Title	チャート式「比較静学」: 非線形連立方程式と陰関数定理
Sub Title	Comparative statics : nonlinear simultaneous equations and implicit function theorem
Author	尾崎, 裕之(Ozaki, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2019
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.112, No.2 (2019. 7) ,p.165(69)- 180(84)
JaLC DOI	10.14991/001.20190701-0069
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20190701-0069

「三田学会雑誌」112 巻 2 号（2019 年 7 月）

解　説

チャート式「比較静学」：非線形連立方程式と陰関数定理

尾崎裕之 *

「執筆にあたっては，できるだけ明快に，それこそチャート式参考書のように明快に，そして，軽くスピーディーに書くことを心がけた」
浅田　彰『構造と力』（勁草書房，1983 年）「あとがき」より

1　はじめに

筆者は以前に，線形代数に関する解説[(1)]（以下，『線形代数』と略記）と，微分に関する解説[(2)]（以下，『微分』と略記）を本誌に書いた。特に，2 つ目の解説で微分を取り上げたのは，「滑らかな」関数は，局所的に線形関数で近似できて，最初の解説で説明した線形代数の手法を（局所的にではあるが）応用することが可能となることを主張することがその目的のひとつであった。局所的にではあるものの，線形代数の豊かな手法を適用できることは，経済学の分析の様々な局面で非常に有用である。

惜しむらくは，そのような具体的な分析方法の具体例を，前の 2 つの解説では取り上げることができなかったことである。そのような分析の代表格が「比較静学」で，この機会に「比較静学」の方法をできるだけ丁寧に解説することを（主に気まぐれから）思いついた。「比較静学」は，その経済学的な重要度によっては，それだけで 1 本の論文として高く評価される可能性のあるテーマである。その意味で，本稿の意義も多少はあろう。

本稿は，筆者の 2 つの解説を読んでいれば理解できるように書いた。また，私がもっとも苦手とするところであるが，可能な限り平易な記述を心がけた。とてもありそうなことではあるが，もし

＊　慶應義塾大学経済学部
(1)　「解説：行列の固有値と経済動学」『三田学会雑誌』108 巻 1 号（2015 年）
(2)　「解説：有限次元の世界の「滑らかさ」－フレッシェ微分とガトー微分」『三田学会雑誌』109 巻 4 号（2017 年）

そうなっていなければ，そこは読者の御寛恕を平に請う次第である。

2　フレッシェ微分とガトー微分の復習

集合 X は $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合であり，集合 Y は $\mathbb{R}^m$ の任意の部分集合であるとする。ただし，m と n は任意の自然数[(3)]とする。集合 X を定義域，集合 Y を値域とする関数を考え，これを $\boldsymbol{f}$ と表記する。つまり，$\boldsymbol{f}: X \to Y$ である。

集合 X の内部の点 $\boldsymbol{x}_0$，すなわち，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}X$ が与えられたとき，次の式が成立するような $m \times n$ 行列 A が存在したと仮定する[(4)]：

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - A\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0\,. \tag{1}$$

このとき，関数 $\boldsymbol{f}$ は「点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能」であるという。またこのとき，A を，関数 $\boldsymbol{f}$ の「点 $\boldsymbol{x}_0$ におけるフレッシェ微分」と呼ぶ。

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}X$ が与えられているものとしよう。このとき，次の（t を変数と見做した）関数の値の極限を考える：

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \right)\,. \tag{2}$$

この極限が任意の $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ について常に存在するとき，関数 $\boldsymbol{f}$ は「点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能」であるという。関数 $\boldsymbol{f}$ について，それが点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能であり，しかも，極限(2)が，ある $m \times n$ 行列 A を用いて $A\boldsymbol{h}$ と書けるとき，行列 A を関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ガトー微分」と呼ぶ。

フレッシェ微分とガトー微分には次の関係がある。

定理 1（『微分』の定理 6）.　関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であるならば，$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能である。さらに，ガトー微分が存在し，フレッシェ微分とガトー微分は一致する。

『微分』でも注意したように，フレッシェ微分，ならびに，ガトー微分は，本来は無限次元線形空間，その中でも，特にバナッハ空間と呼ばれる空間で定義される関数のために開発された手法である（無限次元線形空間の間の線形作用素は行列では表現できないので，フレッシェ微分の定義（特にノルムの意味や，$A\boldsymbol{h}$ と表現されているところ）はそれに合わせて，しかるべき形に書き直す必要がある）。『微分』の目的は，あえてこれらの概念を用いることによって，有限次元線形空間においてすらも，学部学生・院生諸君が混乱しているように筆者には見受けられる微分可能性についての交通整理を行うことであった。

---

(3)　ここでは，「自然数」には 0 は含めない。

(4)　ノルム $\|\cdot\|$ や，$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}$ の意味については『微分』を参照のこと。

以下，本稿においては，線形空間の有限性を全面的に活用し，「はじめに」でも述べたように，陰関数定理，およびそれを用いた非線形連立方程式の解法についての解説を行うことにある。

3　ジャコビアン

ある特定の方向 $\boldsymbol{h}$ について極限(2)が存在するときに，その極限を，「関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における $\boldsymbol{h}$-方向微分」と呼び，さらに，$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{e^j}$ のときに，この極限を（それがもし存在すれば）「関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における第 j 偏微分」と呼ぶ（$j=1,\ldots,n$）[5]。関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における第 j 偏微分が存在するとき，それを $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_0)$ と書き，このベクトルを第 j 列とする $m\times n$ 行列 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$ を，関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ジャコビアン行列」と呼ぶ。

3.1　線形空間の次元の有限性を搾取すると . . .

以下では常に，集合 X は $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合，集合 Y は $\mathbb{R}^m$ の任意の部分集合，点 $\boldsymbol{x}_0$ は集合 X の任意の内点であるとし，関数 $\boldsymbol{f}:X\to Y$ は $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であると仮定する。

関数 $\boldsymbol{f}$ の値域が有限次元であることを利用して，次のような表記法を採用することにする。

$$(\forall \boldsymbol{x}_0\in \mathrm{int}X)\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=(f^1(\boldsymbol{x}_0),f^2(\boldsymbol{x}_0),\ldots,f^m(\boldsymbol{x}_0))'.$$

これは，すべての $i=1,2,\ldots,m$ について，$f^i(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbb{R}$ であり，m 次元列ベクトルである。

この表記法によると，極限(2)の存在と，すべての $i=1,2,\ldots,m$ について次の極限が存在することは同値となる。これは，有限次元ノルム空間における収束は，ベクトルの各座標が絶対値で収束することと同値であるからである。

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f^i(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-f^i(\boldsymbol{x}_0)\right).$$

本稿の定理 1 から，関数 $\boldsymbol{f}$ は点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能であることが分かり，特に，すべての $j=1,2,\ldots,n$ について，その点における第 j 偏微分が存在することが従う。すなわち，すべての j について，極限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f^i(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e^j})-f^i(\boldsymbol{x}_0)\right).$$

が存在する。ところがこの式は，1 変数の実数値関数 $t\mapsto f^i(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e^j})$ の t による $t=0$ における微分の定義に他ならない。ゆえに，チェイン・ルールを使うことによって，簡単に

$$(\forall i,j)\quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f^i(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e^j})-f^i(\boldsymbol{x}_0)\right)=f^i_j(\boldsymbol{x}_0)$$

---

(5)　e^j は，第 j 要素が 1，それ以外の要素は 0 である「単位ベクトル」を表している。

を得る。この式の右辺は，上で定義した $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_0)$ を用いると，

$$(\forall j = 1, 2, \ldots, n) \quad \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_0) = (f_j^1(\boldsymbol{x}_0), f_j^2(\boldsymbol{x}_0), \ldots, f_j^m(\boldsymbol{x}_0))'$$

となっている。

3.2　ジャコビアン行列

この段階で，本節のプリアンブルで述べたことを明示的に書くことが可能となる。すなわち，

定義 1（ジャコビアン行列）**.**　関数 $\boldsymbol{f} : X(\subseteq \mathbb{R}^n) \to Y(\subseteq \mathbb{R}^m)$ が点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}X$ でフレッシェ微分可能であると仮定する。このとき，関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ジャコビアン行列」は，$m \times n$ 行列であり（$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$ と表記される），

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0) := \begin{bmatrix} f_1^1(\boldsymbol{x}_0) & f_2^1(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & f_n^1(\boldsymbol{x}_0) \\ f_1^2(\boldsymbol{x}_0) & f_2^2(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & f_n^2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m(\boldsymbol{x}_0) & f_2^m(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & f_n^m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} \tag{3}$$

と定義される。　□

『微分』で詳述したように，フレッシェ微分とは，「滑らかな」関数を定義域上のある点において線形関数で局所的に近似することであった。集合 $X(\subseteq \mathbb{R}^n)$ から集合 $Y(\subseteq \mathbb{R}^m)$ の線形関数（線形作用素）[(6)] は $m \times n$ の行列で表現される。つまりジャコビアン $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$ とは，フレッシェ微分の意味で滑らかな関数 $\boldsymbol{f}$ を点 $\boldsymbol{x}_0$ の近傍で近似する線形作用素のことである。

式 $f_k^\ell(\boldsymbol{x}_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n; \ell = 1, 2, \ldots, m)$ は，$\dfrac{\partial f^\ell}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)$ と表記されることがある。この表記法では，どの変数で微分をしているかが明示的に書かれており，特に後段の例のように，変数ベクトルが必ずしも同一のアルファベットを異なるサブスクリプトで整列する形で書かれていないときなどには，上記の書き方よりも圧倒的に見やすい。この理由から，以下では，後者の式で偏微分をあらわすことにする。

よって，式(3)は，次のようになる。

（6）　線形空間上の実数値関数を「汎関数（functional）」，ベクトル値関数を「作用素（operator）」と呼ぶ。

$$
J_f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} \tag{4}
$$

フレッシェ微分可能であるような関数のジャコビアン行列は一般的に $m \times n$ 行列となるが，偶々 $m = n$ が成立している場合には（つまり，関数の定義域と値域の次元が一致しているときには），ジャコビアン行列は正方行列となる。このとき，ジャコビアン行列の「行列式[7]」が定義できる。すなわち，次を定義することができる。

定義 2（ジャコビアン）． 関数 $\boldsymbol{f} : X(\subseteq \mathbb{R}^n) \to Y(\subseteq \mathbb{R}^n)$ が点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}X$ でフレッシェ微分可能であると仮定する。このとき，関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ジャコビアン」は（$|J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)|$ と表記される），

$$
|J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)| := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{vmatrix} \tag{5}
$$

と定義される。 □

ジャコビアンは以下の分析で中心的な役割を担う重要な概念である。なお，ジャコビアン行列，および，ジャコビアンの表記においては，文脈から明らかなときには，関数 $\boldsymbol{f}$ および変数 $\boldsymbol{x}_0$ を省略し，単に，J あるいは $|J|$ と書くことがある。

4　非線形連立方程式

n と k を自然数とし，集合 X を $\mathbb{R}^{n+k}$ の部分集合とする。いま，関数 $\boldsymbol{F} : X \to \mathbb{R}^n$ を考え，これを次のように書くことにする。

---

(7)『線形代数』を参照のこと。

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X) \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F^1(\boldsymbol{x}), \ldots, F^n(\boldsymbol{x})).$$

ここで，$(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\ F^i : X \to \mathbb{R}$ である。

今，明示的に $\boldsymbol{x} = (y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_k)$ と書いて，次のような n 本の方程式からなるシステムを考える。

$$\begin{cases} F^1(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ F^2(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ F^n(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

一般に，各 F^i は線形関数であるとは仮定されていないので，n 本の方程式からなる体系(6)を「非線形連立方程式システム」と呼ぶ。また，一般に，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ のかたちで書かれた方程式の体系を「陰関数」と呼ぶため，式(6)を「陰関数システム」と呼ぶこともある。

システム(6)のそれぞれの方程式は，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ で表記された n 個の変数と，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ で表記された k 個の変数，併せて $n + k$ 個の変数を持っている。システム(6)の方程式の数 n と同じ次元の変数ベクトル $\boldsymbol{y}$ を「内生変数」と呼び，他方，$\boldsymbol{x}$ を「外生変数」と呼ぶ。

システム(6)をめぐるストーリーとして，以下のようなものを考えよう。まず，システムの「外部」で，システムのあずかり知らぬ理由で「外生変数 $\boldsymbol{x}$」の値が決定される。その後，まだ決定されていない残りの n 個の内生変数 $\boldsymbol{y}$ の値を，n 本の方程式からなるシステムの「内部」で決定する。このストーリーの精神から見ても分かるように，システムの外部で決まる k 個の外生変数は，分析の目的に沿って自由に選んでよい。

もちろん，このストーリーはずいぶんと雑なものである。システム(6)のそれぞれの方程式は非線形であるから，いくら方程式と変数の数が一致していたとしても，与えられた方程式のシステムが解けきれる保証は全くない。仮にすべての方程式が線形であったとしても，システム(6)が解けない場合があるのであるから（『線形代数』参照），非線形連立方程式についてはなおさらであろう。

しかし，とにかく，上のストーリーがうまく機能したとして，外生変数 $\boldsymbol{x}^0$ に特定の値が与えられたときに，システム(6)を解く内生変数 $\boldsymbol{y}^0$ が存在した場合（それは複数個存在するかもしれない），そのようなベクトルの組 $(\boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{x}^0)$ を，外生変数 $\boldsymbol{x}^0$ に対応するシステム(6)の「均衡点」と呼ぶ。

システム(6)のような非線形連立方程式の分析において，まず興味の対象となるのは，外生変数 $\boldsymbol{x}^0$ が任意に与えられたときに，果たして均衡点が存在するのか否かであろう。このことについて，次の例を考えてみよう。

例 1. 式 $x^2 + y^2 = 1$ で与えられる x と y の関係を考える。当然，これは，平面上で原点を中心

とする半径 1 の円のグラフを表している。

今，$F(y;x):=x^2+y^2-1$ と定義すると，上の関係は $F(y;x)=0$ のように，外生変数が x，内生変数が y であるような 1 本の方程式からなる陰関数（システム）の形に書くことが出来る。任意に x^0 の値が与えられたときに，この陰関数に均衡点 $(y^0;x^0)$ は存在するだろうか？ 外生変数 x^0 の値に依存して，いろいろなケースが存在することが分かる。(1) 外生変数を $x^0=\sqrt{2}$ としてみよう。このとき，均衡点 $(y^0;\sqrt{2})$ は存在しない（もちろん，実数の範囲内で考えている）。(2) 外生変数を $x^0=1$ としてみよう。このとき，$(y^0;x^0)=(0;1)$ が一意の均衡点として存在する。(3) 外生変数を $x^0=\sqrt{2}/2$ としてみよう。このとき，$(y^0;x^0)=(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ と $(y^0;x^0)=(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ の 2 つの均衡点が存在する。 □

この例からも分かるように，陰関数システムでは，外生変数の与え方によっては均衡点がない，という場合が存在する。

今の例で，均衡点をひとつ選ぶ（複数個ある場合には，その中からひとつを選ぶ）。例えば，$(y^0;x^0)=(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ としてみよう。これは均衡点であるから，当然，$F(y^0;x^0)=0$ と書けて，さらに，F の定義から，$y^0=\sqrt{(1-(x^0)^2}$ とも書ける。"関数"$f:[-1,1]\mapsto\mathbb{R}$ を $\sqrt{(1-(\cdot)^2}$ と定義すると，確かに，$f(x^0)=y^0$ は成立している。しかしこれは，選ばれた均衡点 $(y^0;x^0)$ において，$f(x^0)=y^0$ が偶々成立していることを主張しているだけであり，"関数"f がその定義域上の全体で定義されていることを意味しない。つまり，$y=f(x)$ と一般的な関数形で書くことはできない。理由は，仮に，均衡点が必ず存在するように定義域を制限したとしても，関数の値が複数個定まってしまう場合があり（上の例の(3)の場合），関数の定義に違反するからである[(8)]。そこで，非線形連立方程式のシステム（陰関数システム）が与えられたときに我々が行うことのできる分析は，まず，均衡点 $(y^0;x^0)$ をひとつ選び，その点の近傍における x^0 と y^0 の動向を，高々「局所的な」関数関係とみなすことによって，外生変数の変化による内生変数の変化を局所的に調べることである（ただしそれでも，$(y^0;x^0)=(0;1)$ のような，厄介な均衡点は存在する。後述）。

均衡点における外生変数の変化によって惹起された内生変数の変化（特に，その変化の方向）を局所的に調べることを「比較静学」と呼ぶ。これは，経済学では，極端に頻繁に行われる分析のひとつである。次節では，比較静学のための数学的ツールを学ぶことにする。

(8) このように，複数の要素を割り当てることのできる写像のことを，「多価写像」あるいは「対応」と呼ぶ。

5　陰関数定理

まず，陰関数定理を述べる。

定理 2（陰関数定理）． 陰関数システム(6)において，点 $(y_1^0,\dots,y_n^0;x_1^0,\dots,x_k^0)$ を $\boldsymbol{p}^0$ と表記して，$\boldsymbol{p}^0\in\mathrm{int}X$ を仮定する。さらに，$\boldsymbol{p}^0$ が次の 3 条件を満たすものとする：

（i） $\boldsymbol{p}^0$ の近傍 $N(\subset X)$ が存在して[(9)]，$(\forall i=1,\dots,n)$ $F^i\in C^1(N)$ である[(10)]。

（ii） $(\forall i=1,\dots,n)$ $F^i(\boldsymbol{p}^0)=0$。つまり，$(y_1^0,\dots,y_n^0;x_1^0,\dots,x_k^0)$ は $(x_1^0,\dots,x_k^0)$ が与えられたときのシステム(6)の均衡点である。

（iii） 点 $\boldsymbol{p}^0$ における，$\boldsymbol{F}$ の内生変数 $\boldsymbol{y}$ のみに関するジャコビアン[(11)]，が ゼロではない。すなわち

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y_1}(\boldsymbol{p}^0) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y_2}(\boldsymbol{p}^0) & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y_n}(\boldsymbol{p}^0) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y_1}(\boldsymbol{p}^0) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y_2}(\boldsymbol{p}^0) & \cdots & \dfrac{\partial F^2}{\partial y_n}(\boldsymbol{p}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y_1}(\boldsymbol{p}^0) & \dfrac{\partial F^n}{\partial y_2}(\boldsymbol{p}^0) & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y_n}(\boldsymbol{p}^0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

このとき，$(x_1^0,\dots,x_k^0)$ の近傍 $N'\subset\mathbb{R}^k$ と，N' 上で定義された実数値関数 $f^1,\dots,f^n$ が存在し，以下のすべてが成立する：

（a） $(\forall i=1,\dots,n)$　$f^i\in C^1(N')$

（b） $(\forall i=1,\dots,n)$　$f^i(x_1^0,\dots,x_k^0)=y_i^0$

（c） $(\forall i=1,\dots,n)(\forall(x_1,\dots,x_k)\in N')$

$$F^i(f^1(x_1,\dots,x_k),\dots,f^n(x_1,\dots,x_k);x_1,\dots,x_k)=0 \tag{8}$$

この定理の証明は省略する（ただし，**7** 節を参照）。陰関数定理の内容を直観的に敷衍すると，選

（9） ある点の「近傍」とは，その点を内点として含む開集合のことである。

（10）最後の条件は，F^i が N 上で，連続微分可能であることを要求している。この条件を，そもそも $\boldsymbol{F}$ のフレッシェ微分に関わる条件として述べることは簡単であるが，有限次元のみを考えている現在の場合には，すべての F^i に対して直接仮定するほうが見やすいため，以下ではこのように書くことにする。

（11）本来のジャコビアン行列から，外生変数 $\boldsymbol{x}$ による偏微分で構成される列をすべて削除した行列の行列式のこと。

ばれた均衡点においてジャコビアンがゼロでないならば（(iii)），その均衡点の近傍上に外生変数のみを変数とする関数 f^i が存在して，内生変数を関数 f^i の値として局所的に解くことができ（(c)），しかもその関数 f^i は連続微分可能である（(a)），ということである。また，（(b)）は，そもそも関数 f^i が均衡点と整合的であることを保証してくれている。

今，システムが均衡点 $\boldsymbol{p}^0$ にあり，そこでのジャコビアン(7)がゼロではないとする。このとき，外生変数の微小な変化が内生変数に与える変化の分析，すなわち比較静学を行うことができる。まず，仮定により，均衡点 $\boldsymbol{p}^0$ の近傍で，F^i $(i=1,\ldots,n)$ は連続微分可能（C^1-級）である。次に，定理の結果(a)から，均衡点の近傍で，f^i $(i=1,\ldots,n)$ も連続微分可能となることが分かる。ゆえに，F^i $(i=1,\ldots,n)$ と f^i $(i=1,\ldots,n)$ のすべてについて，それを均衡点で微分することが可能となるのである。

それでは，インデックス j を固定して，定理の結果(c)によって均衡点の近傍での成立が保証されている式(8)の両辺を x_j で（チェイン・ルールを使って）微分してみよう。これによって，次式を得る：

$$(\forall i=1,2,\ldots,n) \quad \frac{\partial F^i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F^i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial F^i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}+\frac{\partial F^i}{\partial x_j}=0$$

（ただし，ここでは，すべての変数を省略して書いている。）これを行列表示によって書き換えると，$\boldsymbol{p}^0$ の近傍上で

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x_j} \end{bmatrix} \tag{9}$$

が成立することが分かる。

陰関数定理の仮定(3)により，左辺の行列の行列式，すなわち，ジャコビアンは，均衡点 $\boldsymbol{p}^0$ でゼロではない。したがって，連立線形方程式(9)（列ベクトル $(\partial y_1/\partial x_j,\ldots,\partial y_n/\partial x_j)'$ を，求めるべき解とみなす）は点 $\boldsymbol{p}^0$ において，一意に解を持つことが分かる（『線形代数』参照）。さらに，Cramer's Rule でも，ガウスの消去法でも，なんでもいいから使って計算すると，全ての i について $(\partial y_i/\partial x_j)(\boldsymbol{p}^0)$ を求めることが出来る。また，他のインデックス $j' \neq j$ についても，$x_{j'}$ による微分の効果を同様の手続きで求めることができる。

以上のことは，結局，個々の外生変数の僅かな変化が均衡点に及ぼす効果を求めたことに他ならず，比較静学の問題に答えたことになっている。特に，陰関数を明示的に，すなわち $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のかたちに解くことができない場合でも，陰関数定理による局所的な分析が可能であることを示して

いる。[12]

例 2（承前）. 例 1 と同様に，関数 $F(y;x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が，$F(y;x):=x^2+y^2-1$ で定義され，陰関数が $F(y;x)=0$ で与えられているとする。まず，均衡点として

$$\boldsymbol{p}^0=(y^0;x^0)=(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$$

を考えよう。このとき，陰関数定理の条件(i)，(ii)が満たされていることは自明である。この均衡点におけるジャコビアンは,

$$|J|=\left.\frac{\partial F(y;x)}{\partial y}\right|_{(y;x)=(y^0;x^0)}=\left.2y\right|_{y=y^0}=2y^0=\sqrt{2}\neq 0$$

であるから，陰関数定理の条件(iii)も満たされていることが分かる。[13]

よって陰関数定理が発動可能である。つまり，均衡点の周りで y を局所的に x の関数として $y=f(x)$ のかたちで解くことができる（このように明示的に解けることが保証されるのは，あくまで局所的，すなわち，均衡点のごくごく近くでだけであることは強調しておく必要がある）。したがって，均衡点の近傍で，$F(y(x);x)=0$ と書くことができて，しかも，F も f もそこでは微分可能であるのだから，チェイン・ルールを使って，この式の両辺を x で微分することができる。結論として，この均衡点の近傍では,

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial x}=2y\cdot\frac{dy}{dx}+2x=0$$

が成立し，この式から，$dy/dx=-x/y=-1$ となることが分かる。

このことは，均衡点で外生変数 x がわずかに増加すると，内生変数が x の増加分とほぼ同じだけ減少することが分かった。非常に簡単（過ぎる？）例ではあるが，これが比較静学の 1 例である。 □

例 3（承前）. 前の例と全く同じ設定で，均衡点だけ,

$$\boldsymbol{p}^0=(y^0;x^0)=(0;1)$$

に変更しよう。陰関数定理の仮定(i)，(ii)が成立することは前の例と同様である。そこで，次に仮定(iii)について見てみよう。均衡点におけるジャコビアンは,

$$|J|=\left.\frac{\partial F(y;x)}{\partial y}\right|_{(y;x)=(y^0;x^0)}=\left.2y\right|_{y=y^0}=2\cdot 0=0$$

---

(12) 仮に，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と，内生変数を外生変数の関数として「完全に解き切ること」ができる場合には，比較静学の問題が極端に簡単になることは言うまでもないだろう。

(13) 少し不安なので言っておくと，ジャコビアンで使われる行列式の記号 $|\cdot|$ は絶対値の記号ではない。

となり，陰関数定理の重要な仮定：$|J| \neq 0$ が成立していないので，この均衡点の周りでは y を局所的にでさえも x の関数として解くことは出来そうもない。比較静学の実行は，この均衡点では保証されないのである。 □

6　関数形特定化による比較静学の具体例

マクロ経済学の分析ツールで IS-LM モデルと呼ばれるものがある（あった）。筆者自身は，IS-LM モデルにほとんど興味はないものの，いまだに使われているという噂もあるし，何より，比較静学を解説するにはうってつけの関数例になっているので，あくまで数学的な厳密性に準拠しつつ，比較静学を行う手順をこのモデルを使って説明していくことにする。

数学的な主張と，経済学的解釈の記述を峻別する目的で，経済学的解釈の部分は**太字**を用いて書くことにする。

6.1　若干の準備

次の 2 本の式からなる非線型連立方程式により記述されるマクロ経済システムを考える。

$$Y = c(Y, r) \; + \; h(r) \tag{10}$$

$$\frac{M^s}{P} = \ell(Y, r) \tag{11}$$

ここで，Y は**実質国内総生産（実質 GDP）**，$c(\cdot,\cdot)$ は**消費関数**，r は**（ネットの）実質利子率**[14]，$h(\cdot)$ は**投資関数**，M^s は**名目貨幣残高供給**，P は**一般物価水準**，$\ell(\cdot,\cdot)$ は**貨幣需要関数**，あるいは，**流動性選好関数**をそれぞれ表している。また，すべての関数はそのしかるべき定義域上で連続微分可能であると仮定されている。

まず，式(10)から概観していこう。**消費関数は，消費水準は国民所得水準と実質利子率によって決定され，投資関数は，投資水準は実質利子率のみによって決定されるという仮定を表している。また，実質 GDP は，賃金，その他を通して，国民に完全に分配され尽くすと仮定する。したがって，実質 GDP と国民所得水準は常に等しい。**

さらに，今述べた関数は以下の条件を満たしていると仮定する：

$$0 < \frac{\partial c}{\partial Y} < 1\,, \quad \frac{\partial c}{\partial r} < 0\,, \quad \frac{dh}{dr} < 0$$

---

(14) ここで「ネット」の意味は，利子率が仮に 3%であったとすると，ネットの利子率は $r = .03$ と書かれ，「グロス」の利子率は $1 + r = 1.03$ と書かれると約束する，ということを指す。

最初の偏微分の仮定は，国民所得水準の増加は消費を増やすが，その消費の増加分（「限界消費性向」）は所得の増加分よりも小さく，その差額が貯蓄に回されると主張する「ケインズの消費関数」と呼ばれる関係を反映している。2 番目の偏微分の仮定は，実質利子率の増加は，貸付の利益を増加させ，貸付の源泉である貯蓄の需要を増加させることによって，貯蓄と補完的な消費の需要を低くすることを表している。企業は，投資家（家計）から借り入れをして開発・生産を行った製品が，利子率を上回る利益率を生む場合にしか生産を実行に移さないであろう。ゆえに，実質利子率の増加は，当然，それよりもさらに高い利益率を生み出す潜在的な製品が減っていくと仮定するならば（自然な仮定と思われる），企業の行う投資水準を減少させる。これが最後の微分の仮定の意味である。

経済の総需要は，消費需要と投資需要とからなるとしよう（いまは，政府の存在を仮定しない。もしそれが存在していれば，公共投資などの政府支出が総需要に加わることになる）。実質 GDP（つまり，総供給）は，総需要に等しくなるように決定されると考えるのがケインズ流の「有効需要の原理」である。ここではこの原理を正しいものとして採用することにする。つまり，個々の財の価格が需要と供給の双方を調整し，それらの一致を導くとする「古典派的」なフレームワークは採用しない。(15)

いずれにしても，式(10)は，財市場の需給の均衡状態を表していて，「I-S 曲線」と呼ばれる。(16)

次に，式(11)に移ろう。貨幣需要関数 $\ell(\cdot,\cdot)$ は，実質貨幣残高需要が国民所得と実質利子率の関数として決定されるという仮定を表していて，さらに，これら 2 つの変数に関する偏微分に以下の仮定をおく：

$$\frac{\partial \ell}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial r} < 0$$

前者は，国民所得の増加に伴い取り引き機会が増えると，交換手段として直ぐに利用可能な（つまり，流動性の最も高い）貨幣を保有する動機が高まるとする仮定であり，後者は，利子率の上昇は利子を生む債券による資産の保有形態を相対的に有利にし，その結果，貨幣に対する需要が減ることを表現した仮定である。このような貨幣に対する需要を「流動性選好」というために，ℓ を「流動性選好関数」とも呼ぶわけである。

これで，式(11)を解釈する準備が整った。同式の左辺は，市場に存在している名目の貨幣残高を一般物価水準で除したものであるから，実質貨幣残高の供給を表している。一方，右辺は，貨幣に対する実質需要を表している。すなわち，式(11)は，貨幣市場の需給均衡を表している式であり，「L-M 曲線」と呼ばれる。

貨幣需要関数 ℓ が次のような特別なかたちをしているとする考えを「貨幣数量説」と呼ぶ：

(15) 執拗に繰り返すが，経済学上の論争を検討することが本稿の目的ではない。

(16) この文章中（および，以下の経済学的解釈）に登場する「均衡」という単語と，本稿で多用している均衡点の均衡は，関係がないとは言えないが，基本的には全く異なる概念である。老婆心ながら一言注意しておく。

$$\ell(Y, r) = kY \tag{12}$$

この説では，k は正の実定数と仮定され，**貨幣需要は国民所得の常に一定割合であると主張する。**式(12)を L-M 曲線に代入すると，$PY/M = 1/k$ を得るが，貨幣数量説では左辺が $1/k$ という定数になる。**定数 $1/k$ は 1 単位の貨幣が 1 年間に何回流通しているかを表していて，「貨幣の流通速度」と呼ばれる。**

いま，**I-S 曲線と L-M 式曲線からなる非線型連立方程式において，財市場の均衡と貨幣市場の均衡，すなわち，経済全体の均衡状態が達成された状態が示されている。**式(10)，および，式(11)からなる非線形連立方程式のシステムに比較静学を適用するのがこの節の主目的であるが，それを次の小節で行うことにしよう。

6.2　比較静学の実行：その 1

まず，式(10)の 1 本からなる陰関数システムを考えることから始める。2 つある変数（Y と r）の内，Y を内生変数，r を外生変数とする。このあたりは自由に決めて構わない。これを

$$F^1(Y; r) := Y - c(Y, r) - h(r) = 0$$

と書くことにしよう。現在，均衡点にあるとして，$(^0)$ は省略して書かないことにする。すべての関係する関数は連続微分可能であると仮定しているので（このことにも，以下ではいちいち触れない)，陰関数定理の仮定(i)，(ii)は満足されている。そこで，残されたジャコビアンの仮定を調べる。ジャコビアンは，

$$|J| = \frac{\partial F^1}{\partial Y} = 1 - \frac{\partial c}{\partial Y} > 0$$

となり，ゼロとはならない（関数 c の仮定を使った)。

したがって，陰関数定理により，均衡点の近傍で Y を r の関数として解くことができる。そこで，式(10)の両辺を（チェイン・ルールを使い）r で微分して整理すると，

$$\frac{dY}{dr} = \left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r}\right) \Bigg/ \left(1 - \frac{\partial c}{\partial Y}\right) < 0$$

を得る（関数 c と関数 h の仮定を使った)。均衡点を任意に選んだことを想起すると，この関係は，局所的のみならず，それなりに大局的にも成立していると考えてよい。**従って，経済学の慣例に倣って，「価格」と解釈できる $\boldsymbol{r}$ を縦軸，数量と解釈できる $\boldsymbol{Y}$ を横軸に測ることにすると，I-S 曲線は右下がりのグラフとして平面座標上にプロットできることになる。この右下がりのグラフは，財市場が均衡するような実質 GDP と実質利子率の組み合わせの軌跡を表していると解釈できる。**

次に，式(11)に移る。式(10)のときと同様に，Y を内生変数，r を外生変数とする次の陰関数を考えよう：

$$F^2(Y;r) := \frac{M^s}{P} - \ell(Y,r) = 0\,.$$

ジャコビアンを計算すると

$$|J| = \frac{\partial F^2}{\partial Y} = -\frac{\partial \ell}{\partial Y} < 0$$

となり，ゼロとはならない（関数 ℓ の仮定を使った）。

したがって，陰関数定理により，均衡点の近傍で Y を r の関数として解くことができる。そこで，式(11)の両辺を（チェイン・ルールを使い）r で微分して整理すると，

$$\frac{dY}{dr} = -\frac{\partial \ell}{\partial r}\Bigg/\frac{\partial \ell}{\partial Y} > 0$$

を得る（関数 ℓ の仮定を使った）。均衡点を任意に選んだことを想起すると，この関係は，局所的のみならず，それなりに大局的にも成立していると考えてよい。従って，経済学の慣例に倣って，「価格」と解釈できる r を縦軸，数量と解釈できる Y を横軸に測ることにすると，L-M 曲線は右上がりのグラフとして平面座標上にプロットできることになる。この右上がりのグラフは，貨幣市場が均衡するような実質 GDP と実質利子率の組み合わせの軌跡を表していると解釈できる。

ここで，貨幣数量説を採用したときの L-M 曲線の形状について考えてみよう。このとき，L-M 曲線は

$$F^2(Y;r) := \frac{M^s}{P} - kY = 0$$

であり，ジャコビアンは，$|J| = \partial F^2/\partial Y = -k \neq 0$ となる。よって，陰関数定理により，$dY/dr = 0$ となる。これは，均衡点において，内生変数である Y は，外生変数である r の変化に対して全く反応しないことを意味している。つまり，上述した座標平面上にプロットすると，貨幣数量説の L-M 曲線は垂直になる。この L-M 曲線を「マネタリストの L-M 曲線」と呼ぶことがある。

6.3　比較静学の実行：その 2

それではいよいよ，式(10)と式(11)からなる非線形連立方程式のシステムの比較静学に進もう。

変数 Y と変数 r を内生変数とし，変数 M^s と変数 P を外生変数とする。いま，システムは均衡点にあると仮定する。式(10)と式(11)を同時に満たしている内生変数と外生変数の組が今の均衡点であるが，式(10)を単独で内生変数間の関数と見たときのグラフが大域的に右下がりで，一方，式(11)のそれが大域的に右上がり（あるいは，垂直）であることから，均衡点は 2 つのグラフの交点として一意に確定していると考えることにする。この均衡点は，偶々，財市場の均衡と貨幣市場の均衡が同時に成立している状況，すなわち，経済の均衡に対応している。

外生変数のうち，一般物価水準 P は歴史的に決定されたある水準で固定されており，変動しない（あるいは，変動しづらい）と解釈することにする。これは，ケインズによる「価格硬直性」の仮定と呼ばれるケインズ経済学に特徴的な性質である。したがって，一般物価水準 P の変化が均衡点に与

える影響については，この文脈では考えにくい。その一方で，名目貨幣供給 $\boldsymbol{M^s}$ は政策当局によってある一定水準に留まるようにある程度コントロールすることが可能であり，貨幣政策の効果を見る上で，$\boldsymbol{M^s}$ のシステムの外部で決定される変化，すなわち，その外生的な変化を考えることには，この文脈でも意味がある。

そこで，均衡点において，内生変数の Y と r が，外生変数 P の変化によってどのような影響を受けるのか，比較静学分析を行ってみよう。

まず，式(10)と式(11)を次のように陰関数システムに書き直す：

$$\begin{cases} G^1(Y, r; M^s) := Y \; - \; c(Y, r) \; - \; h(r) \; = \; 0 \\ \\ G^2(Y, r; M^s) := \qquad \dfrac{M^s}{P} \; - \; \ell(Y, r) \; = \; 0 \end{cases} \tag{13}$$

関数 $\boldsymbol{G^1}$ と $\boldsymbol{G^2}$ はそれぞれ，財市場の超過供給関数，および，貨幣市場の超過供給関数と呼ばれる。早速，ジャコビアンを計算してみよう：

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial G^1}{\partial r} \\ \dfrac{\partial G^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial G^2}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\partial c}{\partial Y} & -\dfrac{\partial c}{\partial r} - \dfrac{\partial h}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial \ell}{\partial Y} & -\dfrac{\partial \ell}{\partial r} \end{vmatrix} \\ &= -\left(1 - \frac{\partial c}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial \ell}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial \ell}{\partial Y}\right) = -(+)(-) - (-)(+) > 0\,. \end{aligned}$$

ジャコビアンはゼロではないことが分かった。ゆえに，均衡点の近傍で，内生変数 Y と r は，外生変数 M^s の関数として局所的に表現することが可能となり，式(13)にその事実を反映し，Y は $Y(M^s)$ に，r は $r(M^s)$ にと，関数の形に書くことができる。

このように書き直した式(13)の両辺を（いつものように，チェイン・ルールを使って）M^s で微分し，行列のかたちで整理したものが次の式である：

$$J \begin{bmatrix} \dfrac{dY}{dM^s} \\ \dfrac{dr}{dM^s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G^1}{\partial M^s} \\ \dfrac{\partial G^2}{\partial M^s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{P} \end{bmatrix}$$

この式で，J はジャコビアン行列（ジャコビアンで行列式をとる前の行列）を表している[17]。ここで，dY/dM^s を求めるために Cramer's rule を用いると，

$$\frac{dY}{dM^s} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial c}{\partial r} - \dfrac{\partial h}{\partial r} \\ -\dfrac{1}{P} & -\dfrac{\partial \ell}{\partial r} \end{vmatrix} = -\frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{P}\right) = -\frac{1}{(+)}(-)(+) > 0 \;\; (\textbf{!})$$

(17) この手の計算では，この位置に必ずジャコビアン行列が現れる。

を得る。つまり，均衡点において，外生変数 M^s の増加は，内生変数 Y を増加させる。このことから，貨幣供給量を増加させると，均衡国民所得水準は増加することが分かる。つまり，貨幣政策は景気対策として有効な手段であることになる。

特に，貨幣数量説（式(12)）を仮定した場合には $|J| = -k(\partial c/\partial r + \partial h/\partial r)$ となり，よって

$$dY/dM^s = 1/kP = Y/M^s \quad i.e. \quad (dY/Y)/(dM^s/M^s) = 1$$

が成立する。つまり，貨幣供給の増加はそれと同じ比率で均衡国民所得を増加させ，貨幣政策は極めて有効な景気浮揚政策として機能することになる。

7　参考文献等

本稿は，陰関数定理の証明を除いて，筆者が過去に書いた 2 つの解説『線形代数』と『微分』のみを基にして書いた。したがって，本稿の参考文献は（陰関数定理の証明を除いて）この 2 つの解説の参考文献に網羅されている。よって，ここで改めて紹介することはしないので，過去の 2 つの解説を見てほしい。

陰関数定理については，三村征雄『微分積分学 II』（岩波全書，1973 年，p. 222）に読みやすい証明が載っているので，それを参考にしてください。