慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	Young測度の収束
Sub Title	Convergenes of younge measures
Author	丸山, 徹(Maruyama, Tōru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2020
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.112, No.4 (2020. 1) ,p.423 (59)- 454 (90)
JaLC DOI	10.14991/001.20200101-0059
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20200101-0059

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」112 巻 4 号（2020 年 1 月）

Young 測度の収束

丸山　徹 *

Convergence of Young Measures

Toru Maruyama *

Abstract: In my previous article, I discussed the representation of Young measures in the form of disintegration. The next step of our research which is the purpose of the present article is to introduce some natural topology in the space of Young measures and examine its properties from the viewpoint of functional analysis.

Key words: narrow topology, uniform tightness, normal integrand, purification

JEL Classifications: C02, C61

前稿 [15] にひきつづき，本稿もまた，慶應義塾大学大学院経済学研究科，および東京大学大学院数理科学研究科における筆者の講義の一部に基づいている。その内容は近刊を予定される筆者の論文 “Disintegration of Young Measures and Nonlinear Analysis”, *Advances in Mathematical Economics*, Vol. 23 (Springer) の第 3 節を概ね日本語に翻訳したものである。

＊ 慶應義塾大学名誉教授
Professor Emeritus, Keio University

序

Young 測度と通称される，ある種の直積空間上の測度が，所謂積分々解の形式によって表現可能であるための条件を，私は前稿 [15] において詳しく検討した。長い歴史をつうじて，類似の概念が解析学や確率論のさまざまな場面で用いられてきたのであるが，それに統一的な筋のとおった整理を施すための，第一の基礎作業のつもりである。

本稿では Young 測度の作る空間に適切な位相を定め，その性質をめぐるひととおりのことがらを体系的に論じたい。

μ を測度空間 Ω 上の測度，X を位相空間とし，$\Omega \times X$ 上の Young 測度の作る空間を前稿同様に $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ と書く。また X 上の Borel 確率測度を値にとる Ω 上の可測族の全体を $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ と表記する。一定の条件の下に，$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ と $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ との間には過不足のない一対一の対応のつくことが知られている（前稿 [15] 定理 7）。X が局所コンパクトとすれば，$\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X)) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))'$ の部分集合であるから，この双対関係による $*$ 弱位相を定めるのが自然であろう。$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の位相としては，この $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ と位相同型となるようなものを選ぶのが最も便宜である。それが狭位相という概念にほかならない。

とくに応用上，可測函数 $u\colon \Omega \longrightarrow X$ の定める Young 測度，つまり

$$\gamma = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u(\omega)} d\mu$$

なる形式をもつ測度 γ については十分な吟味が必要である。可測函数の列 $\{u_n\}$ と，それがなんらかの意味で収束した極限 u_* とが定める Young 測度をそれぞれ $\{\gamma_n\}, \gamma_*$ としよう。$\{u_n\}$ の収束と $\{\gamma_n\}$ の収束の間にいかなる関係が見出されるであろうか。まず一般的に，

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u_* \qquad \text{（測度収束）} \\ \Longleftrightarrow\ \gamma_n &\longrightarrow \gamma_* \qquad \text{（狭収束）} \end{aligned}$$

なる同値性が示される。とくに $X = \mathbb{R}^l$ と特定化し，u_n, u_* が可積分函数で，その収束が $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^l)$ における強収束あるいは弱収束の意味であるとすれば，$\{\gamma_n\}$ の狭収束について何事をいいうるか。この問題は稿をあらためて論じたい。

本稿の後半では，Young 測度の直積（第 III 節）および簡単な変分問題における解の純粋化（第 IV 節）について述べる。

以下，用いる言葉づかいや記号については，原則として前稿のそれを踏襲する。

*

Young 測度の理論は，とくに凸解析，多価函数の解析などと組み合わせて用いるとき，いわば非線形問題を“線形化”して取り扱う途をひらく鍵というべき着想を胚胎する。私自身はこの着想に鮮烈な印象を焼きつけられた。1970 年代の後半のことである。以来，変分学に現われる非線形積分作用素の研究にこれを活用してきた。その過程において，C. Castaing，M. Valadier 両教授を中心とするフランスのモンペリエ学派の人々との交流から，とりわけ多くの知恵を学びえたことを，感謝をこめて記しておきたい。

I　狭収束の概念

Young 測度の空間 $\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;X)$ に位相を定めるにあたっての考え方については，既に序において述べたところであるが，より正確な形で繰り返しておこう。

まず $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ は完備な有限測度空間，X は局所コンパクトな Polish 空間とする。このとき前稿 [15] 定理 7 によれば，$(\Omega\times X,\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(X))$ 上の任意の Young 測度 $\gamma\in\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;X)$ に対して

$$\gamma(A)=\int_\Omega\left\{\int_X\chi_A(\omega,x)d\nu_\omega\right\}d\mu,\qquad A\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(X) \tag{1}$$

を満たす, 確率測度から成る可測族 $\nu=\{\nu_\omega\mid\omega\in\Omega\}\in\mathfrak{P}(\Omega,\mu;X)$ が存在する。各 $\nu\in\mathfrak{P}(\Omega,\mu;X)$ に対して(1)を満たす γ を対応させる写像を Φ とすれば，$\Phi\colon\mathfrak{P}(\Omega,\mu;X)\longrightarrow\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;X)$ は全単射である。

上記の仮定の下においては，次のふたつの双対関係が成り立つ。(1)

$$\mathfrak{C}_\infty(X,\mathbb{R})'\cong\mathfrak{M}(X). \tag{2}$$

$$\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathfrak{C}_\infty(X,\mathbb{R}))'\cong\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X)). \tag{3}$$

ただし，(3)の右辺に現われる $\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X))$ において，$\mathfrak{M}(X)$ には双対関係(2)による $*$ 弱位相 $\sigma(\mathfrak{M}(X),\mathfrak{C}_\infty(X,\mathbb{R}))$ によって生成される Borel σ-集合体が定まっている。

次に双対関係(3)により，$\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X))$ には $*$ 弱位相 $\sigma(\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X)),\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathfrak{C}_\infty(X,\mathbb{R})))$ を定めることができる。$\mathfrak{P}(\Omega,\mu;X)\subset\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X))$ には，そこから導かれる相対位相を定めるのが，ひとつの自然な方法である。

---

(1)　$\mathfrak{C}_\infty(X,\mathbb{R})$ は X 上で定義された，無限遠で消える連続な実数値函数の作る空間（ノルムは一様収束ノルム $\|\cdot\|_\infty$）。$\mathfrak{M}(X)$ は X 上の Radon（複号）測度の作る空間。

一方，$(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の有限複号測度の全体を $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ とし，この上には写像

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma, \quad f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})) \tag{4}$$

によって生成される位相を定める[(2)]。$\mathfrak{G}(\Omega, \mu; X)$ は $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ の部分集合なので，これから導かれる相対位相を定義することができる。Young 測度 $\gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の積分々解を(1)のように書けば，任意の $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ に対して

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma = \int_\Omega \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu$$

であることに鑑み，写像 Φ は位相同型写像である。したがって，(4)から生成される位相を具えた $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の位相空間としての構造を調べることは，$*$ 弱位相を具えた $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ のそれを吟味することと同等である。

とくに X がコンパクト距離空間の場合は，(2)，(3)における $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ を $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ に置き換え，$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ を $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ として，より簡単な形で上記の議論が成り立つ。

X が局所コンパクトでない場合には，“無限遠で消える”という概念が意味をなさないが，このときは $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ を使い類似の考え方を借用して次のように定義する。

定義　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間，X を可分な距離空間とする。函数族

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma, \quad f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X) \tag{5}$$

によって生成される $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上の位相を**狭位相**（narrow topology）と呼ぶ。

この位相が Hausdorff 性を満たすことは，既に前稿 [15] 定理 7 の証明中において確認済みである。また X を可分な距離空間とすることによって，すべての $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ が $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ について可測であることも周知（前稿 [15] 命題 1）のところであるから，(5)の積分は意味をもつ。そしてもちろん，この定義は距離づけ可能な Souslin 空間や Polish 空間を X と考える場合にもそのまま適用できるのである[(3)]。

定義　$(\Omega, \mathcal{E})$ は可測空間，X は位相空間とする。函数 $f\colon \Omega \times X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が次のふたつの性質を有するとき，f は**正規非線形積分核**（normal integrand）であるという。

---

(2)　$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ は無限遠において消える，可積分な Carathéodory の函数の集合で，$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty} \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$。“無限遠において消える”という条件を落とし，可積分な Carathéodory の函数の集合を $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ と表記する（前稿 [15] p. 21 を参照）。

(3)　以下，本節の叙述については，とりわけ Valadier [17] pp. 159–161, [18] pp. 358–363 を参考にした。

(i)　f は $(\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-可測。

(ii)　すべての $\omega\in\Omega$ について，$x\longmapsto f(\omega,x)$ は下半連続函数。

$\Omega\times X$ 上の正規非線形積分核の全体を $\mathfrak{G}(\Omega,\mathcal{E};X)$，そのうち負の値をとらないものの全体を $\mathfrak{G}_+(\Omega,\mathcal{E};X)$ という記号で表わす。正規非線形積分核は Carathéodory の函数とともに，変分学の基礎論において不可欠の役割を果たす。

$\mathfrak{G}_+(\Omega,\mathcal{E};X)$ の元は，単調増加的な Carathéodory の函数列の極限として表わすことができ，この事実は著しく重要である。まずそれを示すことから始めよう。(4)

補題 1　(X,ρ) を可分な距離空間とするとき，非負連続函数の列 $\varphi_n\colon X\longrightarrow\mathbb{R}(n=1,2,\cdots)$ を適当に選び，すべての非負下半連続な函数 $f\colon X\longrightarrow\bar{\mathbb{R}}$ に対して

$$f(x)=\sup\{\varphi_n(x)\mid\varphi_n\leqq f\}\quad\text{for all}\quad x\in X$$

とすることができる。

証明　X は第二可測公理を満たすので，その可算基を $U_1,U_2,\cdots$ としよう。各 U_m に対して

$$G_n^{(m)}=\left\{x\in X\;\middle|\;\rho(x,\bar{U}_m)<\frac{1}{n}\right\}$$

とおけば，Urysohn の定理により，正の有理数 r に対して

$$\varphi_{nr}^{(m)}(x)=\begin{cases} r\ \text{ on }\bar{U}_m,\\ 0\ \text{ on }(G_n^{(m)})^c\end{cases}$$

となるような連続函数 $\varphi_{nr}^{(m)}\colon X\longrightarrow[0,r]$ が存在する。

このようにして構成された函数族 $\{\varphi_{nr}^{(m)}\}$ の添数をつけかえて $\{\varphi_n\}$ とすれば，これが所望の性質を満たす。(5)　（証了）

定理 1　$(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ は完備な有限測度空間，X は距離づけ可能な Souslin 空間とする。このとき任意の $f\in\mathfrak{G}_+(\Omega,\mathcal{E};X)$ に対して可積分な非負 Carathéodory の函数の列 $\{\psi_n\}$ で

---

(4)　丸山 [11] pp. 501–506。

(5)　最後のところをすこし丁寧に書けば次のようである。$x_0\in X$ とすれば任意の $\varepsilon>0$ に対して x_0 の近傍 V を選び

$$f(x)\geqq f(x_0)-\varepsilon\quad\text{for all}\quad x\in V$$

とすることができる。また可算基を構成する開集合 U_m を適当に選んで，$\bar{U}_m$ の $1/n$-近傍 $G_n^{(m)}$ が V に含まれるようにすることができる。$r\in\mathbb{Q}$ を $f(x_0)-\varepsilon<r\leqq f(x_0)$ とすれば $|\varphi_{nr}^{(m)}-f(x)|<\varepsilon$.

$$f(\omega, x) = \sup_n \psi_n(\omega, x) \tag{6}$$

を満たすものが存在する。

証明　補題 1 により，非負連続函数列 $\{\varphi_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ を適当に選び，すべての非負下半連続函数 $h \colon X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に対して

$$h(x) = \sup\{\varphi_n(x) \mid \varphi_n \leqq h\} \quad \text{for all} \quad x \in X$$

を成り立たしめることができる。そこで

$$E_n = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega, x) \geqq \varphi_n(x) \quad \text{for all} \quad x \in X\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とおくと，E_n^c は集合

$$G_n = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid f(\omega, x) < \varphi_n(x)\}$$

の Ω への射影 $\pi_\Omega(G_n)$ に等しい。$G_n \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ であるから，射影定理[(6)]により

$$E_n^c = \pi_\Omega(G_n) \in \mathcal{E},\ n = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

が導かれる。ゆえに $E_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。

そこで函数 $\psi_n \colon \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\psi_n \colon (\omega, x) \longmapsto \chi_{E_n}(\omega)\varphi_n(x),\ n = 1, 2, \cdots \tag{8}$$

と定義すれば，ψ_n は可積分な Carathéodory の函数で

$$f(\omega, x) = \sup_n \psi_n(\omega, x)$$

を満たす。　（証了）

ここで定理 1 で得られた $\{\psi_n\}$ を用いて，あらたに

$$\theta_1 = \psi_1, \theta_2 = \mathrm{Max}\{\psi_1, \psi_2\}, \cdots, \theta_n = \mathrm{Max}\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}, \cdots$$

と定義すれば，$\{\theta_n\}$ は非負 Carathéodory の函数が作る単調増加列で，$f(\omega, x)$ に各点で収束する。つまり定理 1 は次のように書きかえられるのである。

---

(6)　丸山 [13] p. 412。ここでは $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ の完備性を仮定しているので，$\mathcal{E}$ に汎完備化を施して $\hat{\mathcal{E}}$ とすることなく，(7)が成り立つことに留意しよう。

系 1　定理 1 と同じ仮定の下に，可積分な非負 Carathéodory の函数の単調増加列 $\{\psi_n\}$ で

$$f(\omega, x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\omega, x) \tag{9}$$

を満たすものが存在する。

注意　Ω, X をやや特定化すると，さらに多様な結果が得られる。(7)

1°　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を完備な有限測度空間，X を局所コンパクトな Polish 空間とするとき，函数 $f\colon \Omega\times X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について次の二命題は同値である。

(i)　$f \in \mathfrak{G}_+(\Omega, \mathcal{E}; X)$.

(ii)　多価写像

$$\omega \longmapsto \mathrm{Epi}\ f(\omega) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(\omega, x) \leqq \alpha\}$$

は可測・閉値である。

2°　Ω は局所コンパクトな Polish 空間，μ は Ω 上の（正値）Radon 測度とし，X も Polish 空間とする。このとき函数 $f\colon \Omega \times X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について次の二命題は同値である。

(i)　$f \in \mathfrak{G}(\Omega, \mathcal{B}(X)_\mu; X)$.

(ii)　Ω における任意のコンパクト集合 K と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu(K\backslash H) < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad f\,|_{H\times X} \text{ は下半連続}$$

となるコンパクト集合 $H \subset K$ が存在する。

3°　2° と同様の仮定の下に，函数 $f\colon \Omega \times X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について次の二命題は同値である。

(i)　$f \in \mathfrak{G}_+(\Omega, \mathcal{E}; X)$.

(ii)　可積分な非負 Carathéodory の函数の列 $\{\psi_n\}$ で

$$f(\omega, x) = \sup_n \psi_n(\omega, x)$$

を満たすものが存在する。

つまりこの場合には，定理 1 の逆が成立する。

注意　系 1 と同様の結果を Valadier [17] は Urysohn の埋め込みに基づく別の方法で証明した。

Urysohn の埋め込み定理　可分かつ距離づけ可能な位相空間は，距離づけ可能かつコンパクトなある位相空間 $\hat{X}$ のある部分集合と位相同型である。

ρ を $\hat{X}$ 上の距離とする。函数列 $f_n\colon \Omega \times \hat{X} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を

$$f_n(\omega, z) = \inf_{x\in X} \{f(\omega, x) + n\rho(x, z)\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義し，さらに

$$\hat{\psi}_n(\omega, z) = \mathrm{Min}\{n, f_n(\omega, z)\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とする。これを $\Omega \times X$ に制限した $\hat{\psi}_n\,|_{\Omega\times X}$ をあらためて ψ_n と定義すれば，これが系 1 の条件を満たす。

---

(7)　ここでは証明を省く。丸山 [11] 第 6 章 §7 を見よ。

定理 2　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間，X は距離づけ可能な Souslin 空間とする。

(i)　任意の $f \in \mathfrak{G}_+(\Omega, \mathcal{E}; X)$ について，函数

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma$$

は $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上で狭位相について下半連続である。

(ii)　$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上の狭位相は，函数族

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} g \mid_{\Omega \times X} d\gamma, \quad g \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; \hat{X})$$

の生成する位相と合致する[(8)]。

証明　系 1 により，こうした f は非負 Carathéodory の函数列 $\{\psi_n\}$ の単調極限であることが知られた。（したがって，f は可測である。）

狭位相の定義から，函数

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} \psi_n \mid_{\Omega \times X} d\gamma$$

は $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上で連続である。また

$$\int_{\Omega \times X} f d\gamma = \sup_n \int_{\Omega \times X} \psi_n \mid_{\Omega \times X} d\gamma$$

であるから，(i)が示されたことになる。

(ii)　$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上の狭位相を $\mathcal{J}_1$，また函数族

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} g \mid_{\Omega \times X} d\gamma, \ g \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; \hat{X})$$

によって生成される位相を $\mathcal{J}_2$ とし，それらが合致することを証明しよう。まず

$$\{h \colon \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R} \mid h = g \mid_{\Omega \times X}, g \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; \hat{X})\} \subset \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$$

は明らかなので，$\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$ である。

$f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ とし，

$$\alpha(\omega) = \|f(\omega, \cdot)\|_\infty$$

とおけば，$f(\omega, x) + \alpha(\omega) \geqq 0$ であることに注意して(i)を適用すると，

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} \{f(\omega, x) + \alpha(\omega)\} d\gamma$$

---

(8)　$\hat{X}$ は Urysohn の埋め込みにあらわれる空間である。

は $\mathcal{J}_2$ について下半連続である。しかるに

$$\int_{\Omega\times X} f(\omega,x)d\gamma = \int_{\Omega\times X}\{f(\omega,x)+\alpha(\omega)\}d\gamma - \int_{\Omega}\alpha(\omega)d\mu$$

で，右辺第二項は γ から独立なので，

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega\times X} f(\omega,x)d\gamma \tag{10}$$

は $\mathcal{J}_2$ について下半連続。しかし $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega,\mu;X)$ は線形空間であるから，f が $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega,\mu;X)$ の元ならば，$-f$ も同様である。ゆえに

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega\times X} -f(\omega,x)d\gamma$$

も $\mathcal{J}_2$ について下半連続，つまり(10)は上半連続である。こうして(10)は $\mathcal{J}_2$ について連続となり，$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ を得る。 （証了）

$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega,\mu;\hat{X}) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega,\mathfrak{C}(\hat{X},\mathbb{R}))$ であるが，$\mathfrak{C}(\hat{X},\mathbb{R})$ は可分[9]。したがって Ω の σ-集合体 $\mathcal{E}$ が可算基を有するとすれば，$\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathfrak{C}(\hat{X},\mathbb{R}))$ は可分である[10]。ゆえに $\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(\hat{X}))$ の単位球は $*$ 弱位相について距離づけ可能である。とくに $\mathfrak{P}(\Omega,\mu;\hat{X})$ も距離づけ可能となるので，その部分集合とみなすことのできる $\mathfrak{P}(\Omega,\mu;X)$ も然りである。こうして $\mathcal{E}$ が可算基を有するという条件の下に，狭位相の取り扱いには，点列を用いた分析が許容されるのである。

次に Ω から X への可測函数の列と，それが定める Young 測度の列とを比べ，それらの収束の関係をめぐる一般的な結果を述べよう。

定理 3 $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ は有限測度空間，(X,ρ) は可分な距離空間とし，さらに函数 $u_n\colon \Omega \longrightarrow X (n=1,2,\cdots)$ は $(\mathcal{E},\mathcal{B}(X))$-可測とする。$u_n$ によって定まる $(\Omega\times X,\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(X))$ 上の Young 測度の列

$$\gamma_n = \int_{\Omega}\delta_\omega\otimes\delta_{u_n(\omega)}d\mu, \quad n=1,2,\cdots$$

につき，次の二命題は同値である。

(i) $\{u_n\}$ はある $(\mathcal{E},\mathcal{B}(X))$-可測函数 $u_*\colon \Omega \longrightarrow X$ に測度収束する。

(ii) $\{\gamma_n\}$ は

$$\gamma_* = \int_{\Omega}\delta_\omega\otimes\delta_{u_*(\omega)}d\mu$$

に狭収束する。

---

(9) 丸山 [12] pp. 155–157，Dunford-Schwartz [8] p. 340。

(10) 丸山 [13] pp. 230–231 と同様。

証明　はじめに，任意の $f \in \mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$ に対して

$$\omega \longmapsto \int_X f(x) d\delta_{u_n(\omega)} = f(u_n(\omega))$$

は可測なので，$\{\delta_{u_n(\omega)} \mid \omega \in \Omega\}$ が可測族であることを想起しておこう。（前稿 [15] 定理 1 による。）

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : $u_n \longrightarrow u_*$ （測度収束）とする。このとき，任意の $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ に対して

$$\int_{\Omega \times X} f d\gamma_n = \int_\Omega f(\omega, u_n(\omega)) d\mu \longrightarrow \int_{\Omega \times X} f d\gamma_* = \int_\Omega f(\omega, u_*(\omega)) d\mu \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty \tag{11}$$

が成り立つ。実際，仮にそうでないとすると，ある $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ とある $\varepsilon > 0$ に対して

$$\left| \int_\Omega f(\omega, u_{n'}(\omega)) d\mu - \int_\Omega f(\omega, u_*(\omega)) d\mu \right| \geqq \varepsilon \tag{12}$$

なる部分列 $\{u_{n'}\}$ が存在する。しかし $\mu\Omega < \infty$ であることに注意すれば，$\{u_{n'}\}$ は $\{u_*\}$ に概収束するさらなる部分列 $\{u_{n''}\}$ を有する。

$$u_{n''}(\omega) \longrightarrow u_*(\omega) \quad \text{a.e.}$$

f は Carathéodory の函数なので，

$$f(\omega, u_{n''}(\omega)) \longrightarrow f(\omega, u_*(\omega)) \quad \text{a.e.} \quad \text{as} \quad n'' \longrightarrow \infty.$$

もちろん $|f(\omega, u_{n''}(\omega))| \leqq \|f(\omega, \cdot)\|_\infty$ であり，この右辺は可積分ゆえ，上限収束定理により

$$\int_\Omega f(\omega, u_{n''}(\omega)) d\mu \longrightarrow \int_\Omega f(\omega, u_*(\omega)) d\mu \quad \text{as} \quad n'' \longrightarrow \infty. \tag{13}$$

(12) と (13) とは矛盾。こうして (ii) が導かれた。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : $\gamma_n \longrightarrow \gamma_*$ （狭収束）としよう。函数 $f \colon \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\omega, x) = \mathrm{Min}\{1, \rho(x, u_*(\omega))\}$$

と定義すれば，$0 \leqq f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$。ゆえに狭収束の定義から

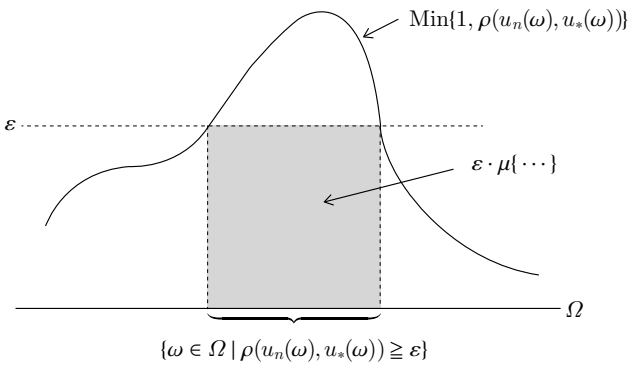
$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times X} f d\gamma_n &= \int_\Omega \mathrm{Min}\{1, \rho(u_n(\omega), u_*(\omega))\} d\mu \\ &\longrightarrow \int_{\Omega \times X} f d\gamma_* = 0 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

これから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (11) (cf. 図 1)

$$\varepsilon \cdot \mu\{\omega \in \Omega \mid \rho(u_n(\omega), u_*(\omega)) \geqq \varepsilon\} \leqq \int_{\Omega \times X} f d\gamma_n \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{14}$$

(14) から $u_n \longrightarrow u_*$ （測度収束）を得る。　（証了）

図 1



いま函数によって定まる Young 測度の列がある Young 測度（上記の γ_* のように必ずしも函数によって定まるとは限らないことに注意）に狭収束するとき，その極限測度について知りうることを二，三述べておこう。

定理 4　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間，X は距離づけ可能な Souslin 空間とし，$(\mathcal{E}, \mathcal{B}(X))$-可測な函数列 $u_n \colon \Omega \longrightarrow X (n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる Young 測度の列

$$\gamma_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u_n(\omega)} d\mu, \quad n = 1, 2, \cdots$$

は Young 測度[12]

$$\gamma = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega d\mu$$

に狭収束するものとしよう。このとき，

（i）　$\mathrm{supp}\ \nu_\omega \subset L_s(u_n(\omega))$　a.e.

（ii）　多価函数 $\Gamma \colon \Omega \twoheadrightarrow X$ が閉値・可測で，しかも

$$\rho(u_n(\omega), \Gamma(\omega)) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty \qquad \text{（測度収束）}$$

（ρ は X 上の距離）であるならば[13]，

$$\mathrm{supp}\, \nu_\omega \subset \Gamma(\omega) \quad \text{a.e.}$$

注意　念のため L_s の概念について注記しておく。一般に距離空間 X の集合列 $\{M_n\}$ に対して，その位相的上極限（topological superior limit）$L_s(M_n)$ を次のように定義する。

（11）$\varepsilon > 1$ の場合，(14)の左辺は 0 である。

（12）前稿 [15] 定理 7 により，γ は必ず可測族による積分々解表現が可能である。

（13）$\rho(u_n(\omega), \Gamma(\omega))$ は点 $u_n(\omega)$ と集合 $\Gamma(\omega)$ との距離である。

$x \in L_s(M_n) \iff x$ の任意の近傍 V に対して，$V \cap M_n \neq \emptyset$ が無限個の n について成り立つ。
また位相的下極限（topological inferior limit）$L_i(M_n)$ は

$x \in L_i(M_n) \iff x$ の任意の近傍 V に対して，十分に大きな $n_0 \in \mathbb{N}$ を選び，すべての $n \geqq n_0$ について $V \cap M_n \neq \emptyset$ とすることができる。

定理 4 の証明　**1°**　はじめに仮定を強めて

$$u_n(\omega) \in \Gamma(\omega) \quad \text{a.e.} \quad \text{for all} \quad n \tag{15}$$

としたうえで(i)を示そう。函数 $f\colon \Omega \times X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を

$$f(\omega, x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \in \Gamma(\omega) \\ \infty & \text{if} \quad x \notin \Gamma(\omega) \end{cases}$$

と定義すれば，定理 2 により

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma &\leqq \liminf_n \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma_n \\ &= \liminf_n \int_{\Omega} f(\omega, u_n(\omega)) d\mu \\ &= 0 \qquad (\text{(15)による}). \end{aligned} \tag{16}$$

f の定義と(16)により，

$$\int_{\Omega} \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu = 0$$

であるから

$$\int_X f(\omega, x) d\nu_\omega = 0 \quad \text{a.e.}$$

したがって $\nu_\omega(X \backslash \Gamma(\omega)) = 0$　a.e.,　すなわち

$$\operatorname{supp} \nu_\omega \subset \Gamma(\omega) \quad \text{a.e.}$$

である。

2°　次に(i)を示す。多価函数 $\Gamma_p\colon \Omega \twoheadrightarrow X$ を

$$\Gamma_p(\omega) = \text{cl. } \{u_n(\omega) \mid n \geqq p\}, \quad p = 1, 2, \cdots$$

と定義すれば，Γ_p は閉値・可測で，しかも

$$u_n(\omega) \in \Gamma_p(\omega) \quad \text{for all} \quad n \geqq p.$$

1° により

$$\nu_\omega(X\backslash \Gamma_p(\omega)) = 0 \quad \text{a.e.} \quad \text{for all} \quad p,$$

すなわち

$$\operatorname{supp} \nu_\omega \subset \Gamma_p(\omega) \quad \text{a.e.} \quad \text{for all} \quad p. \tag{17}$$

$L_s(u_n(\omega)) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Gamma_p(\omega)$ であることと(17)により,

$$\operatorname{supp} \nu_\omega \subset L_s(u_n(\omega)) \quad \text{a.e.}$$

を得る。

3° 最後に(ii)を示そう。$\{u_n\}$ の適当な部分列 $\{u_{n'}\}$ を選び,

$$\rho(u_{n'}(\omega), \Gamma(\omega)) \longrightarrow 0 \quad \text{a.e.} \quad \text{as} \quad n' \longrightarrow \infty \tag{18}$$

とすることができる。任意の $x \in L_s(u_{n'}(\omega))$ は $\{u_{n'}(\omega)\}$ のある部分列の極限であるから,(18)により,

$$L_s(u_{n'}(\omega)) \subset \Gamma(\omega) \quad \text{a.e.}$$

(i)から $\operatorname{supp} \nu_\omega \subset L_s(u_{n'}(\omega))$ a.e. であることが知られているので[14],

$$\operatorname{supp} \nu_\omega \subset \Gamma(\omega) \quad \text{a.e.} \qquad \text{(証了)}$$

II 緊密性

位相空間上の Borel 確率測度族の一様緊密性と(∗ 弱位相についての)その相対コンパクト性との関連をめぐる諸結果は既によく知られている[15]。ここではそれと類似の問題を Young 測度の空間において考えてみよう[16]。

定義 $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間,X は Hausdorff 位相空間,$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ は $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の Young 測度の全体,H はその部分集合とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{\gamma \in H} \gamma(\Omega \times (X\backslash K_\varepsilon)) \leqq \varepsilon \tag{1}$$

を満たすコンパクト集合 $K_\varepsilon \subset X$ が存在するとき,H は**一様に緊密**(uniformly tight)であるという。

---

(14) $\gamma_{n'} \longrightarrow \gamma$(狭収束)であるから,(i)は u_n を $u_{n'}$ に変えても成り立つ。

(15) 丸山 [13] pp. 334–340 を参照。

(16) 本節についても Valadier [17] pp. 161–165 に多くを負うている。

注意　上記の定義よりもやや状況を特定化し，μ は完備であり，X は距離づけ可能な Souslin 空間であることを追加的に仮定する。このとき H の一様緊密性と $\bar{H}$（狭位相についての閉包）の一様緊密性とは同値である。

これを確かめるためには，H の一様緊密性を仮定して，$\bar{H}$ のそれを示せばよい（逆は自明)。H が一様緊密であるならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して(1)を満たすコンパクト集合 K_ε が存在する。函数 $f\colon \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\omega, x) = \chi_{\Omega \times (X \backslash K_\varepsilon)}(\omega, x)$$

と定義すれば，$f \in \mathfrak{G}_+(\Omega, \mathcal{E}; X)$ で，また $\gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ に対して

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma \leqq \varepsilon \iff \gamma(\Omega \times (X \backslash K_\varepsilon)) \leqq \varepsilon.$$

定理 2 (i)によれば

$$\gamma(\Omega \times (K \backslash K_\varepsilon)) \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad \gamma \in \bar{H}$$

定理 5　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間, X は距離づけ可能な Souslin 空間とする。$H \subset \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ が一様に緊密ならば，以下の命題が成り立つ。

(i)　H は列コンパクトである。

(ii)　H は相対コンパクトである。

(iii)　X が距離づけ可能な可分・局所コンパクト位相空間とすれば，H 上の狭位相は函数族

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} f d\gamma, \quad f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$$

の生成する位相に合致する。

証明　(i) Urysohn の埋め込み定理により，X がその中に埋め込まれるコンパクト距離空間を $\hat{X}$ とする。H の点列

$$\gamma_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を考え

$$\hat{\nu}_\omega^n(\hat{B}) = \nu_\omega^n(\hat{B} \cap X), \ \hat{B} \in \mathcal{B}(\hat{X})$$

と定義すると，$\hat{\nu}^n = \{\hat{\nu}_\omega^n \mid \omega \in \Omega\} \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; \hat{X})$。前稿 [15] 定理 6 により，$\mathfrak{P}(\Omega, \mu; \hat{X})$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(\hat{X}))$ の単位球に含まれる $*$ 弱コンパクト集合で，$*$ 弱列コンパクトである。(17) 前稿 [15] 定理 7 で定義した函数 Φ を用いると，$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; \hat{X})$ は Φ による $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; \hat{X})$ の像で，Φ は連続であった。したがって $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; \hat{X})$ は狭コンパクト(18)である。

$\{\hat{\nu}^n\}$ の $*$ 弱収束部分列 $\{\hat{\nu}^{n'}\}$ を考え，その極限を $\hat{\nu}$ とすれば，Φ の連続性により

---

(17) ここで $*$ 弱位相は双対関係 $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}(\hat{X}, \mathbb{R}))' \cong \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(\hat{X}))$ に基づくそれである。

(18) 狭位相についてコンパクトであることを狭コンパクトと略称する。狭収束という用語も同様。

$$\hat{\gamma}_{n'} = \int_{\Omega} \delta_\omega \otimes \hat{\nu}_\omega^{n'} d\mu, \quad n = 1, 2, \cdots$$

は

$$\hat{\gamma} = \int_{\Omega} \delta_\omega \otimes \hat{\nu}_\omega d\mu$$

に狭収束する。

さて各 $p \geqq 1$ に対して，X のコンパクト集合 K_p を

$$\gamma_n(\Omega \times (X \backslash K_p)) \leqq \frac{1}{p} \quad \text{for all} \quad n$$

となるように選ぶと[19]，函数

$$x \longmapsto \chi_{\Omega \times (\hat{X} \backslash K_p)}(\omega, x)$$

の下半連続性から，定理 2 (i) により

$$\hat{\gamma}(\Omega \times (\hat{X} \backslash K_p)) \leqq \frac{1}{p}.$$

ゆえに

$$\hat{\gamma}\left(\left[\Omega \times \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p\right]^c\right) = 0.$$

そこで $\nu = \{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\} \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ を $\nu_\omega = \hat{\nu}_\omega \mid_{\mathcal{B}(X)}$ とし[20]，

$$\gamma = \int_{\Omega \times X} \delta_\omega \otimes \nu_\omega d\mu$$

と定義すれば，任意の $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ について

$$\int_{\Omega \times \hat{X}} f d\hat{\gamma}_{n'} = \int_{\Omega \times X} f \mid_{\Omega \times X} d\gamma_{n'}, \tag{2}$$

$$\int_{\Omega \times \hat{X}} f d\hat{\gamma} = \int_{\Omega \times X} f \mid_{\Omega \times X} d\gamma. \tag{3}$$

しかるに $\hat{\gamma}_{n'} \longrightarrow \hat{\gamma}$ （狭収束）ゆえ，

$$\int_{\Omega \times \hat{X}} f d\hat{\gamma}_{n'} \longrightarrow \int_{\Omega \times \hat{X}} f d\hat{\gamma} \quad \text{as} \quad n' \longrightarrow \infty. \tag{4}$$

(2)，(3)，(4) により

$$\int_{\Omega \times X} f \mid_{\Omega \times X} d\gamma_{n'} \to \int_{\Omega \times X} f \mid_{\Omega \times X} d\gamma \quad \text{as} \quad n' \longrightarrow \infty. \tag{5}$$

---

(19) $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ は一様に緊密であるから，K_p はすべての n に共通に選ぶことができる。

(20) $\hat{\nu}_\omega \mid_{\mathcal{B}(X)}$ は $\hat{\nu}_\omega$ の $\mathcal{B}(X)$ への制限である。

(5)はすべての $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; \hat{X})$ について成り立つのであるから，定理 2 の(ii)により，$\gamma_{n'} \longrightarrow \gamma$（狭収束）が導かれる。

（ii）（i)では H の点列 $\{\gamma_n\}$ を考えたが，そのかわりに有向点族 $\{\gamma_\alpha\}$ を用い，あとは殆ど同様にすればよい。

（iii）X を局所コンパクト・可分で距離づけ可能な空間としているので，前稿 [15] 定理 4 により，

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})) \subset \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X).$$

したがって，函数族

$$\gamma \longmapsto \int_{\Omega \times X} f d\gamma, \quad f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \tag{6}$$

によって生成される $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の位相は狭位相よりも弱い。(ii)により，$\bar{H}$（狭位相についての閉包）はコンパクトであることに留意して，恒等写像 $I\colon \bar{H} \longrightarrow \bar{H}$ を考える。定義域に狭位相，値域には(6)によって生成される位相を与えたとき，I は連続な全単射であり，したがって位相同型写像である。（証了）

注意　X が Polish 空間の場合は，H の狭・相対コンパクト性から，その一様緊密性が導かれる。
実際，函数 $S\colon \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) \longrightarrow \mathfrak{M}(X)$ を

$$S\colon \gamma \longmapsto \gamma \circ \pi_\Omega^{-1}$$

と定義すれば，S は定義域に狭位相，値域に $*$ 弱位相を与えたとき連続である。[21] $S(H)$ は $\mathfrak{M}_+(X)$ の相対コンパクト集合であるから一様に緊密。[22] つまり任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$S(\gamma)(X \backslash K_\varepsilon) = \gamma(\Omega \times (X \backslash K_\varepsilon)) \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad \gamma \in H$$

を満たす，X のコンパクト集合 K_ε が存在する。したがって H は一様に緊密である。

特別の場合として，H が可測函数によって定まる Young 測度の族とするとき，つまり，ある可測函数族 $\mathcal{U}_H$ について

$$H = \left\{ \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u(\omega)} d\mu \;\middle|\; u \in \mathcal{U}_H \right\}$$

であるとき，H が一様に緊密であるならば，函数族 $\mathcal{U}_H$ も一様に緊密であるということがある。言葉のつかい方として記憶していただきたい。

（21）$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の有向点族 $\{\gamma_\alpha\}$ が γ_* に狭収束するとしよう。$f \in \mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$，$\Omega$ 上でつねに 1 に等しい函数を $1(\omega)$ と書くと，$1(\omega)f(x) \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$.

$$\int_X f(x) dS(\gamma_\alpha) = \int_{\Omega \times X} 1(\omega) f(x) d\gamma_\alpha \to \int_{\Omega \times X} 1(\omega) f(x) d\gamma_* = \int_X f(x) dS(\gamma_*)$$

これから S の連続性が知られる。

（22）Billingsley [5] pp. 10–12，丸山 [13] pp. 334–340。

定理 6　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間，X を距離空間とするとき，可測函数族 $\mathcal{U} = \{u\colon \Omega \longrightarrow X\}$ について次の三命題は同値である。

(i)　$\mathcal{U}$ は一様に緊密。

(ii)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mu\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \notin K_\varepsilon\} \leqq \varepsilon$$

を満たすコンパクト集合 K_ε が存在する。

(iii)　次の a, b を満たす函数 $\psi\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ が存在する。

a.　任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{x \in X \mid \psi(x) \leqq \alpha\}$ はコンパクト集合。

b.　$\displaystyle\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_\Omega \psi(u(\omega)) d\mu < \infty.$

注意　函数 ψ が条件 a を満たすとき，ψ は inf-コンパクト（inf-compact）であるという。この条件から，ψ の可測性が自動的に保証される。

定理 6 の証明　(i)$\Longrightarrow$(ii)：(i)を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{\gamma \in \mathfrak{Y}_{\mathcal{U}}} \gamma(\Omega \times (X \backslash K_\varepsilon)) \leqq \varepsilon, \tag{7}$$

ここで

$$\mathfrak{Y}_{\mathcal{U}} = \left\{ \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u(\omega)} d\mu \;\middle|\; u \in \mathcal{U} \right\}$$

を満たすコンパクト集合 K_ε が存在する。しかるに，任意の $\gamma = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u(\omega)} d\mu \in \mathfrak{Y}_{\mathcal{U}}$ に対して

$$\begin{aligned} \gamma(\Omega \times (X \backslash K_\varepsilon)) &= \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{X \backslash K_\varepsilon}(x) \right\} d(\delta_\omega \otimes \delta_{u(\omega)}) d\mu \\ &= \int_\Omega \chi_{X \backslash K_\varepsilon}(u(\omega)) d\mu = \mu\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \notin K_\varepsilon\} \underset{(7)}{\leqq} \varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

こうして(ii)が導かれた。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)：(ii)を仮定すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mu\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \in K_n\} \leqq \frac{1}{2^n}$$

を満たすコンパクト集合 K_n が存在する。一般性を失うことなく $K_n \subset K_{n+1}$ としてよい。そこで函数 $\psi\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ を

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{X \backslash K_n}(x)$$

と定義する。$\psi(x) \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ であり，

$$K_{n+1} = \{x \in X \mid \psi(x) \leqq 1 + 2 + \cdots + n\}$$

なので，ψ は inf-コンパクト（条件 a）である。また任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して

$$\int_X \psi(u(\omega))d\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} < \infty$$

であるから，条件 b も満たされる。

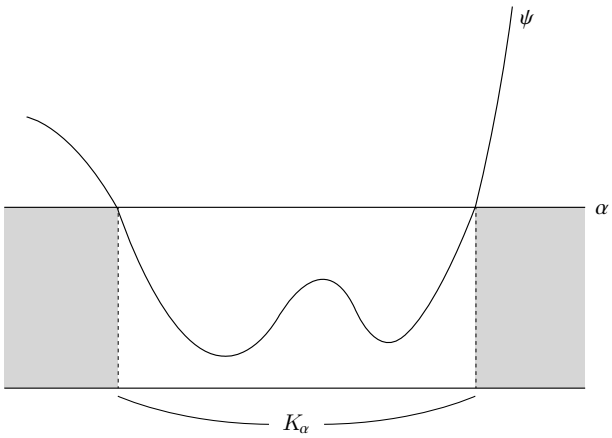
(iii)$\Longrightarrow$(i)：(iii)の条件を満たす函数 ψ が存在するものと仮定すれば，任意の $\alpha > 0$ と $\gamma \in \mathfrak{Y}_{\mathcal{U}}$ について

$$\alpha\gamma(\Omega \times (X \backslash K_\alpha)) \leqq \int_\Omega \psi(u(\omega))d\mu \leqq M < \infty$$

が成り立つ。ここで　$K_\alpha = \{x \in X \mid \psi(x) \leqq \alpha\}$　である（cf. 図 2）。したがって

$$\sup_{\gamma \in \mathfrak{Y}_{\mathcal{U}}} \gamma(\Omega \times (X \backslash K_\alpha)) \to 0 \quad \text{as} \quad \alpha \longrightarrow \infty. \qquad \text{（証了）}$$

図 2



次に述べる Evans [9] pp. 16–17 の結果は，定理 5，6 から容易に導くことができる。

定理 7（Evans）　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間とし，$\{u_n\}$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^l)$ の有界な点列とする。[23] このとき任意の $F \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ に対して，$\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n'}\}$ と $\mathbb{R}^l$ 上の確率 Radon 測度 ν_ω から成る可測族を適当に選び，$\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ において

$$w^* - \lim_{n' \to \infty} F(u_{n'}) = \int_{\mathbb{R}^l} F(x)d\nu_\omega \quad \text{a.e.} \quad \omega \in \Omega \tag{9}$$

とすることができる。[24]

---

(23) つまり $\sup_n \|u_n\|_\infty < \infty$。

(24) $F(u_n) \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ である。

証明　$g \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ とし，函数 $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\omega, x) = g(\omega)F(x),\ (\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$$

と定義すれば，f は Carathéodory の函数である。$\{u_n\}$ は有界なので，$r > 0$ を十分大きく選び，

$$u_n(\omega) \in \overline{B_r(0)} \equiv K \quad \text{a.e.} \quad \text{for all} \quad n$$

とすることができる[25]。さらに函数 $\tilde{F} \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ を

a. $\tilde{F}(x) = F(x) \quad \text{on} \quad K$,

b. supp $\tilde{F}$ はコンパクト

となるように選び，$\tilde{f}\colon \Omega \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\tilde{f}(\omega, x) = g(\omega)\tilde{F}(x)$$

と定めれば，$\tilde{f} \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ である。

また $\{\omega \in \Omega \mid u_n(\omega) \notin K\}$ はすべての n について測度ゼロであるから，定理 5 により，$\{u_n\}$ は一様に緊密である。したがって定理 4 により，Young 測度の列

$$\gamma_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{u_n(\omega)} d\mu_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

はある Young 測度

$$\gamma = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega d\mu$$

に狭収束する部分列 $\{\gamma_{n'}\}$ を有する。ここでもちろん，$\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は Radon 確率測度から成る可測族である。定理 3 から

$$\text{supp } \nu_\omega \subset K \quad \text{a.e.}$$

であることも知られる。この ν_ω について(9)の成り立つことを示そう。

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(\omega)F(u_{n'}(\omega))d\mu \\
&\quad = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^l} g(\omega)F(x)d\gamma_{n'} \\
&\quad = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^l} g(\omega)\tilde{F}(x)d\gamma_{n'} \\
&\qquad\qquad (\text{supp } \delta_{u_{n'}}(\omega) \subset K \quad \text{a.e.}) \\
&\quad = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^l} \tilde{f}(\omega, x)d\gamma_{n'}
\end{aligned}$$

---

(25) $B_r(0)$ は 0 を中心とし，半径 r の開球。$\overline{B_r(0)}$ はその閉包である。

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \quad & \int_{\Omega\times\mathbb{R}^l} \tilde{f}(\omega,x)d\gamma \\
& \qquad (\tilde{f}\in\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega,\mu;\mathbb{R}^l) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^l} g(\omega)\tilde{F}(x)d\gamma \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^l} g(\omega)F(x)d\gamma \\
& \qquad (\mathrm{supp}\ \nu_\omega\subset K).
\end{aligned}
$$

これが任意の $g\in\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$ について成り立つので，(9)が証明された。 （証了）

III　多元 Young 測度

本節では複合化された Young 測度の位相的性質について述べよう。[26]

定理 8　$(\Omega_i,\mathcal{E}_i,\mu_i)$ $(i=1,2)$ は完備な有限測度空間，X_i $(i=1,2)$ は距離づけ可能な Souslin 空間とし，さらに $\gamma_i\in\mathfrak{Y}(\Omega_i,\mu_i;X_i)$ $(i=1,2)$ は可測族 $\{\nu^i_{\omega_i}\mid\omega_i\in\Omega_i\}\in\mathfrak{P}(\Omega_i,\mu_i;X_i)$ を用いて

$$\gamma_i=\int_{\Omega_i}\delta_{\omega_i}\otimes\nu^i_{\omega_i}d\mu_i$$

の形に積分々解されるものとする。各 $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2$ に対して

$$[\nu^1\otimes\nu^2]_\omega=\nu^1_{\omega_1}\otimes\nu^2_{\omega_2}$$

と定義される $\nu^1\otimes\nu^2\in\mathfrak{P}(\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1\otimes\mu_2;X_1\times X_2)$ から定まる $(\Omega_1\times\Omega_2)\times(X_1\times X_2)$ 上の Young 測度を

$$\gamma_1\otimes\gamma_2\in\mathfrak{Y}(\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1\times\mu_2;X_1\times X_2)$$

と書く。

$\mathfrak{Y}(\Omega_i,\mu_i;X_i)$ の点列 $\{\gamma^n_i\}$ $(i=1,2)$ について

$$\gamma^n_i\longrightarrow\gamma^*_i \qquad \text{（狭収束）}$$

であるならば，

$$\gamma^n_1\otimes\gamma^n_2\longrightarrow\gamma^*_1\otimes\gamma^*_2 \qquad \text{（狭収束）}.$$

（26）Valadier [17] pp. 163–164 によった。

証明　X_i がそのなかに埋め込まれるコンパクト距離空間を $\hat{X}_i$ $(i=1,2)$ とし，記号の簡略化のために

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,\ X = X_1 \times X_2,\ \hat{X} = \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$$

などと表記する。定理 2 の(ii)により，任意の $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu_1 \otimes \mu_2; \hat{X})$ に対して

$$\int_{\Omega \times X} f\,|_{\Omega \times X}\, d(\gamma_1^n \otimes \gamma_2^n) \longrightarrow \int_{\Omega \times X} f\,|_{\Omega \times X}\, d(\gamma_1^* \otimes \gamma_2^*) \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty \tag{1}$$

を示せばよいのである。

$\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu_1 \otimes \mu_2; \hat{X})$ と $\mathfrak{L}^1_{\mu_1 \otimes \mu_2}(\Omega, \mathfrak{C}(\hat{X}, \mathbb{R}))$ とは同一視できることに注意して，$\gamma_1 \otimes \gamma_2 \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu_1 \otimes \mu_2; X)$ を

$$\{h\,|_{\Omega \times X} \mid h \in \mathfrak{L}^1_{\mu_1 \otimes \mu_2}(\Omega, \mathfrak{C}(\hat{X}, \mathbb{R}))\}$$

上の作用素と見，

$$\langle \gamma_1 \otimes \gamma_2, h\,|_{\Omega \times X} \rangle = \int_{\Omega \times X} h\,|_{\Omega \times X}\, d(\gamma_1 \otimes \gamma_2)$$

という表記法を用いる。すると

$$\begin{aligned} &|\langle \gamma_1 \otimes \gamma_2,\ h\,|_{\Omega \times X} \rangle| \\ &\leqq \int_{\Omega} \sup_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in X} |\, h(\omega_1, \omega_2)(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \,|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \int_{\Omega} \|h(\omega_1, \omega_2)\|_\infty d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \|h\|_1. \end{aligned} \tag{2}$$

この計算はすぐあとで利用する。

さて，(1)を示すためには，h として単函数

$$\begin{aligned} &\varphi(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j}(\omega_1, \omega_2) f_j, \\ &f_j \in \mathfrak{C}(\hat{X}, \mathbb{R}),\ j = 1, 2, \cdots, m, \\ &A_j \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2,\ A_j \cap A_k = \emptyset \quad \text{if} \quad j \neq k \end{aligned} \tag{3}$$

だけを考えれば十分である。

その理由は次のとおり。いま(3)の形式の単函数 φ について

$$\langle \gamma_1^n \otimes \gamma_2^n, \varphi\,|_{\Omega \times X} \rangle \longrightarrow \langle \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, \varphi\,|_{\Omega \times X} \rangle \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty \tag{4}$$

が成り立つとしよう。$h \in \mathfrak{L}^1_{\mu_1 \otimes \mu_2}(\Omega, \mathfrak{C}(\hat{X}, \mathbb{R}))$ とすると $\|\varphi_p - h\|_1 \longrightarrow 0$ (as $p \longrightarrow \infty$) なる単函数の列 $\{\varphi_p\}$ が存在する。各 p について(4)が成り立つので，

$$|\langle \gamma_1^n \otimes \gamma_2^n, h\,|_{\Omega \times X} \rangle - \langle \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, h\,|_{\Omega \times X} \rangle|$$

$$\leqq |\langle \gamma_1^n \otimes \gamma_2^n - \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, h\,|_{\Omega\times X} - \varphi_p\,|_{\Omega\times X}\rangle| + |\langle \gamma_1^n \otimes \gamma_2^n - \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, \varphi_p\,|_{\Omega\times X}\rangle| \tag{5}$$

$$\underset{(2)}{\leqq} 2\|h\,|_{\Omega\times X} - \varphi_p\,|_{\Omega\times X}\,\|_1 + |\langle \gamma_1^n \otimes \gamma_2^n - \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, \varphi_p\,|_{\Omega\times X}\rangle|.$$

最後の不等式を得るために，(2)の計算を用いたのである。任意の $\varepsilon > 0$ に対して，p を十分に大きくとれば，(5)の第一項 $< \varepsilon/2$ である。そのような p をひとつ固定して考えると，(5)の第二項も十分に大きな n について $< \varepsilon/2$ とすることができる。したがって十分に大きな n について，(4)$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ を得る。

さらに(3)の形式の φ について(4)の収束が成り立つことを示すためには，次の特殊な場合 a，b に限定して考えれば十分である。[27]

a.　各 A_j は

$$A_j = A_{j1} \times A_{j2};\ A_{ji} \in \mathcal{B}(\hat{X}_i),\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

b.　各 f_j は変数分離型，つまり

$$f_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{q=1}^{r_j} g_{j1}^q(\hat{x}_1) g_{j2}^q(\hat{x}_2),\ g_{ji}^q \in \mathfrak{C}(\hat{X}_i, \mathbb{R}),$$

$$i = 1, 2;\ j = 1, 2, \cdots, m;\ q = 1, 2, \cdots, r_j.$$

すると(3)の φ としては

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_{j1}\times A_{j2}}(\omega_1, \omega_2) \sum_{q=1}^{r_j} g_{j1}^q(\hat{x}_1) g_{j2}^q(\hat{x}_2) \tag{6}$$

の形式を考えればよいことになる。

$$\begin{aligned}
&\langle \gamma_1 \otimes \gamma_2, \chi_{A_{j1}\times A_{j2}} g_{j1}^q g_{j2}^q\,|_{\Omega\times X}\rangle \\
=&\int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{A_{j1}\times A_{j2}} g_{j1}^q g_{j2}^q\,|_{\Omega\times X}\ d(\nu_{\omega_1}^{1,n} \otimes \nu_{\omega_2}^{2,n}) \right\} d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
=&\int_\Omega \left\{ \int_{X_1} \chi_{A_{j1}} g_{j1}^q\,|_{\Omega_1\times X_1}\ d\nu_{\omega_1}^{1,n} \right\} d\mu_1 \times \int_\Omega \left\{ \int_{X_2} \chi_{A_{j2}} g_{j2}^q\,|_{\Omega_2\times X_2}\ d\nu_{\omega_2}^{2,n} \right\} d\mu_2 \\
=&\langle \gamma_1^n, \chi_{A_{j1}} g_{j1}^q \rangle \times \langle \gamma_2^n, \chi_{A_{j2}} g_{j2}^q \rangle \\
\longrightarrow&\langle \gamma_1^*, \chi_{A_{j1}} g_{j1}^q \rangle \times \langle \gamma_2^*, \chi_{A_{j2}} g_{j2}^q \rangle \qquad \text{（仮定による）} \\
=&\langle \gamma_1^* \otimes \gamma_2^*, \chi_{A_{j1}\times A_{j2}} g_{j1}^q g_{j2}^q\,|_{\Omega\times X}\rangle \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

この結果を q, j について加えあわせれば，(6)の形の φ について(4)が示されたのである。（証了）

---

(27) この点は次の二点に注意すればよい。第一は，$\hat{X}$ 上の直方体の有限合併から成る集合体が生成する単調族がちょうど $\mathcal{B}(\hat{X})$ に等しいこと（丸山 [13] pp. 10–13 参照），そして第二は Stone-Weierstrass の定理（Dunford-Schwartz [8] pp. 272–274，丸山 [12]，pp. 162–163）である。

定理 9　$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間，$X_i (i = 1, 2)$ は距離づけ可能な Souslin 空間とする。$u_n, u_* \colon \Omega \longrightarrow X_1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(X_1))$-可測な函数，$\nu^n = \{\nu^n_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ および $\nu^* = \{\nu^*_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X_2)$ の元，また ν^n, ν^* の定める $\Omega \times X_2$ 上の Young 測度を θ_n $(n = 1, 2, \cdots), \theta_*$ とする。すなわち

$$\theta_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu^n_\omega d\mu, \quad \theta_* = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu^*_\omega d\mu.$$

次の a，b を仮定する。

a.　$\{u_n\}$ は u_* に測度収束する。

b.　$\{\theta_n\}$ は θ_* に狭収束する。

いま

$$\gamma_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes (\delta_{u_n(\omega)} \otimes \nu^n_\omega) d\mu, \quad \gamma_* = \int_\Omega \delta_\omega \otimes (\delta_{u_*(\omega)} \otimes \nu^*_\omega) d\mu$$

と定義すれば，γ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ および γ_* は $\Omega \times (X_1 \times X_2)$ 上の Young 測度で

$$\gamma_n \longrightarrow \gamma_* \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty \qquad \text{（狭収束）}.$$

証明　背理法による。ある $f \in \mathfrak{G}_\mathfrak{c}(\Omega, \mu; X_1 \times X_2)$ に対して

$$\int_{\Omega \times X_1 \times X_2} f d\gamma_n \not\longrightarrow \int_{\Omega \times X_1 \times X_2} f d\gamma_*$$

としよう。一般性を失うことなく，ある $\varepsilon > 0$ に対して

$$\left| \int_{\Omega \times X_1 \times X_2} f d\gamma_n - \int_{\Omega \times X_1 \times X_2} f d\gamma_* \right| \geqq \varepsilon \tag{7}$$

と想定してよい。

$\mu\Omega < \infty$ であることと，$\{u_n\}$ が u_* に測度収束することから，$\{u_n\}$ は u_* に概収束する部分列を有する。再び記号の煩雑を避けるために，$\{u_n\}$ 自身が u_* に概収束すると仮定してよいであろう。

$\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\mathbb{N}$ の Alexandrov のコンパクト化とし，函数 $F \colon \Omega \times \hat{\mathbb{N}} \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(\omega, n, z) = f(\omega, u_n(\omega), z)$$

と定義する。

1°　F は Carathéodory の函数である。

実際，まず F が ω について可測であることは明らか。次に $(n_p, z_p) \longrightarrow (n_0, z_0)$ とする。$n_0 \in \mathbb{N}$ の場合は，十分に大きな p については $n_p = n_0$ であるから，$F(\omega, n_p, z_p) \longrightarrow F(\omega, n_0, z_0)$。$n_0 = \infty$ の場合には，

$$F(\omega, n_p, z_p) = f(\omega, u_{n_p}(\omega), z_p) \longrightarrow f(\omega, u_*(\omega), z_0) = F(\omega, \infty, z_0).$$

2°　$\omega \longmapsto \|F(\omega,\cdot,\cdot)\|_\infty$ は可積分である。

実際，この事実は

$$\|F(\omega,\cdot,\cdot)\|_\infty \leqq \|f(\omega,\cdot,\cdot)\|_\infty$$

と $f \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega,\mu;X_1\times X_2)$ からただちにわかる。

さて形式的に $\Omega_1=\{\omega_1\}, \mu_1\Omega_1=1$ という新しい測度空間 Ω_1 を導入し，定理 8 の $\Omega_1,\Omega_2,X_1,X_2,\nu^1,\nu^2$ に対応するものとして，ここでの $\Omega_1,\Omega,\hat{\mathbb{N}},X_2,\delta_n,\nu^n$ を考えて同定理を適用すると，

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times X_1\times X_2} f d\gamma_n \\
&= \int_\Omega \left\{ \int_{X_2} f(\omega,u_n(\omega),z) d\nu_\omega^n \right\} d\mu \\
&= \int_\Omega \left\{ \int_{X_2} F(\omega,n,z) d\nu_\omega^n \right\} d\mu \\
&= \int_{\Omega_1\times\Omega} \left\{ \int_{\hat{\mathbb{N}}\times X_2} F(\omega,n,z) d(\delta_n\otimes\nu_\omega^n) \right\} d(\mu_1\otimes\mu) \\
&\longrightarrow \int_{\Omega_1\times\Omega} \left\{ \int_{\hat{\mathbb{N}}\times X_2} F(\omega,n,z) d(\delta_\infty\otimes\nu_\omega^*) \right\} d(\mu_1\otimes\mu) \\
&= \int_\Omega \left\{ \int_{X_2} F(\omega,\infty,z) d\nu_\omega^* \right\} d\mu \\
&= \int_{\Omega\times X_1\times X_2} f d\gamma^*.
\end{aligned}$$

これは(7)に矛盾。　（証了）

IV　単純な変分問題：解の比較と純粋化

$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ を $\mathbb{R}^l$ の有限集合とし，その凸包 $\mathrm{co}V$ を X と書く。X はもちろん凸・コンパクト集合である。X 上には Borel σ-集合体 $\mathcal{B}(X)$ を定める。本節をつうじて $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ は完備な有限測度空間とし，函数 $f\colon \Omega\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ は負の値をとらない正規非線形積分核，つまり $\mathfrak{G}_+(\Omega,\mathcal{E};X)$ の元とする。

Ω から V(resp. X) への可測函数の全体を $\mathcal{V}$(resp. $\mathcal{M}$) と書く。$\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;X)$ が $(\Omega\times X,\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(X))$ 上の Young 測度の集合を表わすことは，これまでと同様である。

さて次の三つの最小化問題と比較してみよう。

(I)　$\underset{x(\cdot)\in\mathcal{V}}{\mathrm{Minimize}} \displaystyle\int_\Omega f(\omega,x(\omega))d\mu.$

(II) $\underset{x(\cdot)\in\mathcal{M}}{\text{Minimize}} \int_{\Omega} f(\omega, x(\omega))d\mu.$

(III) $\underset{\gamma\in\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;X)}{\text{Minimize}} \int_{\Omega} f(\omega, x)d\gamma.$

ここではふたつの視点からこれらの問題を検討する。すなわち第一に，各問題の解の存在の確認であり，第二に，各問題の解相互間の関係である。たとえば問題(II)に解 $x^*(\cdot) \in \mathcal{M}$ が存在するとしてみよう。このとき

$$\int_{\Omega} f(\omega, y^*(\omega))d\mu = \int_{\Omega} f(\omega, x^*(\omega))d\mu$$

が成り立つような問題(I)の解 $y^*(\cdot) \in \mathcal{V}$ が存在するであろうか。もし存在するとすれば，ふたつの問題の最小値は等しいわけで，この意味で両問題は同値となる。問題(II)と問題(III)との間にも，同様な関係が吟味されるべきであろう。[28]

$f \in \mathfrak{G}_+(\Omega, \mathcal{E}; X)$ は可積分な Carathéodory の函数列の単調極限である。これと狭位相の定義とから，函数

$$J\colon \gamma \longmapsto \int_{\Omega\times X} f(\omega, x)d\gamma \tag{1}$$

は $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ 上において下半連続である。この事実は既に定理 2 において（より一般的な設定の下で）示したとおりである。

問題(II)，(III)から始めよう。

$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ が狭コンパクトであること[29]と，函数(1)の下半連続性とから，まず次の結果は明白である。

定理 10　問題(III)には解が存在する。

問題(II)の解の存在についても肯定的に答えることができるが，若干の追加的仮定が必要である。

仮定 1　測度空間 $(\Omega, \mathcal{E}; \mu)$ は原子をもたない。

仮定 2　$\omega \in \Omega$ を任意に固定したとき，函数 $x \longmapsto f(\omega, x)$ は凸函数である。

仮定 2 を満たす正規非線形積分核を凸正規非線形積分核と呼ぶ。

---

(28) 本節の内容については Maruyama [14] に基づくものである。

(29) 前稿 [15] 定理 7 を見よ。

定義　$\mathfrak{X}$ を実線形空間，C をその非空凸集合とし，x は C の一点とする。十分に小さな $t>0$ に対して $x \pm t\, v \in C$ を満たす $v \in \mathfrak{X}$ を，x における C の**面方向ベクトル**（facial direction）であるという。x における C の面方向ベクトルすべての集合を，x における C の**面空間**（facial space）と呼び，これを $L(x \mid C)$ と表記する。(30)

C が凸集合であることに注意すると，$L(x \mid C)$ は $\mathfrak{X}$ の線形部分空間である。また x が C の端点であることは $\dim L(x \mid C) = 0$ と同値である。

定理 11　仮定 1 の下に，問題(II)には解が存在する。

証明　定理 10 により，問題(III)にはすくなくともひとつの解 $\gamma^* \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ が存在し，それは積分々解が可能であるから

$$\gamma^* = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega^*\, d\mu$$

を満たす確率測度から成る可測族 $\{\nu_\omega^* \mid \omega \in \Omega\} \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ が存在する。ここで前稿 [15] 定理 7 に詳しく述べていることを簡単に繰り返しておく。$\sup_{\omega \in \Omega} \|\nu_\omega\| < \infty$ (31) なる可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ の集合は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ と同一視され，$\{\nu_\omega\}$ を

$$\gamma = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega d\mu$$

に対応せしめる作用素を $\Phi\colon \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X)) \longrightarrow \mathfrak{M}(\Omega \times X)$（$(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の有限複号測度の全体）とすれば，$\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) = \Phi(\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X))$ であり，これは狭コンパクトな凸集合である。

いま

$$K = \left\{ \gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) \;\middle|\; \int_{\Omega \times X} f\, d\gamma - \int_{\Omega \times X} f\, d\gamma^* = 0 \right\}$$

とすれば，K は $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の狭コンパクトな凸集合なので，端点 $\hat{\gamma}$ を有する。つまり $\hat{\gamma} \in \ddot{K}$。$\hat{\gamma}$ はある可測函数 $\Omega \longrightarrow X$ によって

$$\hat{\gamma} = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{x^*(\omega)} d\mu$$

の形式に表現されることを示そう。

線形作用素 $T\colon \Phi(\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$T\gamma = \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma$$

---

(30) 面空間の概念については Arrow-Hahn [1] pp. 389–390, Artstein [2] を参照。

(31) $\|\nu_\omega\|$ は測度 ν_ω の全変動によるノルム。

と定義し，問題(Ⅲ)の最小値を F^*_{III}，つまり

$$F^*_{\mathrm{III}} = \int_{\Omega\times X} f(\omega, x) d\gamma^*$$

と書けば，

$$\begin{aligned} K &= \{\gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) \mid A\gamma \equiv T\gamma - F^*_{\mathrm{III}} = 0\} \\ &= T^{-1}(F^*_{\mathrm{III}}) \cap \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X). \end{aligned}$$

T の $L(\hat{\gamma} \mid \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X))$ への制限は単射である[(32)]から，

$$\dim L(\hat{\gamma} \mid \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)) \leqq 1.$$

$\hat{\gamma}$ はコンパクト・凸集合

$$H = \left[\hat{\gamma} + L(\hat{\gamma} \mid \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X))\right] \cap \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$$

の元である。Carathéodory の定理により，$\hat{\gamma}$ は $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ のふたつの端点の凸結合として表わすことができる。Karlin-Castaing の定理[(33)]により，これらの端点は

$$\int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{y(\omega)} d\mu, \quad \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{z(\omega)} d\mu,$$
$$y(\cdot), z(\cdot) \in \mathcal{M}$$

の形を有するので，適当な $t \in [0, 1]$ に対して

$$\hat{\gamma} = (1-t) \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{y(\omega)} d\mu + t \int_\Omega \delta_\omega \otimes \delta_{z(\omega)} d\mu.$$

μ は原子をもたないので，Ljapunov の凸性定理[(34)]により

---

(32) 仮に単射でないとすると，$T\theta = 0$ を満たす 0 でない $\theta \in L(\hat{\gamma} \mid \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X))$ が存在するはずである。十分に小さな $t > 0$ については $\eta_+ = \hat{\gamma} + t\theta, \eta_- = \hat{\gamma} - t\theta \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ であるから，$T\eta_+ = T\eta_- = F^*_{\mathrm{III}}$ つまり $\eta_+, \eta_- \in T^{-1}(F^*_{\mathrm{III}}) \cap \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) = K$。$\hat{\gamma} = 1/2(\eta_+ + \eta_-)$ なので，これは $\hat{\gamma} \in \ddot{K}$ に矛盾。

(33) Castaing-Valadier [7] Theorem IV. 15(p. 109)，丸山 [13] 第 12 章 §2 を見よ。

(34) 一般論とし，$(\Omega, \mathcal{E}; \mu)$ を完備な有限測度空間で原子をもたないとする。$f_1, \cdots, f_m \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^l)$，また $\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda_m$ は可測函数とする。ここで Λ_m は $\mathbb{R}^m$ の基本単体，つまり $\Lambda_m = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \lambda_i \geqq 0 (i = 1, 2, \cdots, m), \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\right\}$ である。このとき Ω の可測集合による分割 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ を適当に選び

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega) f_i(\omega) d\mu = \sum_{i=1}^m \int_{E_i} f_i(\omega) d\mu$$

とすることができる。Castaing-Valadier [7] Theorem IV. 17(pp. 112–117)，丸山 [13] 第 12 章 §2 を参照。

$$\int_{\Omega\times X} f(\omega,x)d\hat{\gamma} = \int_{E_1} f(\omega,y(\omega))d\mu + \int_{E_2} f(\omega,z(\omega))d\mu$$

なる Ω の分割 $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ が存在する。そこで

$$x^*(\omega) = \chi_{E_1}(\omega)y(\omega) + \chi_{E_2}(\omega)z(\omega)$$

と定義すれば

$$\int_{\Omega} f(\omega,x^*(\omega))d\mu = F^*_{\mathrm{III}}.$$

こうして $x^*(\cdot) \in \mathcal{M}$ が問題(II)の解であることが判明した。 （証了）

注意　定理 11 は Young 測度の理論を使用せずに証明することもできる。ただしこの場合，仮定 1 に加えて仮定 2 をも用いる。まず Dunford-Pettis-Nagumo の定理[35]により，$\mathcal{M}$ は $\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^l)$ における弱コンパクト集合である。さらに積分汎函数 $J'\colon \mathfrak{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^l) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$J'\colon x(\cdot) \longrightarrow \int_{\Omega} f(\omega,x(\omega))d\mu$$

と定義すると，Ioffe の基本定理[36]により，J' は $\mathfrak{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^l)$ の弱位相について列下半連続である。（ここで仮定 2 を用いる。）これらの考察を併せれば，問題(II)の解の存在が知られる。

定理 11 の証明から，問題(II)，(III)にはともに解が存在し，しかも両問題の最小値は相等しいことが確かめられた。この意味において両問題は同値である。

次に問題(I)に移る。

定理 12　仮定 1 の下に，問題(I)には解が存在する。

証明　有限集合 $K = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ はコンパクトであるから，K 上の確率測度から成るすべての可測族の集合 $\mathfrak{P}(\Omega,\mu;K)$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{M}(X))$ における $*$ 弱コンパクト集合である。したがって $\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;K)$ は狭コンパクトである。また函数

$$J\colon \gamma \longmapsto \int_{\Omega\times K} f(\omega,x)d\gamma$$

は $\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;K)$ 上において狭下半連続であるから，問題

---

(35) 丸山 [13] pp. 275–279.
(36) Ioffe [10]，丸山 [13] pp. 286–295.

$$\underset{\gamma\in\mathfrak{Y}(\Omega,\mu;K)}{\text{Minimize}}\int_{\Omega\times K} f(\omega,x)d\gamma$$

には解 γ^* が存在する。γ^* を定める可測族 $\{\nu^*_\omega \mid \omega\in\Omega\}$ は

$$\nu^*_\omega=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(\omega)\delta_{x_i}$$

の形式を有する。ここで $\lambda(\omega)=(\lambda_1(\omega),\lambda_2(\omega),\cdots,\lambda_p(\omega))$ は Ω から Λ_p（$\mathbb{R}^p$ の基本単体）のなかへの可測函数である。したがって問題(I)の最小値 F^*_{I} は

$$F^*_{\mathrm{I}}=\int_{\Omega\times K} f(\omega,x)d\gamma^*=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(\omega)f(\omega,x_i)d\mu$$

として計算される。再び Ljapunov の凸性定理から，Ω の可測集合による分割 $E_1,E_2,\cdots,E_p$ を適当に選び

$$F^*_{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{p}\int_{E_i} f(\omega,x_i)d\mu$$

とすることができる。そこで

$$x^*(\omega)=\sum_{i=1}^{p}\chi_{E_i}(\omega)x_i$$

とおけば,

$$F^*_{\mathrm{I}}=\int_{\Omega} f(\omega,x^*(\omega))d\mu.$$

この $x^*(\cdot)$ は問題(I)の解である。（証了）

さて問題(II)の最小値 F^*_{II} を達成する問題(I)の解は存在するであろうか。もし存在するならば $F^*_{\mathrm{I}}=F^*_{\mathrm{II}}$ となり，両問題は同値である。

ゲーム理論家は集合 $\mathcal{V}$(resp. $\mathcal{M}$) の各元を純粋戦略（resp. 混合戦略）と解釈し，問題(II)の最小値 F^*_{II} がある純粋戦略によって達成されるとき，問題(II)は**純粋化**（purification）されるという。したがってこの言葉を用いるならば，上記の問題は“問題(II)は純粋化が可能であろうか？”と述べ直すことができよう。(37)

しかし，この問いへの答えは否定的である。反例を以てそれを示そう。

反例　Ω は Lebesgue 測度 m を具えた単位区間 $[0,1], K=\{0,1\}, X=\mathrm{co}K=[0,1]$ とする。函数 $f\colon[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ をすべての $\omega\in\Omega$ について

（37）たとえば Aumann-Katznelson-Radner-Rosenthal-Weiss [3] などを参照。

$$f(\omega, x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{on } [0,1/2], \\ 2x-1 & \text{on } [1/2,1] \end{cases}$$

とする。問題(II)

$$\underset{x(\cdot):\ [0,1]\longrightarrow[0,1]}{\text{Minimize}} \int_0^1 f(\omega, x(\omega))dm(\omega)$$

の唯一の解は $x^*(\omega) = 1/2$ a.e, であり，最小値 $F^*_{\text{II}} = 0$ である。しかしながら，可測函数 $y^*(\cdot)\colon [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ のなかに

$$\int_0^1 f(\omega, y^*(\omega))dm = \int_0^1 f(\omega, x^*(\omega))dm = 0$$

を満たすものは存在しない。

こうして問題(II)の純粋化は，一般には不可能である。そこでさらに仮定を強化してみよう。

仮定 3　任意の $\omega \in \Omega$，$x_1, x_2 \in X$ および $\lambda \in [0,1]$ について

$$f(\omega, (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)f(\omega, x_1) + \lambda f(\omega, x_2).$$

仮定 3 は，$\omega \in \Omega$ を固定したとき，函数 $x \longmapsto f(\omega, x)$ のグラフがフラットであることを要請している。

いま $x^*(\cdot)$ を問題(II)の解としよう。可測陰函数定理[38]により，

$$x^*(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(\omega) x_i$$

なる可測函数 $\lambda^*\colon \Omega \longmapsto \Lambda_p$ が存在する。仮定 3 により，

$$F^*_{\text{II}} = \int_\Omega f(\omega, x^*(\omega))d\mu = \int_\Omega f\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* x_i\right) d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^*(\omega) f(\omega, x_i) d\mu.$$

ここで Ljapunov の凸性定理により，

$$F^*_{\text{II}} = \int_\Omega f(\omega, y^*(\omega))d\mu$$

なる $y^*\colon \Omega \longrightarrow K \in \mathcal{V}$ の存在が知られる。したがって次の帰結を得る。

定理 13　仮定 1，3 の下に，問題(II)は純粋化が可能である。

---

(38) 丸山 [13] pp. 426–427，および Sainte-Beuve [16].

参 考 文 献

[1] Arrow, K. and F. Hahn, *General Competitive Analysis*, (Holden Day, San Francisco), 1971.

[2] Artstein, Z., "Discrete and Continuous Bang-bang and Facial Spaces, or: Look for the Extreme Points", *SIAM Review*, **22** (1980), 172–185.

[3] Aumann, R., Y. Katznelson, R. Radner, R. Rosenthal and B. Weiss, "Approximate Purification of Mixed Strategies", *Math. Oper. Res.*, **8** (1983), 327–341.

[4] Berliocchi, H. and J.M. Lasry, "Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations", *Bull. Soc. Math. France*, **101** (1973), 129–184.

[5] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, (Wiley, New York), 1968.

[6] Bourbaki, N., *Eléments de mathématique: Intégration*, Chap. 6, (Hermann, Paris), 1959.

[7] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, (Springer-Verlag, Berlin), 1977.

[8] Dunford, N. and J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Part.1, (Interscience, New York), 1958.

[9] Evans, L., *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, (Amer. Math. Soc., Providence), 1990.

[10] Ioffe, A.D., "On Lower Semicontinuity of Integral Functionals; I", *SIAM J. Control Optim.*, **15** (1977), 521–538.

[11] 丸山徹『函数解析学』（慶應通信）1980. [Maruyama, Toru (1980), *Kansu-kaisekigaku*, Keio Tsushin (in Japanese)]

[12] ――― 『数理経済学の方法』（創文社）1995. [Maruyama, Toru (1995), *Suri-keizaigaku no Hoho*, Sōbunsha (in Japanese)]

[13] ――― 『積分と函数解析』（シュプリンガー・フェアラーク東京）2006. [Maruyama, Toru (2006), *Sekibun to Kansu-kaiseki*, Springer-Verlag Tokyo (in Japanese)]

[14] ―――, "A Note on Variational Problems via Theory of Young Measures", *Pure and Applied Functional Analysis*, **2** (2017), 357–367.

[15] ―――,「Young 測度の積分々解」『三田学会雑誌』112 巻 2 号（2019），11–47. [Maruyama, Toru (2019), "Young-sokudo no Sekibun-bunkai", *Mita Gakkai Zasshi* **112**-2, 11–47 (in Japanese)]

[16] Saint-Beuve, M.F., "On the Extention of von Neumann-Aumann's Theorem", *J. Functional Anal.*, **17** (1974), 122–129.

[17] Valadier, M., "Young Measures", in A. Cellina ed., *Methods of Nonconvex Analysis*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg), 1990, 152–188.

[18] ―――, "A Course on Young Measures", *Rendiconti dell' istituto di matematica dell' Università di Trieste*, **26** (1994), Supplemento, 349–394.

校正後に付記す

Aumann et al.[3] は豊かな内容を持つ力作であるが，数学的には不十分な箇所が散見される。それを補完するものとして，私どもの次の共同研究をご覧いただきたい。

Yu, C., Y.Hosoya and T. Maruyama, "On the Purification of Mixed Strategies", *Economics Bulletin*, **38** (2019), 1655–1675.

要旨: 前稿においては，Young 測度の積分々解表現について詳述した。ここでは Young 測度の作る空間に自然な位相を定め，その性質について函数解析の視点から吟味したい。

キーワード: 狭位相，一様緊密性，正規非線形積分核，ゲームの純粋化