i)(\exists t_i \in [x_{i-1}, x_i]) \quad \alpha'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \Delta\alpha_i$$

が成立する。この関係を，上積分と下積分によるリーマン（–スティルティエス）積分の定義に厳密に組み入れることにより，式(12)が従うことが強く予想される。（実際に正しいのだが。）

次に「広義の」(12)式を導出してみよう。いま，無限期間 $[a,+\infty)$ で定義された実数値関数 f，同じく広義の増加関数 α，および，任意の $x \in [a,+\infty)$ について，$[a,x]$ 上で $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ が成立しているとする。このとき，

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$$

が（実数の範囲で）存在するならば，リーマン積分のときと同様に，f は α について，$[a,+\infty)$ 上で「広義に」リーマン–スティルティエス積分可能であると言い，この値を

$$\int_a^\infty f(x)\,d\alpha(x)$$

と書く。さらに，関数 α が任意の $x \in [a,+\infty)$ について，$[a,x]$ 上で定理 5 の然るべき条件をすべて満たすのであるならば，明らかに

$$\int_a^\infty f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^\infty f(x)\alpha'(x)\,dx \tag{13}$$

が成立する。

式(13)は極めて便利な積分表現であり，このことを再度，指数分布を用いて見てみることにしよう。

例 6（指数分布の平均のリーマン–スティルティエス積分表現） 指数分布は待ち時間を表現するのに適していると書いたが，待ち時間（確率変数 X で書く）が x 以内である確率，すなわち，$P(X \le x)$ を

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

と定義し，F を「累積分布関数（cumulative distribution function）」と呼ぶ[(8)]。実は，指数分布についての累積分布関数は例 4 ですでに求めていて，

---

(8) この式の第 2 項は，指数分布に限らない一般的な分布について書いている。

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

である。試みに $F'(x)$ を計算してみると，$F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} = f(x)$ となり，これは密度関数に等しい。密度関数を地道に足し合わせてできるものが累積分布関数なのであるから，後者のほんの僅かの増加分が密度関数になることは不思議ではない。よって（ここでは書かない）幾つかの条件が満たされている場合，累積分布関数の微分は確率密度関数である：$F'(x) = f(x)$.

この式を(13)に用いると，指数分布の平均の定義式（下の左辺は）右辺のように書き直すことができる：

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x dF(x)\,.$$

右辺は，リーマン–スティルティエス積分であり，指数分布（であれ，他の分布であれ），分布の平均はコンパクトに表現することができる。 □

4　割引と積分

実直線上で定義された実数値関数を，縦に短冊形に切って，それぞれの短冊について，底辺の長さ（普通の意味での実直線上の長さ）掛ける短冊の高さで短冊の面積を計算し，それをすべての短冊について足し合わせたもの，というのがリーマン積分の極端に直感的な解釈であるが，ダルブー積分を使って説明した本稿の正確な定義が，スピリットにおいて，これと変わらないことは直ぐに見て取れるであろう。

経済学では，実直線を「時間軸」と解釈し，時間軸上で定義された実数値関数 x について，点 t でのその値 $x(t)$ を，時刻 t での x の「存在量」（あくまで，その瞬間に存在している量）や，「フローとしての量」（あくまで，瞬間的なフロー）と解釈する。存在量としては，時刻 t に存在している富や資本などのストックとして，比較的素直に解釈可能であり，例えば，$\int_0^{100} x(t)\,dt$ と書けば，100 年にわたって存在する（例えば，富）の総量，といった解釈が自然に成り立つ。

ところが，フローの量として解釈する場合は問題が全くないとは言えない。例えば，$C(t)$ を，時刻 t に消費された（フローとして一瞬の間に消費されて消えてしまった）食料品の量とみなした場合，$\int_0^{100} C(t)\,dt$ は，100 年の間に消費された総食料品と解釈することは妥当であろうか。妥当であろうがなかろうが，経済学ではこのように解釈してきたし，これ以上この問題に関わることが本稿の目的でもないので，以下では，この問題を不問に付しつつ論旨を展開していこう。

毎期毎期，100 の富が蓄積され，これが未来永劫続く（ほとんどありえない）世界を考えよう。すると，この世界の富の総量は広義のリーマン積分で表現しようとすれば，

$$\int_0^\infty 100\,dt \tag{14}$$

となるであろうが，これは実数の範囲で収束しないので，広義のリーマン積分として定義することはできない。経済学で無限大を扱うことはあまりないので[9]，ではどうするか？

例えば，富を蓄積している場合，経年によってその価値が劣化してくることは自然に考えられる。古くから蓄積しているものほど，現在の価値で計るならば劣化の度合いは大きいであろう。特に，何かに使用することを前提に蓄積をしているものであるならば，その使用価値は減少すると考えられるので，このことはなおさらであろう。（「お宝鑑定団」のような特殊な世界は今は考慮しない。）このような経年劣化のことを経済学では「割引」と呼ぶ。この概念は重要で，今の経済学（特にマクロ経済学）で「割引」を考慮しないモデルはほとんどない。

割引は主にリーマン－スティルティエス積分で表現される。指数分布の累積分布関数を F と書くことにすると，先ほどの式(14)は，

$$\int_0^\infty 100\,dF(t) = 100$$

となり，収束する。このことは，かりに毎期毎期 100 単位の富を蓄積しようが，経年劣化が指数分布で表現されるのであるならば，結局，永遠の時を経ても富の総量は 100 であることを示している。

割引に他の分布を用いることも経済学では非常に頻繁に行われているが，ここでは，そのエッセンスを紹介することが主目的であるので，特に簡単な指数分布を取り上げて説明を試みた。

4.1　割引と成長

経済学で頻繁に登場するオブジェが有限の値に収まることを，割引の概念を用いて説明した。しかし，割り引くことが認められるのならば，時間とともに成長している経済変数の広義の積分も実数の範囲内で収束するのではないか？　これは全く正しい。しかし条件は必要だ。

そこで最後に，成長を許す簡単な動学マクロモデルを説明して，本稿を締めくくることにする。

時刻 0 から始まる時間軸上で定義された実数値関数 X で，各時刻に存在している資本財を表すことにする。ただし，時刻 0 に存在している資本財は $x_0 := X(0)$ として，歴史的に与えられていて，固定されていると仮定する。さらに，現存している資本財をすべて資本財の増産にあてるとすると，γX だけ，新しい資本財を生産できるものとする。ここで，γ は，$\gamma > 0$ を満たす定数である。すると，資本財の各期における上限の経路は，以下の微分方程式で与えられる：

$$X(0) = x_0 \quad \text{かつ} \quad (\forall t \geq 0)\ \frac{dX(t)}{dt} = \gamma X(t)\,. \tag{15}$$

ここで，$dX(t)/dt$ は瞬間的な資本の増加分（瞬間的なフロー）であり，「投資」と呼んでも良い。この式は，「常微分方程式」と呼ばれるものであるが，あっけないほど簡単に解ける。すなわち，上の式を満たす X を見つけることができる。答えは，

---

(9)　無限大同士の比較をする最大化問題は存在するが，ここでは考えない。

$$(\forall t \geq 0) \quad X(t) = x_0 e^{\gamma t} \tag{16}$$

である。（式(16)の右辺を実際に t で微分し，t に 0 を代入すれば，正しいことが直ぐに分かる。）現在蓄積されている資本をすべて投資のために投入するとするならば，この経済では，式(16)で表される資本経路を実現することが可能であることを，この式は示している。特に，$\gamma > 0$ の仮定から，資本経路は時間とともに増加していくことが分かる。このような資本経路を持つ経済は，潜在的に成長を実現することが可能である。

次に，時刻 t において消費される瞬間的なフロー量から得られる消費者の瞬間的な効用（これもフロー量である）を，実直線上の実数値関数

$$(\forall t \geq 0) \quad \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \tag{17}$$

と定義する。積分の値がマイナスになることは理論上全く問題ないのであるが，本稿では取り扱いたくないので，定数 θ は $\theta \in (0, 1)$ を満たすと仮定しておく。定数 θ は異時点間の代替の弾力性に関わるパラメターで，$\theta \in (0, 1)$ を仮定することは，消費者は異時点間で消費水準が変化することをそれほど厭に思わないことを意味する[10]。

（ときに，「フェリシティ関数」とも呼ばれる）式(17)を無限期間 $[0, +\infty)$ 上で積分したものが，無限期間生きる個人の「生涯効用」になるが，この解釈の妥当性を巡る議論は上で簡単に触れたので，繰り返さない。

仮に，$C(t)$ が時間とともに一定であるような「定数関数」であるならば，適当な割引を行えば，広義の積分は収束するであろう。ところが，資本経路を記述する際に述べたように，今考えている経済では，資本経路は増加している。その年々増加している資本を消費に振り向けることにより，消費の経路も増加することが可能となる。ここでその一端を観察するために，資本をすべて消費してしまうような経済を考えてみよう。すると，この経済における消費の経路は，次のようになる：

$$(\forall t \geq 0) \quad \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{(x_0 e^{\gamma t})^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{x_0^{1-\theta}}{1-\theta} e^{\gamma(1-\theta)t}. \tag{18}$$

ただし，ここで注意が必要なのは，今述べた消費経路は，決してこの経済で実現可能ではない，ということである。その意味で，「消費の経路」と書いたのは「消費経路の上限」と書くべきであった[11]。というのも，資本の蓄積経路の上限は，資本を他の用途に一切使用することなく，すべてを投資活動に投入することによって実現する経路であり，資本の一部を他の用途（ここでは消費）に振り

（10） このあたり，筆者にとってはとても好きな理論分野なのであるが，本稿の目的には沿わないので割愛する。

（11） その他にも，瞬間的なフローである各期の消費量を，現に存在している量（ストック）としての資本量に閉じ込めてしまうことが正しいのかどうかなど，慎重な解釈が必要な点も実は存在しているのであるが，以下では捨象する。

向けるとするならば，その分だけ投資のための元手が減少する結果，当初に企図した次期の最大資本量を実現することはできず，それ以降の消費可能な最大量も逐次減少していくからである。このあたりにも，「消費」という現時点でのメリットと，「資本」という将来時点でのメリットのトレードオフという，経済学の古くて新しい問題が登場している。

さて，ここでは，式(18)で定義される無限期間上の実数値関数の広義の積分が収束し，「消費経路の上限」が実数としての経済学的オブジェとして定義できるかどうかを見てみよう。

直ぐに分かることは，仮定により $\gamma > 0$ かつ $\theta \in (0, 1)$ なのであるから，$\gamma(1-\theta) > 0$ となって，式(18)は（効用タームで測定した）経済成長を許し，その結果，同式の広義の積分は無限大に発散し，モデルの分析は不可能となってしまうということである。

定数 γ は，いわば生産の効率性（資本の限界生産性）を表しているので，これが正であるような生産技術のもとでは，経済の資本蓄積量は順調に成長していくものと考えられる。さらに，$\theta \in (0, 1)$ である場合は，「異時点間の消費の代替の弾力性」が非常に高い場合に相当する。平たく言えば，消費者は，毎期毎期の消費水準が変動することをそれほど厭わないことを意味する。このことは，経済が成長し，消費水準が時間の経過に沿って増加していくこと（変動すること）に抵抗が少ないことを含意する。このように，経済の生産性が高く，消費者が消費の変動を厭わないケース，すなわち，$\gamma(1-\theta) > 0$ となる場合には，式(18)は（効用タームで測定した）経済成長を許し，その結果，同式の広義の積分は無限大に発散し，モデルの分析は不可能となってしまう。

「持続的成長が可能な経済」の分析を標榜しながら，実際にモデルを構築し分析をしようとすると，モデルが無限大に発散してしまい，分析が困難になる現象を解決する方法が，すでに述べてきた「割引」という考え方である。割引を正当化する理由として，すでに資本の経年劣化による資本価値の減少によるものを紹介したが，それに並んで頻繁に用いられる考え方が，現在の消費の方が，将来の同程度の消費よりも主観的な価値が大きいと感じるとする，消費者の「時間選好（time-preference）」の考え方である。手垢の付いた古典的な例で言うと，今食べることのできるりんごと，1 週間後に食べることのできるりんご（1 週間後の時点で新しく新鮮なりんご）を現在時点で比較した場合，多くの人は前者を選好するであろう，と考えるわけである。これは，将来の同じ消費量から得られるフェリシティを現在時点で割り引くことに相当する。

割引を考えるために，すでに本稿ではお馴染みになった指数分布による（広義の）リーマン–スティルティエス積分を考えよう。すると，無限期間生きる消費者が得られる生涯効用は，

$$\int_0^\infty \frac{x_0^{1-\theta}}{1-\theta} e^{\gamma(1-\theta)t} dF(t)$$

と表現することができる。ここで，F は指数分布の累積分布関数である。第 3.1 節の結果（定理 5 とその後の議論）を用いることによって，この式は，さらに次のように展開できる：

$$\lambda \frac{x_0^{1-\theta}}{1-\theta} \int_0^\infty e^{(\gamma(1-\theta)-\lambda)t} dt\,.$$

この式から，たとえ，効用タームで経済が成長しているケース，すなわち，$\gamma(1-\theta)>0$ であるような場合でも，

$$\gamma(1-\theta)<\lambda \tag{19}$$

であるならば，リーマン−スティルティエス積分は収束し，分析の対象となる経済学のオブジェは実数として扱うことが可能となる。式(19)を変形して，

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)\gamma(1-\theta)<1$$

を得るが，$1/\lambda$ が指数分布の平均であり，指数分布が待ち時間の分布を表していたことを想起するならば，$1/\lambda$ が小さいということは，「待ち時間が短いこと」すなわちそれだけ将来の価値を小さくみなしていることを意味し，そのような場合に，生涯効用が実数として収束する，すなわち，それを経済学の分析の俎上に乗せることができるのである。この過程で，リーマン−スティルティエス積分による「割引」がきわめて重要な役割を担っていることが，以上の分析から分かって頂けたと思う。

ちなみに，リーマン−スティルティエス積分による「割引」で，指数分布を使用したのは，それが簡単だからという理由からであるが，それに加え，指数分布が「時間整合性」と呼ばれる動学マクロ分析に欠かせない性質を有しているからという理由もある。さらに，「再帰的効用関数」と呼ばれる，割引を内生化した時間整合的な効用関数も存在し，この関数とリーマン−スティルティエス積分との関係は，ほとんど知られていない。今後の研究課題として，大変興味深いものとなろう。なお，前者については，拙稿「連続時間再帰的ダイナミック・プログラミング理論の構築に向けて」（『三田学会雑誌』110 巻 4 号）を参照してほしい。

5　参考文献と少しのコメント

リーマン積分に関して本稿で用いた数学はすべて基礎的なものばかりであるが，リーマン−スティルティエス積分については，なにより，

Walter Rudin (1976): *Principles of Mathematical Analysis* (Third Edition), McGraw-Hill の第 6 章を熟読すべきである。本稿でスキップしたすべての証明はこの本に載っている。

最後に，「割引」について少し付言しておく。本稿で考えたような多くの動学的最適化モデルでは，無限に生きる 1 個人の生涯効用を分析しているが，全く同じ構造の動学的効用関数を，親，子，孫，等々といった，無限に続く家系の効用関数と解釈したり（「王朝モデル」と呼ばれることもある），無限に続く 1 国家，あるいは，世界全体の効用関数と解釈することは自然であろう。しかし，その場合，時間選好によって将来を割り引く根拠は完全に失われる。Sustainable Development Goals（SDGs）の実現に向けた新しい動学モデルの構築が待たれるが，そこでは，数学的には割り引いて

いるものの，形而上学的には割り引いていない，全く新しい次元での経済学と哲学の融合が必要なのかもしれない。