慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	積分の変数変換公式とBrouwerの不動点定理
Sub Title	A formula for change of variables and Brouwer's fixed point theorem
Author	丸山, 徹(Maruyama, Tōru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2019
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.111, No.4 (2019. 1) ,p.487(115)- 499(127)
JaLC DOI	10.14991/001.20190101-0115
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20190101-0115

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」111 巻 4 号（2019 年 1 月）

解　説

積分の変数変換公式と Brouwer の不動点定理

丸山　徹 *

序

$\mathbb{R}^l$ の単位球 $\{x \in \mathbb{R}^l \mid \|x\| \leqq 1\}$ を S，その球面 $\{x \in \mathbb{R}^l \mid \|x\| = 1\}$ を ∂S と表記する。S 上で定義され，値も S のなかにとるいかなる連続函数 f に対しても必ず不動点，つまり $f(x^*) = x^*$ となる点 $x^* \in S$ が存在する。この簡明な命題は Brouwer の不動点定理として著名なものであり，多くの証明法が知られている。(1)

証明の最も本質的な部分は，S から ∂S への引き込み（retraction）(2) は絶対に存在しえないことの論証である。この事実から Brouwer の定理を導出するには，わずかな手間を要するのみである。

引き込み $S \to \partial S$ の不存在を確かめる最も初等的な方法として，多変数函数の積分におけるある形の変数変換公式に一部の解析学者の注意が向けられてきた。ここでは Lax[4] の論文に基づき，その論証に，より完全な補充・補強を施し，着想の理解に努めたいと思う。

証明に援用する手段として不可欠な役割を果たすのは，（a）連続函数の滑らかな函数による一様近似と（b）行列式の微分に関する Hadamard の公式とのふたつである。いずれもひろく知られた結果であるが，後段，簡単な説明を加えることとする。

Brouwer の定理のさまざまな証明を知る読者にとって，位相幾何学におけるこの深い理論が，上

本稿の内容は平成 30 年 7 月 11 日，関東学院大学経済学部のセミナーにおける講義に基づいている。主催者ならびに参加者各位に厚く謝意を表する。

＊　慶應義塾大学名誉教授

(1)　たとえば丸山 [6] 第 9 章および付論 C を参照。

(2)　M を位相空間 X の部分集合とする。X から M のなかへの連続写像 $r : X \to M$ で，その M への制限 $r|_M$ が恒等写像となるようなものが存在するとき，M は X の**レトラクト**（retraction）であるといい，写像 r を**引き込み**（retraction mapping）という。丸山 [6] 第 9 章を参照。

記の初等的な道具建てだけを用いて導かれるのを見るのは，小さからぬ驚きであろう。また不動点定理を利用する立場の（経済学方面を含む）応用家が重装備を用いぬ証明を必要とするときに，Lax の方法には優れた教育的効果が期待できると思われる。[3]

本稿はこのような応用家を念頭において，Lax の証明とその背景とに十分な解説を施すことを目的とするものである。

1. 軟化子

連続函数を滑らかな函数を以て一様近似する方法は解析学の多くの書物において論じられているが，[4] ここでも一応の説明を施し，併せてこの論文で利用されるやや細かな結果についても述べておこう。

まず函数 $\xi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ を

$$\xi(x) = \begin{cases} C \exp(\|x\|^2 - 1)^{-1} \text{ if } \|x\| < 1, \\ 0 \text{ if } \|x\| \geqq 1 \end{cases} \tag{1}$$

と定義する。ここで定数 C は

$$\int_{\mathbb{R}^l} \xi(x)\, dx = 1 \tag{2}$$

を満たすように選ぶのである。任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\xi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-l} \xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3}$$

とおけば，

$$\int_{\mathbb{R}^l} \xi_\varepsilon(x)\, dx = 1 \tag{4}$$

である。また（1）と（3）から

$$\xi_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{if } \|x\| \geqq \varepsilon \tag{5}$$

も明らかであろう。

連続函数 $\varphi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ はコンパクトな台 K を有するものとし，ξ_ε と φ とのたたみ込み（convolution）を

$$(\xi_\varepsilon * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^l} \xi_\varepsilon(t - x)\varphi(x)\, dx \tag{6}$$

（3） 類似の方法で Brouwer の定理を示そうとするものに Báez-Duarte [1]，Kannai [3]，Samelson [9] などがある。増田 [8]pp. 63–70 にも Lax [4] に基づく解説が記されているので彼我を比べていただきたい。

（4） たとえば丸山 [7] pp. 236–239。

と定義すると，次の命題の成り立つことはよく知られている。

（i） $\xi_\varepsilon * \varphi$ の台は K の ε-近傍 $B_\varepsilon(K)$ に含まれる。[5]

（ii） $\xi_\varepsilon * \varphi$ は無限回微分可能。すなわち $\xi_\varepsilon * \varphi \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$。

（iii） $\varepsilon \to 0$ とするとき，$\xi_\varepsilon * \varphi$ は φ に一様収束する。

（iv） φ が $\mathfrak{C}^k$-級の場合は，$\varepsilon \to 0$ とするとき，$\xi_\varepsilon * \varphi$ は φ に $\mathfrak{C}^k$- 一様収束する。つまり k 階までの任意の導函数 $D^j(\xi_\varepsilon * \varphi)$ が，対応する φ の導函数 $D^j\varphi$ に一様収束する（$1 \leqq j \leqq k$）。

こうして，たたみ込みの演算 $\xi_\varepsilon * (\cdot)$ はある函数を滑らかな函数で一様近似する働きがあるので，これを**軟化子**（mollifier）と呼ぶのである。

以上はよく知られた事実であるが，本稿で利用されるやや細かな結果をふたつ証明しておこう。

1°　函数 $\varphi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ は連続でコンパクトな台 K を有するものとする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して無限回微分可能な函数 $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ で台が K に含まれ，

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$$

を満たすものが存在する。（$\|\cdot\|_\infty$ は一様収束ノルム。）

証明　$\varepsilon > 0$ に対して十分に小さな $\delta > 0$ を選ぶと，φ の一様連続性から，K の境界 ∂K の δ-近傍では $|\varphi(x)| < \varepsilon$ とすることができる。すなわち，[6]

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in B_\delta(\partial K).$$

いま K の点のうち，∂K からの距離が δ より遠い点の集合を K_1，$\delta/2$ よりも近い点の集合を K_2 と書く。つまり

$$K_1 = \{x \in K \mid \text{dist. } (x, \partial K) \geqq \delta\},$$
$$K_2 = \left\{ x \in K \;\middle|\; \text{dist. } (x, \partial K) \leqq \frac{\delta}{2} \right\}$$

である。

連続函数 $\theta : \mathbb{R}^l \to [0, 1]$ を

$$\theta(K_1) = \{1\},\ \theta(K_2 \cup K^c) = \{0\}$$

（5）　$B_\varepsilon(K) = \{x \in \mathbb{R}^l \mid \text{dist. } (x, K) < \varepsilon\}$. ここで，dist. (x, K) は点 x と集合 K との距離である。

（6）　先の注と同様，$B_\delta(\partial K) = \{x \in \mathbb{R}^l \mid \text{dist. } (x, \partial K) < \delta\}$。

を満たすように選ぶ。たとえば

$$\theta(x) = \frac{\text{dist. }(x, K_1)}{\text{dist. }(x, K_1) + \text{dist. }(x, K_2 \cup K^c)}$$

とすればよい[(7)]。

これを用いて函数 $\kappa : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ を

$$\kappa(x) = \varphi(x)\theta(x)$$

と定義すれば，κ は連続で

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \kappa\|_\infty < \varepsilon, \\ &\text{supp } \kappa \subset \left\{ x \in K \;\middle|\; \text{dist. }(x, \partial K) \geqq \frac{\delta}{2} \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

を満たす。ここで $\eta > 0$ を $\eta < \text{Min}\,\{\varepsilon, \delta/2\}$ のようにとると，

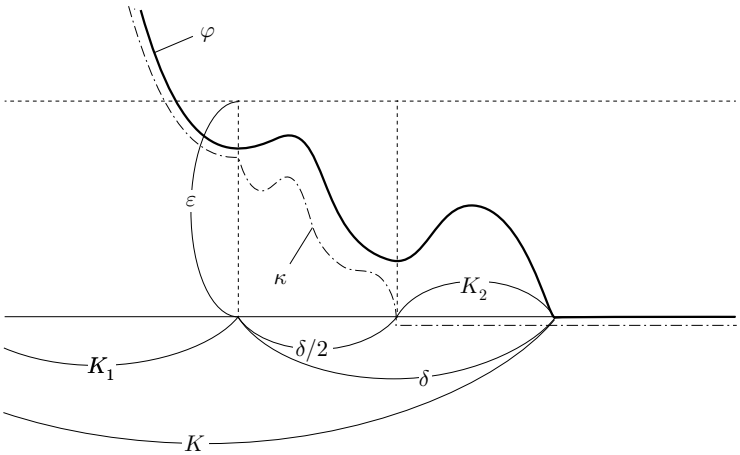

図 1　($l = 1$ の場合)

$$\begin{aligned} &\|\kappa - \varphi_\eta\|_\infty < \eta < \varepsilon, \\ &\text{supp } \varphi_\eta \subset K \end{aligned} \tag{8}$$

を満たす無限回微分可能な函数 φ_η が存在する。この φ_η については (7)，(8) により

$$\|\varphi - \varphi_\eta\|_\infty \leqq \|\varphi - \kappa\|_\infty + \|\kappa - \varphi_\eta\|_\infty < 2\varepsilon$$

が成り立つ。これで 1° が示された。　(証了)

---

(7)　このような θ の存在は，正規位相空間についての Urysohn の定理を知っていれば自明である。cf. Dunford and Schwartz [2] p. 15.

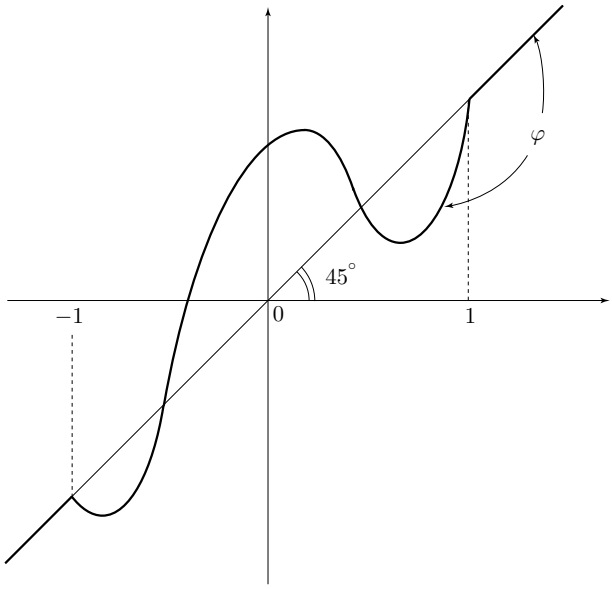

図 2

つまり φ は K の境界および K^c において 0 であるような滑らかな函数によって一様近似されるのである。

2°　函数 $\varphi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ は連続で, $\partial S \cup S^c$ つまり $\{x \in \mathbb{R}^l \mid \|x\| \geqq 1\}$ 上において, $\varphi(x) = x$ を満たすものとする（cf. 図 2)。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，無限回微分可能な函数 $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ で,

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon,$$
$$\varphi_\varepsilon(x) = x \quad \text{if} \quad \|x\| \geqq 1$$

を満たすものが存在する。

証明　$\psi(x) = \varphi(x) - x$ と定義すれば，ψ は連続で，$\|x\| \geqq 1$ に対して $\psi(x) = 0$ である。したがって，1° により，ψ は台が S に含まれる滑らかな函数 ψ_ε によって ε-一様近似される。そこで $\varphi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x) + x$ と定義すればよい。（証了）

2.　変数変換公式とその帰結

積分法の変数変換公式にはいくつかの型があるが[(8)]，ここでは Lax[4] に負う次の定理に着目する。

定理　（Lax）　$f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ はコンパクトな台を有する連続函数，また函数 $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ は次の二

条件を満たすものとする。

(i)　g は微分可能。

(ii)　$g(t) = t \quad \text{if} \quad \|t\| \geqq 1.$

このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^l} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} (f \circ g)(t) J(t)\,dt \tag{1}$$

が成り立つ。ここで $J(t)$ は g の函数行列式 $\det Dg(t)$ である。

(1) は丁寧に書けば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx_1 \cdots dx_l = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ g)(t) J(t) dt_1 \cdots dt_l \tag{1'}$$

であることはもちろんである。[9]

他の型の変数変換公式と比較して，g が全単射であることは明示的には仮定されていない。また導函数の行列表現 $Dg(t)$ の可逆性が仮定されていないことにも注意しておこう。ただし，すぐあとで見るとおり，条件 (i)，(ii) から g が全射であることが導かれるのである。

定理の証明は後に節をあらためて詳しく述べるが，先にこの定理の帰結として，ある種の中間値の定理と，重要な引き込み $S \to \partial S$ の不存在とが，きわめて容易に導かれる事情を示しておこう。

系 1　(中間値の定理)　函数 $g : S \to \mathbb{R}^l$ は連続で，∂S 上で $g(t) = t$ を満たすものとする。このとき $g(S) = S$ である。

証明　(第一段)　はじめに函数 g は $\mathbb{R}^l$ 全体で定義され，定理の (i)，(ii) を満たすことを仮定し，$g(S) = S$ を示そう。もしこれが成り立たないとすると，$x_0 \in S \backslash g(S)$ なる点 x_0 が存在する。$\|t\| \geqq 1$ に対しては $g(t) = t$ なのであるから，$\|x_0\| < 1$ でなければならない。$g(S)$ はコンパクトであるから，int. $S \backslash g(S)$ は x_0 を含む開集合である。したがって十分に小さな $\varepsilon > 0$ を選び，[10]

---

(8)　丸山 [6] pp. 343–362。Lebesgue 積分の変数変換については丸山 [7] pp. 199–214，Stromberg [10] pp. 385–392。

(9)　$Dg(t)$ は函数 g の導関数の行列表現，つまり

$$Dg(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial t_l}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_l}{\partial t_1}(t) & \cdots & \dfrac{\partial g_l}{\partial t_l}(t) \end{pmatrix}.$$

(10)　$B_\varepsilon(x_0)$ は x_0 を中心とし，半径が ε の開球である。

$$x_0 \in B_\varepsilon(x_0) \subset \text{int. } S \backslash g(S) \tag{2}$$

とすることができる。函数 $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ を連続で台が $B_\varepsilon(x_0)$ に含まれ，かつ

$$\int_{\mathbb{R}^l} f(x)dx \neq 0 \tag{3}$$

を満たすものとすれば[11]，定理により，

$$\int_{\mathbb{R}^l} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^l} (f \circ g)(t)J(t)\, dt$$

が成り立つ。この左辺は（3）により $\neq 0$。しかし他方，右辺は（2）によって $= 0$ である。矛盾。

（第二段）　次に函数 $g : S \to \mathbb{R}^l$ が連続で，しかも ∂S 上で $g(t) = t$ である本来の場合を考えよう。この g の定義域を $\mathbb{R}^l$ 全体に拡大することとし，函数 $\tilde{g} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ を

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{if} \quad \|t\| \leqq 1, \\ t & \text{if} \quad \|t\| \geqq 1 \end{cases} \tag{4}$$

と定義する。

第 1 節で述べたところから，$\tilde{g}$ は $\|t\| \geqq 1$ 上において，$\varphi_n(t) = t$ を満たし，無限回微分可能な函数列 $\{\varphi_n : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l\}$ によって一様近似することができる。第一段により，$\varphi_n(S) = S$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから，任意の $x \in S$ に対して，$\varphi_n(t_n) = x$ なる $t_n \in S$ が存在する。$\{t_n\}$ の収束部分列を $\{t_{n'}\}$，その極限を $t^* \in S$ とすると，

$$\begin{aligned} |g(t^*) - x| &\leqq |g(t^*) - g(t_{n'})| + |g(t_{n'}) - \varphi_{n'}(t_{n'})| + |\underbrace{\varphi_{n'}(t_{n'}) - x}_{=0}| \\ &\to 0 \quad \text{as} \quad n' \to \infty. \end{aligned}$$

ゆえに $g(t^*) = x$ を得る。　（証了）

∂S 上の相異なる二点 t, t' に対して $t = g(t)$ および $t' = g(t')$ であるが，t と t' を結んだ線分上の点は必ず g による S のある点の値となっている。この意味で，系 1 は中間値の定理に似た内容の命題である。

これから，Brouwer の定理の基礎原理とも称すべき次の結果がただちに得られる。

系 2（引き込みの不存在）　S から ∂S への引き込みは存在しない。

（11）　たとえば $f(x) = \xi_\varepsilon(x - x_0)$ とすればよい。

証明　仮に S から ∂S への引き込みが存在するものとし，それを $r : S \to \partial S$ とする。定義により，∂S 上では $r(t) = t$。したがって系 1 により，$r(S) = S$ とならねばならない。しかし一方，$r(S) = \partial S$ である。矛盾。（証了）

Brouwer の定理は系 2 からきわめて容易な手続きを以て導出されることは周知のところであり，ここでは反復するまでもないであろう。[12]

3.　変数変換公式の証明

本節では Lax の定理を証明しよう。

その場合，f も g もともに無限回微分可能（実際は，f は微分可能，g は二回連続微分可能で十分）として証明すればよい。実際，もし定理がこの追加的仮定の下に成り立つとするならば，定理本来の仮定の下でも公式は成立する。それは次のように示すことができる。f および g を一様近似する第 1 節（6）の方法で構成された滑らかな函数列をそれぞれ $\{f_n\}, \{g_n\}$ とすれば，

$$|f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \leqq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + |f(g_n(t)) - f_n(g_n(t))|.$$

f が一様連続であることと，$f_n \to f$ （一様収束），$g_n \to g$（$\mathfrak{C}^1$- 一様収束）であることに留意すれば，

$$|f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \text{（一様収束）}$$

また $J_n(t) = \det Dg_n(t)$ と書くことにすれば，

$$J_n(t) \to J(t) \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \text{（一様収束）}$$

である。したがって

$$\int_{\mathbb{R}^l} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} (f_n \circ g_n)(t) J_n(t)\,dt$$

の極限に移れば，Lax の公式（第 2 節の（1）または（1′））が導かれるのである。

そこで以下，f および g が十分に滑らかであることを仮定して定理を証明しよう。

f の台はコンパクトであるから，十分に大きな $c > 1$ を選び

$$f(x) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^l \backslash [-c, c]^l \tag{1}$$

とすることができる。（$S \subset [-c, c]^l$ である。）函数 $\psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ を

（12）　丸山 [6] pp. 505–506 を見よ。

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_l) = \int_{-\infty}^{x_1} f(z, x_2, \cdots, x_l)\, dz \tag{2}$$

と定義すれば，ψ は微分可能で，$D_1\psi = f$ であるから[13]，第 2 節の（1）の右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^l} (D_1\psi \circ g)(t) J(t)\, dt \tag{3}$$

に等しい。ψ の定義（2）により，

a.　$|x_j| \geqq c$　for some $j \neq 1$，あるいは

b.　$x_1 \leqq -c$

の場合，$\psi(x) = 0$ である。

（3）の被積分函数は次の形に表現される。

$$(D_1\psi \circ g)(t) J(t) = \det \begin{pmatrix} D(\psi \circ g)(t) \\ Dg_2(t) \\ \vdots \\ Dg_l(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

計算によってこれを確かめよう。$D(\psi \circ g)(t) = D\psi(g(t)) Dg(t)$ であるから，

$$D(\psi \circ g)(t) \text{ の第 } i \text{ 要素} = \sum_{j=1}^{l} D_j\psi(g(t)) D_i g_j(t).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\text{（4）の右辺} &= \det \begin{pmatrix} \sum_j D_j\psi(g(t)) D_1 g_j(t) & \cdots & \sum_j D_j\psi(g(t)) D_l g_j(t) \\ D_1 g_2(t) & \cdots & D_l g_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_l(t) & \cdots & D_l g_l(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} D_1\psi(g(t)) D_1 g_1(t) & \cdots & D_1\psi(g(t)) D_l g_1(t) \\ D_1 g_2(t) & \cdots & D_l g_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_l(t) & \cdots & D_l g_l(t) \end{pmatrix} \\
&= D_1\psi(g(t)) J(t).
\end{aligned}$$

これで（4）が示された。

（13）$D_j\psi$ は ψ の第 j 変数についての偏導函数，つまり $\partial\psi/\partial x_j$ を表わす記号である。

（3）により，第 2 節の（1）を示すためには，

$$\int_{\mathbb{R}^l} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} (D_1\psi \circ g)(t)J(t)\,dt \tag{5}$$

を証明すればよいのである。

$Dg(t)$ の第 1 行目の余因子を $G_1(t), G_2(t), \cdots, G_l(t)$ とおくと，

$$（4）の右辺 = \sum_{j=1}^{l} D_j\psi(g(t))G_j(t). \tag{6}$$

したがって（5）の右辺は，$\mathbb{R}^l$ 上における（6）の積分にほかならない。（6）の各項ごとの積分を計算しよう。

$$\int_{\mathbb{R}^l} D_1\psi(g(t))G_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} D_1\psi(g(t))G_1(t)\,dt_1}_{I_1} \cdots dt_l.$$

最も内側の積分

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} D_1\psi(g(t))G_1(t)\,dt_1$$

にまず注目すると，これは $[-c, c]$ 上の積分に等しい[14]。ゆえに

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-c}^{c} D_1\psi(g(t))G_1(t)\,dt_1 \\ &= \psi(g(t))G_1(t)\Big|_{-c}^{c} - \int_{-c}^{c} \psi(g(t))D_1G_1(t)\,dt_1 \\ &= \psi(c, t_2, \cdots, t_l) - \int_{-c}^{c} \psi(g(t))D_1G_1(t)\,dt_1. \end{aligned}$$

ここで $t_1 = c$ においては $g(c, t_2, \cdots, t_l) = (c, t_2, \cdots, t_l)$ であり，また g は S の外では恒等写像なので，$G_1(c, t_2, \cdots, t_l) = 1$ であることを用いた。

次に第 j 項 $(j \neq 1)$ の積分に移る。

$$\int_{\mathbb{R}^l} D_j\psi(g(t))G_j(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} D_j\psi(g(t))G_j(t)\,dt_j}_{I_j} \underbrace{dt_1 \cdots dt_l}_{t_j\text{以外}}$$

の最も内側の積分

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} D_j\psi(g(t))G_j(t)\,dt_j$$

を部分積分によって求めると，境界項は 0 なので，

（14） $t = (t_1, t_2, \cdots, t_l)$ の第 1 座標 t_1 が $|t_1| \geqq c$ を満たすならば，$\|t\| \geqq 1$ であるから，$g(t) = t$。したがって $|t_1| \geqq c$ のとき，$D_1\psi(g(t)) = D_1\psi(t) = 0$ となる。したがって実質上の積分区間は $[-c, c]$ と考えてよい。

$$I_j = -\int_{-c}^{c} \psi(g(t)) D_j G_j(t)\, dt_j$$

を得る。結局（5）の積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{j=1}^{l} D_j \psi(g(t)) G_j(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(c, t_2, \cdots, t_l)\, dt_2 \cdots dt_l - \int_{\mathbb{R}^l} \psi(g(t)) \sum_{j=1}^{l} D_j G_j(t)\, dt \qquad (7)
\end{aligned}$$

となる。ここでよく知られた Hadamard の公式

$$\sum_{j=1}^{l} D_j G_j(t) = 0 \qquad (8)$$

により，（7）の右辺第 2 項は消える。したがって（7）は

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{j=1}^{l} D_j \psi(g(t)) G_j(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(c, t_2, \cdots, t_l)\, dt_2 \cdots dt_l \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{c} f(z, t_2, \cdots, t_l) dz\, dt_2 \cdots dt_l \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_l) dx_1\, dx_2 \cdots dx_l.
\end{aligned}$$

最後の等式は積分変数を形式的に $x_1, x_2, \cdots, x_l$ に変え, 最も内側の積分区間を $(-\infty, c]$ から $(-\infty, \infty)$ に変えただけである。$[-c, c]^l$ の外では f は 0 なので，この変更は全く形式的なものにすぎない。

そしてこれが証明すべき公式（5）であった。

4. Hadamard の公式

前節で用いた Hadamard の公式（前節の（8））に一応の証明を与えておこう。

$Dg(t)$ の第 1 行第 j 列要素の余因子 $G_j(t)$ は次のようである。ここで φ_{ik} は g_i の第 k 偏導函数 $\varphi_{ik} = D_k g_i (2 \leqq i \leqq l,\ 1 \leqq k \leqq l)$ である。

$$G_j = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{2,j-1} & \varphi_{2,j+1} & \cdots & \varphi_{2,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i,1} & \cdots & \varphi_{i,j-1} & \varphi_{i,j+1} & \cdots & \varphi_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{l,1} & \cdots & \varphi_{l,j-1} & \varphi_{l,j+1} & \cdots & \varphi_{l,l} \end{array} \right) (-1)^{1+j} \qquad (1)$$

もちろん各 $\varphi_{i,k}$ もまた G_j も t の函数である。(1) の右辺の行列の第 k 列を t_j で微分した行列式に $(-1)^{1+j}$ を乗じ，これを $H_{j,k}$ と書く。$D_jG_j(t)$ を求めるためには，$H_{j,k}$ をすべての k について加えればよい[15]。微分した第 k 列を第 1 列に移動すると

$$H_{j,k} = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} D_j\varphi_{2,k} & \cdots & \varphi_{2,k-1} & \varphi_{2,k+1} & \cdots & \varphi_{2,j-1} & \varphi_{2,j+1} & \cdots & \varphi_{2,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_j\varphi_{i,k} & \cdots & \varphi_{i,k-1} & \varphi_{i,k+1} & \cdots & \varphi_{i,j-1} & \varphi_{i,j+1} & \cdots & \varphi_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_j\varphi_{l,k} & \cdots & \varphi_{l,k-1} & \varphi_{l,k+1} & \cdots & \varphi_{l,j-1} & \varphi_{l,j+1} & \cdots & \varphi_{l,l} \end{array} \right)$$

$$\times \begin{cases} (-1)^{1+j} \times (-1)^{k-1} & \text{if} \quad k < j, \\ (-1)^{1+j} \times (-1)^{k-2} & \text{if} \quad k > j. \end{cases} \tag{2}$$

函数 φ が十分に滑らかであることから，$D_j\varphi_{i,k} = D_k\varphi_{i,j}$ が成り立つので，

$$H_{j,k} = H_{k,j} \tag{3}$$

であることに注意しよう。

したがって

$$\begin{aligned} D_jG_j &= (-1)^{1+j} \sum_{k<j} (-1)^{k-1} H_{j,k} + (-1)^{1+j} \sum_{k>j} (-1)^{k-2} H_{j,k} \\ &= \sum_{k<j} (-1)^{j+k} H_{j,k} + \sum_{k>j} (-1)^{j+k-1} H_{j,k} = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{j+k} \sigma(j,k) H_{j,k}, \end{aligned} \tag{4}$$

ここで

$$\sigma(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad k < j, \\ 0 & \text{if} \quad k = j, \\ -1 & \text{if} \quad k > j \end{cases}$$

である。

j と k の立場を入れ替えると，$\sigma(j,k) = -\sigma(k,j)$ に注意して，

$$\sum_{j=1}^{l} D_jG_j \underset{(4)}{=} \sum_{j,k} (-1)^{j+k} \sigma(j,k) H_{j,k} = \sum_{j,k} (-1)^{k+j} \sigma(k,j) H_{k,j}$$

---

(15) 行列式の微分公式については Lax [5] pp. 125–126。なお Lax のこの書物は数多い線形代数学の教科書のなかでも，きわ立った特色のある優れた作品である。邦訳（丸善）も刊行されており，多くの方々の一読をすすめたい。

$$\underset{(3)}{=} -\sum_{j,k}(-1)^{k+j}\sigma(j,k)H_{j,k}$$

が導かれる。これから明らかに

$$\sum_{j=1}^{l} D_j G_j = 0$$

が成り立たねばならない。これで Hadamard の公式が示されたのである。

参 考 文 献

[1] Báez-Duarte, L., “Brouwer’s Fixed-point Theorem and a Generalization of the Formula for Change of Variables in Multiple Integrals”, *J. Math. Anal. Appl.*, **177** (1993), 412–414.

[2] Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1, (Interscience, New York) 1958.

[3] Kannai, Y., “An Elementary Proof of the Non-retraction Theorem”, *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 264–268.

[4] Lax, P.D., “Change of Variables in Multiple Integrals”, *Amer. Math. Monthly*, **106** (1999), 497–501.

[5] ————, *Linear Algebra*, 2nd ed., (Wiley, Hoboken) 2007.

[6] 丸山 徹『数理経済学の方法』（創文社）1995。

[7] ———— 『積分と函数解析』（シュプリンガー東京）2006。

[8] 増田久弥『応用解析ハンドブック』（シュプリンガー・ジャパン）2010。

[9] Samelson, H., “On the Brouwer Fix Point Theorem”, *Portugaliae Mathematica*, **22** (1963), 189–191.

[10] Stromberg, K.R., *An Introduction to Classical Real Analysis*, (Amer. Math. Soc., Providence) 1981.

[11] 高木貞治『解析概論』改訂第三版（岩波書店）1961。