

Title	Young測度の積分々解
Sub Title	Theory of disintegration of young measures
Author	丸山, 徹(Maruyama, Tōru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2019
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.112, No.2 (2019. 7) ,p.107(11)- 143(47)
JaLC DOI	10.14991/001.20190701-0011
Abstract	Young 測度の積分々解, つまりRadon 測度の可測族による表現の存在および一意性を体系的に述べる。若干の予備的な理論についても必要な限りで解説する。 The main purpose of this article is to discuss the existence and uniqueness of a representation (disintegration) of a Young measure by means of a measurable family of Radon probability measures. Some preparatory materials are also presented.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20190701-0011

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Young 測度の積分々解

丸山 徹^{*}

Theory of Disintegration of Young Measures

Toru Maruyama^{*}

Abstract: The main purpose of this article is to discuss the existence and uniqueness of a representation (disintegration) of a Young measure by means of a measurable family of Radon probability measures. Some preparatory materials are also presented.

Key words: Young measure, disintegration, measurable family of measures

JEL Classifications: C02, C61

本稿は慶應義塾大学大学院経済学研究科，および東京大学大学院数理科学研究科における筆者の講義の一部に基づいている。またこの内容は近刊を予定される筆者の論文 “Disintegration of Young Measures and Nonlinear Analysis”, *Advances in Mathematical Economics*, Vol. 23 (Springer) の第 1-2 節に概ね同じである。

^{*} 慶應義塾大学名誉教授

Professor Emeritus, Keio University

序

I を実軸 $\mathbb{R}$ の単位区間, つまり $I = [0, 1]$, $\mathcal{L}$ を I 上の Lebesgue 可測集合がつくる σ -集合体, m は Lebesgue 測度とする。また $\{\nu_\omega \mid \omega \in I\}$ は $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}(\mathbb{R}^l))$ 上の有限測度の族とし, ここで $\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ は $\mathbb{R}^l$ 上の Borel σ -集合体である。すべての $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ について, 函数 $\omega \mapsto \nu_\omega(B)$ が I から $\mathbb{R}$ への可測函数であるとき, $\{\nu_\omega \mid \omega \in I\}$ を可測族と称する。

任意の $A \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ に対して

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}^l} \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega$$

と定義される函数 ($I \rightarrow \mathbb{R}$) は可測であることが示されるので, この函数の I 上での積分を定義することができる。(χ_A は集合 A の特性函数である。) そこで $(I \times \mathbb{R}^l, \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l))$ 上の測度 γ が⁽¹⁾

$$\gamma(A) = \int_I \left\{ \int_{\mathbb{R}^l} \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \right\} dm \quad (1)$$

と表現されるとき, これを測度 γ の, 可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in I\}$ による積分々解という⁽¹⁾。(1)は

$$\gamma(A) = \int_I \left\{ \int_{I \times \mathbb{R}^l} \chi_A(\omega, x) d(\delta_\omega \otimes \nu_\omega) \right\} dm \quad (1')$$

と書いても同じであるから, これを記号的に

$$\gamma = \int_I \delta_\omega \otimes \nu_\omega dm \quad (2)$$

と表記する。 δ_ω は点 $\omega \in I$ に質量 1 を置く Dirac 測度である。

可測族の特別の場合として, 可積分函数 $x: I \rightarrow \mathbb{R}^l$, つまり $x(\cdot) \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l)$ に対して $\{\nu_\omega = \delta_{x(\omega)} \mid \omega \in I\}$ と定義される族を考える。また

$$\gamma = \int_I \delta_\omega \otimes \delta_{x(\omega)} dm \quad (3)$$

なる測度 γ は積分々解を有する初等的な, しかし重要な事例である。

さてしかるべき性質を具えた函数 $f: I \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき, $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l)$ 上の汎函数 $J: \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J: x(\cdot) \mapsto \int_I f(\omega, x(\omega)) dm \quad (4)$$

と定義してみよう。一方, ある $x(\cdot) \in \mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l)$ を用いて, (3)の形の積分々解を有する測度の集合を $\Delta(\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l))$ とし, 汎函数 $H: \Delta(\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l)) \rightarrow \mathbb{R}$ を

(1) η を $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}(\mathbb{R}^l))$ 上の有限測度とし, すべての $\omega \in I$ に対して $\nu_\omega = \eta$ とすれば, これはもちろん可測族を成し, 対応する γ は直積測度 $m \otimes \eta$ にほかならない。

$$H: \gamma = \int_I \delta_\omega \otimes \delta_{x(\omega)} dm \longmapsto \int_{I \times \mathbb{R}^l} f(\omega, x) d\gamma \quad (5)$$

と定めれば、(4)と(5)は同じ内容の異った表現にすぎない。しかし J が $\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l)$ 上の非線汎函数であるのに対して、やや不正確な言葉づかいをあえてすれば、 H は f に働く作用素としての測度 γ を変数と見た“線形”の汎函数である⁽²⁾。

また基本的な変分問題に現われる、たとえば連続微分可能な函数空間 $\mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^l)$ 上の汎函数⁽³⁾

$$x(\cdot) \longmapsto \int_I f(\omega, x(\omega), \dot{x}(\omega)) dm$$

もちろん非線形であるが、積分々解を有する測度の概念を利用して“線形化”する道がひらかれる。

積分々解を有する測度を用いて、変分学や非線形偏微分方程式などをはじめとする各種の領域に見とおしのよいルートがひらかれるのであるが、そのためにはまず次の二問題に精密な解答を準備しておく必要がある。

第一に、 $(I \times \mathbb{R}^l, \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l))$ 上の測度 γ が積分々解によって表現可能となるための条件の究明。

第二に、そのような測度がつくる空間の函数解析的性質の十分な吟味。

本稿の目標は、これらのうち第一の問題について、必要な限り一般的な枠組のなかで答えようとすることにある。第二の問題および上記のような応用面については、やがて稿をあらためて論じたい。

積分々解全般に関する総合的な研究としては Castaing, Raynaud de Fitte and Valadier [6], Schwartz [26] および Valadier [29], [30] などがあり、もちろん本稿もこれらに多くを負っている。

I 測度の可測族

既に序においても述べた可測族の概念を、より一般的な設定で論じよう。

定義 $(\Omega_1, \mathcal{E}_1), (\Omega_2, \mathcal{E}_2)$ をふたつの可測空間、 μ_1 を $(\Omega_1, \mathcal{E}_1)$ 上の測度、さらに函数 $\theta: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ は可測とする。このとき、各 $E \in \mathcal{E}_2$ について

$$\mu_2(E) = (\mu_1 \circ \theta^{-1})(E) = \mu_1(\theta^{-1}(E))$$

として定まる $(\Omega_2, \mathcal{E}_2)$ 上の測度 μ_2 を、 θ を媒介とする μ_1 の像測度 (image measure of μ_1 via θ) と呼ぶ。

(2) $\Delta(\mathfrak{L}^1(I, \mathbb{R}^l))$ は線形空間ではないので、 H が“線形”の汎函数であるという表現は、もとより厳密ではない。また(4)におけるような役割を果たす f を、非線形積分核などと呼ぶことがある。

(3) あるいはより一般的に Sobolev 空間、たとえば $\mathfrak{W}^{1,2}(I, \mathbb{R}^l)$ 上で考える場合もある。

(4) Berliocchi–Lasry [1] はこの方面の研究の先駆である。ほかに、Maruyama [22]。

(5) たとえば Evans [12] に明快な説明がある。

像測度について次の性質が成り立つことは容易に確認することができる。

1° $f: \Omega_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を非負可測あるいは μ_2 -可積分函数とすれば

$$\int_{\Omega_2} f d\mu_2 = \int_{\Omega_1} f \circ \theta d\mu_1.$$

2° $(\Omega_3, \mathcal{E}_3)$ も可測空間, $\tau: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ を可測函数とすれば,

$$\mu_1 \circ (\tau \circ \theta)^{-1} = \mu_2 \circ \tau^{-1}.$$

以下, とくにことわらない限り, $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間, また X は Hausdorff 位相空間で, $\mathcal{B}(X)$ はその Borel σ -集合体を表わすものとする。

さらに直積空間 $\Omega \times X$ から Ω への射影を π_Ω , X への射影を π_X と書き表わす。

定義 $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の (正值) 測度のうち,

$$\gamma \circ \pi_\Omega^{-1} = \mu$$

を満たす γ を **Young 測度** (Young measure) と呼ぶ。また

$$\gamma \circ \pi_\Omega^{-1} \leq \mu$$

を満たす γ を **劣 Young 測度** (sub-Young measure) と称する。Young 測度の全体を $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$, 劣 Young 測度の全体を $\mathfrak{Y}_s(\Omega, \mu; X)$ と書く。

定義 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度の族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ が, すべての $B \in \mathcal{B}(X)$ について

$$\omega \mapsto \nu_\omega(B)$$

が可測という条件を満たすとき, $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は **可測族** (measurable family) であるという。

より一般に, $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ が $|\nu_\omega| < \infty$ を満たす複号測度の族で, $\{\nu_\omega^+ \mid \omega \in \Omega\}$ および $\{\nu_\omega^- \mid \omega \in \Omega\}$ がともに可測族であるとき, $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は可測族であるという。ここで ν_ω^+ (resp. ν_ω^-) は ν_ω の Jordan 分解の正の部分 (resp. 負の部分), また $|\nu_\omega|$ は ν_ω の全変動である。

定理 1 (X, ρ) を距離空間とすると, $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度の族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ について, 次の二命題は同値である。

- (i) $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は可測族である。
(ii) 任意の $f \in \mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$ に対して, 函数

$$\omega \mapsto \int_X f(x) d\nu_\omega$$

は可測である。⁽⁶⁾

さらに (X, ρ) が局所コンパクトかつ σ -コンパクトな距離空間の場合は, (i) および (ii) は次の (iii) とも同値である。

- (iii) 任意の $f \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ に対して, 函数

$$\omega \mapsto \int_X f(x) d\nu_\omega$$

は可測である。⁽⁷⁾

証明 (i) $\implies$ (ii) : 一般性を失うことなく, $f \in \mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$ は非負と仮定してよい。このとき非負単函数の列 $\{\varphi_n\}$ を

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &\longrightarrow f(x) \quad \text{as } n \longrightarrow \infty, \\ \varphi_n(x) &\leq \varphi_{n+1}(x)\end{aligned}$$

を満たすように構成することができる。(i)により,

$$\omega \mapsto \int_X \varphi_n(x) d\nu_\omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

は可測であるから,

$$\omega \mapsto \int_X f(x) d\nu_\omega = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) d\nu_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n(x) d\nu_\omega$$

(単調収束定理)

なる函数も可測である。

- (ii) $\implies$ (i) : まず $\mathcal{B}(X)$ のうち閉集合 F について調べてみよう。函数列 $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$f_n(x) = \text{Max}\{1 - n\rho(x, F), 0\}$$

と定義すると (図 1 参照), $f_n \in \mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$ で

(6) $\mathfrak{C}^b(X, \mathbb{R})$ は X 上で定義された有界な連続実数値函数の集合である。

(7) 一般に X を局所コンパクトかつ Hausdorff な位相空間, その上で定義された実数値函数 $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える。任意の $\varepsilon > 0$ に対して, X のコンパクト集合 K_ε を適当に選び, すべての $x \in X \setminus K_\varepsilon$ において $|g(x)| < \varepsilon$ となしうるとき, g は無限遠において消える (vanishing at infinity) という。 X 上で定義され, 無限遠において消える連続な実数値函数の集合を $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ と書き表わす。

$$f_n(x) \longrightarrow \chi_F(x) \quad \text{as } n \longrightarrow \infty,$$

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$$

である。(ii)により,

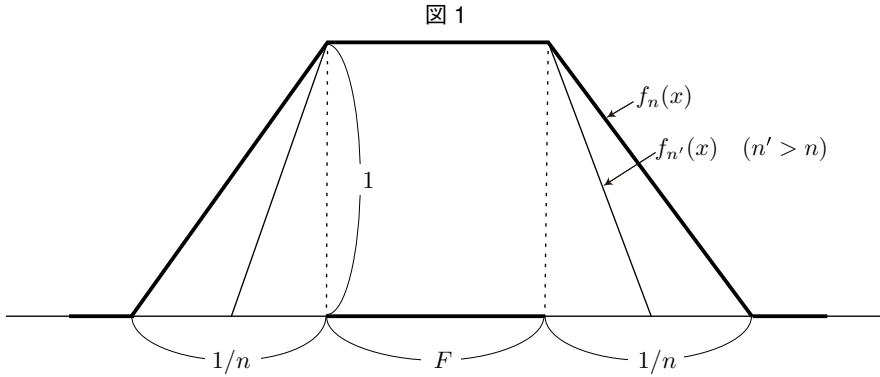
$$\omega \longmapsto \int_X f_n(x) d\nu_\omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

はすべて可測である。しかるに

$$\nu_\omega(F) = \int_X \chi_F(x) d\nu_\omega = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\nu_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\nu_\omega$$

(単調収束定理)

であるから、函数 $\omega \longmapsto \nu_\omega(F)$ は可測函数列(1)の極限であり、したがって可測となる。



次に閉集合に限らない、一般の Borel 集合について調べよう。いま

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B}(X) \mid \omega \longrightarrow \nu_\omega(B) \text{ は可測} \}$$

とすれば、 $\mathcal{B}'$ はすべての閉集合を含む Dynkin 族⁽⁸⁾である。一方、閉集合の族は乗法的であるから、Dynkin 族定理により、閉集合族の生成する Dynkin 族と $\mathcal{B}(X)$ とは合致する。ゆえに $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}(X)$ となり、(i)の成り立つことが知られる。

次に、 X についての追加的仮定の下に、たとえば(i)と(iii)の同値性を示すのであるが、(i) $\implies$ (iii) は上記 (i) $\implies$ (ii) の証明と全く同様にすればよい。

(8) 集合 Z の部分集合族 $\mathcal{D}$ が次の三条件を満たすとき、これを **Dynkin 族** (Dynkin class) と呼ぶ。

(a) $A_n \in \mathcal{D}, A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. (b) $A_1, A_2 \in \mathcal{D}, A_1 \subset A_2 \implies A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{D}$.

(c) $Z \in \mathcal{D}$. また Z の集合族が有限個の共通部分をとる演算について閉じているとき、この族は乗法的 (multiplicative) であるという。

Dynkin 族定理 Z の集合族が乗法的であるとき、それが生成する Dynkin 族と σ -集合体は一致する。

たとえば伊藤 [17] p. 50 などを参照。

(iii) $\implies$ (i) を示すためには、 X の任意の閉集合 F に対して、函数 $\omega \mapsto \nu_\omega(F)$ の可測性を確かめれば十分である。 X は σ -コンパクトなので、 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ を満たす可算個のコンパクト集合 $K_n (n = 1, 2, \dots)$ が存在する。もちろん $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap K_n)$ である。(ii) $\implies$ (i) の証明と同様にして

$$\omega \mapsto \nu_\omega \left(F \cap \left(\bigcup_{j=1}^n K_j \right) \right) = \int_X \sup_{1 \leq j \leq n} \chi_{F \cap K_j}(x) d\nu_\omega$$

は可測である。したがって

$$\begin{aligned} \omega \mapsto \nu_\omega(F) &= \int_X \sup_n \chi_{F \cap K_n}(x) d\nu_\omega \\ &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq n} \chi_{F \cap K_j}(x) d\nu_\omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sup_{1 \leq j \leq n} \chi_{F \cap K_j}(x) d\nu_\omega \end{aligned}$$

(単調収束定理)

は可測函数列の極限なので、やはり可測である。 (証了)

次に可測函数 $f: \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して、函数

$$\omega \mapsto \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega$$

がやはり可測であることを確かめておこう。ふたつほど補題を用意する。

補題 1 集合族 $\{E \times F \mid E \in \mathcal{E}, F \text{ は } X \text{ の閉集合}\} \equiv \mathcal{R}$ の生成する σ -集合体は $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に等しい。

証明 $\mathcal{R}$ の生成する σ -集合体が $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に含まれるのは明らかなので、逆の包含関係だけを示せばよい。 $\mathcal{B}(X)$ の元 B のうち、 $E \times B (E \in \mathcal{E})$ が $\mathcal{R}$ の生成する σ -集合体に属するものの族を $\mathcal{B}'$ とすると、 $\mathcal{B}'$ は Dynkin 族である。 X のすべての閉集合の族は乗法的で、 $\mathcal{B}'$ に含まれることは明らかである。 X のすべての閉集合の族が生成する Dynkin 族は $\mathcal{B}(X)$ に合致する (Dynkin の定理) から、 $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}'$ 。これから補題の結論が導かれる。 (証了)

(9) すこし丁寧に記しておこう。まず $\omega \mapsto \nu_\omega(C)$ が可測となる $C \in \mathcal{B}(X)$ の全体が σ -集合体を成すことは簡単に示すことができる。しかもそれはすべての閉集合を含むので $\mathcal{B}(X)$ に一致する。

補題 2 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度がつくる可測族とする。このとき、任意の $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に対して、函数

$$\omega \mapsto \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \quad (2)$$

は可測である。

証明 $E \in \mathcal{E}$ と X の任意の閉集合 F について、函数

$$\begin{aligned} \omega \mapsto & \int_X \chi_{E \times F}(\omega, x) d\nu_\omega \\ &= \int_X \chi_E(\omega) \chi_F(x) d\nu_\omega \\ &= \chi_E(\omega) \int_X \chi_F(x) d\nu_\omega \\ &= \chi_E(\omega) \nu_\omega(F) \end{aligned}$$

は可測である。 $(\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\})$ が可測族であることによる。したがって、 $\mathcal{R} \equiv \{E \times F \mid E \in \mathcal{E}, F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$ に属する集合 A については、函数(2)は可測である。 $\mathcal{R}$ はもちろん乗法的である。

$\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に属する集合 A のうち、函数(2)が可測となるようなものの全体を $\mathcal{R}'$ とすれば、 $\mathcal{R}'$ は Dynkin 族である。⁽¹⁰⁾

したがって $\mathcal{R}$ の生成する Dynkin 族は $\mathcal{R}'$ に含まれる。しかし Dynkin 族定理により、 $\mathcal{R}$ の生成する Dynkin 族は、 $\mathcal{R}$ の生成する σ -集合体に等しく、それはまた $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に等しい (補題 1 による)。ゆえに $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}'$ 。こうして $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X) = \mathcal{R}'$ 、つまり任意の $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に対して、函数(2)が可測であることが証明された。 (証了)

定理 2 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度がつくる可測族とし、 $f: \Omega \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は非負可測函数とすると、函数

(10) $A_n \in \mathcal{R}', A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m)$ とすれば、函数

$$\omega \mapsto \int_X \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\nu_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_X \chi_{A_n} d\nu_\omega}_{\text{可測}}$$

は可測である。また $A_1, A_2 \in \mathcal{R}'$ でしかも $A_1 \subset A_2$ ならば

$$\omega \mapsto \int_X \chi_{A_2 \setminus A_1} d\nu_\omega = \int_X (\chi_{A_2} - \chi_{A_1}) d\nu_\omega$$

も可測。さらに $X \in \mathcal{R}'$ は明らかである。

$$\omega \mapsto \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega$$

は可測である。

定理 2 は f を単函数の列で近似することによって補題 2 からただちに得られる。さらに次の結果も容易に示すことができる。

定理 3 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度のつくる可測族とし, $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に対して

$$\gamma(A) = \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu$$

と定義する。

(i) 集合函数 γ は $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の測度である, とくに $\sup\{\nu_\omega(X) \mid \omega \in \Omega\} < \infty$ ならば, γ は有限測度である。

(ii) 可測函数 $f: \Omega \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が非負または γ -可積分のとき,

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma = \int_\Omega \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu \quad (3)$$

が成り立つ。

公式 (3) は通常の直積測度に関する Fubini の定理の類似物である。

II $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ の双対

定義 $(\Omega, \mathcal{E})$ は可測空間, X および Y は位相空間とする。函数 $f: \Omega \times X \rightarrow Y$ が次のふたつの性質を有するとき, f は **Carathéodory の函数** (Carathéodory function) であるという。

(i) すべての $x \in X$ について, $\omega \mapsto f(\omega, x)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(Y))$ -可測函数。

(ii) すべての $\omega \in \Omega$ について, $x \mapsto f(\omega, x)$ は連続函数⁽¹¹⁾。

Carathéodory の函数の可測性はよく知られた事実である⁽¹²⁾。

(11) $(\Omega, \mathcal{E})$ に測度が定まっている場合, (ii) の “すべての $\omega \in \Omega$ ” を “殆どすべての $\omega \in \Omega$ ” と変更しても, 議論に実質的な相違は生じない。

(12) 証明はたとえば丸山 [24] pp. 412–413.

命題 1 (Carathéodory の函数の可測性) $(\Omega, \mathcal{E})$ は可測空間, (X, ρ) および (Y, ρ') は距離空間で, とくに X は可分とする。このとき Carathéodory の函数 $f: \Omega \times X \rightarrow Y$ は $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ -可測である。

以下の議論では主として実数値の Carathéodory の函数 f で, しかも各 ω に対して連続関数 $f(\omega, \cdot)$ を対応させる $\omega \mapsto f(\omega, \cdot)$ が可積分であるものを考える。このクラスに属する函数をすこし詳しく吟味してみよう。

そのために, 距離空間 (X, ρ) は局所コンパクトかつ可分であることを仮定する。⁽¹³⁾

Carathéodory の函数 $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は, 各 $\omega \in \Omega$ ごとに連続関数 $f(\omega, \cdot) \equiv h(\omega)$ を定めるが, この $h(\omega)$ が (すべての $\omega \in \Omega$ について) 無限遠において消える函数であるとしよう。つまり $h(\omega) \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ とするのである。(脚注(7)を参照。)

$\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ には一様収束ノルムを定め, その Borel σ -集合体を $\mathcal{B}(\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ と書けば, 函数 $h: \omega \mapsto h(\omega)$ は

$$h: \Omega \rightarrow \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$$

なる形式をもつ $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})))$ -可測函数である。

実際, それは次のようにして厳密に確かめることができる。 X の稠密な可算部分集合を $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ とすると, 任意の $g \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \|h(\omega) - g\| &= \sup_{x \in X} |h(\omega)(x) - g(x)| \\ &= \sup_n |f(\omega, \xi_n) - g(\xi_n)|. \end{aligned}$$

ここで各 n について, 函数 $\omega \mapsto |f(\omega, \xi_n) - g(\xi_n)|$ は可測であるから, それらの上限 $\omega \mapsto \|h(\omega) - g\|$ も可測である。 $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ における (中心が g , 半径 r の) 開球 $B_r(g)$ に対して

$$h^{-1}(B_r(g)) = \{\omega \in \Omega \mid \|h(\omega) - g\| < r\}$$

であり, $\omega \mapsto \|h(\omega) - g\|$ の可測性から, $h^{-1}(B_r(g)) \in \mathcal{E}$ 。 $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ は (一様収束ノルムについて) 可分である⁽¹⁴⁾ことに注意すれば, $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ の任意の Borel 集合 B についても, $h^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ が

(13) 位相数学における次のいくつかの事実を想起しておこう。

- 1° σ -コンパクトな位相空間は Lindelöf である。
- 2° 距離空間においては, 第二可算性・可分性・Lindelöf 性は同値である。
- 3° 距離空間が可分でしかも局所コンパクトであるとき, それは σ -コンパクトである。
- (14) X が可分・局所コンパクトな距離空間なので, その Alexandrov のコンパクト化 $X^* = X \cup \{\infty\}$ もコンパクトで距離づけ可能 (したがって可分) な空間となる。 X^* 上の連続函数の空間 $\mathfrak{C}(X^*, \mathbb{R})$ は可分である。(丸山 [23] pp. 155–157 参照。) したがってその部分集合 $\{g \in \mathfrak{C}(X^*, \mathbb{R}) \mid g(\infty) = 0\}$ と同一視する $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ は可分である。

成り立つ。

こうして h が $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})))$ -可測であることが知られたので, $(\Omega, \mathcal{E})$ 上に測度 μ が与えられたとき, $\|h(\omega)\| = \|f(\omega, \cdot)\|$ の積分を考えることができるのである。

定義 $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間, (X, ρ) は局所コンパクト・可分な距離空間とする。Carathéodory の函数 $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ のうち, 次の二条件を満たすものを可積分な **Carathéodory** の函数と呼ぶ。

(i) 連続関数 $f(\omega, \cdot) = h(\omega)$ は無限遠において消える。

(ii) $\int_{\Omega} \|h(\omega)\| d\mu < \infty$.

可積分な Carathéodory の函数の全体を $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ と書く。

注意 X が可分な距離空間ではあるが, 必ずしも局所コンパクトでない場合は, “無限遠において消える” という概念が意味をなさない。そこで条件(i)を問わず, (ii)を満たす Carathéodory の函数の集合 $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}(\Omega, \mu; X)$ を考えることがある。添字の $\mathfrak{C}$ は $h(\omega)$ が連続函数であることを示している。⁽¹⁵⁾

次の定理は $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ と $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ とを同一視する根拠を与えるものである。⁽¹⁶⁾

定理 4 ($\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty} \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty)$) $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間, (X, ρ) は局所コンパクト・可分な距離空間とし, 作用素 $T: \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \rightarrow \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ を

$$\begin{array}{ccc} T: f(\omega, x) & \longmapsto & f(\omega, \cdot) \\ \cap & & \cap \\ \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) & & \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})) \end{array}$$

と定義すれば, T は全単射である。⁽¹⁸⁾

証明 既に説明したところから, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ の元 $f(\omega, x)$ を X 上の連続函数 $f(\omega, \cdot)$ に対応せ

(15) X がコンパクトのときはもちろん, “無限遠において消える” という条件は不用であるから, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}$ と書いても $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}}$ と書いても同じである。

(16) いうまでもないが, $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ は Ω 上で定義され, $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ に値をとる Bochner-可積分函数のつくる Banach 空間である。

(17) X の可分性と命題 1 により, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ の元はすべて $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ について可測である。

(18) ただし $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}$ の二元 f_1, f_2 が $\mu\{\omega \in \Omega \mid f_1(\omega, \cdot) \neq f_2(\omega, \cdot)\} = 0$ を満たすという意味で同値である場合, これらは同一視して考える。

しめる作用素 T は、確かに $T: \mathfrak{C}_\infty(\Omega, \mu; X) \longrightarrow \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ の形式を満たし、しかもこれが単射であることも明白である。

T が全射であることを示そう。 $h \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ に対して、函数 $f: \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\omega, x) = h(\omega)(x) \quad (= h(\omega)x \text{ と略記})$$

と定義する。するとまず各 $\omega \in \Omega$ について函数 $x \mapsto f(\omega, x)$ は無限遠において消える連続函数で、

$$\int_\Omega \|f(\omega, \cdot)\| d\mu = \int_\Omega \|h(\omega)\| d\mu < \infty.$$

次に $x \in X$ を任意に固定したとき、函数 $\omega \mapsto f(\omega, x)$ は可測である。実際、この x を固定し、 $\alpha \in \mathbb{R}$ とすれば、 $\{g \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}) \mid g(x) < \alpha\}$ は（一様収束ノルムについての）開集合である。したがって h の可測性により、

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega \mid f(\omega, x) < \alpha\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid h(\omega)x < \alpha\} \\ &= h^{-1}[\{g \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}) \mid g(x) < \alpha\}] \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

こうして $f \in \mathfrak{C}_\infty(\Omega, \mu; X)$ で、しかも $Tf = h$ であることが知られた。 (証了)

以下、 $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ の双対空間について、可測族の概念との関連で論じたい。

定義 X を Hausdorff 位相空間、 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度 λ が正値・有限で内正則⁽¹⁹⁾のとき、 λ は **Radon 測度** であるという。

$(X, \mathcal{B}(X))$ 上の複合測度 λ の Jordan 分解を $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ とし、 λ^+ と λ^- がともに Radon 測度であるとき、 λ を **Radon 複号測度** と称する。

Radon 複号測度の空間を $\mathfrak{M}(X)$ 、(正値) Radon 測度の空間を $\mathfrak{M}_+(X)$ 、また Radon 確率測度の空間を $\mathfrak{M}_+^1(X)$ と表記する。

$\mathfrak{M}(X)$ は線形ノルム空間で、ノルムは全変動 $\|\lambda\| = |\lambda|(X)$ で与えられる。また次の事実はよく知られている。⁽²⁰⁾

(19) すなわち任意の $B \in \mathcal{B}(X)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 B に含まれる適当なコンパクト集合 K を選び、 $\lambda(B \setminus K) < \varepsilon$ とすることができる。

(20) 命題 2 は Riesz-Markov-Kakutani の定理と通称される著名な結果である。証明についてはたとえば Malliavin[21] p.97 などを参照。この双対関係をつうじて、 $\mathfrak{M}(X)$ には * 弱位相を定めることができる。

命題 2 X を局所コンパクト・Hausdorff 位相空間とすると、 $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ の双対空間は $\mathfrak{M}(X)$ と同型である。

$$\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})' \cong \mathfrak{M}(X).$$

定義 X を Hausdorff 位相空間とする。 $(X, \mathcal{B}(X))$ の正值・有限測度が必ず Radon 測度であるとき、 X は **Radon 空間** (Radon space) であるという。

これについては次の命題が基本的である。

命題 3 (P.A. Meyer) ⁽²¹⁾ すべての Souslin 空間は Radon 空間である。

したがってもちろん、完備・可分な距離空間は Radon 空間である。 X が局所コンパクトかつ可分な距離空間であれば、その Alexandrov のコンパクト化 $X^* = X \cup \{\infty\}$ は距離づけ可能 (したがって Polish 空間) ⁽²²⁾ であり、 X はその開部分集合なので、やはり Polish 空間 (したがって Souslin 空間) である。このことから、 X 上の有限 (正值) Borel 測度は必ず Radon 測度であり、全変動が有限な Borel 複合測度の全体はちょうど $\mathfrak{M}(X)$ と合致するのである。

さて命題 2 に鑑れば、 X が局所コンパクト・Hausdorff 位相空間であるとき、 $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ と $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ との間に双対的關係が存在するであろうことが当然推察される。その厳密な答えは後段命題 4 で与えよう。

定理 5 (X, ρ) を局所コンパクトかつ可分な距離空間とする。 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度の族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ が $\sup_{\omega} \|\nu_\omega\| < \infty$ を満たすとき、これについて次の三命題は同値である。

- (i) $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は可測族である。
- (ii) 任意の $f \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ に対して、函数

$$\omega \longmapsto \int_X f(x) d\nu_\omega$$

は可測である。

- (iii) $\mathfrak{M}(X)$ に $*$ 弱位相を定め、この位相についての Borel σ -集合体を $\mathcal{B}(\mathfrak{M}(X))$ とするとき、函数 $\omega \longmapsto \nu_\omega$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathfrak{M}(X)))$ -可測である。

(21) 完備に距離づけ可能な可分位相空間を Polish 空間と呼ぶ。また X を距離づけ可能な位相空間とし、 $f(P) = X$ を満たす Polish 空間 P と連続写像 $f: P \longrightarrow X$ が存在するとき、 X を Souslin 空間と呼ぶ。丸山 [24] pp. 392–395 を参照。

(22) Polish 空間の開部分集合は Polish 空間である。丸山 [24] p. 388.

証明 X は局所コンパクト・可分な距離空間であるから σ -コンパクトである。したがって定理 1 により, (i) と (ii) の同値性は既知である。ここではたとえば, (ii) と (iii) とが同値であることを示せばよい。

$(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度の族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ が $\sup \|\nu_\omega\| \leq A < \infty$ を満たすものとしよう。 $\mathfrak{M}(X)$ における, 0 を中心とする半径 A の閉球 S_A は, $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ が可分であることから, $*$ 弱位相について距離づけ可能でコンパクト (したがって可分) である。また

$$\mathcal{B}(S_A) = \{B \cap S_A \mid B \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}(X))\}$$

であることも周知である。⁽²⁴⁾ (ここで $\mathcal{B}(S_A)$, $\mathcal{B}(\mathfrak{M}(X))$) は, いずれも $*$ 弱位相についての Borel σ -集合体である。)

$\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ の可算稠密集合を $D_{\mathfrak{C}_\infty}$ とすれば, S_A の 0 における基本近傍系として

$$\begin{aligned} & V(f_1, \dots, f_p; \varepsilon) \\ &= \left\{ \theta \in S_A \mid \left| \int_X f_1 d\theta \right| < \varepsilon, \dots, \left| \int_X f_p d\theta \right| < \varepsilon \right\}, \\ & f_j \in D_{\mathfrak{C}_\infty} (j = 1, 2, \dots, p), \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

の形式のものを選ぶことができる。また S_A の可算稠密集合を $D_{S_A} = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ とすると,

$$\begin{aligned} & \theta_q + V(f_1, \dots, f_p; \varepsilon), \\ & \theta_q \in D_{S_A}, f_j \in D_{\mathfrak{C}_\infty}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

なる形式の集合族が S_A の ($*$ 弱位相についての) 可算基底を成す。したがって (ii) を仮定して (iii), つまり $\nu: \omega \mapsto \nu_\omega$ の可測性を示すためには, (1) の形式の集合について $\nu^{-1}(\theta_q + V(f_1, \dots, f_p; \varepsilon)) \in \mathcal{E}$ を確認すればよい。

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega \mid \nu_\omega \in \theta_q + V(f_1, \dots, f_p; \varepsilon)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \nu_\omega - \theta_q \in V(f_1, \dots, f_p; \varepsilon)\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \int_X f_1 d(\nu_\omega - \theta_q) \right| < \varepsilon, \dots, \left| \int_X f_p d(\nu_\omega - \theta_q) \right| < \varepsilon \right\} \\ &= \bigcap_{j=1}^p \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \int_X f_j d(\nu_\omega - \theta_q) \right| < \varepsilon \right\} \\ &= \bigcap_{j=1}^p \left\{ \omega \in \Omega \mid \int_X f_j d\theta_q - \varepsilon < \int_X f_j d\nu_\omega < \int_X f_j d\theta_q + \varepsilon \right\} \\ &\in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

(23) 脚注 (14) を見よ。

(24) 丸山 [24] pp. 391–392.

これで (iii) が示された。

逆に (iii) を仮定する。函数

$$\omega \mapsto \int_X f d\nu_\omega \quad (2)$$

は、 $\omega \mapsto \nu_\omega$ と $\theta \mapsto \int_X f d\theta$ の合成函数である。前者は仮定によって可測、後者は $*$ 弱位相について連続である。したがって、それらの合成函数 (2) は可測である。 (証了)

定理 5 により、 X が局所コンパクトかつ可分な距離空間である場合、 $\text{ess. sup}_\omega \|\nu_\omega\| < \infty$ を満たす可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ の元と解釈することができる。ただし、 $\mathfrak{M}(X)$ には $*$ 弱位相によって生成される **Borel** σ -集合体が定まっているものとする。

命題 4 ⁽²⁵⁾ $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間、 (X, ρ) は局所コンパクト・可分な距離空間とする。各 $\nu \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ に対して ⁽²⁶⁾

$$\begin{aligned} \Lambda h &= \int_\Omega \left\{ \int_X h(\omega) x d\nu_\omega \right\} d\mu, \\ h &\in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})) \end{aligned} \quad (3)$$

と定義される Λ は $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))'$ の元である。逆にいかなる $\Lambda \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ に対しても (3) を満たす $\nu \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ が一意的に定まる。つまり (3) の下に $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))'$ と $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ とは同型である。

$$\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))' \cong \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X)). \quad (4)$$

注意 ここで $f(\omega, x) = h(\omega)x$ とおけば、これは所謂 Carathéodory の函数である。命題 1 により、 f は $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -可測であるから、(3) の積分が意味をもつのである。また定理 4 によれば、 $\mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X)$ と $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ とは同一視できるので、(3) は

$$\begin{aligned} \Lambda f &= \int_\Omega \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu, \\ f &\in \mathfrak{G}_{\mathfrak{C}_\infty}(\Omega, \mu; X) \end{aligned} \quad (3')$$

と書いても同じである。

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間、 X を Hausdorff 位相空間とする。 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の確率測度から成る可測族の集合を $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ 、劣確率測度から成る可測族の集合を $\mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$ と表記する。

(25) Bourbaki[3] Chap.VI, Warga[32] Chap. IV を見よ。

(26) したがって X は σ -コンパクトでもある。

定理 6 $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間, (X, ρ) を局所コンパクト・可分な距離空間とする。

- (i) $\mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ の単位球に含まれる * 弱閉集合である。
- (ii) μ を完備とすると、 $\mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$ のいかなる点列も、* 弱位相について収束する部分列を有する。
- (iii) X がコンパクトの場合、 $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ の単位球に含まれる * 弱閉集合である。

ここで * 弱位相というのは、もちろん (4) の双対関係についていうのである。

定理 6 (ii) の証明に、ベクトル値関数の条件付期待値の概念を用いるので、あらかじめそれについて整理しておこう。 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ は確率空間、 $\mathcal{E}'$ は $\mathcal{E}$ の部分 σ -集合体、 X は Ω 上の実数値可積分な確率変数とする。このとき

$$\int_E X(\omega) dP = \int_E Y(\omega) dP \quad \text{for all } E \in \mathcal{E}' \quad (5)$$

を満たす、 $\mathcal{E}'$ についての実数値可積分な確率変数 Y が存在し、このような Y は (同値類として) 一意に定まる。これは確率論で周知の事実であり、この Y を $\mathcal{E}'$ についての X の条件付期待値と称するのである。⁽²⁷⁾ Y を $\mathbb{E}^{\mathcal{E}'}(X)$ などとも書く。

この結果を、Banach 空間に値をとる Bochner 可積分な函数にも拡張することができる。 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ は確率空間、 $\mathcal{E}'$ は $\mathcal{E}$ の部分 σ -集合体、また $\mathfrak{X}$ は可分な Banach 空間とする。このとき次の二条件を満たす線形作用素、 $\mathbb{E}_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{E}'}: \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{L}_{\mathcal{E}'}^1(\Omega, \mathfrak{X})$ が存在し、⁽²⁸⁾ それは一意的に定まる。

1° 各 $f \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{X})$ に対して

$$\int_E f dP = \int_E \mathbb{E}_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{E}'}(f) dP \quad \text{for all } E \in \mathcal{E}'. \quad (6)$$

2° $\|\mathbb{E}_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{E}'}\| = 1$ (作用素ノルム)。⁽²⁹⁾

これだけを準備として、定理 6 の証明に移ろう。⁽³⁰⁾

(27) 確率論の成書、たとえば Malliavin[21] pp. 183–190, また Dellacherie–Meyer[9] II–38 などを見よ。また、(5) の右辺の dP は、より厳密には P の $\mathcal{E}'$ への制限 $dP|_{\mathcal{E}'}$ とすべきかもしれないが、煩わしいので略記した。

(28) $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}'}^1(\Omega, \mathfrak{X})$ は $(\Omega, \mathcal{E}', P)$ 上で定義された、 $\mathfrak{X}$ -値の Bochner 可積分函数の空間。

(29) Diestel–Uhl[10] pp. 121–125 など。また Bochner 積分については丸山 [24] 第 9 章を見よ。

(30) 位相空間上の測度を作る空間の位相構造については、Billingsley[2], Choquet[8], Heyer[13], 丸山 [24] 第 8 章。

定理 6 の証明 (i) $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の劣確率測度 (もちろん Radon 測度) の全体を $\mathfrak{M}_+^{\leq 1}(X)$ と書くと, これは $*$ 弱位相 $\sigma(\mathfrak{M}(X), \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ についてコンパクトで, しかも凸集合である。

$\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ の可算稠密部分集合を $\{g_1, g_2, \dots\}$ とし, $\mathfrak{M}_+^{\leq 1}(X)$ の支持函数を $\delta^*(\cdot)$ とする。

$$a_n = \delta^*(g_n) = \sup_{\eta \in \mathfrak{M}_+^{\leq 1}} \int_X g_n(x) d\eta, \quad n = 1, 2, \dots$$

とおくと, $\eta \in \mathfrak{M}(X)$ に対して

$$\eta \in \mathfrak{M}_+^{\leq 1}(X) \iff \int_X g_n(x) d\eta \leq a_n \quad \text{for all } n$$

が成り立つ⁽³¹⁾。

$\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ の単位球を

$$S = \{\nu \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X)) \mid \|\nu\|_\infty \leq 1\}$$

とすれば, Alaoglu の定理により, S は $*$ 弱コンパクトである。可測族 $\nu = \{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ が S に属するとき, 次の三命題は同値である。

1° $\nu \in \mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$.

2° $\int_X g_n(x) d\nu_\omega \leq a_n$ a.e. for all n .

3° $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ 上の任意の非負可積分函数 $\psi(\omega)$ について

$$\int_\Omega \psi(\omega) \left\{ \int_X g_n(x) d\nu_\omega \right\} d\mu \leq a_n \int_\Omega \psi(\omega) d\mu \quad \text{for all } n.$$

ここで 3° に現われる $\omega \mapsto \psi(\omega)g_n(x)$ は $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ の元であることに注意しよう。

$\nu^\alpha = \{\nu_\omega^\alpha \mid \omega \in \Omega\}$ をある $\nu \in S$ に $*$ 弱収束する $\mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$ の有向点族としよう。 $\psi(\omega)$ を上記のとおりとすれば,

$$\int_\Omega \left\{ \int_X \psi(\omega) g_n(x) d\nu_\omega^\alpha \right\} d\mu \leq a_n \int_\Omega \psi(\omega) d\mu \quad \text{for all } n$$

であるから, $\{\nu^\alpha\}$ の極限 ν についても

$$\int_\Omega \left\{ \int_X \psi(\omega) g_n(x) d\nu_\omega \right\} d\mu \leq a_n \int_\Omega \psi(\omega) d\mu \quad \text{for all } n.$$

したがって $\nu = \{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\} \in \mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X)$ 。これで (i) が示された。

(31) 支持函数については Castaing-Valadier[5] p. 48. 函数解析一般については Bourbaki[4].

(iii) $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の確率測度（もちろん Radon 測度）の全体 $\mathfrak{M}_+^1(X)$ は、 X がコンパクトの場合は $*$ 弱コンパクトであり、しかもそれは凸である。

$\{g_1, g_2, \dots\}$ は (i) と同様とし、 $\mathfrak{M}_+^1(X)$ の支持関数を $\delta^*(\cdot)$ とする。(i) のかわりに

$$b_n = \delta^*(g_n) = \sup_{\eta \in \mathfrak{M}_+^1(X)} \int_X g_n(x) d\eta$$

としよう。これを用いて、あとは (i) と同じ推論を繰り返せば (iii) が導かれる。

(ii) $\{\nu^n\}$ を $\mathfrak{P}_s(\Omega, \mu; X) \subset \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ の点列とし、これが収束部分列を有することを、場合をふたとおりに分けて説明しよう。

ケース 1 $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ が可分の場合。

このとき S は $*$ 弱位相について距離づけ可能かつコンパクトであるから、 $\{\nu^n\}$ は確かに収束部分列を有する。

ケース 2 $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ が可分でない場合。

この場合はケース 1 に還元して問題を解決しよう。まず

$$\nu^n: \omega \mapsto \nu_\omega^n, n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

なる函数列によって生成される、 Ω 上の σ -集合体を $\mathcal{E}_0$ とする。ここで ν^n の値域 $\mathfrak{M}_+^{\leq 1}(X) \subset \mathfrak{M}(X)$ には $*$ 弱位相が定まっており、この位相の生成する Borel σ -集合体について、 ν^n の可測性を考えているのである。しかるに $\mathfrak{M}_+^{\leq 1}(X)$ は $*$ 弱位相について可分かつ距離づけ可能、したがって第二可算公理を満たすので、 $\mathcal{E}_0$ は可算個の集合族によって生成される。こうして $\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}_0$ を以てとりかえて得られる空間 $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}_0}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ は可分となる。(7) の函数はそれぞれ $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}_0}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ に属する。そこで σ -集合体を $\mathcal{E}_0$ とした組合せ $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}_0}^1, \mathfrak{L}_{\mathcal{E}_0}^\infty$ で考えると、ケース 1 により、 $\{\nu^n\}$ は $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}_0}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ において収束する部分列 $\{\nu^{n_k}\}$ を有する。その極限を ν としよう。

さてここで一般性を失うことなく、 $\mu(\Omega) = 1$ と想定してよい。 $h \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ とし、この h の $\mathcal{E}_0$ に関する条件付期待値を $\mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(h)$ とすれば、 ν^n および ν の $\mathcal{E}_0$ についての可測性により、

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\{ \int_X h(\omega) x d\nu_\omega^{n_k} \right\} d\mu &=^{(32)} \int_\Omega \left\{ \int_X \mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(h)(\omega) x d\nu_\omega^{n_k} \right\} d\mu \\ \longrightarrow \int_\Omega \left\{ \int_X \mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(h)(\omega) x d\nu_\omega \right\} d\mu &= \int_\Omega \left\{ \int_X h(\omega) x d\nu_\omega \right\} d\mu \\ &\text{as } k \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

こうして $\{\nu^n\}$ が本来の $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ において $*$ 弱収束する部分列をもつことが示された。

(証了)

III 積分々解定理（その1）

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間, (X, ρ) をしかるべき距離空間とし, $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の有限測度から成る可測族とする。 $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ に対して

$$\gamma(A) = \int_{\Omega} \left\{ \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu \quad (1)$$

と定義される γ は $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の測度であることは既に定理3で述べたとおりである。

とくにすべての $\nu_\omega (\omega \in \Omega)$ が確率測度である場合には, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して⁽³³⁾

$$(\gamma \circ \pi_\Omega^{-1})(E) = \mu(E)$$

であるから, この γ は Young 測度である。

この節では逆命題——すなわち, いかなる Young 測度も適当な確率測度から成る可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ を用いて, 必ず(1)の如き形式で表現可能であることを, いくつかの条件の下に示すことにしよう。 X が一般の位相空間の場合は後に節をあらためて（第V節）検討することとし, ここでは X がやや強い条件を満たす距離空間である場合について論じよう。

(32) (8)の等号は次のように示せばよい。まず $h(\omega)$ を特定化して $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ -値の単函数

$$h(\omega) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(\omega) f_i, f_i \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$$

の場合に(8)を確認する。たとえば

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \int_X h(\omega) x d\nu_\omega^{n_k} \right\} d\mu &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(\omega) \underbrace{\int_X f_i(x) d\nu_\omega^{n_k}}_{\mathcal{E}_0\text{-可測}} d\mu \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(\chi_{E_i})(\omega) \int_X f_i(x) d\nu_\omega^{n_k} d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_X \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(\chi_{E_i})(\omega) f_i(x)}_{\mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(h)(\omega)} d\nu_\omega^{n_k} \right\} d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_X \mathbb{E}^{\mathcal{E}_0}(h)(\omega) x d\nu_\omega^{n_k} \right\} d\mu. \end{aligned}$$

次に一般の $h \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}))$ については, これを単函数列で近似すればよい。

(33) $\pi_\Omega^{-1}(E) = E \times X$ であるから,

$$(\gamma \circ \pi_\Omega^{-1})(E) = \int_{\Omega} \left\{ \int_X \chi_{E \times X}(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu = \int_{\Omega} \chi_E(\omega) \int_X d\nu_\omega d\mu = \mu(E).$$

定理 7 (積分々解(1) : 距離空間の場合) $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は完備な有限測度空間, X は局所コンパクトな Polish 空間とする。⁽³⁴⁾ このとき $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の任意の Young 測度 $\gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ に対して, 確率測度から成る可測族 $\nu = \{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\} \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ を適当に選び

$$\gamma(A) = \int_{\Omega} \left\{ \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu, \quad (1)$$

$$A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$$

とすることができる。またこのような可測族 ν は (同値類として) 一意に定まる。

証明 以下, 証明を二段に分ち, はじめに X がコンパクト距離空間の場合に定理を証明し, そのあとで一般の場合に及ぶ。

1° X がコンパクトの場合。 $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の有限複号測度の全体を $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ と表記すると, Young 測度の全体は $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ の部分集合である。確率測度から成る可測族 $\nu \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ に対して(1)により集合関数 γ を定義すれば, γ は $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の Young 測度である。 ν をこの γ に対応させる写像を $\Phi: \nu \mapsto \gamma$ とすれば, これは $\Phi: \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X) \rightarrow \mathfrak{M}(\Omega \times X)$ の形式を有する。 $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X))$ であるから, 定義域の位相は $*$ 弱位相 $\sigma(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{M}(X)), \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})))$ から導入される相対位相とする。また $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ には, この上で定義される函数族

$$\gamma \mapsto \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma, \quad f \in \mathfrak{C}_c(\Omega, \mu; X)$$

によって生成される位相を与え, $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ にはこれから導かれる相対位相を定める。⁽³⁵⁾

$\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ 上のこの位相は Hausdorff である。実際, すべての $f \in \mathfrak{C}_c(\Omega, \mu; X)$ に対して

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma = 0 \quad (2)$$

としてみよう。任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して, $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ の列 $\{f_n\}$ を $f_n \downarrow \chi_K$ (as $n \rightarrow \infty$) となるように構成することができる。⁽³⁶⁾ したがって任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して

$$\gamma(E \times K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times X} \underbrace{\chi_E(\omega) f_n(x)}_{\in \mathfrak{C}_c(\Omega, \mu; X)} d\gamma(\omega, x)$$

であるが, (2)によりこれはゼロ。ゆえに周知の手続きをつうじて, 任意の $B \in \mathcal{B}(X)$ についても $\gamma(E \times B) = 0$, さらに

(34) Polish 空間, Souslin 空間, Radon 空間については丸山 [24] 第 10 章を見よ。

(35) $\mathfrak{C}_c$ は可積分な Carathéodory の函数の集合である。

(36) pp. 15–16 を参照。

$$\gamma(A) = 0 \quad \text{for all } A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$$

である。こうして上記の $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ の位相は Hausdorff であることが確かめられた。 $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ はその閉・凸集合であることも容易に知られる。

まず Φ が単射であることを示そう。 ν^1, ν^2 を $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ の相異なる二元とし、したがって $\mu\{\omega \in \Omega \mid \nu_\omega^1 \neq \nu_\omega^2\} > 0$ とする。 $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ の可算稠密集合 $\{g_1, g_2, \dots\}$ に属する適当な g_{n_0} を用いて

$$E = \left\{ \omega \in \Omega \mid \int_X g_{n_0} d\nu_\omega^1 \neq \int_X g_{n_0} d\nu_\omega^2 \right\}$$

とおき、 $\mu(E) > 0$ とすることができる。一般性を失うことなく、

$$E' = \left\{ \omega \in \Omega \mid \int_X g_{n_0}(x) d\nu_\omega^1 > \int_X g_{n_0}(x) d\nu_\omega^2 \right\}, \quad \mu E' > 0$$

としてよい。すると

$$\int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{E'}(\omega) g_{n_0}(x) d\nu_\omega^1 \right\} d\mu > \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{E'}(\omega) g_{n_0}(x) d\nu_\omega^2 \right\} d\mu$$

とならねばならない。つまり $\Phi(\nu^1) \neq \Phi(\nu^2)$ である。

位相の定義から、 Φ の連続性は容易に知られる。定理 6 により、 $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ は距離づけ可能かつコンパクトなので、点列を使って連続性を確かめることができる。 $\{\nu^n\}$ を ν^* に収束する $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ の列とし、 ν^n, ν^* によって定まる Young 測度を γ_n, γ_* と書く。⁽³⁷⁾

$$\gamma_n = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega^n d\mu, \quad \gamma_* = \int_\Omega \delta_\omega \otimes \nu_\omega^* d\mu.$$

$\nu^n \longrightarrow \nu^*$ (* 弱収束) であるから、任意の $f \in \mathfrak{C}(\Omega, \mu; X) \cong \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}))$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega^n \right\} d\mu = \int_\Omega \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_\omega^* \right\} d\mu,$$

つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma_n = \int_{\Omega \times X} f(\omega, x) d\gamma_*.$$

ゆえに $\Phi(\nu^n) = \gamma_n \longrightarrow \Phi(\nu^*) = \gamma_*$ 。

これから $\Phi(\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X))$ が $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ におけるコンパクト集合であることもわかる。その凸性は自明であろう。

次に、 Φ が全射であることを示す。そのためには $\Phi(\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X))$ と $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ とがともに (Hausdorff 局所凸空間) $\mathfrak{M}(\Omega \times X)$ の閉・凸集合であることに注目し、それらの支持関数 $\delta_{\Phi(\mathfrak{P})}^*, \delta_{\mathfrak{Y}}^*$ が同一であることを示せばよい。⁽³⁸⁾

(37) 次の記法については p. 12 の (2) を見よ。

(38) 局所凸空間の閉・凸集合族とそれらの支持関数の族とが一対一に対応することは凸解析における周知の事実である。たとえば Castaing-Valadier [5] II.16, p. 48.

$f \in \mathfrak{G}_c(\Omega, \mu; X)$ とする。

$$\begin{aligned} \delta_{\mathfrak{Y}}^*(f) &= \sup \left\{ \int_{\Omega \times X} f d\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega \times X} \sup_{x \in X} f(\omega, x) d\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X) \right\} \\ &= \int_{\Omega} \sup_{x \in X} f(\omega, x) d\mu = \int_{\Omega} \|f(\omega, \cdot)\|_{\infty} d\mu < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで可測 Berge の最大値定理から、⁽³⁹⁾

$$f(\omega, u(\omega)) = \sup_{x \in X} f(\omega, x) \quad \text{for all } \omega \in \Omega$$

を満たす可測函数 $u: \Omega \rightarrow X$ が存在する。⁽⁴⁰⁾

$$\nu_{\omega} = \delta_{u(\omega)} \quad (\text{Dirac 測度})$$

とすると、 $\omega \mapsto \nu_{\omega}$ は $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ の元で、しかも、

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi(\mathfrak{P})}^*(f) &\geq \int_{\Omega} \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_{\omega} \right\} d\mu \\ &= \int_{\Omega} f(\omega, u(\omega)) d\mu = \int_{\Omega} \sup_{x \in X} f(\omega, x) d\mu \\ &\geq \delta_{\mathfrak{Y}}^*(f) \quad ((3) \text{ による}). \end{aligned} \quad (4)$$

他方、 $\Phi(\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)) \subset \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ であるから、(4)の逆の不等式は自明。結局、 $\delta_{\Phi(\mathfrak{P})}^* = \delta_{\mathfrak{Y}}^*$ を得、 $\Phi(\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)) = \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ が示されたのである。

要約すれば、 Φ は $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ から $\mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ の上への連続な全単射である。しかも $\mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ はコンパクトなので、実は Φ は位相同型写像である。

ただし、以上の議論は X がコンパクトの場合を想定しているので、次に一般の場合を吟味しよう。

2° 一般の場合。仮定により、 X は Polish 空間であるからそれは Radon 空間⁽⁴¹⁾で、 $\nu \equiv \gamma \circ \pi_X^{-1}$ は X 上の Radon 測度である。ゆえに次の条件を満たす X のコンパクト集合列 $\{X_n\}$ が存在する。⁽⁴²⁾

(39) $(\Omega, \mathcal{E})$ は可測空間、 X は Polish 空間とする。 $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ について可測で、しかも X 上で上半連続な函数とする。また多価写像 $\Gamma: \Omega \rightrightarrows X$ はコンパクト値で $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(X))$ -可測とする。このとき函数 $\nu(\omega) = \max\{f(\omega, x) \mid x \in \Gamma(\omega)\}$ は $(\hat{\mathcal{E}}, \mathcal{B}(X))$ -可測であり、多価写像 $\Delta(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid f(x, \omega) = \nu(\omega)\}$ は $(\hat{\mathcal{E}}, \mathcal{B}(X))$ -可測選択子を有する。(ここで $\hat{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ の汎完備化である。) 丸山 [24] p. 428 参照。

(40) ここで測度空間としての Ω の完備性を用いた。

(41) 丸山 [24] pp. 392–395.

(42) 任意の $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \downarrow 0$ に対して $\nu(X \setminus \bigcup_{i=1}^n X_i) < \varepsilon_n$ となるようにコンパクト集合 X_n を逐次選ばよい。

$$X_n \cap X_m = \emptyset \quad \text{if } n \neq m,$$

$$\nu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = 0.$$

γ の $\Omega \times X_n$ への制限を γ_n とすれば、 γ_n は $\Omega \times X_n$ 上の Young 測度であり、1° により、それは $\nu^n \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X_n)$ を用いて

$$\gamma_n = \int_{\Omega} \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega}^n d\mu_n$$

なる形式に表現される。ここで、 $\mu_n = \gamma_n \circ \pi_{\Omega}^{-1}$ である。 μ_n は μ について絶対連続であるから、Radon-Nikodým の導函数 $\xi_n = d\mu_n/d\mu$ を有する。 $E \in \mathcal{E}$ に対して

$$\mu(E) = \int_E 1 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E) = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) d\mu$$

であるから、Radon-Nikodým の導函数の一意性から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) = 1 \quad \text{a.e. } (\mu).$$

ここで ν_{ω} を

$$\nu_{\omega}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \nu_{\omega}^n(B \cap X_n), \quad B \in \mathcal{B}(X)$$

と定義すると、右辺を構成する各項は ω について可測なので、 $\{\nu_{\omega} \mid \omega \in \Omega\}$ は可測族である。

$A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ とすれば、

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A \cap (\Omega \times X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega}^n d\mu_n \\ &= \int_A \delta_{\omega} \otimes \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\omega}^n \xi_n(\omega)}_{\nu_{\omega}} d\mu = \int_A \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega} d\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

これで一般の場合における、積分々解の可能性の証明が完了した。

3° 一意性。最後に、可測族による表現の一意性を示そう。いま Young 測度 $\gamma \in \mathfrak{Y}(\Omega, \mu; X)$ がふたつの可測族 $\nu^1 = \{\nu_{\omega}^1 \mid \omega \in \Omega\}$, $\nu^2 = \{\nu_{\omega}^2 \mid \omega \in \Omega\}$ を用いて

$$\gamma = \int_{\Omega} \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega}^1 d\mu = \int_{\Omega} \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega}^2 d\mu \quad (6)$$

と表現されるとしよう。ここで $\nu^1, \nu^2 \in \mathfrak{P}(\Omega, \mu; X)$ である。(6)はもちろん

$$\int_{\Omega} \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_{\omega}^1 \right\} d\mu = \int_{\Omega} \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_{\omega}^2 \right\} d\mu \quad (6')$$

for any $f \in \mathfrak{G}_c(\Omega, \mu; X)$

を意味する。

いま仮に $\nu^1 \neq \nu^2$ とし, $S = \{\omega \in \Omega \mid \nu_\omega^1 \neq \nu_\omega^2\}$ とすれば, $\mu S > 0$ である。 $\nu = \{\nu_\omega = \nu_\omega^1 - \nu_\omega^2 \mid \omega \in \Omega\}$ は, X 上の複号測度が作る可測族である。 $\omega \in S$ に対しては, $\nu_\omega \neq 0$ であるから,

$$\int_X f_\omega(x) d\nu_\omega \neq 0 \quad (7)$$

を満たす $f_\omega \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ が存在する。一般性を失うことなく, $\omega \in S$ について

$$\int_X f_\omega(x) d\nu_\omega \geq \varepsilon > 0 \quad (8)$$

が成り立つことを想定してよい。 $\omega \notin S$ に対しては $f_\omega(x) = 0$ とする。

ここで $\omega \mapsto f_\omega(x)$ の可測性は必ずしも保証されていないので, $(\omega, x) \mapsto f(\omega, x)$ が Carathéodory の函数であるかどうかは不明であることに注意しよう。

そこで多価写像 $A: \mathfrak{M}(X) \rightarrow \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ を

$$A: \theta \rightarrow \begin{cases} \left\{ g \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}) \mid \int_X g(x) d\theta \geq \varepsilon \right\} & \text{for } \theta \neq 0, \\ \{0\} & \text{for } \theta = 0 \end{cases} \quad (9)$$

と定義すると, 各 $\theta \in \mathfrak{M}(X)$ に対して $A\theta \neq \emptyset$ で, しかもグラフが可測であることは容易に知られる。 $\mathfrak{M}(X)$ (resp. $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$) には $*$ 弱位相 (resp. 一様収束位相) によって生成される Borel σ -集合体が定められている。

また函数 $B: \Omega \rightarrow \mathfrak{M}_+^1(X)$ を

$$B: \omega \mapsto \nu_\omega$$

と定義すれば, 定理 5 により, B は可測である。したがって多価写像 $A \circ B: \Omega \rightarrow \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ は閉値・可測である。周知の Kuratowski–Nardzewski の定理⁽⁴³⁾から, $A \circ B$ は可測選択子 $\eta(\omega)$ を有する。

これを用いて函数 $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\omega, x) = \eta(\omega)(x)$$

と定義する。すると任意に $x \in X$ を固定したとき, $f_x: \omega \mapsto f(\omega, x)$ は可測である。任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対して

$$f_x^{-1}(F) = \eta^{-1}\{g \in \mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R}) \mid g(x) \in F\}$$

で右辺の $\{\dots\}$ は $\mathfrak{C}_\infty(X, \mathbb{R})$ の閉集合であるから, $f_x^{-1}(F) \in \mathcal{E}$ 。かくして $f \in \mathfrak{G}_c(\Omega, \mu; X)$ で, かつ

(43) 丸山 [24] pp. 404–407.

$$\int_{\Omega} \left\{ \int_X f(\omega, x) d\nu_{\omega} \right\} d\mu \geq \varepsilon > 0.$$

これは(6')に矛盾。

(証了)

(5)は丁寧に書けば,

$$\gamma(A) = \int_{\Omega} \left\{ \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_{\omega} \right\} d\mu, \quad A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X) \quad (5')$$

であり, これを記号的に

$$\gamma = \int_{\Omega} \delta_{\omega} \otimes \nu_{\omega} d\mu \quad (5'')$$

と書くのであった。(5') (あるいは(5'')) を, Young 測度 γ の可測族 $\{\nu^{\omega} \mid \omega \in \Omega\}$ による積分々解 (disintegration) と称するのである。

注意 Valadier [29] pp.179–181 には, X が σ -コンパクトかつ局所コンパクトな距離空間である場合についての詳しい証明がある。このときは X が自動的に Radon 空間にはならないので, $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ が Radon 測度であることを仮定しなければならない。また Berge の定理を用いる際に, 測度空間 Ω の完備性を仮定すべきで, Valadier の記述にはこれが欠落している。

IV 補足的準備

前節で述べた Young 測度の積分々解定理をやや一般化した結果について論じよう。そのための準備としてふたつの事柄をあらかじめ説明しておきたい。第一は, 有界な函数族の広さについての Dellacherie–Meyer [9] の定理。第二は von Neumann [31]–Maharam [20] に負う lifting の定理である。これらの準備に基づいて, 一般的積分々解定理とその証明とを次節で述べることにしたい。

補題 3 (Dellacherie–Meyer) $\mathfrak{B}$ を集合 Ω 上で定義された有界な実数値函数の空間, $\mathfrak{H}$ は次の (a), (b), (c) を満たす $\mathfrak{B}$ の線形部分空間とする。

- (a) $\mathfrak{H}$ はすべての定数を含む。
- (b) $\mathfrak{H}$ は一様収束について閉じている。
- (c) $\{f_n\}$ は非負, 単調増加かつ一様有界な $\mathfrak{H}$ の点列とすると, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (各点収束) は $\mathfrak{H}$ に含まれる。

さらに $\mathfrak{F}$ は乗法について閉じた $\mathfrak{H}$ の部分集合とする。(つまり $f, g \in \mathfrak{F}$ ならば $f \cdot g \in \mathfrak{F}$ 。)

このとき $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{F}$ によって生成される Ω 上の σ -集合体 $\sigma(\mathfrak{F})$ について可測なすべての有界函数を含む。

証明 $\mathfrak{F}$ と 1 によって生成される代数を $\mathfrak{A}_*$ とすれば, $\mathfrak{F}$ が乗法について閉じていることと, $\mathfrak{H}$ が (a) を満たす部分空間であることから, $\mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{H}$ は明白である。そこで $A \equiv \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } \mathfrak{A}_* \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{H} \text{ を満たす代数}\}$ とすれば, A には集合の包含関係による半順序についての極大元 $\mathfrak{A}^*$ が存在する。(Zorn の補題による。) この $\mathfrak{A}^*$ は以下の性質を有することが容易に示される。

1° $\mathfrak{A}^*$ は一様収束について閉じている。

これは (b) と $\mathfrak{A}^*$ の極大性による。

2° $\mathfrak{A}^*$ はすべての定数を含む。

3° $\mathfrak{A}^*$ は絶対値演算について閉じている。(つまり $f \in \mathfrak{A}^*$ ならば $|f| \in \mathfrak{A}^*$ 。)

実際, $f \in \mathfrak{A}^*$ とし, $\|f\|_\infty \leq C$ としてみよう。Weierstrass の近似定理から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|\lambda| - P_\varepsilon(\lambda) \leq \varepsilon \quad \text{for all } \lambda \in [-C, C]$$

を満たす多項式 P_ε が存在する。したがって

$$|f(\omega)| - P_\varepsilon(f(\omega)) \leq \varepsilon \quad \text{for all } \omega \in \Omega.$$

$\mathfrak{A}^*$ は代数であることと, 1° により, $|f| \in \mathfrak{A}^*$ である。

4° $\mathfrak{A}^*$ は演算 $\vee, \wedge$ について閉じている。(つまり $f, g \in \mathfrak{A}^*$ ならば $f \vee g, f \wedge g \in \mathfrak{A}^*$ 。) ここで $(f \vee g)(x) = \text{Max}\{f(x), g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \text{Min}\{f(x), g(x)\}$ である。

これは

$$f \vee g = (f + g)/2 + |f - g|/2,$$

$$f \wedge g = (f + g)/2 - |f - g|/2$$

と 3° からただちに明らかである。

5° $\{f_n\}$ は非負・単調増加(または減少)かつ一様有界な $\mathfrak{A}^*$ の点列とすると, 極限函数 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (各点収束) は $\mathfrak{A}^*$ に含まれる。

実際まず $\{f_n\}$ が単調増加としてみよう。 $\mathfrak{A}^*$ と f から生成される代数 $\text{alg}(\mathfrak{A}^*, f)$ は $\mathfrak{H}$ に含まれるので, $\mathfrak{A}^*$ が A の極大元であることから, $\text{alg}(\mathfrak{A}^*, f) = \mathfrak{A}^*$ とならねばならない。ゆえに $f \in \mathfrak{A}^*$ である。次に $\{f_n\}$ が単調減少の場合。 $\{f_n\}$ は一様有界なので, 十分に大きな数 $C > 0$ をとれば, すべての n について $-f_n + C \geq 0$ である。 $\mathfrak{A}^*$ はすべての定数を含む代数 (2°) なので, もちろん $-f_n + C \in \mathfrak{A}^*$ 。したがって単調増加列 $\{-f_n + C\}$ が $-f + C$ に収束することと, 上記の結果により $-f + C \in \mathfrak{A}^*$ 。再び 2° によって $f \in \mathfrak{A}^*$ 。

Ω の集合族 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \{E \in \Omega \mid \chi_E \in \mathfrak{A}^*\}$$

と定義すれば、 $\mathcal{E}$ は集合体でしかも単調族であるから、⁽⁴⁴⁾ σ -集合体である。

すると補題の結論は次のふたつの命題を組み合わせることによって導かれる。

(i) 代数 $\mathfrak{A}^*$ は、 $\mathcal{E}$ について可測なすべての有界函数を含む。

f を $\mathcal{E}$ -可測な有界函数とする。一般性を失うことなく、 $f \geq 0$ と仮定してよい。すると非負単函数の単調増加列

$$\varphi_n(\omega) = \sum_{j=1}^n c_j^n \chi_{E_j}(\omega), \quad E_j \in \mathcal{E}, \quad n = 1, 2, \dots$$

を適当に選び、 $\varphi_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ (as $n \rightarrow \infty$) とすることができる。 $\varphi_n \in \mathfrak{A}^*$ であるから、 5° により $f \in \mathfrak{A}^*$ 。

(ii) $\sigma(\mathfrak{F}) \in \mathcal{E}$.

これを示すためには、任意の $f \in \mathfrak{A}^*$ に対して、たとえば

$$E \equiv \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 1\} \in \mathcal{E}$$

を確認すれば十分である。⁽⁴⁵⁾

$$g = (f \wedge 1) \vee 0$$

とおけば (図 2 を見よ)、 $\mathfrak{A}^*$ の性質 2° 、 4° から $g \in \mathfrak{A}^*$ 。

$g \in \mathfrak{A}^*$ であるから $g^n \in \mathfrak{A}^*$ ($n = 2, 3, \dots$) で、しかも g^n は単調に減少して χ_E に収束する。再び 5° により、 $\chi_E \in \mathfrak{A}^*$ 。すなわち $E \in \mathcal{E}$ 。 (証了)

つづいて第二の準備、つまり lifting の概念に移ろう。

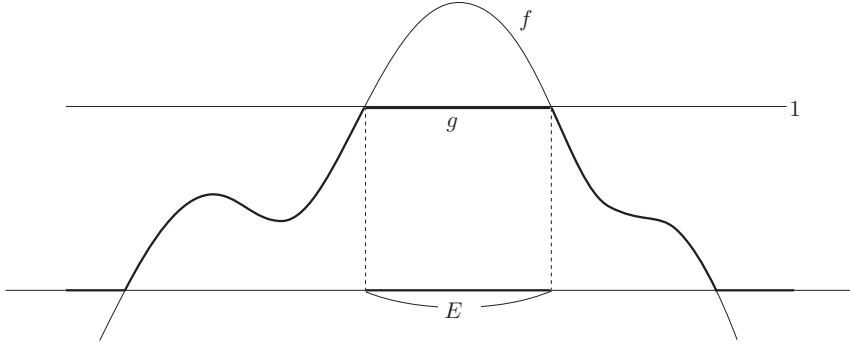
まず一般論として半順序集合 $(X, \leq)$ を考える。 X の非空集合 A に対して、半順序 $\leq$ についての最小上界が X のなかに存在するとき、それを $\vee(A)$ と書き、最大下界が存在するときは、それを $\wedge(A)$ と表記する。 X の任意の二点から成る集合が必ず最小上界と最大下界を有するとき、 X は束

(44) $E, E' \in \mathcal{E}$ であるとすれば、定義により $\chi_E, \chi_{E'} \in \mathfrak{A}^*$ 。 $\chi_{E \cup E'} = \chi_E \vee \chi_{E'}$ であるから、 $\mathfrak{A}^*$ の性質 4° により、 $\chi_{E \cup E'} \in \mathfrak{A}^*$ 。ゆえに $E \cup E' \in \mathcal{E}$ 。また $E \in \mathcal{E}$ に対して、 $\chi_{E^c} = 1 - \chi_E$ であるから、 2° によりこれは $\mathfrak{A}^*$ に含まれる。つまり $E^c \in \mathcal{E}$ 。 $\Omega, \emptyset \in \mathfrak{A}^*$ は明らか。こうして $\mathcal{E}$ が集合体であることが知られた。次に $E_n \in \mathcal{E}$ ($n = 1, 2, \dots$) は単調増加列とすれば、 $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_n}$ である。ここで $\{\chi_{E_n}\}$ は非負、単調増加、一様有界な $\mathfrak{A}^*$ の列であることに注意すれば、 5° により $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \in \mathfrak{A}^*$ 。

つまり $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ 。

(45) $g(\omega) = \text{Max}\{\text{Min}\{f(\omega), 1\}, 0\}$ と書いても同じである。

図 2



(lattice) であるという。非空集合 A が上に有界であるとき、必ず最小上界を有するならば、 X は半順序 $\leq$ について完備 (complete) であるという。⁽⁴⁶⁾

実線形空間 $\mathfrak{X}$ が半順序 $\leq$ について束を成し、さらに次の二条件 (i), (ii) を満たすとき、 $\mathfrak{X}$ はベクトル束 (vector lattice) であるという。

(i) $x, y, z \in \mathfrak{X}$ について

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z.$$

(ii) $x, y \in \mathfrak{X}$ について

$$x \leq y \implies \alpha x \leq \alpha y \quad \text{for all } \alpha \geq 0. \quad (47)$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ を有限測度空間とし、 Ω 上で本質的に有界な可測実数値関数がつくる空間 $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ に半順序 $\leq$ を

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega$$

と定義すれば、 $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ は完備なベクトル束である。殆どいたるところ等しい函数を同一視して得られる、 $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ の同値類の空間 $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ も自然に導入される半順序について完備なベクトル束を成す。

次の事実はいしばしば便利に用いられる。 H を $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ における任意の非空有界集合とすると、 $\vee(H) = \vee(D)$ を満たす可算集合 $D \subset H$ が存在する。⁽⁴⁸⁾ (上限の可算化)

σ -集合体 $\mathcal{E}$ の測度 μ による完備化を $\mathcal{E}_\mu$ と書くこととしよう。そして $(\Omega, \mathcal{E}_\mu)$ 上で可測かつ有界な実数値関数のつくる Banach 空間 (ノルムは一様収束ノルム) を $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{R})$ と記す。

(46) A が上に有界であるとき最小上界が存在することと、下に有界であるとき最大下界が存在することとは同値である。Zaanen [33] ではここで定義した完備性を Dedekind 完備と呼んでいる。

(47) $x \leq y \implies \alpha y \leq \alpha x$ for all $\alpha \leq 0$ と書いても同じことである。

(48) 証明は Dunford–Schwartz [11] p. 336, Schwartz [26] pp. 36–37 を参照。

定義 作用素 $\ell: \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{R})$ が次の諸条件を満たすとき、それを **lifting** と呼ぶ。
 $f, g \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。

- (i) $f(\omega) \leq g(\omega) \text{ a.e.} \Rightarrow \ell(f) \leq \ell(g)$ 。⁽⁴⁹⁾
- (ii) $\ell(\alpha f + \beta g) = \alpha \ell(f) + \beta \ell(g)$ 。
- (iii) $\ell(f \cdot g) = \ell(f) \cdot \ell(g)$ 。
- (iv) $\ell(1) = 1$ 。
- (v) $\ell(f) \in f$ 。

ℓ の像 $\ell(\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$ を L と記せば、 L は $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{R})$ の部分集合で、それ自体が完備なベクトル束を成す。lifting は $\mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ から L の上への、半順序を保存する等長な代数の同型作用素にほかならない。

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ が有限測度空間であるという当面の仮定の下で、lifting が存在することが知られている。⁽⁵⁰⁾

次に述べるふたつの補題は、有界可測関数の族について、Hoffmann-Jørgensen [14] が得たややデリケートな結果である。

補題 4 L の部分集合 L_0 は上から有界とし、

$$\sup(L_0)(\omega) = \sup\{f(\omega) \mid f \in L_0\}, \omega \in \Omega$$

と定義する。

- (i) $\sup(L_0)(\omega) \leq \vee(L_0)(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$.
- (ii) $\sup(L_0)$ は可測で

$$\sup(L_0) = \vee(L_0) \text{ a.e.}$$

証明 (i) $\vee(L_0)$ の定義により、すべての $f \in L_0$ に対して

$$f(\omega) \leq \vee(L_0)(\omega) \text{ for all } \omega \in \Omega.$$

ゆえに

(49) $\ell(f) \leq \ell(g)$ は “ $\ell(f)(\omega) \leq \ell(g)(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$ ” であることを表わす。

(50) lifting 理論について詳しくは Ionescu Tulcea [15]。この問題の起源は von Neumann [31] に発するが、完全な解決は Maharam [20] によってもたらされた。簡潔な解説として Schwartz [26]pp. 33–39。この結果は $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ が σ -有限の場合まで一般化することができる。ここでは証明を略す。lifting は $\mathfrak{L}^\infty$ を構成する各同値類から代表元を抽出する作用素であるが、その抽出方法が半順序と代数の同型性を確保するような仕方であるや否やが問題の核心である。lifting の用語には未だ定訳が存在しないようである。

$$\sup_{f \in L_0} f(\omega) = \sup(L_0)(\omega) \leq \vee(L_0)(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega.$$

(ii) 上限の可算化により, L_0 の可算部分集合 $D = \{f_1, f_2, \dots\}$ を適当に選び,

$$\vee(L_0)(\omega) = \vee(D)(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega \quad (1)$$

とすることができる。 $\sup(D)(\omega) = \sup\{f_n(\omega) \mid n = 1, 2, \dots\}$ は可測で

$$\sup(D)(\omega) \leq \sup(L_0)(\omega) \leq \vee(L_0)(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega. \quad (2)$$

$f_n \leq \sup(D) = 1, 2, \dots$ であるから

$$\ell(f_n)(\omega) = f_n(\omega) \leq \ell(\sup(D))(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega.$$

つまり $\ell(\sup(D))$ は D の上界である。したがって

$$\vee(L_0)(\omega) \underset{(1)}{=} \vee(D)(\omega) \leq \ell(\sup(D)).$$

lifting の性質 (v) により,

$$\vee(L_0)(\omega) \leq \sup(D)(\omega) \quad a.e. \quad (3)$$

(2), (3) から (ii) が導かれる。 (証了)

補題 5 L の部分集合 L_0 は有界で, しかも次の条件 (F) が成り立つものとしよう。⁽⁵¹⁾

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } f, g \in L_0 \text{ に対して} \\ \sup(f, g) \leq h \\ \text{を満たす } h \in L_0 \text{ が存在する。} \end{array} \right.$$

このとき,

$$\int_{\Omega} \sup(L_0) d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} f d\mu \mid f \in L_0 \right\}. \quad (4)$$

証明 上限の可算化により, L_0 の可算部分集合 $D = \{f_1, f_2, \dots\}$ を適当に選び

$$\vee(L_0)(\omega) = \vee(D)(\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega$$

とすることができる。条件 (F) により, 一般性を失うことなく, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ と仮定してよい。補題 4 により,

(51) 条件 (F) は Hoffmann-Jørgensen [14] (p. 259) が “filtering to the right” と呼んだものにほかない。

$$\sup(L_0) = \vee(L_0) = \sup_n f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ a.e.}$$

したがって上限収束定理により

$$\int_{\Omega} \sup(L_0) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \sup \left\{ \int_{\Omega} f d\mu \mid f \in L_0 \right\}.$$

逆の不等号は自明であるから、(4)が導かれる。

(証了)

反例 条件 (F) が満たされない場合には、(4)は必ずしも成立しない。 $\Omega = [0, 1]$ とし、 μ は $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度とする。また L_0 を $[0, 1]$ 上の Rademacher 関数の族とすれば、これは条件 (F) を満たさない。 $\sup(L_0)(\omega) = 1$ であることに注意すると、

$$\int_{\Omega} \sup(L_0) d\mu = 1, \int_{\Omega} f d\mu = 0 \quad \text{for any } f \in L_0$$

であるから、もちろん(4)は成り立たない。

V 積分々解定理 (その2)

既に第 III 節において、 $\Omega \times X$ 上の Young 測度が積分々解の形式で表現可能であるための条件を、 X が Polish 空間の場合に吟味したのであった。本節では同じ問題を、 X が一般の位相空間の場合について論じよう。⁽⁵²⁾

定理 8 (積分々解(2)——Valadier) $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ は有限測度空間、 X は Hausdorff 位相空間とする。 γ は $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の Young 測度で、 $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ は X 上の Radon 測度であるとしよう。このとき Radon 確率測度から成る $\mathcal{E}_\mu$ -可測族 $\nu = \{\nu_\omega \in \mathfrak{M}_+^1(X) \mid \omega \in \Omega\}$ を適当に選び

$$\gamma(A) = \int_{\Omega} \left\{ \int_X \chi_A(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu, \quad (1)$$

$$A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$$

とすることができる。このような可測族 ν は (同値類として) 一意に定まる。

(52) 定理 8 は、その基本的な考え方を Valadier [27][28] に負っている。さらに溯って着想の源泉を探ると、Hoffmann-Jørgensen [14] にたどり着く。

証明 (1)を示すためには、 A として $E \times B, E \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{B}(X)$ なる形の集合だけを調べればよい。⁽⁵³⁾ また $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ がRadon測度であることを仮定しているので、 X がコンパクトである場合に⁽⁵⁴⁾いて定理を証明すれば、一般の場合は定理7の2°と全く同様に示される。以下、 X はコンパクトと仮定する。一意性についても定理7の3°と類似の方法によればよい。

いま $\psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ を固定し、各 $f \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ に対して $f(\omega)\psi(x)$ の積分を対応させる

$$\Lambda_\psi: f \mapsto \int_{\Omega \times X} f(\omega)\psi(x)d\gamma$$

は $\Lambda_\psi: \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ なる形式の線形汎関数で $\|\Lambda_\psi\| \leq \|\psi\|$ である。したがってこの Λ_ψ を表現する $h_\psi \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ ⁽⁵⁵⁾が存在する。すなわち

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega)\psi(x)d\gamma = \int_{\Omega} f(\omega)h_\psi(\omega)d\mu, \quad (2)$$

$$f \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$$

である。作用素 $\psi \mapsto h_\psi(\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$ は正值線形でノルムが1の作用素である。⁽⁵⁶⁾

$\ell: \mathfrak{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ をliftingとすると、 $\omega \in \Omega$ をひとつ決めたとき

$$\nu_\omega: \psi \mapsto (\ell(h_\psi))(\omega) \quad (3)$$

は $\nu_\omega: \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ なる有界線形汎関数($\|\nu_\omega\| = 1$)、つまり $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})'$ の元で、しかも正值である。したがって ν_ω は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のRadon確率測度、つまり $\nu_\omega \in \mathfrak{M}_+^1(X)$ である。

また(2)の右辺に現われる $h_\psi(\omega)$ にそのliftingの値 $\ell(h_\psi)(\omega)$ を代入すると、

$$\ell(h_\psi)(\omega) = \nu_\omega(\psi) = \int_X \psi(x)d\nu_\omega \quad (4)$$

であるから、

$$\int_{\Omega \times X} f(\omega)\psi(x)d\gamma = \int_{\Omega} f(\omega) \left\{ \int_X \psi(x)d\nu_\omega \right\} d\mu. \quad (5)$$

任意の $E \in \mathcal{E}$ をひとつ固定し、 $\nu_E: B \mapsto \gamma(E \times B) (B \in \mathcal{B}(X))$ と定義すると、 $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ がRadon測度であることから、集合関数 ν_E もRadon測度であることに注意しよう。⁽⁵⁷⁾ X の任意の開集合 U

(53) もしこれが示されたなら、(1)を成り立たしめる $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ はすべての長方形 $E \times B, E \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{B}(X)$ を含む σ -集合体である。したがって(1)は $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ 上において成り立つ。

(54) 定理7では、 X がPolish空間と仮定されていたから、 $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ は必ずRadon測度になるのであった。

(55) 丸山 [24] pp. 242–249 を参照。

(56) $\|\Lambda_\psi\| = \|h_\psi\|_\infty \leq \|\psi\|$ であるから、件の作用素のノルムは ≤ 1 。さらに $\psi = 1$ とすれば $h_1 = 1$ に留意すれば、ノルムは1である。

(57) $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ がRadon測度であるから、 $B \in \mathcal{B}(X)$ と正数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ に対して B に含まれるコンパクト集合の列 $\{K_n\}$ を適当に選び、 $\gamma \circ \pi_X^{-1}(B \setminus K_n) < \varepsilon_n$ とすることができる。したがって

$$\nu_E(B \setminus K_n) = \gamma(E \times B \setminus E \times K_n) \leq \mu(A) \cdot (\gamma \circ \pi_X^{-1})(B \setminus K_n) \leq \mu(A)\varepsilon_n.$$

ゆえに ν_E はRadon測度である。

について ($E \in \mathcal{E}$)

$$\begin{aligned}
 \gamma(E \times U) &= \sup \left\{ \int_{\Omega \times X} \chi_E(\omega) \psi(x) d\gamma \mid \psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), 0 \leq \psi \leq \chi_U \right\}^{(58)} \\
 &= \sup \left\{ \int_E \left\{ \int_X \psi(x) d\nu_\omega \right\} d\mu \mid \psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), 0 \leq \psi \leq \chi_U \right\} \\
 &= \sup \left\{ \int_E \nu_\omega(\psi) d\mu \mid \psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), 0 \leq \psi \leq \chi_U \right\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ を固定したとき, (3) によって $\omega \mapsto \nu_\omega(\psi)$ は $\mathcal{E}_\mu$ -可測であり⁽⁵⁹⁾, したがって (4) から

$$\omega \mapsto \int_E \psi(x) d\nu_\omega$$

も $\mathcal{E}_\mu$ -可測なので, (6) に現われる積分は意味をもつのである。

(4) を ω の函数と見ると, $\omega \mapsto \nu_\omega(\psi)$ は lifting ℓ の像 L に含まれ

$$L_0 = \{\nu_\omega(\psi) \mid \psi \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), 0 \leq \psi \leq \chi_U\}$$

とすれば $L_0 \subset L$ は有界である。ゆえに補題 4 により

$$\omega \mapsto \nu_\omega(U) = \sup(L_0) \tag{7}$$

は $\mathcal{E}_\mu$ -可測である。

また L_0 は補題 5 の条件 (F) を満たすので, 同補題により

$$\begin{aligned}
 \gamma(E \times V) &= \sup \left\{ \int_E \nu_\omega(\psi) d\mu \mid \nu_\omega(\psi) \in L_0 \right\} = \int_E \sup(L_0) d\mu \\
 &\stackrel{(7)}{=} \int_E \nu_\omega(U) d\mu.
 \end{aligned}$$

次の二条件を満たす X 上の有界な Borel 函数 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ の集合を $\mathfrak{H}$ とする。

1° $\omega \mapsto \int_X h d\nu_\omega$ は $\mathcal{E}_\mu$ -可測。

(58) 前注と同様, 正数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ に対して, $\gamma \circ \pi_X^{-1}(U \setminus K_n) < \varepsilon_n$ を満たすコンパクト集合列 $\{K_n \subset U\}$ が存在する。仮定により, X はコンパクト Hausdorff なので正規格相空間である。したがって連続函数 $\psi_n: X \rightarrow [0, 1]$ で, $\psi_n(K_n) = \{1\}, \psi_n(U^c) = \{0\}$ を満たすものが存在する。すると

$$\int_{\Omega \times X} \chi_E(\omega) \psi_n(x) d\gamma \rightarrow \gamma(E \times U) \quad \text{as } n > \infty.$$

(59) lifting の定義により, $l(h_\psi)$ は完備化された σ -集合体 $\mathcal{E}_\mu$ について可測である。ここで $\mathcal{E}$ ではなく $\mathcal{E}_\mu$ を用いる必要が生ずる。

2° 任意の $E \in \mathcal{E}$ について

$$\int_{\Omega \times X} \chi_E(\omega) h(x) d\gamma = \int_E \left\{ \int_X h d\nu_\omega \right\} d\mu.$$

すると $\mathfrak{H}$ は補題 3 の条件 (a), (b), (c) を満たし, また乗法について閉じている。したがって補題 3 によって, $\mathfrak{H}$ はすべての有界な Borel 関数を含む。⁽⁶⁰⁾ ゆえに

$$\chi_B \in \mathfrak{H} \quad \text{for all } B \in \mathcal{B}(X).$$

すなわち $\omega \mapsto \nu_\omega(B)$ ($B \in \mathcal{B}(X)$) は $\mathcal{E}_\mu$ -可測で,

$$\gamma(E \times B) = \int_E \nu_\omega(B) d\mu. \quad (\text{証了})$$

VI 条件付確率

Young 測度を表現する確率測度から成る可測族の概念と, 確率論において周知の条件付確率との類似性は誰れの目にも明らかであろう。本稿の終わりに, 条件付確率の存在を積分々解定理 (定理 8) をつうじて証明しておこう。⁽⁶¹⁾

定理 9 $(\Omega, \mathcal{E})$ は可測空間, X は Hausdorff 位相空間, θ は X 上の Radon 確率測度とする。函数 $p: X \rightarrow \Omega$ は $(\mathcal{B}(X), \mathcal{E})$ -可測とし, $(\Omega, \mathcal{E})$ 上の測度 μ を $\mu = \theta \circ p^{-1}$ と定める。このとき X 上の Radon 確率測度から成る $\mathcal{E}_\mu$ -可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ で

$$\int_\Omega \nu_\omega(B \cap p^{-1}(A)) d\mu = \theta(B \cap p^{-1}(A)) \quad \text{for } A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{B}(X)$$

を満たすものが存在する。(ただし拡張された μ も同じ記号で表わす。)

証明 まず $(\Omega \times X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X))$ 上の測度 γ を

$$\gamma(E) = \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_E(\omega, x) d\theta \right\} d\mu \quad \text{for } E \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$$

と定義する。

(60) 補題 3 における $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ として, 両方ともここで定めた $\mathfrak{H}$ に等しいとみなせばよい。 $\sigma(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{B}(X)$ であることは自明である。

(61) Maruyama [25] に基づく。これは Hoffmann-Jørgensen [14], Chatterji [7] の着想にヒントを得た, いまひとつの別証である。条件付確率の説明は伊藤 [16] pp. 290–304, Loève [19] pp. 337–370 など。積分々解との関係では, ほかに Jirina [18] および Schwartz [26] pp. 55–56。

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \pi_\Omega^{-1}(A) &= \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{A \times X}(\omega, x) d\theta \right\} d\mu \\
&= \int_\Omega \chi_A(\omega) d\mu = \mu(A) \quad \text{for } A \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

であるから、 γ は Young 測度である。また $\gamma \circ \pi_X^{-1}$ が X 上の Radon 測度であることも、

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \pi_X^{-1}(B) &= \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{\Omega \times B}(\omega, x) d\theta \right\} d\mu \\
&= \int_\Omega \theta(B) d\mu = \theta(B) \quad \text{for } B \in \mathcal{B}(X)
\end{aligned} \tag{1}$$

から確かめられる。

したがって定理 8 により、 X 上の Radon 確率測度から成る $\mathcal{E}_\mu$ -可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ で、

$$\gamma(E) = \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_E(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu \quad \text{for } E \in \mathcal{E}_\mu \otimes \mathcal{B}(X)$$

を満たすものが存在する。とくに $E = A \times B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X)$ ならば、

$$\begin{aligned}
\gamma(A \times B) &= \int_\Omega \left\{ \int_X \chi_{A \times B}(\omega, x) d\nu_\omega \right\} d\mu \\
&= \int_\Omega \chi_A(\omega) \nu_\omega(B) d\mu = \int_A \nu_\omega(B) d\mu.
\end{aligned} \tag{2}$$

(1) により、 $\theta = \gamma \circ \pi_X^{-1}$ であるから、(2) から

$$\begin{aligned}
\theta(B \cap p^{-1}(A)) &= \gamma \circ \pi_X^{-1}(B \cap p^{-1}(A)) \\
&= \gamma(\Omega \times (B \cap p^{-1}(A))) = \int_\Omega \nu_\omega(B \cap p^{-1}(A)) d\mu.
\end{aligned}$$

(証了)

この定理から、ただちに次の帰結が導かれる。

定理 10 X は Hausdorff 位相空間、 $\mathcal{B}(X)$ はその上の Borel σ -集合体、また μ は X 上の Radon 確率測度とする。 $\mathcal{B}(X)$ の任意の部分 σ -集合体 $\mathcal{E}$ に対して、 X 上の $\mathcal{E}_\mu$ -可測族 $\{\nu_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ で

$$\mu(A \cap B) = \int_A \nu_\omega(B) d\mu \quad \text{for } A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{B}(X)$$

を満たすものが存在する。

証明 $\Omega = X$ とし、 Ω 上には σ -集合体 $\mathcal{E}$ を与える。また函数 $p: X \rightarrow \Omega$ を $p(\omega) = \omega$ を以て定義すれば、 p はもちろん $(\mathcal{B}(X), \mathcal{E})$ -可測である。

定理 9 における θ は、ここでは X 上の Radon 測度 μ に対応するので、定理 9 の $\mu = \theta \circ p^{-1}$ は $\mu|_{\mathcal{E}}$, つまり μ の $\mathcal{E}$ への制限と解釈される。

この単純な設定に定理 9 を適用すれば、 X 上の Radon 確率測度から成る $\mathcal{E}_{\mu}$ -可測族 $\{\nu_{\omega} \mid \omega \in \Omega\}$ で

$$\int_{\Omega} \chi_A(\omega) \nu_{\omega}(B) d\mu = \mu(B \cap p^{-1}(A)) = \mu(A \cap B) \quad \text{for } A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{B}(X)$$

を満たすものが存在する。 (証了)

参 考 文 献

- [1] Berliocchi, H. and J.M. Lasry, “Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations”, *Bull. Soc. Math. France*, **101** (1973), 129–184.
- [2] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, (Wiley, New York) 1968.
- [3] Bourbaki, N., *Eléments de mathématique: Intégration*, Chap.6 (Hermann, Paris) 1959. 英訳 *Elements of Mathematics: Integration*, I (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 2004.
- [4] ———, *Eléments de mathématique: Espace vectoriels topologiques*, Chap.1–2 (deuxième édition revue et corrigée) (Hermann, Paris) 1966; Chap.3–5, 1964. 英訳 *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 2004.
- [5] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, (Springer-Verlag, Berlin) 1977.
- [6] ———, P. Raynaud de Fitte and M. Valadier, *Young Measures on Topological Spaces*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht) 2004.
- [7] Chatterji, S.D., “Disintegration of Measures and Lifting”, in D.H. Tucker and H.B. Maynard (eds.), *Vector and Operator Valued Measures and Applications*, (Academic Press, New York/London) 1973, 69–83.
- [8] Choquet, G., *Lectures on Analysis*, Vol. I (Benjamin, London) 1969.
- [9] Dellacherie, C. and P-A. Meyer, *Probabilities and Potential*, (Hermann, Paris; North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford) 1978.
- [10] Diestel, J. and J.J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1977.
- [11] Dunford, N. and J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Part.1, (Interscience, New York) 1958.
- [12] Evans, L., *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1990.
- [13] Heyer, H., *Probability Measures on Locally Compact Groups*, (Springer-Verlag, Berlin) 1977.
- [14] Hoffmann-Jørgensen, J., “Existence of Conditional Probabilities”, *Math. Scand.*, **28** (1971), 257–264.
- [15] Ionescu Tulcea, A. and C., *Topics in the Theory of Liftings*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York) 1970.
- [16] 伊藤清『確率論』(岩波書店) 1953. [Itô, Kiyosi (1953), *Kakuritsu-ron*, Iwanami Shoten (in Japanese)]
- [17] ———『確率論』(岩波書店) 1991. [Itô, Kiyosi (1991), *Kakuritsu-ron*, Iwanami Shoten (in Japanese)]

(62) [16], [17] は著者、書名、出版社ともに同一であるが、別の書物である。

- [18] Jirina, M., “On Regular Conditional Probabilities”, *Czech. Math. J.*, **9** (1959), 445–450.
- [19] Loève M., *Probability Theory*, 3rd. ed., (van Nostrand, Princeton) 1963.
- [20] Maharam, D., “On a Theorem of von Neumann”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 987–994.
- [21] Malliavin, P., *Integration and Probability*, (Springer-Verlag, New York) 1995.
- [22] Maruyama, T. (丸山徹), “An Extension of Aumann-Perles’ Variational Problem”, *Proc. Japan Acad.*, **55** ser.A (1979), 348–352.
- [23] ———, 『数理経済学の方法』(創文社) 1995. [Maruyama, Toru (1995), *Suri-keizaigaku no Hoho*, Sōbunsha (in Japanese)]
- [24] ———, 『積分と函数解析』(シュプリンガー・フェアラーク東京) 2006. [Maruyama, Toru (2006), *Sekibun to Kansu-kaiseki*, Springer-Verlag Tokyo (in Japanese)]
- [25] ———, “Disintegration of Young Measures and Conditional Probabilities”, *J. Nonlinear Var. Analysis*, **2** (2018), 229–232.
- [26] Schwartz, L., *Lectures on Disintegration of Measures*, (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay) 1975.
- [27] Valadier, M., “Comparaison de trois théorèmes de désintégration”, *Séminaire d’analyse convexe*, exposé n°10 (1972), 10.1–10.21.
- [28] ———, “Désintégration d’une mesure sur un produit”, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.1*, **276** (1973), A33–A35.
- [29] ———, “Young Measures”, in A. Cellina ed., *Methods of Nonconvex Analysis*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 1990, 152–188.
- [30] ———, “A Course on Young Measures”, *Rendiconti dell’ istituto di matematica dell’ Università di Trieste*, **26** Supplemento (1994), 349–394.
- [31] von Neumann, J., „Algebraische Repräsentanten der Funktionen: bis auf eine Menge von Masse Null“, *J. Reine Angew. Math.*, **165** (1931), 109–115.
- [32] Warga, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, (Academic Press, New York) 1972.
- [33] Zaanen, A.C., *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg) 1997.

要旨: Young 測度の積分々解, つまり Radon 測度の可測族による表現の存在および一意性を体系的に述べる。若干の予備的な理論についても必要な限りで解説する。

キーワード: Young 測度, 積分々解, 測度の可測族