Title	経済数学覚書2 : ゲーム理論からの寄せ集め
Sub Title	Notes on math of economics 2 : a miscellany from game theory
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2019
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.112, No.3 (2019. 10) ,p.331 (131)- 345 (145)
JaLC DOI	10.14991/001.20191001-0131
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20191001-0131

「三田学会雑誌」112 巻 3 号（2019 年 10 月）

解　説

経済数学覚書 2
——ゲーム理論からの寄せ集め——

中山幹夫 *

1.　はじめに

本稿は，経済数学覚書（中山 [10]）に引き続いて，ゲーム理論に関する話題の中から特別の定理などを前提とせずに証明できる事例を選んで解説したものである。とくに，標準的ではない（と思われる）別証明や，明白な経済学的意味をもつ応用などに留意して，提携形および戦略形ゲームからいくつかの命題を寄せ集めている。

提携形については，提携の個数を求める問題から始め，対称ゲームのコアと仁，多人数ナッシュ交渉解など，また，応用としては権力者への「贈賄」を記述する社会的選択ゲーム，さらに，ナッシュ均衡が公共財の過少供給を意味する戦略形ゲーム，不完備情報ゲームのオークションによる例示などを主な内容としている。これらの命題のいくつかは三田，大岡山および早稲田の大学院で講義した内容の発展形で，経済数学覚書（前掲）と同様，ほとんどの証明はセルフ・コンテインドな記述になるように努めた。

2.　提携形ゲーム

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ でプレイヤーの集合，N の任意の部分集合 $S \in 2^N := \{R \mid \emptyset \subseteq R \subseteq N\}$ で N 内での**提携**（**coalition**）をあらわす。各提携 $S \in 2^N$ に**提携値**と呼ばれる実数値 $v(S) \in \Re$（ただし $v(\emptyset) = 0$）を対応させる**集合関数** $v : 2^N \to \Re$ と N の組 (N, v) を**提携形ゲーム**（**coalitional game**）という(1)。

＊　慶應義塾大学名誉教授

命題 1（提携の数）. $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ における提携の数は空集合 $\emptyset$ も含めて 2^n である。

証明. 任意の提携 $S \in 2^N$ に対して各プレイヤーはそのメンバーであるか否かのいずれかであるから，提携の数は $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ となる。よりフォーマルには，任意の提携 $S \in 2^N$ の**特性関数** $c_S : N \to \{0, 1\}$，ただし

$$c_S(i) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i \in S \\ 0 & \text{if} \quad i \notin S \end{cases}$$

の個数が提携 S の個数を与えるので，n-次元の $(0-1)$ ベクトル $c_S = \Big(c_S(1), c_S(2), \ldots, c_S(n)\Big)$ の総数 2^n が提携 S の総数を与える。

別証明. 提携 S は N から $s := |S|$ 人のプレイヤーを選んで形成されるので，その総数はその組み合わせの総数：

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 1^{n-s} 1^s = (1+1)^n = 2^n$$

に等しい。 □

ところで，N の部分集合の全体 2^N は N から 2 への関数の全体でもあるが，数 2 は空集合 $\emptyset$ から帰納的に構成される集合 $\{0,\ 1\} := \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ と同一視できるので[(2)]，2^N は関数 $f : N \to 2\ :=\ \{0,\ 1\}$，すなわち特性関数 c_S の全体であるとみなすことができる。

3. ゲームのコア

各プレイヤーが獲得する利得を記述する**利得ベクトル** $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{and} \quad x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$$

をみたすとき，これをゲーム (N, v) における**配分**（**imputation**）という。

ゲーム (N, v) の**コア** $C(N, v)$ は，次のように定義される配分 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の集合である：

$$C(N, v) := \left\{ x \in \Re^n \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \in 2^N \right\}.$$

---

(1) 特性関数形ゲームともいうが，本稿では特性関数を別の意味で使う。
(2) たとえば Halmos [4] など。

命題 2（**3 人ゲームのコア存在条件**）. (N, v) は次のように与えられる 3 人ゲームであるとしよう。

$$\begin{aligned} v(\{1,2,3\}) &= 1 \\ v(\{1,2\}) = w_3 \leq 1,\ v(\{1,3\}) &= w_2 \leq 1,\ v(\{2,3\}) = w_1 \leq 1 \\ v(\{1\}) = v(\{2\}) &= v(\{3\}) = 0 \end{aligned}$$

すると,

$$C(N, v) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad w_1 + w_2 + w_3 \leq 2 .$$

証明. 必要性は，不等式 $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ を $|S| = 2$ について辺々加えれば得られる。十分性は，Shapley [14] にしたがって,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - w_1 \\ x_2 &= \min(w_1, 1 - w_2) \\ x_3 &= \max(0, w_2 + w_1 - 1) \end{aligned}$$

で与えられるベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ をとると，$w_1 \geq 0$ ならば $x \in C(N, v)$，$w_1 < 0$ ならば $(1, 0, 0) \in C(N, v)$ となることが簡単な計算で確かめられる。 □

(N, v) が**対称ゲーム**（**symmetric game**）であるとは，任意の $S, T \in 2^N$ について,

$$|S| = |T| \quad \Rightarrow \quad v(S) = v(T)$$

となることをいう。

命題 3（**対称ゲームのコア存在条件**）. (N, v) を対称ゲームとすると

$$C(N, v) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v(N)}{n} \geq \frac{v(S)}{|S|} \quad \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}.$$

証明. 十分性は,

$$x_i = \frac{v(N)}{n} \quad \forall i \in N$$

で与えられる配分 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ をとれば，$x \in C(N, v)$ となることはあきらかである。

必要性を示すために，$x \in C(N, v)$ をみたす配分 x をとる。すると，任意の $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ に対して,

$$\binom{n}{|S|} v(S) = \sum_{|R|=|S|} v(R) \leq \sum_{|R|=|S|} \sum_{i\in R} x_i = \binom{n-1}{|S|-1} \Big(x_1 + \cdots + x_n \Big) = \binom{n-1}{|S|-1} v(N)$$

であるから

$$\frac{n!}{(n-|S|)!|S|!}v(S)=\binom{n}{|S|}v(S)\leq\binom{n-1}{|S|-1}v(N)=\frac{(n-1)!}{(n-|S|)!(|S|-1)!}v(N)\ .$$

これより

$$\frac{n}{|S|}v(S)\leq v(N)\quad\text{or}\quad\frac{v(S)}{|S|}\leq\frac{v(N)}{n},\quad\forall S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$$

であることがしたがう。

必要性の別証明. 任意の配分 $x\in C(N,v)$ をとると

$$0\geq\max_{|R|=|S|}\left(v(R)-\sum_{i\in R}x_i\right)\geq v(S)-\sum_{i\in S}\frac{v(N)}{n}=v(S)-|S|\frac{v(N)}{n}\quad\forall S\in 2^N\ .$$

これより

$$\frac{v(N)}{n}\geq\frac{v(S)}{|S|}\quad\forall S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$$

であることがしたがう。 □

必要性の別証明としては，ほかにもコアの**凸性**を用いるものがある（船木 [3]）。対称性により，配分 $x\in C(N,v)$ の n 個の成分 $x_1,\ldots,x_n$ を置換して得られるすべての配分もコアに属し，これら $n!$ 個の配分の**平均**も凸集合であるコアに属している：

$$\frac{1}{n!}\left(\sum_{i\in N}(n-1)!x_i\ ,\ldots,\ \sum_{i\in N}(n-1)!x_i\right)=\left(\frac{v(N)}{n},\ldots,\frac{v(N)}{n}\right)\in C(N,v)\ .$$

これから求める不等式が得られる。

一般のゲーム (N,v) に対するコア存在の必要十分条件は，ゲームが**平衡ゲーム（balanced game）である**ことはコア理論のよく知られた基本定理である（Shapley[14]）。ここでは触れないが，ほとんどのテキストにみられる標準的な証明は**線形計画法の双対定理**を用いる方法である[(3)]。

4. 対称ゲームの仁

ゲーム (N,v) の**仁（nucleolus）** は以下のように定義される解である[(4)]。任意の提携 $S\in 2^N$（ただし，$S\neq\emptyset,N$）と配分 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ について，

(3) たとえば，中山 [11] など。なお，Aumann [1] はミニマックス定理を用いている。

(4) Schmeidler [13] が提唱し，存在と一意性やその他の性質を確立した。なお，中山 [10] では線形計画法を用いた存在証明や，具体的応用などについて解説している。

$$v(S)-\sum_{i\in S}x_i$$

を配分 x に対する S の**余剰**（**excess**）という。配分 x に対する各提携 $S\in 2^N\setminus\{\emptyset,N\}$ の余剰を大きいものから順に並べて得られる 2^n-2 次元の余剰ベクトルを $\theta(x)$ とする。このとき，**配分** μ **が仁であるとは**余剰ベクトル $\theta(\mu)$ がすべての配分 x に対する余剰ベクトル $\theta(x)$ の中で**辞書式順序で最小**（**lexicographically minimal**）となっていることである。

命題 4.　対称ゲーム (N,v) の仁は均等配分 μ：

$$\mu_i=\frac{v(N)}{n}\quad \forall i\in N$$

である。

証明.　任意の配分 $x\neq\mu$ と任意の空でない提携 $S\neq N$ について，

$$\max_{\emptyset\neq T\subsetneq N}\Big(v(T)-\sum_{i\in T}x_i\Big)\geq\max_{|R|=|S|}\Big(v(R)-\sum_{i\in R}x_i\Big)>v(S)-\sum_{i\in S}\mu_i$$

であり，これより

$$\max_{\emptyset\neq T\subsetneq N}\Big(v(T)-\sum_{i\in T}x_i\Big)>\max_{\emptyset\neq T\subsetneq N}\Big(v(T)-\sum_{i\in T}\mu_i\Big)$$

が成り立つので，$\theta(\mu)$ は他のすべての $\theta(x)$（ただし $x\neq\mu$）より辞書式順序で小さい。 □

5.　社会的選択ゲーム

社会的選択ゲーム（**social choice game**）とは，次のように与えられる提携形ゲーム (N,v) である：

$$v(S):=\max_{y\in Y}\sum_{i\in S}u_i(y)\quad\forall S\in\mathcal{W}\ .$$

ただし，

- $N=\{1,2,3,\dots,n\}$
- Y は社会的選択肢の有限集合
- $\mathcal{W}\subseteq 2^N$ は $\mathcal{N}\in\mathcal{W},\emptyset\notin\mathcal{W}$ および**単調性**（**monotonicity**）：

$$S\in\mathcal{W},\ \ S\subseteq T\ \Rightarrow\ T\in\mathcal{W}$$

をみたす**勝利提携**（**winning coalition**）の集合

である。

プレイヤー $i \in N$ は，$S \in \mathcal{W} \Rightarrow i \in S$ をみたすとき**拒否権者**（**vetoer**）と呼ばれる。拒否権者 i がさらに $i \in S \Longrightarrow S \in \mathcal{W}$ をみたすならば，i は**独裁者**（**dictator**）であり，唯一の拒否権者となる。

社会的選択ゲーム (N, v) のコア $C(\mathcal{W})$ は

$$C(\mathcal{W}) := \left\{ x \in \Re^n \;\middle|\; \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \;\text{ and }\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \;\; \forall S \in \mathcal{W} \right\}$$

と定義される利得ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ の集合である。なお，社会的総利得の最大値 $v(N)$ は選択肢 $y^* \in Y$ によって達成されると仮定する：

$$v(N) = \sum_{i \in N} u_i(y^*) \; .$$

命題 5. 社会的選択ゲーム (N, v) において，$x \in C(\mathcal{W})$ ならば次が成り立つ[(5)]。

(i)： $x_j > u_j(y^*)$ ならば，プレイヤー $j \in N$ は拒否権者である。

(ii)： プレイヤー $j \in N$ が独裁者で，$T := \left\{ i \in N \setminus \{j\} \;\middle|\; x_i < u_i(y^*) \right\} \neq \emptyset$ ならば

$$x_j = u_j(y^*) + \sum_{i \in T} \Big(u_i(y^*) - x_i \Big) \; > \; u_j(y^*) \; .$$

証明. (i)．もし $N \setminus \{j\} \in \mathcal{W}$ ならば，仮定より $x \in C(\mathcal{W})$ であるから

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} u_i(y^*) = \sum_{i \in N} u_i(y^*) - u_j(y^*) > v(N) - x_j \geq v(N \setminus \{j\})$$

となるが，これは $v(N \setminus \{j\})$ の定義に矛盾する。ゆえに

$$N \setminus \{j\} \; \notin \; \mathcal{W}$$

であり，単調性から

$$S \subseteq N \setminus \{j\} \;\Rightarrow\; S \notin \mathcal{W}$$

となって，j が拒否権者であることがしたがう。

(ii)．プレイヤー j は独裁者であるから，他のすべてのプレイヤー $i \neq j$ は拒否権者ではない。ゆえに，(i) より $x_i \leq u_i(y^*) \; \forall i \in N \setminus \{j\}$ であるから結果がしたがう。 □

---

(5) Nakayama [12].

社会的総利得 $v(N)$ を与える選択肢 $y^* \in Y$ から得られる各プレイヤーの利得を仮に**適正利得**と呼べば，コアに属する利得分配において**適正利得を上回る利得を得ているプレイヤーは拒否権者**であり，その超過分は権力の「対価」である。独裁者はさらにその対価を独り占めできる立場にいる。実際，独裁者 j について

$$v(\{j\}) := \max_{y \in Y} u_j(y) > u_j(y^*)$$

であったならば $x \in C(\mathcal{W}) \ \Rightarrow \ x_j \geq v(\{j\})$ であるから，独裁者のもつ権力への「支払い」は現実のものとなる．しかし，次の命題が示すように多数決ルールのもとではこのような不公正は起こりえない。

命題 6. (N, v) は

$$\mathcal{W} := \left\{ S \subseteq N \;\middle|\; |S| > \frac{n}{2} \right\}$$

で与えられる**単純多数決**のもとでの社会的選択ゲームであるとする。このとき，

$x \in C(\mathcal{W}) \quad \Longleftrightarrow$

（1） $x_i = u_i(y^*) \quad \forall\, i \in N$

（2） $v(S) = \sum_{i \in S} u_i(y^*) \quad \forall\, S \in \mathcal{W}$

が成立する[(6)]。

証明. 十分性はあきらかなので必要性を示す。(1)については，ある $k \in N$ に対して $x_k \neq u_k(y^*)$ と仮定すると，ある $i \in N$ については $x_i > u_i(y^*)$ となる。しかし，$N \setminus \{i\} \in \mathcal{W}$ であることから

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} u_j(y^*) = v(N) - u_i(y^*) > v(N) - x_i \geq v(N \setminus \{i\})$$

となるが，これは $v(N \setminus \{i\})$ の定義に反する。

(2)については，ある $S \in \mathcal{W} \setminus \{N\}$ に対し $v(S) \neq \sum_{j \in S} u_j(y^*)$ と仮定すると，(1)と v の定義から

$$v(S) > \sum_{j \in S} u_j(y^*) = \sum_{j \in S} x_j$$

となるが，これは $x \in C(\mathcal{W})$ に矛盾する。 □

単純多数決のもとでは，どのプレイヤーもコアに属する利得ベクトルにおいてちょうど適正利得だけを獲得しており，プレイヤー間での利得の移転は生じていない。この意味で多数決は公正であるといえるが，選択肢 y^* が条件(2)をみたすという保証のないことが問題である。

（6） Kaneko [8].

6. 多人数ナッシュ交渉解

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ のすべてのプレイヤーたちは，総利得 $v(N)$ の分割 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を**多人数ナッシュ交渉解**として実現しようとしている。ただし，

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

と仮定し，実現する利得は配分であること，すなわち，各プレイヤー $i \in N$ は $v_i := v_i(\{i\})$ 以上の利得を獲得できることが条件である。

Luce and Raiffa [9] はナッシュによる 2 人交渉解の公理を拡張して，多人数の交渉解を次の**効用積**最大化問題の解として定式化した:

$$\max \prod_{i \in N} (x_i - v_i) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{and} \quad x_i \geq v_i \ \ \forall i \in N \ .$$

命題 7. 多人数ナッシュ交渉解は，次のように与えられる：

$$x_i = v_i + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j \in N} v_j\right) \quad \forall i \in N \ .$$

証明. この問題の最適化の条件：

$$x_i - v_i = x_j - v_j \quad \forall i, j \in N$$

は，**相加・相乗平均不等式**：

$$\frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{i \in N} v_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i \in N}(x_i - v_i)\right) \geq \left(\prod_{i \in N}(x_i - v_i)\right)^{\frac{1}{n}} \ \text{whenever} \ \ x_i - v_i > 0 \quad \forall i \in N$$

において等式が成立する条件 $x_i - v_i = x_j - v_j$, $\forall i,\ j \in N$ として得られる[(7)]。仮定より $d := x_i - v_i > 0 \ \ \forall i \in N$ をみたす $x = (x_1, \ldots, x_n)$ をとることができるので

$$x_i = v_i + \frac{1}{n}(nd) = v_i + \frac{1}{n}\left(\sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N} v_j\right) = v_i + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j \in N} v_j\right) \quad \forall i \in N \ . \qquad \square$$

Harsanyi [6] は，この多人数交渉問題を，**任意のペア** $i, j \in N$ がナッシュの交渉を行うものとして，もともとのナッシュ効用積の最大化問題に還元した：

（7） 中山 [10] など参照。

$$\max\ (x_i - v_i)(x_j - v_j) \quad \text{s.t.} \quad x_i + x_j \le a_{ij} \ \text{ and } \ x_i \ge v_i\ ,\ x_j \ge v_j\ .$$

この問題では，$a_{ij} > v_i + v_j$ をみたす任意の a_{ij} に対し，最適条件は上と同じである。

7. 戦略的純粋交換ゲーム

各プレイヤー $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ は，初期保有財ベクトル $w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^m) \in \Re_+^m \setminus \{0\}$ を用いて各プレイヤー $j \in N$ に対し

$$x_{ij} = (x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^m) \in \Re_+^m \ \text{ and } \ \sum_{j \in N} x_{ij} = w_i$$

と定義される**オファー** $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ をすることができる。このオファーベクトル x_i はプレイヤー i の**戦略**である。

戦略プロファイル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ のもとでプレイヤー i が獲得する利得 $v_i(x)$ は

$$v_i(x) := u_i \left(\sum_{j \in N} x_{ji} \right)$$

のように与えられる。ただし，$u_i : \Re_+^m \to \Re$ は**狭義単調増加**で連続な効用関数である。

戦略プロファイル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ が**弱パレート効率的**（**weakly Pareto efficient**）であるとは，$v_i(y) > v_i(x) \ \ \forall i \in N$ をみたす戦略プロファイル $y = (y_1, \ldots, y_n)$ が存在しないことをいう(8)。

命題 8. 初期状態を戦略プロファイル

$$x^\circ := (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \quad \text{where} \quad x_{ii}^\circ = w_i \quad \forall i \in N$$

であらわす。すると：

（1）x° は唯一のナッシュ均衡であり，しかも支配戦略均衡かつ**結託耐性**（**coalition-proof**）**ナッシュ均衡**でもある。

（2）x° は**強**（**strong**）**ナッシュ均衡** $\iff$ x° は弱パレート効率的。

証明. （1）．各プレイヤー $i \in N$ について，u_i の狭義単調性により戦略 x_i° は**任意の戦略プロファイル** x **に対する最適反応**（**best reply**）であるから，x° は支配戦略均衡である。また，任意の戦略プロファイル $x \neq x^\circ$ において，$x_{ii} \neq w_i$ であるプレイヤー i は x_i° に離反できるので，x° は唯一のナッシュ均衡である。さらに，x° からの任意の $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ によるどのような離反 $x_S := (x_i)_{i \in S}$ も，

(8) 効用関数 u_i の連続性と狭義単調性により通常のパレート効率性と同値になる。

そこから x_i° へ離反するプレイヤー $i \in S$ がつねに存在するので，x_S は**信憑性のある離反**（**credible deviation**）ではない。ゆえに，定義によって x° は結託耐性ナッシュ均衡である。[9]

（2）．強ナッシュ均衡は定義によって弱パレート効率的である。十分性の証明のため，弱パレート効率的な x° は強ナッシュ均衡ではないと仮定しよう。すると，ある提携 $S \subsetneq N$（ただし $|S| \neq 0,\ 1$）は x° において次のような離反 $x_S := (x_i)_{i \in S}$ を実行することができる：

$$u_i\left(\sum_{j \in S} x_{ji} + \sum_{j \in N \setminus S} x_{ji}^\circ\right) > u_i\left(\sum_{j \in N} x_{ji}^\circ\right) = u_i(w_i) \quad \forall i \in S\ .$$

u_i は連続な狭義単調増加関数であるから，この x_S を，ある $i \in S$ とある $k \in \{1, \ldots, m\}$ について $x_{ij}^k > 0 \ \ \forall j \in N \setminus S$ をみたすようにとっておけば，

$$u_i\left(\sum_{j \in S} x_{ji} + \sum_{j \in N \setminus S} x_{ji}^\circ\right) > u_i\left(\sum_{j \in N} x_{ji}^\circ\right) = u_i(w_i) \quad \forall i \in N$$

を成り立たせることができる。しかしこれは x° が弱パレート効率的であることに反する。 $\square$

戦略形ゲームにおける主要な均衡がどれも初期状態である x° のみに集中し，純粋交換は実行されないことを述べているという意味で，これは特異なゲームであるといえる。

8. 戦略的公共財ゲーム

各プレイヤー $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ について，$x_i \in X_i := [0,\ m_i]$（ただし $m_i > 0$）を公共財への貢献をあらわす戦略であるとし，戦略プロファイルを $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X := \prod_{i \in N} X_i$ とする。

戦略プロファイル $x \in X$ のもとでプレイヤー $i \in N$ が得る利得は

$$v_i(x) := u_i\left(\sum_{j \in N} x_j,\ m_i - x_i\right)$$

で与えられる。ここに，$u_i : \Re_+^2 \to \Re$ は狭義単調増加で連続な準凹効用関数である。[10]

戦略プロファイル $x^P \in X$ が**パレート効率的**であるとは

$$v_j(x) \geq v_j(x^P) \ \ \forall j \in N \quad \text{and} \quad v_i(x) > v_i(x^P) \ \ \exists i \in N$$

をみたす戦略プロファイル $x \in X$ が存在しないことをいう。

（9） 結託耐性ナッシュ均衡の定義については，たとえば Hirai, Masuzawa and Nakayama [7] など参照。
（10）準凹性によってナッシュ均衡の存在が保証される。

命題 9. x^P はパレート効率的戦略プロファイル，x^N はナッシュ均衡であるとし，$x_i^P > x_i^N$ をみたす $i \in N$ が存在するとしよう。このとき

$$\sum_{j\in N} x_j^P > \sum_{j\in N} x_j^N$$

が成立する。

証明. x^P はパレート効率的であるから，x^N に対しては,

$$v_j(x^N) < v_j(x^P)\ \exists j \in N \quad \text{or} \quad v_i(x^N) \le v_i(x^P)\ \forall i \in N$$

が成り立つ。仮定より $x_i^P > x_i^N$ とすると，もし $v_i(x^P) = v_i(x^N)$ ならば u_i の単調性より結果がしたがう。また，$v_i(x^P) \neq v_i(x^N)$ ならば，この $i \in N$ については $v_i(x^P) > v_i(x^N)$ となる。すると，

$$\sum_{j\neq i} x_j^P > \sum_{j\neq i} x_j^N$$

となるが，その理由はこれを否定すると u_i の単調性によって

$$\begin{aligned} u_i\left(\sum_{j\neq i} x_j^N + x_i^P, m_i - x_i^P\right) &\ge u_i\left(\sum_{j\neq i} x_j^P + x_i^P, m_i - x_i^P\right) \\ &= v_i(x^P) > v_i(x^N) = u_i\left(\sum_{j\in N} x_j^N, m_i - x_i^N\right) \end{aligned}$$

でなければならず，これは x^N がナッシュ均衡であることに反するからである。そこで，$\sum_{j\neq i} x_j^P > \sum_{j\neq i} x_j^N$ を辺々加えれば

$$n\sum_{j\in N} x_j^P - nx_i^P = \sum_{j\in N}\left(\sum_{j\in N} x_j^P - x_i^P\right) > \sum_{j\in N}\left(\sum_{j\in N} x_j^N - x_i^N\right) = n\sum_{j\in N} x_j^N - nx_i^N$$

すなわち

$$n\left(\sum_{j\in N} x_j^P - \sum_{j\in N} x_j^N\right) > n(x_i^P - x_i^N) > 0$$

が得られる。 □

公共財への自発的貢献はパレート効率的なレベルに対して**過少**になるというよく知られた事実を，このゲームのナッシュ均衡は端的に示している。

Harsanyi [5] による**不完備情報ゲーム**の取り扱いを，Binmore [2] に述べられている簡単な例を通してみてみよう。

> アリスは自分の家をボブかまたはキャロルに少なくとも 3600 万ドルで売りたいと思っている。アリスはボブもキャロルもその家をいくらに評価しているかは知らないので，互いに独立に 0 ドルから 3600 万ドルまでの**一様分布**をする値だと仮定している。この家をボブとキャロルに提示したならばアリスの期待収入はいくらか？

アリスがボブとキャロルの評価を知らないという**不完備情報**はすでに文中で一様分布の仮定によって**完備化**されていることに注意する。Binmore は Harsanyi の方法によれば答は 1200 万ドルになると記しているだけであるが，以下のようにしてこれを導くことができる。

命題 10.　上の問題において，アリスの期待収入は 1200 万ドルである。1800 万ドルの**最低入札価格**（**reserve price**）が設定されていれば，期待収入は 1500 万ドルとなる。

証明.　家の評価は区間 [0, 36] 上の一様分布であるとみなして計算しよう。ボブが勝つ場合のアリスの期待収入は次のように計算される：

$$\int_0^{36} x\left(\frac{x}{36}\frac{1}{36}\right)dx = \frac{1}{36^2}\int_0^{36} x^2 dx = \frac{1}{36^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{36} = 12\ .$$

Harsanyi [5] にしたがって，ボブとキャロルは各々 [0, 36] 上に分布する（連続）無限個のタイプから成る主体であると考える。いま，タイプ x のボブは値 x をビッドし，これと独立にタイプ y のキャロルは値 y をビッドすると，タイプ x のボブはタイプ $y \in [0,\ x)$ のキャロルに勝つので，その確率は

$$\left(\frac{x}{36}\right)\left(\frac{dx}{36}\right)$$

となり，アリスの期待収入は上の積分で与えられる。

最低入札価格 1800 万ドルのもとでは，ボブが勝つ場合のアリスの期待収入は次のようになる：

$$\int_{18}^{36} x\left(\frac{x}{36}\frac{1}{36}\right)dx\ + \int_{18}^{36} 18\left(\frac{18}{36}\frac{1}{36}\right)dx\ =\ \frac{1}{36^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{18}^{36} + \ \frac{1}{4}\Big[x\Big]_{18}^{36} = \frac{21}{2} + \frac{9}{2} = 15\ .$$

第 1 項は，タイプ x のボブが勝てるビッド x を選んでいるが，2 人のタイプのビッドがともに無効となる 18 未満の場合を除いて得られる期待値を与えている。第 2 項はキャロルの各タイプ $y \in [0,\ 18)$

のビッド y に対し，任意のタイプ $x \in [18,\ 36]$ のボブはつねに**最低値 18** のビッドで勝てるので，この場合の期待値を計算している。

キャロルが勝つ場合もアリスは同じ期待収入を得るので，対称性からアリスの期待収入はその平均で与えられる：

$$\frac{1}{2}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot 12 = 12 \quad \text{if} \quad \text{reserve} \quad \text{price} \quad \text{is} \quad 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot 15 + \frac{1}{2}\cdot 15 = 15 \quad \text{if} \quad \text{reserve} \quad \text{price} \quad \text{is} \quad 18 \qquad \square$$

次の問題も不完備情報ゲームとして同様に取り扱うことができる例である。

プレイヤー A は自分の会社をプレイヤー B に売りたいと思っている。プレイヤー B はその価値 v を $[0,\ 100]$ 上の一様分布をする値であると仮定しており，獲得したならば $\frac{3}{2}v$ の利益が得られると見込んでいる。プレイヤー B の最適なビッドはいくらか？(11)

命題 11. この問題において，プレイヤー B の最適戦略はビッドしないことである。

証明. プレイヤー B は，タイプ $x \in [0,\ v)$ のプレイヤー A（売り手）のビッド x に対し，ビッド v で期待値

$$e(v) = \int_0^v x\left(\frac{1}{v}\right)dx = \frac{v}{2}$$

の企業価値をもつ会社を獲得する。ゆえに，プレイヤー B の期待利益は任意のタイプ $v \in [0, 100]$ のプレイヤー A に対し，

$$\frac{3}{2}e(v) - v = \frac{3v}{4} - v < 0$$

となるので，プレイヤー B はビッドしないことが最適戦略となる。 $\square$

合理的な買い手ならば，期待値を

$$\int_0^{100} x\left(\frac{1}{100}\right)dx = \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{100} = 50$$

であると誤解し，$75 - 50 = 25$ の利益が得られるという間違いを犯すことはない。

（11）多田 [15] を参照している。

10.　戦略の非可算集合

命題 12.　2×2 双行列ゲームをステージ・ゲームとする無限回繰り返しゲームの戦略の全体は**非可算集合**である。

証明.　任意有限の長さの**履歴**（**history**）を h と書き，h の全体を集合 H であらわす。集合 H は**可算**（**denumerable**）であるから，自然数の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ との間に **1 対 1 対応**（**bijection**）が存在する。ゆえに，各々の履歴に番号を付けて $H := \{0, 1, 2, \ldots\}$ としておくことができる。

繰り返しゲームにおけるプレイヤーの戦略 f とは，任意の $h \in H$ に対しステージ・ゲームの行動 a または b のいずれかを対応させる関数である。そこで，任意の部分集合 $K \subseteq H$ をとり，戦略 $\boldsymbol{g_K}$ を次のように定義する：

$$g_K(h) = \begin{cases} a \text{ if } \ h \in K \\ b \text{ if } \ h \notin K \end{cases}$$

戦略 g_K はこのように集合 K の**特性関数**（**characteristic function**）とみなすことができるので，g_K の個数は集合 K の個数に等しい。しかも戦略 g_K の集合は戦略 f の集合の真部分集合である。しかし，以下に示すように集合 $K \subseteq H$ の集合（i.e., H のべき集合）は可算ではないので戦略 f の集合は可算ではない。

いま，H のべき集合は可算であり，すべての部分集合を $K_0, K_1, K_2, \ldots$ のように列挙できたとしよう。すると，

$$n \in J \quad \Longleftrightarrow \quad n \notin K_n$$

と定義される集合 $J \subseteq H$ については，$J \neq K_n$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$ となって，$J \subseteq H$ であることに矛盾する。 □

11.　おわりに

コアと並んで経済学的にも重要なシャープレイ値はどのテキストにも解説されている標準的な解概念であり，本稿では割愛した。また，線形計画法を用いるコアや仁の存在証明，さらにはブラウワーや角谷の不動点定理によるナッシュ均衡の存在定理なども標準的で，多くのテキストに述べられていることからこれらについても省略した。

ほかにも Shapley [14] によるコアの存在証明や Schmeidler [13] の仁の存在証明なども本稿の射程外においたが，これらは創始者がどのように考えたかを知る意味で「精読」に値する証明である。

また，Aumann [1] のミニマックス定理を使うコアの存在証明も，高木貞治の「微分のことは微分で」に倣って「ゲームのことはゲームで」を実践しているかのようで興味深い。

参 考 文 献

[1] Aumann, R. J., *Lectures on Game Theory*, Westview Press, 1989. 邦訳は丸山徹・立石寛 訳『ゲーム論の基礎』勁草書房，1991 年。

[2] Binmore, K., *Game Theory: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, 2007. 邦訳は海野道郎・金澤悠介 訳『ゲーム理論』岩波書店，2010 年。

[3] 船木由喜彦『ゲーム理論講義』新生社，2012 年。

[4] Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, 1960. 邦訳は富川滋 訳『素朴集合論』ミネルヴァ書房，1975 年。

[5] Harsanyi, J. C., “Games with incomplete information played by Bayesian players, parts I, II and III”, *Management Science* **14**, 1967–68.

[6] Harsanyi, J. C., *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*, Cambridge University Press, 1977.

[7] Hirai, T., T. Masuzawa and M. Nakayama, “Coalition-proof Nash equilibria and cores in a strategic pure exchange game of bads,” *Mathematical Social Sciences* **51**, 2006.

[8] Kaneko, M. “Necessary and sufficient conditions for the existence of nonempty core of a majority game,” *International Journal of Game Theory* **4**, 1974.

[9] Luce, R. D. and H. Raiffa, *Games and Decisions*, Wiley, 1957.

[10] 中山幹夫「経済数学覚書——凹関数，ジャンセンの不等式，および最適化——」『三田学会雑誌』111 巻，2 号，2018 年。

[11] 中山幹夫『協力ゲームの基礎と応用』勁草書房，2012 年。

[12] Nakayama, M., “Note on the core and compensation in collective choice,” *Mathematical Social Sciences* **2**, 1982.

[13] Schmeidler, D., “The nucleolus of a characteristic function game,” *SIAM Journal on Applied Mathematics* **17**, 1969.

[14] Shapley, L. S., “On balanced sets and cores,” *Naval Research Logistics Quarterly* **14**, 1967.

[15] 多田洋介『行動経済学入門』日本経済新聞出版社，2014 年。