Title	経済学のための常微分方程式入門
Sub Title	An introduction of ordinary differential equations for economists
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yūki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2019
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.111, No.4 (2019. 1) ,p.435(63)- 461(89)
JaLC DOI	10.14991/001.20190101-0063
Abstract	本稿では，正規形の常微分方程式について解説し，その解の局所存在定理を，不動点定理を 用いて示す。存在定理には四種類あるが，本稿ではそれらの違いにそれぞれ触れた上で，全部同じやり方で証明できることを示す。さらに，この証明法以外の存在定理との比較や，経済学における微分 方程式の主な応用について触れる。 This paper explains the standard form ordinary differential equations, and shows local existence theorems of a solution by using fixed point theorems. We explain differences between these four existence theorems, and verify that these theorems can be proved by the same method. Moreover, we compare this proof with other proofs, and introduce applications of the ordinary differential equations in economics.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20190101-0063

「三田学会雑誌」111 巻 4 号（2019 年 1 月）

経済学のための常微分方程式入門

細矢祐誉 *

（初稿受付 2018 年 7 月 17 日，査読を経て掲載決定 2018 年 9 月 11 日）

An Introduction of Ordinary Differential Equations for Economists

Yuhki Hosoya *

Abstract: This paper explains the standard form ordinary differential equations, and shows local existence theorems of a solution by using fixed point theorems. We explain differences between these four existence theorems, and verify that these theorems can be proved by the same method. Moreover, we compare this proof with other proofs, and introduce applications of the ordinary differential equations in economics.

Key words: contraction mapping fixed point theorem, Schauder's fixed point theorem, Picard-Lindelöf's existence theorem, Peano's existence theorem, Carathéodory's existence theorem

JEL Classifications: C61, C62, C65

本稿の査読に当たって，匿名の査読者の方から，有用な助言を多数頂いた。ここに深く感謝の意を示したい。

* 関東学院大学経済学部
College of Economics, Kanto-Gakuin University

1　序論

本稿では，いわゆる正規形の常微分方程式の初期値問題を考察する。この種の微分方程式は経済理論において，ミクロ・マクロを問わずよく出てくる。たとえばミクロ経済理論では，いわゆる均衡のワルラス安定性問題は，通常は常微分方程式の問題として記述される。進化ゲーム理論の中では，レプリケータ動学系という微分方程式が重要な役割を果たす。筆者の研究する消費者理論にも，シェパードの補題をこの形式の微分方程式に還元して議論するやり方があって，研究されている。マクロ経済理論でも，連続時間の資本蓄積方程式はこの形式で書かれるし，オイラー方程式もこの形の方程式である。

周知のことではあるが，ニュートンの時代以降，微分方程式論は応用数学において重要な地位を占め続けている。その中でもこの正規形の常微分方程式は，微分方程式としては非常にポピュラーな形であり，多くの教科書が出ており，解説され，研究されている。ところがここにひとつ問題がある。というのは，経済学で出てくるいくつかの微分方程式には，ポピュラーな教科書に載っている存在定理が直接使えないものが存在するのである。たとえばシンプルな資本蓄積方程式(1)

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t)$$

でも，上級のマクロ経済学のテキストには，消費経路 $c(t)$ の「ジャンプ」を認めるような記述があるものが，複数存在する。たいていの場合，数学の教科書で正規形の常微分方程式の解の存在を扱う場合，右辺の関数が連続微分可能である，というくらい強い仮定を置くので，「右辺の関数が t について不連続」という特徴を持つこの問題は，実は普通の微分方程式の教科書にあるやり方では，解の存在が言えない。

本稿は，経済学者のための常微分方程式論の入門編として，局所解の存在定理を統一的に証明することを目標としている。局所解の存在定理はたいていの教科書では一種類しか扱われていないが，実は名前がついている定理だけでも「ピカール＝リンデレーフの定理」「ペアノの定理」「カラテオドリの定理」と三種類存在しており，そしてほとんどの教科書では「ピカール＝リンデレーフの定理」の簡単なケースしか扱わない。また，証明の方法も教科書ごとにばらばらであり，勉強する度に考え方を身につけ直さなければならない。そこで，本稿では上の三種類（厳密に分けると実は四種類）の定理について「すべて同じやり方で」証明をつけることにした。同じやり方とは，つまり「不動点定理に帰着して解く」方法である。

（1）　本稿を通じて，$\dot{x}(t)$ と書かれてあったら，それは関数 x の点 t における微分という意味であるとする。

なお，先に挙げた不連続な消費を伴う資本蓄積方程式は，解の存在を示すには「カラテオドリの定理」が必要である。この定理は「ピカール＝リンデレーフの定理」「ペアノの定理」よりも仮定が少なく，その分，証明の難易度が若干高くなる。しかし，本稿で整理された証明を読めば，実のところこの定理の証明の難易度は，前のふたつと比べても，さほど高くないことが理解できるであろう。

上のような目的から来る性質上，本稿では不動点定理についての知識は既知として扱わざるを得ない。使う不動点定理は「縮小写像の不動点定理」と「シャウダーの不動点定理」であり，これに加えて，シャウダーの不動点定理を用いるために「アスコリ＝アルゼラの定理」を使う必要がある。読者がこれらについての知識を必要とする場合，丸山（1995, 2002）などで適宜埋めていただきたい。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節では，本稿で扱う問題の定式化から始め，次に解の存在の同値命題となる非常に重要な命題を示す。また，前の段落で挙げた三つの定理について，主張だけ紹介する。第 3 節では，常微分方程式の局所解の存在定理で最も標準的であるふたつの定理，つまり，「ピカール＝リンデレーフの定理」と「ペアノの定理」を示す。第 4 節では，これらを拡張した「カラテオドリの定理」の証明を与えるが，カラテオドリの定理にはふたつの異なるタイプがあるので，ふたつに分けて証明する。第 5 節では，局所解の存在定理のその他のやり方を紹介して，今回の証明と比較する。第 6 節では，今回扱った常微分方程式の経済学における応用例をいくつか紹介する。結語は特に設けない。

2　準備：正規形常微分方程式とは

2.1　問題と解の定義

本稿で扱われる問題は，正規形常微分方程式の，初期値問題と呼ばれるものである。この問題は，たとえば次のような形で記述される。

$$\dot{x}(t) = h(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

ただし，h は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の部分集合 U から $\mathbb{R}^n$ への関数とし，U は (t_0, x_0) を含むものとする。

本稿では，実数 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち，少なくとも二点以上を含む凸集合を**区間**（interval）と呼ぶことにする。上の問題(1)について，関数 $x : I \to \mathbb{R}^n$ が問題(1)の**解**であるとは，以下の四条件が成り立つことを指す。[2]

1)　関数 $x(t)$ の定義域 I は t_0 を含む区間である。

(2)　本稿では，「関数 x」という表現と，「関数 $x(t)$」という表現を，どちらも使う。関数を点として扱う関数解析の考え方からすれば，前者の方がよい書き方である。しかし，普通の点 x と関数の名前 x がまぎらわしく混在することもあり，わかりやすさのために後者を使用した方がよい場合もある。そのため，本稿では必要に応じて，よりわかりやすそうな方をその場その場で取捨選択することにした。

2) $x(t_0) = x_0$ が成り立つ。

3) 関数 $x(t)$ は連続微分可能である。(3)

4) I の中のすべての点 t において，$\dot{x}(t) = h(t, x(t))$ が成り立つ。

このうち，3) の条件には若干の注意が必要である。実は経済学で扱われる方程式の中には，この 3) の条件がどうやっても成り立たないような問題も存在する。具体的には，序論で述べたように，成長理論で出てくる資本蓄積方程式

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t), \quad k(0) = \bar{k}$$

は，消費経路 $c(t)$ の「ジャンプ」を通常，許容する。そして $c(t)$ が不連続である場合，この問題に「なんらかの意味での「解」」を求めようとした場合，上の 3) が絶対に成り立たなくなってしまい，それは上の意味での「解」ではなくなってしまう。

そこで 3) と 4) を少し緩めた以下の条件を満たす関数 $x : I \to \mathbb{R}^n$ を「拡張された解」と呼ぶ場合が多い。本稿でもこの言葉を用いる。(4)

1) 関数 $x(t)$ の定義域 I は t_0 を含む区間である。

2) $x(t_0) = x_0$ が成り立つ。

3) 関数 $x(t)$ は絶対連続である。(5)

4) I の中のほとんどすべての点 t において，$\dot{x}(t) = h(t, x(t))$ が成り立つ。(6)

---

(3)　本稿を通じて，区間上で定義された関数について，その端点における微分は片側微分で評価することとする。

(4)　こちらも単に「解」と呼んでしまう文献も少なくないが，本稿では区別する。

(5)　本稿を通じて，区間 I 上で定義された関数 x が絶対連続であるとは，それがほとんどすべての点で微分可能で，かつ微分積分学の基本定理

$$x(b) - x(a) = \int_a^b \dot{x}(t)dt \quad \text{for all } a, b \in I$$

が成り立つということを指すことにする。「ほとんどすべての点」という言葉については注釈 6 を見よ。またほとんどすべての点でしか定義されていない関数を積分することの正当性については注釈 7 を見よ。この定義は多くの本で扱われる「絶対連続」より弱い概念であるが，たとえば I がコンパクトであったりすると，同値になる。

なお，絶対連続な関数は必ず連続であることに注意。これは上の微分積分学の基本定理から簡単に示すことができる。

(6)　ここで「I の中のほとんどすべての点で○○が成り立つ」という文は，「I の部分集合 J で成り立ち，かつ I から J を取り除いた集合 $I \setminus J$ の測度が 0 である」という意味である。この言い方はどの測度で議論しているかに依存して意味が変わる言葉だが，特に注記しない場合は，ルベーグ測度についての意味で用いる。

2.2　解の同値定理

解の存在定理の証明においては，以下の同値命題が本質的に最も重要である。[(7)]

命題 1：t_0 を含む区間 I 上で定義された連続関数 $x(t)$ を考え，ただし関数 $t \mapsto h(t, x(t))$ は I 上定義されて可測であるとする。このとき，次の二条件は同値である。

i)　関数 $x(t)$ は絶対連続で，問題（1）の拡張された解である。

ii)　$h(t, x(t))$ は I 上局所可積分であり，また次の積分方程式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s)) ds \tag{2}$$

がすべての $t \in I$ に対して成り立つ。

証明：まず i) を仮定して ii) を示そう。i) が成り立つならば，$\dot{x}(t)$ と $h(t, x(t))$ は測度零の点を除いて一致し，また前者は絶対連続関数の微分だから局所可積分である。よって後者，つまり $h(t, x(t))$ も局所可積分である。そして任意の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

となるので，ii) が成り立つ。

逆に ii) を仮定しよう。このとき，ルベーグの微分定理[(8)]から，

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} h(s, x(s)) ds$$

はほとんどすべての $t \in I$ において微分可能で，その t における微分の値は $h(t, x(t))$ に等しい。よって，（2）から

$$\dot{x}(t) = h(t, x(t))$$

がほとんどすべての $t \in I$ に対して成り立つことになる。したがって $x(t)$ は絶対連続であり，I の中のほとんどすべての点において $\dot{x}(t) = h(t, x(t))$ が成り立つ。$t_0 \in I$ は仮定されており，$x(t_0) = x_0$

（7）　本稿を通じて，積分は古典的なリーマン積分というよりは，現代的なルベーグの意味での積分として議論される。現代的な積分論においては，集合 A 上すべての点で定義された関数のみならず，ほとんどすべての点で定義された関数も積分操作の対象として扱われる。ただし，命題 2 や第 3 節で扱われる積分は入っている関数が全域で定義された連続関数であるため，実はリーマン積分と理解しても議論に支障は出ない。

（8）　証明はたとえば，Dudley（2002）の第 7 章第 1 節を参照。

は(2)から明らかなので，$x(t)$ は問題(1)の拡張された解であり，i) が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

この命題 1 自体も重要であるが，これはさらに重要な系を持っている。系ではあるがこれ自体が重要なので，命題 2 という名前にしておこう。

命題 2：$h : U \to \mathbb{R}^n$ は連続であるとする。このとき，t_0 を含む区間 I 上で定義された連続関数 $x(t)$ で $(t, x(t)) \in U$ がすべての $t \in I$ に対して成り立つものについて，以下の三条件は同値である。

i) $x(t)$ は絶対連続で，問題(1)の拡張された解である。
ii) $x(t)$ は連続微分可能で，問題(1)の解である。
iii) 積分方程式(2)がすべての $t \in I$ に対して成り立つ。

証明：ii) が i) を意味することは当たり前である。また，$t \in I$ ならば $(t, x(t)) \in U$ なので $t \mapsto h(t, x(t))$ は I 上で定義できて，t について連続であり，したがって可測である。よって，命題 1 から i) が iii) を意味することがただちにわかる。後は iii) が ii) を意味することだけを示せばよい。

そこで iii) を仮定しよう。この(2)式に出てくる積分

$$\int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds$$

は，通常の微分積分学の基本定理から，t についてすべての点で微分可能であり，その t における微分の値は $h(t, x(t))$ と一致する。したがって，

$$\dot{x}(t) = h(t, x(t))$$

がすべての $t \in I$ について成り立つことになるが，これは関数 $x(t)$ が連続微分可能なことも同時に意味するので，ii) が成り立つ。以上で証明が完成した。 ■

なお，h が t を固定したときに x について連続で，x を固定したときに t について可測である，という条件を，**カラテオドリの条件**と呼ぶ。h がカラテオドリの条件を満たし，x が可測である場合，$t \mapsto h(t, x(t))$ は定義できる範囲内で可測であることが知られている（証明はイオッフェ・ティコミロフ（2017）の第 8 章第 1 節の命題 8 の系を見よ）。したがって，命題 1 における $h(t, x(t))$ の可測性条件は，h がカラテオドリの条件を満たしているときには，気にしなくてよい。

2.3　不動点定理といくつかの補題

本稿で用いる不動点定理は二種類ある。これに加えて，関数空間の基本的な性質を示す結果をい

くつか用いるため，ここで一気に紹介しておきたい。なお，証明については，すべて省略する。必要がある方は，序論で述べた通り，丸山（1995, 2002）などを参照されたい。

縮小写像の不動点定理：X は完備距離空間とし，その距離を ρ とする。ここで，写像 $T : X \to X$ が，ある $\delta \in [0, 1[$ について，すべての $x, y \in X$ に対して次の条件

$$\rho(Tx, Ty) \leq \delta\rho(x, y)$$

を満たしているとする。このとき，T にはただひとつの不動点が存在する。

　この不動点定理には，さらに不動点を近似計算できる追加の主張があることも多いのだが，今回は使わないので省略する。

シャウダーの不動点定理：X はバナッハ空間で，K はその非空コンパクト凸部分集合，$T : K \to K$ は連続写像とする。このとき T には不動点が存在する。

　この不動点定理も，もっと一般の場合の主張が存在するのだが，今回はこの程度の強度で十分である。

　次の定理に進む前に，ひとつ特別な関数空間を提示しておく。T は任意の距離空間とし，その距離を ρ とする。$C_b(T, \mathbb{R}^n)$ は T 上で定義され，値が $\mathbb{R}^n$ に出てくるような，有界な連続関数をすべて集めてできた集合とする。ここでノルム $\|\cdot\|_\infty$ を，

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} \|f(t)\|$$

と定義すると，このノルムの下に空間 $C_b(T, \mathbb{R}^n)$ はバナッハ空間になることが知られている。

　さらに，用語をひとつ定義する。X は $C_b(T, \mathbb{R}^n)$ の非空部分集合であるとする。ここで，X が点 $t \in T$ において**同程度連続**（equicontinuous）であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，すべての $f \in X$ について

$$\rho(t, s) < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$$

が成り立つことを指す。すべての点で同程度連続な集合は，単に同程度連続であると言う。

アスコリ＝アルゼラの定理：T がコンパクトであるとき，$C_b(T, \mathbb{R}^n)$ の部分集合 X が相対コンパクトであるための必要十分条件は，それがノルム有界かつ同程度連続であることである。

　なお，定数 $L > 0$ に対して，すべての $t, s \in T$ について次の性質

$$\|f(t)-f(s)\| \le L\rho(t,s)$$

が成り立っている関数 $f: T \to \mathbb{R}^n$ は，L-リプシッツであると呼ばれる。集合 $X \subset C_b(T,\mathbb{R}^n)$ の中のすべての f が L-リプシッツならば，X は同程度連続である：$\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ と取ればよい。

3　解の存在定理

この節では，h が連続関数である場合に的を絞って解の存在定理をふたつ示す。そのために用語をひとつ追加する。問題(1)に出てきた $h: U \to \mathbb{R}^n$ が $V \subset U$ 上で x に関してリプシッツである，とは，ある定数 $L > 0$ が存在して，もし仮に $(t,x_1),(t,x_2) \in V$ であるならば必ず

$$\|h(t,x_1)-h(t,x_2)\| \le L\|x_1-x_2\|$$

である，ということを意味する。

3.1　ピカール＝リンデレーフの存在定理

次の定理は微分方程式の解の存在定理で最もポピュラー，かつ証明の難易度が低いものであり，ピカール＝リンデレーフの存在定理と呼ばれている。

定理 1：h が U 上連続であり，(t_0,x_0) は U の内部に位置するとする。また，(t_0,x_0) を内部に含むコンパクト集合 $V \subset U$ が存在して，h は V 上で x に関してリプシッツであるとする。このとき，t_0 を内部に含む区間 I が存在して，その上で問題(1)はただひとつの解 $x^*(t)$ を持つ。

注意：多くの微分方程式の教科書では，h が x について連続微分可能だと仮定して解の存在を証明している。しかし h が x について連続微分可能であれば，(t_0,x_0) の近くで x に関してリプシッツであることは，簡単に示せる。したがって，それらの定理はすべて，このピカール＝リンデレーフの定理の特殊ケースに過ぎない。

証明：まず，$\sup_{(t,x)\in V}\|h(t,x)\| = K$ とし，また h は V 上で x に関してリプシッツなので，対応する定数 $L > 0$ を取る。

いま (t_0,x_0) は V の内部に存在するので，$|t-t_0| \le a$ かつ $\|x-x_0\| \le b$ であれば $(t,x) \in V$ となるような定数 $a>0, b>0$ が存在する。ここで，一般性を失うことなく a は十分小さく，$aK \le b$ と $aL < 1$ が成り立つとする。そして，$I = [t_0-a, t_0+a]$ と定義する。さらに，I 上で定義され，値が x_0 を中心とする半径 b の閉球に収まっているような連続関数の集合を X とする。X は $C_b(I,\mathbb{R}^n)$

における定数関数 x_0 を中心とした半径 b の閉球であるため，バナッハ空間の閉集合であり，よって $\|\cdot\|_\infty$ によって導入される距離について完備である。$x \in X$ に対して，

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds$$

として，新たな関数 Tx を定義する。すると(9)，

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - x_0\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s, x(s))\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} K ds\right| = K|t - t_0| \leq aK \leq b
\end{aligned}$$

となるので，$Tx \in X$ である。したがって T は X から X への関数と見なせる。次に，$x_1, x_2 \in X$ であるとき，

$$\begin{aligned}
\|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} [h(s, x_1(s)) - h(s, x_2(s))]ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s, x_1(s)) - h(s, x_2(s))\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|x_1(s) - x_2(s)\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|x_1 - x_2\|_\infty ds\right| \\
&= L|t - t_0|\|x_1 - x_2\|_\infty \leq aL\|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

がすべての $t \in I$ について成り立つ。左辺を t について上限を取ると，

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \leq aL\|x_1 - x_2\|_\infty$$

がわかるので，これは T が縮小写像の不動点定理の条件をすべて満たすことを意味する。よって T には X 上唯一の不動点 $x^* \in X$ が存在するが，これは

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x^*(s))ds$$

---

(9)　ここで，積分評価

$$\left\|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s)\|ds\right|$$

を用いているが，この証明は案外面倒である。f が連続関数のときは，積分はリーマン和の極限なので，リーマン和に戻って議論すれば簡単に示せる。しかし f がただの可積分関数のときにはリーマン積分可能かどうかがわからないため，その証明法は使えない。この場合は，$\|\cdot\|$ が凸関数であることを使って，イェンセンの不等式で示すのが通常である。

であるということを意味し，故に x^* は(2)式を満たす。よってこれは問題(1)の解である。

最後に，一意性を示さねばならない。このために，x^+ という解があったと仮定してみよう。まず，$\|x^+(t)-x_0\| \le b$ がすべての $t \in I$ について成り立つことを示す。背理法による。ある $\bar{t} \in I$ について $\|x^+(\bar{t})-x_0\| > b$ であると仮定しよう。$\bar{t} > t_0$ のときには,

$$t^* = \inf\{t \in [t_0, \bar{t}] | \|x^+(t)-x_0\| > b\}$$

と定義する。$x^+(t_0) = x_0$ なので，$t_0 < t^* < \bar{t}$ で，かつ $t \in [t_0, t^*]$ ならば $\|x^+(t)-x_0\| \le b$ である。すると，$(t, x^+(t)) \in V$ なので，$\|h(t, x^+(t))\| \le K$ であり，よって

$$\begin{aligned} \|x^+(t^*)-x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t^*} h(t, x^+(t))dt \right\| \\ &\le \int_{t_0}^{t^*} \|h(t, x^+(t))\| dt \\ &\le K(t^*-t_0) < K(\bar{t}-t_0) \le aK \le b \end{aligned}$$

となる。しかし一方で $t \mapsto \|x^+(t)-x_0\|$ は t について連続なので，$t \downarrow t^*$ のときの極限を取れば $\|x^+(t^*)-x_0\| \ge b$ であることがわかり，これらは互いに矛盾している。よってこんなことはあり得ない。$\bar{t} < t_0$ のときにも同様に矛盾が出るので，結論として $\|x^+(t)-x_0\| \le b$ がすべての $t \in I$ について成り立つことがわかる。すると $x^+ \in X$ であることになるが，命題 2 から，このとき x^+ は T の不動点でなければならず，縮小写像の不動点定理から T の不動点は x^* のみなので，$x^+ = x^*$ である。以上で証明が完成した。 ■

3.2　ペアノの存在定理

上の定理から，x に関するリプシッツ条件を取り除いた定理が，しばしば必要になる。この場合を取り扱うのが，次のペアノの存在定理である。

定理 2：h が U 上連続であり，(t_0, x_0) は U の内部に位置するとする。このとき，t_0 を内部に含む区間 I 上で定義された，問題(1)の解が存在する。

注意：定理 2 においては，解の一意性はもはや成り立たない。たとえば,

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0$$

という問題を考えれば，これは $h(t,x) = \sqrt{|x|}$ という問題なので定理 2 の条件を満たす。そして,

$$x_1(t) \equiv 0$$

はわかりやすい解である。ところが,

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{if } t \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

もまた解である。

証明：(t_0, x_0) は U の内部に存在するので，コンパクト近傍 $V \subset U$ が存在する。ここで，$\sup_{(t,x)\in V} \|h(t,x)\| = K$ としておく。(t_0, x_0) は V の内部に位置するので，$|t - t_0| \leq a$ かつ $\|x - x_0\| \leq b$ であれば $(t, x) \in V$ であるような $a > 0, b > 0$ が存在するはずである。一般性を失うことなく a を十分小さく取って，$aK \leq b$ と仮定しておく。ここで，$I = [t_0 - a, t_0 + a]$ とし，X を，$C_b(I, \mathbb{R}^n)$ に含まれる関数 x で，$x(t_0) = x_0$ であり，かつ K-リプシッツであるものの全体と定義する。定数関数 x_0 が X に含まれるため，この集合は非空である。もし $x \in X$ ならば,

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t) - x(t_0)\| \leq K|t - t_0| \leq aK \leq b$$

なので，X はノルム有界集合で，また $t \in I$ ならば $(t, x(t)) \in V$ である。一方，X の元はすべて K-リプシッツなので，X は同程度連続であり，よってアスコリ＝アルゼラの定理から，X は相対コンパクトである。次に，$x_1, x_2 \in X$ かつ $s \in [0, 1]$ であるとき，$x = (1 - s)x_1 + sx_2$ とすると，$x(t_0) = x_0$ であり，また $t, t' \in I$ ならば,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(t')\| &\leq (1 - s)\|x_1(t) - x_1(t')\| + s\|x_2(t) - x_2(t')\| \\ &\leq (1 - s)K|t - t'| + sK|t - t'| = K|t - t'| \end{aligned}$$

となる。したがって X は凸集合である。最後に，(x_k) を X 上の点列とし，$x \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$ に収束しているとすれば，まず $x(t_0) = \lim_{k\to\infty} x_k(t_0) = x_0$ であり，次に $t, s \in I$ を固定して

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \leq K|t - s|$$

を k について極限を取れば,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq K|t - s|$$

を得るので，x も K-リプシッツである。つまり $x \in X$ であり，X は閉集合であることがわかった。以上で，X はコンパクト凸であることがわかったことになる。

そこで前と同様に，$x \in X$ に対して新たな関数 Tx を

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds$$

と定義しよう。このとき，まず $(Tx)(t_0) = x_0$ である。次に，$t, t' \in I$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\|(Tx)(t')-(Tx)(t)\| &= \left\|\int_t^{t'} h(s,x(s))ds\right\| \\
&\le \left|\int_t^{t'} \|h(s,x(s))\|ds\right| \\
&\le \left|\int_t^{t'} Kds\right| \\
&= K|t'-t|
\end{aligned}
$$

となるので，Tx は K-リプシッツであり，よって T は X から X への写像と見なせる。最後に，(x_k) を X 上の点列とし，$x \in X$ に収束しているとする。$x_k(t), x(t)$ は共に，x_0 を中心とした半径 b の閉球に属しており，この閉球と区間 I の直積はコンパクトなので，この上で h は一様連続である。したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$\|y_1 - x_0\| \le b$，$\|y_2 - x_0\| \le b$ かつ $\|y_1 - y_2\| < \delta$ ならば，すべての $s \in I$ に対して $\|h(s,y_1) - h(s,y_2)\| < \varepsilon$ である。ここで $\varepsilon > 0$ をひとつ固定して，対応する上の $\delta > 0$ を取ると，十分大きい k については $\|x_k - x\|_\infty < \delta$ になる。すると任意の $t \in I$ について

$$
\begin{aligned}
\|(Tx_k)(t)-(Tx)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} [h(s,x_k(s))-h(s,x(s))]ds\right\| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds\right| \\
&\le \int_{t_0-a}^{t_0+a} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds \\
&\le \int_{t_0-a}^{t_0+a} \varepsilon ds = 2a\varepsilon
\end{aligned}
$$

となるので，左辺の t についての上限を取れば，

$$\|Tx_k - Tx\|_\infty \le 2a\varepsilon$$

となる。したがって $k \to \infty$ のとき $Tx_k \to Tx$ であり，T は連続である。故にシャウダーの不動点定理から，T には不動点 x^* が存在するが，x^* は(2)式を満たすので，これが問題(1)の解である。以上で証明が完成した。 ■

4　カラテオドリの存在定理

ここまでは h が連続な場合を議論していた。しかし，すでに議論したように，経済学ではしばしば，h が連続とは限らない微分方程式に出くわすことがある。そこで，h が連続ではないが，カラ

テオドリの条件を満たす際に，拡張された解の存在を示す定理を示しておこう。これらはすべてカラテオドリの存在定理と呼ばれているが，こちらにもピカール＝リンデレーフ型と，ペアノ型が存在する。

ピカール＝リンデレーフ型は定理 3，ペアノ型は定理 4 である。定理 3 の証明は大部分が定理 1 と同じであり，定理 4 の証明も大部分が定理 2 と同じなのだが，違う場所だけを確認するのはかえって骨が折れるので，ここでは証明は省略せず全部書くことにする。

注意：定理 3 と命題 2 から定理 1 は容易に出せる。同様に，定理 4 と命題 2 から定理 2 が容易に出せる。したがって，実は第 3 節の結果は，この節の結果と命題 2 からすぐに出てくるものである。それにもかかわらず第 3 節で証明を書いたのは，見比べることで違いが鮮明になるからという意味と，連続性が証明を簡単にする点について明示したかったという理由による。特に，定理 2 と比べて定理 4 は，連続性が使えないため，最後の部分の証明が若干，難しい。

4.1　カラテオドリ＝ピカール＝リンデレーフの存在定理

以下に出てくる定理で使われるカラテオドリの条件を，念のためにもう一度再掲しておこう。関数 $h(t,x)$ がカラテオドリの条件を満たすとは，固定した任意の x に対して $t\mapsto h(t,x)$ が可測であり，また固定した任意の t に対して $x\mapsto h(t,x)$ が連続であることを指す。すでに注意した通り，この条件の下で，$x:I\to\mathbb{R}^n$ が可測で，かつ $y(t)=h(t,x(t))$ が I 上で定義されるならば，関数 $y(t)$ もまた可測であることが知られている。

定理 3：(t_0,x_0) は U の内部に存在するとし，また (t_0,x_0) のコンパクト近傍 V 上で h はカラテオドリの条件を満たし，さらに x についてリプシッツであるとする。そして，ある $A>0$ が存在して，$[t_0-A,t_0+A]$ 上で関数 $t\mapsto\|h(t,x_0)\|$ が可積分であるとする。このとき，t_0 を内部に含むある区間 I が存在して，その上で定義された問題(1)の拡張された解がただひとつ存在する。

証明：まず，h は V 上で x に関してリプシッツなので，対応する定数 $L>0$ を取る。次に，$|t-t_0|\le a$ かつ $|x-x_0|\le b$ であれば $(t,x)\in V$ となるような定数 $a>0,b>0$ を取るが，$a\le A$ かつ $aL<1$ で，さらに

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a}[\|h(t,x_0)\|+Lb]dt\le b$$

が成り立つように，a を十分小さく取っておくことにする。そして $I=[t_0-a,t_0+a]$ と定義し，I 上で定義され，値が x_0 を中心とする半径 b の閉球に収まっているような連続関数の集合を X とする。X は $\|\cdot\|_\infty$ で定められる距離について閉集合であり，よって距離空間として完備である。$x\in X$

に対して，

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds$$

という形で新たな関数 Tx を定義する。この関数が well-defined な I から $\mathbb{R}^n$ への連続関数であることを，最初に確かめておきたい。そのためには，$x \in X$ であれば $t \mapsto h(t, x(t))$ が I 上可積分であることを示さねばならない。カラテオドリの条件があるので，この関数が可測であることはわかる。一方，

$$\begin{aligned}\int_{t_0-a}^{t_0+a} \|h(t, x(t))\|dt &\le \int_{t_0-a}^{t_0+a} [\|h(t, x_0)\| + \|h(t, x(t)) - h(t, x_0)\|]dt \\ &\le \int_{t_0-a}^{t_0+a} [\|h(t, x_0)\| + Lb]dt \le b < +\infty\end{aligned}$$

なので，たしかに $t \mapsto h(t, x(t))$ は I 上可積分であることがわかった。したがって Tx は well-defined な I から $\mathbb{R}^n$ への連続関数である。さらに，上の計算から任意の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}\|(Tx)(t) - x_0\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds\right\| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s, x(s))\|ds\right| \\ &\le \int_{t_0-a}^{t_0+a} \|h(s, x(s))\|ds \le b\end{aligned}$$

がわかるので，$Tx \in X$ である。したがって T は X から X への関数と見なせる。次に，$x_1, x_2 \in X$ であるとき，

$$\begin{aligned}\|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} [h(s, x_1(s)) - h(s, x_2(s))]ds\right\| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s, x_1(s)) - h(s, x_2(s))\|ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} L\|x_1(s) - x_2(s)\|ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} L\|x_1 - x_2\|_\infty ds\right| \\ &= L|t - t_0|\|x_1 - x_2\|_\infty \le aL\|x_1 - x_2\|_\infty\end{aligned}$$

がすべての $t \in I$ について成り立つ。左辺を t について上限を取ると，

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \le aL\|x_1 - x_2\|_\infty$$

が成り立つので，これは T が縮小写像の不動点定理の条件をすべて満たすことを意味する。よって T には X 上唯一の不動点 $x^* \in X$ が存在するが，これは

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x^*(s))ds$$

であるということであり，x^* は(2)式を満たす。よってこれは問題(1)の拡張された解である。

最後に, 一意性を示さねばならない。$x^+(t)$ という拡張された解があったと仮定する。まず, $\|x^+(t) - x_0\| \leq b$ がすべての $t \in I$ について成り立つことを示す。背理法による。ある $\bar{t} \in I$ について $\|x^+(\bar{t}) - x_0\| > b$ であると仮定しよう。$\bar{t} > t_0$ のときには,

$$t^* = \inf\{t \in [t_0, \bar{t}] | \|x^+(t) - x_0\| > b\}$$

と定義する。$x^+(t_0) = x_0$ なので，$t_0 < t^* < \bar{t}$ で，かつ $t \in [t_0, t^*]$ ならば $\|x^+(t) - x_0\| \leq b$ である。すると,

$$\|h(t, x^+(t))\| \leq \|h(t, x_0)\| + Lb$$

であり，よって

$$\begin{aligned}
\|x^+(t^*) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t^*} h(t, x^+(t))dt \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t^*} \|h(t, x^+(t))\|dt \\
&\leq \int_{t_0}^{t^*} [\|h(t, x_0)\| + Lb]dt \\
&< \int_{t_0-a}^{t_0+a} [\|h(t, x_0)\| + Lb]dt \leq b
\end{aligned}$$

となる。しかし一方で $t \mapsto \|x^+(t) - x_0\|$ という関数は連続なので，$t \downarrow t^*$ という極限を取ってやると，$\|x^+(t^*) - x_0\| \geq b$ でなければならず，矛盾が生ずる。よってこれはあり得ない。$\bar{t} < t_0$ のときにも同様に矛盾が出るので，$\|x^+(t) - x_0\| \leq b$ がすべての $t \in I$ について成り立つ。すると $x^+ \in X$ であることがわかるが，命題 1 から，このとき x^+ は T の不動点でなければならず，縮小写像の不動点定理から不動点は x^* のみなので，$x^+ = x^*$ である。以上で証明が完成した。 ■

4.2　カラテオドリ＝ペアノの存在定理

定理 4：(t_0, x_0) は U の内部に存在し，また h はカラテオドリの条件を満たすとする。さらに，ある $A > 0$ と $b > 0$ が存在して，$\{(t, x) | |t - t_0| \leq A,\ \|x - x_0\| \leq b\} \subset U$ で，かつ，ある非負の可積分関数 $r : [t_0 - A, t_0 + A] \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$\sup_{x:\|x-x_0\|\leq b} \|h(t, x)\| \leq r(t)$$

がほとんどすべての t に対して成り立っていたとする。このとき，問題(1)には拡張された解が存在する。

証明：まず，$0 < a \leq A$ となる a を，

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} r(t)dt \leq b$$

が成り立つように十分小さく取る。そして，$I = [t_0 - a, t_0 + a]$ とし，X を，$C_b(I, \mathbb{R}^n)$ に含まれる関数 x で，$x(t_0) = x_0$ であり，かつ，任意の $t, t' \in I$ に対して，

$$\|x(t') - x(t)\| \leq \left| \int_t^{t'} r(s)ds \right|$$

となるようなものの全体とする。定数関数 x_0 が X に含まれるため，この X は非空である。そして $x \in X$ ならば,

$$\|x(t) - x_0\| = \|x(t) - x(t_0)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} r(s)ds \right| \leq b$$

なので，X はノルム有界集合で，また $t \in I$ ならば $(t, x(t)) \in U$ である。一方，$t \in I$ をひとつ固定し，$\varepsilon > 0$ を任意に取ったとき，

$$\int_{\max\{t-\delta, t_0-a\}}^{\min\{t+\delta, t_0+a\}} r(s)ds < \varepsilon$$

となるように δ を選べば，$t' \in I$ かつ $|t - t'| \leq \delta$ であるとき，どんな $x \in X$ に対しても

$$\|x(t') - x(t)\| \leq \left| \int_t^{t'} r(s)ds \right| < \varepsilon$$

となるので，X は同程度連続である。よってアスコリ＝アルゼラの定理から，X は相対コンパクトである。次に，$x_1, x_2 \in X$ かつ $s \in [0, 1]$ であるとき，$x = (1 - s)x_1 + sx_2$ とすると，$x(t_0) = x_0$ であり，また $t, t' \in I$ ならば,

$$\begin{aligned}\|x(t') - x(t)\| &\leq (1 - s)\|x_1(t') - x_1(t)\| + s\|x_2(t') - x_2(t)\| \\ &\leq (1 - s)\left| \int_t^{t'} r(s)ds \right| + s\left| \int_t^{t'} r(s)ds \right| = \left| \int_t^{t'} r(s)ds \right|\end{aligned}$$

となる。したがって X は凸集合である。最後に，(x_k) を X 上の点列とし，$x \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$ に収束しているとすれば，まず $x(t_0) = \lim_{k\to\infty} x_k(t_0) = x_0$ であり，次に $t, t' \in I$ を固定して

$$\|x_k(t') - x_k(t)\| \leq \left| \int_t^{t'} r(s)ds \right|$$

を k について極限を取れば,

$$\|x(t') - x(t)\| \leq \left| \int_t^{t'} r(s)ds \right|$$

を得るので，$x \in X$ である。よって X は閉集合であることがわかった。以上で，X はコンパクト凸であることがわかったことになる。

そこで前と同様に，$x \in X$ に対して新たな関数 Tx を

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s, x(s))ds$$

と定義しよう。これが well-defined な I から $\mathbb{R}^n$ への連続関数であることを示すには，前と同様，$x \in X$ ならば $t \mapsto h(t, x(t))$ が I 上可積分であることを示さねばならないが，まずカラテオドリの条件からこの関数は可測であり，さらに

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} \|h(t, x(t))\|dt \le \int_{t_0-a}^{t_0+a} r(t)dt \le b$$

であるから, たしかに可積分である。よって Tx は I から $\mathbb{R}^n$ への連続関数である。さらに, $(Tx)(t_0) = x_0$ であり，また $t, t' \in I$ のとき,

$$\begin{aligned}\|(Tx)(t') - (Tx)(t)\| &= \left\|\int_{t}^{t'} h(s, x(s))ds\right\| \\ &\le \left|\int_{t}^{t'} \|h(s, x(s))\|ds\right| \\ &\le \left|\int_{t}^{t'} r(s)ds\right|\end{aligned}$$

となるので，$Tx \in X$ であり，よって T は X から X への写像と見なせる。次に，(x_k) を X 上の点列とし，$x \in X$ に収束しているとする。このとき，ほとんどすべての $s \in I$ に対して

$$\sup_k \|h(s, x_k(s))\| \le r(s),\ \|h(s, x(s))\| \le r(s)$$

である。ここで，任意に $\varepsilon > 0$ を固定し，$\|h(s, x_k(s)) - h(s, x(s))\| > \frac{\varepsilon}{4a}$ となるような $s \in I$ の集合を A_k と置く。そして，$B_k = \cup_{\ell \ge k} A_\ell$ と定義する。このとき，B_k は非増加な可測集合列であり，また h についてのカラテオドリの条件と $x_k(s) \to x(s)$ から，$B_k \downarrow \emptyset$ である。よって,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} r(s)ds = 0$$

である。したがって，ある k_0 が存在して，$k \ge k_0$ ならば

$$\int_{B_k} 2r(s)ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。すると，任意の $t \in I$ に対して，$k \ge k_0$ ならば,

$$\|(Tx_k)(t) - (Tx)(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} [h(s, x_k(s)) - h(s, x(s))]ds\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds\right| \\
&\leq \int_{t_0-a}^{t_0+a} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds \\
&= \int_{I\setminus B_k} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds \\
&\quad + \int_{B_k} \|h(s,x_k(s))-h(s,x(s))\|ds \\
&\leq \int_{I\setminus B_k} \frac{\varepsilon}{4a}ds + \int_{B_k} 2r(s)ds \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

となる。左辺を $t \in I$ について上限を取れば，$k \geq k_0$ のときに

$$\|Tx_k - Tx\|_\infty \leq \varepsilon$$

である。よって，T は連続である。したがってシャウダーの不動点定理から，T には不動点 x^* が存在するが，x^* は(2)式を満たすので，これが問題(1)の拡張された解である。以上で証明が完成した。■

5　不動点定理を用いない証明との比較

第 3 節，第 4 節ともに，我々は微分方程式の解，あるいは拡張された解の存在証明を，不動点定理に帰着する形で求めた。それに対して，不動点定理を用いない証明もいくつかある。代表的な例としてはピカールの逐次近似法や，コーシー・ポリゴン法などである。前者はポントリャーギン（1968）の第 4 章などに詳しい解説があるが，実は読めばわかるとおり，本質的には縮小写像の不動点定理と変わらない証明法である。一方，後者は本質的にまったく異なる解法である。これについて少し解説しよう。

ペアノ型を例に取る。$h(t,x)$ は連続関数として，$\eta > 0$ をひとつ取り，次のような点列を構成しよう。

$$t_{k+1} = t_k + \eta,\ x_{k+1} = x_k + \eta h(t_k, x_k).$$

そして，$t_k \leq t \leq t_{k+1}$ となる t に対して，

$$x_\eta(t) = \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}x_{k+1} + \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}x_k$$

と定義するのである。

この $x_\eta(t)$ は，**陽的オイラー法**と呼ばれる微分方程式の典型的な近似解である。定理 2 の証明で出てきたような $a>0$ を取って，$x_\eta(t)$ の定義域を $[t_0, t_0+a]$ まで作る。こうすると (x_η) という関数族が同程度連続になることが容易に示せるので，アスコリ＝アルゼラの定理を使うことで，$\eta_k \downarrow 0$ となる数列 (η_k) で，x_{η_k} がある x^* に一様ノルムで収束するものが存在することを示せる。そして x^* が解であることは，(2)式などを用いて簡単に示せるので，これで $[t_0, t_0+a]$ 上の解の存在が示せる。逆側，つまり $[t_0-a, t_0]$ での解の存在も同様に示せばよい。

このような証明法は，解の**近似**の構成から出発して，その近似が収束する先が解であることを示す，という形になっている。これは，ピカールの逐次近似法も同様である。これらの証明法を用いる有用性は，解の存在と同時に**近似解の計算法**も明示していることである。それに対して不動点アプローチでは，少なくとも近似解が明示的に出てこないため，もう一ステップ議論を追加しないと近似解を計算できないという問題がある。

ただし，注意しておきたいのは，**ペアノ型では上の $x_\eta(t)$ は必ずしも近似解ではない**ことである。実際，アスコリ＝アルゼラの定理を用いるということは，部分列を取る操作が必要だということなので，η の取り方によっては変なことが起こるかもしれない。ピカール＝リンデレーフの定理の前提条件が成り立っていると，上の x_η は部分列を取る必要がなく，$\eta \downarrow 0$ となるときに真の解 x^* に収束することが知られている。が，それは上の証明だけを見ているとすぐにはわからない。一方で不動点アプローチによる証明を見れば，ピカール＝リンデレーフ型で使っている不動点定理が縮小写像型であるということが見て取れ，これがどうもキーになっているようだ，という形でピンと来るだろう。

なお，問題(1)ではなく，偏微分方程式や，あるいは常微分方程式でも正規形でなかったり，初期値問題ではなく境界値問題を扱ったりといったことをすると，上で挙げた証明のうちどれが有効でどれが有効でないかというのが変わってくることがある。また，陽的オイラー法を陰的オイラー法に変えないとうまく行かなかったりといった形で，工夫が必要になる。それと，実は上の証明で出てきた定義区間 I の長さを厳密に評価する必要がある場合があり，この点でも証明を精査して a の取り得る値を計らなければならないことがある。が，これらはすべて，より複雑な問題であり，本稿の射程を超えるため，ここでは多くを述べることは避けたい。

6　微分方程式の経済学への応用

本節では，微分方程式を使った経済理論をいくつか，ほんのさわりだけ解説する。これらの議論に深く入り込もうとした場合，本稿で証明した解の存在定理群は，必ずやなんらかの役に立つであろう。

6.1　陰関数定理の証明

微分方程式の経済学への応用で最も簡単なのは，実は陰関数定理である。この定理自体は，微分方程式を用いなくても証明することができる。しかし，微分方程式の解の存在定理を用いると，二変数の問題での陰関数定理はとても簡単に示せる。経済学で最初に陰関数定理に出くわす箇所といえば，ほぼ間違いなくそれは無差別曲線の傾きを計算する箇所であり，そこで使うためには二変数の陰関数定理があれば十分である。ここではその結果の簡単な証明を紹介しよう。ここで用いられるのは $h(t,x)$ が連続関数である場合の微分方程式であり，したがって，使われる解の存在定理はペアノ型である。

まず，二変数関数 $u(x,y)$ を考え，これは (x_0,y_0) の付近で連続微分可能であり，さらに

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$

であると仮定しよう。簡単化のために，上の式の左辺は正であるとする。このとき，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$|x-x_0|<\varepsilon$ かつ $|y-y_0|<\varepsilon$ であれば，$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)>0$ である。そこで微分方程式

$$\dot{y}(x)=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y(x))},\quad y(x_0)=y_0$$

を考えると，これは問題(1)の形で，ペアノ型の条件を満たしているため，$0<\delta<\varepsilon$ となる δ をうまく取ると，$I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上で定義された上の問題の解 $y(x)$ で，$|y(x)-y_0|<\varepsilon$ を常に満たすものが存在する。このとき，

$$u(x,y(x))$$

は微分がゼロなので定数関数であり，したがって，

$$u(x,y(x))\equiv u(x_0,y_0)$$

が成り立つ。$[x_0-\delta,x_0+\delta]\times]y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon[$ 上で u は y について増加的なので，この集合に入っている任意の (x,y) について，

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)\Leftrightarrow y=y(x)$$

が成り立つことがわかり，これで陰関数定理の証明が完成する。(10)

（10）ただし，この証明が有効に機能するのはこの二変数の場合のみで，x や y がベクトルの場合に議論を一般化しようとするとこのやり方では難しい。そちらの証明は丸山（1995）の第 5 章か，杉浦（1985）の第 6 章を参照するとよい。

6.2　積分可能性理論

消費者理論は通常，**効用関数**（utility function）と呼ばれる概念から出発する。これは $u:\Omega\to\mathbb{R}$ という形の関数で，Ω は消費集合と呼ばれ，かなり多くの場合には，$\mathbb{R}^n_+$ が選ばれる。効用関数の意味は，消費計画 $x\in\Omega$ のよさを計る数値 $u(x)$ を与える関数であり，消費者はこれをなるべく大きくしたいものとしてモデル化される。

ここで，次の効用最大化問題

$$\begin{aligned} \max\quad & u(x) \\ \text{subject to.}\quad & x\in\Omega, \\ & p\cdot x\le m \end{aligned}$$

を考える。ただし，$p\in\mathbb{R}^n_{++}$ かつ $m>0$ である。u についてのいくつかの仮定の下でこの問題には解がただひとつ存在し，それを $f^u(p,m)$ と書く。f^u という関数を**需要関数**（demand function）と呼ぶ。

ところが，ここに問題が生ずる。上の理論をなにかの問題に応用しようとした場合，f^u は購買行動を表す関数なので推定可能であるが，u には対応する現実のデータがないので，これを推定する方法が存在しない。そこで，f^u の候補から u を逆算する方法を作りたい。これが，積分可能性理論と呼ばれる理論の主要な関心である。

上記の理由から，積分可能性理論では需要関数の候補 $f(p,m)$ を取ってくることから始めて，そして $f=f^u$ となる u を逆算することを目標とする。そこでキーになるのが，上の問題の双対問題，つまりは支出最小化問題と呼ばれる次の問題である。

$$\begin{aligned} \min\quad & p\cdot y \\ \text{subject to.}\quad & y\in\Omega, \\ & u(y)\ge u(x). \end{aligned}$$

この問題の解が持つ値を $E^x(p)$ と書き，関数 E^x は消費計画 x に対応する**支出関数**（expenditure function）と呼ばれる。この関数については，$f=f^u$ が妥当な仮定を満たしていれば，次のシェパードの補題

$$DE^x(q)=f(q,E^x(q)),\ E^x(p)=m \tag{3}$$

を満たすことが知られている（ここで記号 D は全微分作用素である）。ただし，(p,m) は $x=f(p,m)$ となるように取られる。さらに，実は $\bar{p}$ をひとつ固定したとき，

$$u_{\bar{p}}:x\mapsto E^x(\bar{p})$$

という形で関数 $u_{\bar{p}}$ を定義すると，これは u と同じ順序を与える。したがって，f の情報だけから $E^x(\bar{p})$ が計算できれば，積分可能性理論の目的は果たせるのである。

そこで，(3)式を偏微分方程式と見なして解く，というアイデアを出したのが Hurwicz and Uzawa（1971）であるが，実はこの方程式を全部解く必要はない。つまり，次のやり方が考えられる。いま，$c(t) = E^x((1-t)p + t\bar{p})$ とする。すると簡単な計算から，

$$\dot{c}(t) = f((1-t)p + t\bar{p}, c(t)) \cdot (\bar{p} - p),\ c(0) = m \tag{4}$$

が成り立つことがわかる。$c(1) = E^x(\bar{p})$ なので，実は計算しなければならないのは常微分方程式(4)の解の，$t = 1$ における値なのである。

これを解くことで効用が計算できるための諸々の理屈は Hosoya（2017）に詳しいので参照されたい。この論文では f は連続微分可能であると仮定されているので，ピカール＝リンデレーフの定理が使われている[(11)]。このやり方はまた，偏微分方程式を常微分方程式に還元して問題の難易度を下げる，典型的な例にもなっている。

6.3　ワルラス型の価格調整過程の安定性

部分均衡において，超過需要が発生していれば価格は上がり，超過供給が発生していれば価格は下がる。通常の，需要曲線が右下がりで供給曲線が右上がりの図においては，上の理屈を通じて，価格は均衡に近づくように調整される。これがいわゆるワルラスの安定性であるが，一般均衡で同じ議論をするとなると問題はそう簡単ではない。

一般均衡において，価格調整のための過程を表すモデルを**模索過程**（tâtonnement process）と呼ぶ。最も簡単な模索過程として，超過需要関数 $\zeta(p)$ に対して

$$\dot{p}(t) = \zeta(p(t))$$

というものがある。これは Arrow, Block, and Hurwicz（1959）において議論されたものの中で最もシンプルな模索過程であるが，この微分方程式の解が均衡に向かっていくかどうかというのは，実は難しい問題である。

（11）一方で Hurwicz and Uzawa（1971）では f は微分可能とだけ仮定されているが，実はこの仮定は怪しい。というのも，証明の途中で積分記号下の微分公式

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 g(x,y)dx = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dx$$

を用いている箇所があって，f がなにかの仮定を満たしていないとこの公式が使えるための前提条件が成り立たないからである。おそらく彼らの定理は，f が微分可能かつ局所リプシッツなときの結果だと捉えるのがよいと思われる。その場合の現代的な，かつ仮定をより弱めた証明については Hosoya（2018）を見よ。

まず，ζ の性質について注意が必要である。均衡理論の典型的な仮定からだと，ζ の微分可能性を保証することは難しい。したがって ζ には連続性しか仮定できないことになるが，これは我々が議論してきたことから言うと，ペアノの定理は使えるがピカール＝リンデレーフの定理は使えないということを意味している。したがって，実は上の模索過程の解は，同じ初期点からでも複数ある可能性が否定できず，にもかかわらずそれが均衡に収束することを議論しなければならない。これが，問題の難易度を大幅に高めている。

この文脈でよく知られているのが，超過需要関数に粗代替性と呼ばれる性質を課したときの結果である。この性質を仮定することによって，いわゆるリアプノフ関数が容易に作れて，均衡は安定的であることが示される。しかし，粗代替性が仮定として強いか弱いかについては経済学者によって意見が異なっており，強いと見なす研究者グループからは，この結果は好かれていない。

また，以上の結果はあくまで，純粋交換経済の議論である。Mas-Colell（1991）によると，粗代替性の仮定は，規模に関する収穫不変な生産を入れた場合には，均衡の大域安定性には不十分であるようである。彼によると，顕示選好の弱公理が成り立っている場合には，均衡の集合は凸集合になり，よって特に正則経済では均衡が一意になる。しかし顕示選好の弱公理が成り立っていない場合には均衡が離散的な二点になるようなモデルが簡単に作れてしまい，結果として均衡は一意ではない。一意でない均衡が大域安定になるはずがないので，問題は暗礁に乗り上げてしまう。つまり，生産を入れたモデルで均衡の模索過程における大域安定性を考えようとすれば，顕示選好の弱公理が最低限成り立たないといけないのである。

なお，安定性を論じる際には上の微分方程式の解が単なる区間ではなく，$\mathbb{R}_+$ 上で定義されている必要があるが，これについては細矢・虞（2013）を参照されたい。

6.4　進化ゲームにおけるレプリケータ動学系

生物学から発展してきた進化ゲームにおいては，よくレプリケータ動学系と呼ばれる微分方程式が用いられる。タカ・ハトゲームを用いてこれを説明しよう。下の図がタカ・ハトゲームの典型的な利得表である。

1\2	H	D
H	$(-1,-1)$	$(2,0)$
D	$(0,2)$	$(1,1)$

この表において，H がタカであり，D がハトである。餌を巡る状況でタカ同士が出会った場合，両方戦い合って傷つけるため，$(-1,-1)$ という利得が付与される。タカとハトが出会うとタカはハトを追い払うのでタカが 2 を獲得し，ハトは 0 を獲得する。ハト同士が出会うと餌を分け合うため，

$(1,1)$ という利得である。

ここでの利得は生存に有利な度合いと解釈され，適応度と呼ばれる。いま，ランダムに相手と出会う状況を考え，世界におけるタカとハトの割合が $p:1-p$ であるとしよう。このとき，タカの方が有利ならタカの割合が増え，ハトの方が有利ならばハトの割合が増えるであろう。以上をモデル化したのが下の微分方程式

$$\dot{p}(t)=p(t)[\{-p(t)+2(1-p(t))\}-\{p(t)(-p(t)+2(1-p(t)))+(1-p(t))(1-p(t))\}]$$

である。ここで右辺の括弧内の最初の大括弧は，タカが相手と出会ったときに得られる平均適合度であり，二番目の大括弧は，タカとハトについての利得を割合によってウェイトをつけて平均を取った適合度である。つまり右辺の式は，タカが世界全体での平均適合度よりどれくらい適合度が上かという値に，割合 $p(t)$ を掛けた値を表している[(12)]。

この式を整理すると以下のようになる[(13)]。

$$\dot{p}(t)=p(t)(1-p(t))(1-2p(t))$$

したがって，定常状態は $0,1,1/2$ の 3 つである。このうち安定的な定常状態は $1/2$ のみであり，よってこの状態，つまりタカとハトが半々になる状態が**進化的に安定**（evolutionarily stable）である，と呼ばれている。面白いことに，この状態を両者が取る混合戦略の組は上のゲームのナッシュ均衡になっている。

この種の議論についてもっと詳しく知りたい場合は，ホッフバウアー・シグムント（2001）などを参考にするとよい。

6.5　連続時間のマクロ動学モデルにおけるオイラー方程式

連続時間における典型的な資本蓄積モデル

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t))dt\\
\text{subject to.}\quad & k(t)\geq 0,\ c(t)\geq 0,\\
& \dot{k}(t)=f(k(t))-c(t),\\
& k(0)=\bar{k}>0
\end{aligned}$$

を考える。この問題において，$k(t)$ は t 期の資本蓄積であり，$c(t)$ は t 期の消費である。f は生産関数と解説されることが多いが，実は少し違う。上の問題に出てくる資本蓄積の微分方程式は，次のふたつの式

（12）　割合がかかっている理由は，おそらく絶対数が少ないと繁殖速度も低いと考えられるためであろう。
（13）　この式から，この動学系はピカール＝リンデレーフの定理の適用対象であることがわかる。

$$g(k(t)) = i(t) + c(t),$$

$$\dot{k}(t) = i(t) - dk(t)$$

から出てくる。ここで $i(t)$ は t 期の投資であり，関数 g が生産関数で，$d \geq 0$ は資本減耗率である。最初の式はいわゆる $Y = C + I$ という式であり，二番目の式は投資が資本蓄積を増やす一方で，時間と共に資本が減耗していくことを表している。これらをまとめると，

$$\dot{k}(t) = [g(k(t)) - dk(t)] - c(t)$$

という式が出てくるため，$f(k) = g(k) - dk$ として新しい関数 f を定義した結果出てきたのが，

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t)$$

というシンプルな微分方程式である。

　この問題を解析するとき，しばしば，与えられた消費経路 $c(t)$ に対して対応する資本蓄積経路 $k(t)$ がきちんと存在することを確かめる必要が出てくる。これは，微分方程式

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t),\ k(0) = \bar{k}$$

の解が存在するかどうかという問題に帰着する。微分方程式(1)の形で書くとすると，

$$h(t, x) = f(x) - c(t)$$

と定義する必要がある。ところがこの関数 h は，$c(t)$ が不連続なときには連続ではない。序論で述べたように，マクロ経済学ではしばしば不連続な消費経路を許容するので，その場合にはカラテオドリの存在定理を使わないと問題の解析ができない。これが，経済学者にとってカラテオドリの存在定理が必要になる最大の理由である。

　ところで，経済学的に自然な f, u についての仮定の下で，この問題の解 $(k(t), c(t))$ は以下のオイラー方程式

$$\dot{c}(t) = (\rho - f'(k(t)))\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))}$$

を満たすものであることが知られている。したがって，

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t),\ k(0) = \bar{k},$$

$$\dot{c}(t) = (\rho - f'(k(t)))\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))}$$

という連立方程式を考えれば，これの解が問題の解だ，と言いたくなるのだが，ここで問題が発生する。つまり，$k(0)$ は与えられているが，$c(0)$ が与えられていないのである。ということは，$c(0)$

の決め方に応じて，上の微分方程式の解は（たとえピカール＝リンデレーフ型の要件を満たしていたとしても）複数存在することになる。

では，どれが本物の解なのだろうか？　これを解決するためには，次の横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u'(c(t))k(t)=0$$

を考えるとよい。多くの場合，上の微分方程式の解が横断性条件を満たすためには，適切な値に $c(0)$ を決めなければならない。かくして問題は解けることになる。

以上は略式の説明であったが，解がオイラー方程式と横断性条件を満たすことの証明は実は難しい。逆に，オイラー方程式と横断性条件を満たす経路がひとつ見つかれば，それが解であることはかなり簡単に示せる。興味がある読者の方は，上東（2002）を参考にするとよい。

謝辞

本研究は，関東学院大学における若手研究奨励制度研究課題「微分可能でない消費者の選好の推定方法についての理論研究」を遂行するに当たって，数学的手法を整理することが必要になったことを端緒として行われたものであり，当該奨励制度の支援で完成したものである。ここに厚く感謝の意を述べておきたい。

参　考　文　献

[1] Arrow, K. J., Block, H. D., and Hurwicz, L. (1959) “On the Stability of Competitive Equilibrium, II.” Econometrica 27, pp. 82–109.

[2] Dudley, R. M. (2002) *Real Analysis and Probability.* Cambridge University Press.

[3] Hosoya, Y. (2017) “The Relationship between Revealed Preference and Slutsky Matrix.” Journal of Mathematical Economics 70, pp. 127–146.

[4] ――――― (2018) “First-Order Partial Differential Equations and Consumer Theory.” Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S 11, pp. 1143–1167.

[5] Hurwicz, L. and Uzawa, H. (1971) “On the Integrability of Demand Functions.” In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and Sonnenschein, H. F. (Eds.) *Preferences, Utility and Demand.* Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, pp. 114–148.

[6] Mas-Colell, A. (1991) “On the Uniqueness of Equilibrium Once Again.” In: Barnett, W. A., Cornet, B., D’Aspremont, C., Gabszewicz, J., and Mas-Colell, A. (Eds.) *Equilibrium Theory and Applications: The Sixth International Symposium in Economic Theory and Econometrics.* Cambridge University Press.

[7] イオッフェ, A. D., ティコミロフ, V. M.（2017）『極値問題の理論』知泉書館. [Ioffe, A. D. and Tikhomirov, V. M. (2017) *Kyokuchi Mondai no Riron*, Chisen Shokan (in Japanese)]

[8] ホッフバウアー, J., シグムント, K.（2001）『進化ゲームと微分方程式』現代数学社. [Hofbauer, J. and Sigmund, K. (2001) *Shinka Game to Bibun Hoteishiki*, Gendai Sugakusha (in Japanese)]

[9] ポントリャーギン, L. S.（1968）『常微分方程式 新版』共立出版. [Pontryagin, L. S. (1968) *Jobibun Hoteishiki Shinpan*, Kyoritsu Shuppan (in Japanese)]

[10] 上東貴志（2002）「横断性の必要性と十分性」神戸大学経済経営研究所 Discusssion Paper Series J45. [Kamihigashi, Takashi (2002) “Odansei no Hitsuyosei to Jubunsei.” Kobe Daigaku Keizai Keiei

Kenkyujo Discussion Paper Series J45. (in Japanese)]
[11] 杉浦光夫（1985）『解析入門 II』東京大学出版会. [Sugiura, Mitsuo (1985) *Kaiseki Nyumon II*, University of Tokyo Press. (in Japanese)]
[12] 細矢祐誉・虞朝聞（2013）「微分方程式の滞留解と模索過程の安定性」『三田学会雑誌』106–1, pp. 109–133. [Hosoya, Yuhki and Yu, Chaowen (2013) “Bibun Hoteishiki no Tairyukai to Mosaku Katei no Anteisei.” Mita Gakkai Zasshi 106 (1), pp. 109–133. (in Japanese)]
[13] 丸山徹（1995）『数理経済学の方法』創文社. [Maruyama, Toru (1995) *Suri Keizaigaku no Hoho*, Sobunsha. (in Japanese)]
[14] ————（2002）『経済数学』知泉書館. [Maruyama, Toru (2002) *Keizai Sugaku*, Chisen Shokan. (in Japanese)]

要旨: 本稿では，正規形の常微分方程式について解説し，その解の局所存在定理を，不動点定理を用いて示す。存在定理には四種類あるが，本稿ではそれらの違いにそれぞれ触れた上で，全部同じやり方で証明できることを示す。さらに，この証明法以外の存在定理との比較や，経済学における微分方程式の主な応用について触れる。

キーワード: 縮小写像の不動点定理，シャウダーの不動点定理，ピカール＝リンデレーフの存在定理，ペアノの存在定理，カラテオドリの存在定理