Title	経済数学覚書：凹関数, ジャンセンの不等式, および最適化
Sub Title	Notes on Math of Economics: Concave Functions, Jensen's Inequality and Optimization
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2018
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.111, No.2 (2018. 7) ,p.183(91)- 196(104)
JaLC DOI	10.14991/001.20180701-0091
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20180701-0091

「三田学会雑誌」111 巻 2 号（2018 年 7 月）

解　説

経済数学覚書
——凹関数，ジャンセンの不等式，および最適化——

中山幹夫 *

1.　はじめに

経済数学は，たとえば数理経済学などのように問題を定式化して新しい結果を導くというようなフロンティアをもった研究領域ではなく，経済学の理解や論理展開に必要な数理的トレーニングのために多くの経済学部に設置されている授業科目である。筆者は在職時,「最適化とゲーム理論の初歩」という副題のもとで経済数学の授業を担当する中で，経済数学の教科書にみられる代表的な定理をいくつも列挙することよりもむしろ学んだ事項から結果を導く推論過程を重視してきた。とくに「最適化」では問題の取り扱いや解法について普通とは異なる考え方もいくつか例示している。本稿ではさらに発展的に，まず多変数のコブ・ダグラス型効用関数について，普通は微分演算で処理する準凹性や消費者の最適消費計画などを微分を全く使わずに解く方法，またパレート効率性を消費者たちの効用関数の線形結合ではない形で特徴付けることなどを中心に述べてみたい。基礎となる知識は凹関数の定義と並んでジャンセンの不等式，および自然対数の性質などきわめて初等的なものだけである。これらの知識から結果に到達する過程はセルフコンテインドにたどることができるので，考えることの面白みも同時に味わえるものと期待できる。

*　慶應義塾大学名誉教授
査読者のコメントにより記述が改善できたことをありがたく思います。

2.　定義

まず凹関数と準凹関数の定義から始めよう。以下では，$\Re$ は実数の全体，$\Re^n = \Re\times \cdots \times \Re$ は n 次元ユークリッド空間，つまり n 次元ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の全体，$\Re^n_+$ は $\Re^n$ の**非負象限**，また $\Re^n_{++}$ は $\Re^n$ の**正象限**を表す。

定義 1.　関数 $f : \Re^n \to \Re$ が**凹**であるとは

$$x,\ y \in \Re^n,\ 0 \le \lambda \le 1 \quad \Rightarrow f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

であることをいう（このとき $-f$ を凸関数という）。

定義 2.　凹関数 $f : \Re^n \to \Re$ が**狭義凹**であるとは

$$x,\ y \in \Re^n\ ,\ 0 < \lambda < 1,\ f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

であることをいう。

定義 3.　関数 $f : \Re^n \to \Re$ が**準凹**であるとは

$$x,\ y \in \Re^n,\ 0 \le \lambda \le 1 \quad \Rightarrow f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \ge \min\Big(f(x)\ ,\ f(y)\Big)$$

であることをいう。

注意 1.　**任意の 1 変数単調関数**は**準凹関数**であり，対数関数 $\boldsymbol{f(x) = \ln x}$ は凹，指数関数 $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ は**凸**である。これらは定義からあきらかである。

注意 2.　**凹関数は準凹関数**であることは次のように簡単に示すことができる。

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda x + (1-\lambda y)\Big) &\ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ &\ge \lambda \min\Big(f(x)\ ,\ f(y)\Big) + (1-\lambda)\min\Big(f(x)\ ,\ f(y)\Big) = \min\Big(f(x)\ ,\ f(y)\Big)\ . \end{aligned}$$

しかし，逆は真ではない。たとえば指数関数 $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ は**凹でない準凹関数**である。

注意 3.　**凹関数の和は凹関数**であることは定義から直ちに従うが，準凹関数の和は準凹関数であるとは限らない。

例 1.　まず，関数 $g(x,y)=x^2$ は $x \geq 0$ に対して単調増加であるから，定義域 $\Re^2_+$ において準凹である。また，関数 $k(x,y)=y^2$ も同様にして $\Re^2_+$ において準凹である。しかし，これら 2 つの準凹関数の和

$$\boldsymbol{h(x,y)=g(x,y)+k(x,y)=x^2+y^2}$$

は $\boldsymbol{\Re^2_+}$ において準凹でない[1]。それは $(x,y)=(1,0)$ ，$(x',y')=(0,1)$ ，$\lambda=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2}(1,\ 0)+\frac{1}{2}(0,\ 1)\right) &= h\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}<1=\min\Big(h(1,\ 0)\ ,\ h(0,\ 1)\Big) \end{aligned}$$

となるからである。

3.　準凹関数

ミクロ経済学の教科書に必ず描かれているいわゆる「原点に対し凸」な無差別曲線は，効用関数が準凹関数であることを図示しているが，計算で最適消費を求める場合には次に述べるコブ・ダグラス型関数の $n=2$ のケース，つまり $f(x_1,x_2)=ax_1^{p_1}x_2^{p_2}$ が使われることが多い。ここではこの関数の準凹性を**自然対数**の性質だけを使って証明してみよう。なお，一般に n 個の変数 z_i の積は $\displaystyle\prod_{i=1}^n z_i$ のように表す。また，左辺は右辺で定義されることをとくに注意したい場合には，記号 := を用いることがある。

命題 1.　次のコブ・ダグラス型関数 $f:\Re^n_{++}\to\Re$，ただし

$$f(x_1,\ldots,x_n):=a\prod_{i=1}^n x_i^{p_i},\qquad a>0,\quad p_i>0,\quad i=1,\ldots,n$$

について：

(1)　f は準凹関数である。

(2)　もし $p:=\sum_{i=1}^n p_i>1$ ならば f は凹関数ではない。

証明.　(1)　$a\prod_{i=1}^n y_i^{p_i}=f(y)\geq f(x)=a\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$ および $0\leq\lambda\leq 1$ ならば

$$a\prod_{i=1}^n\Big(\lambda y_i+(1-\lambda)x_i\Big)^{p_i}=f\Big(\lambda y+(1-\lambda)x\Big)\geq f(x)=a\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$$

となることが次のように示される。対数関数 $\mathbf{ln}:\boldsymbol{\Re}_{++}\to\boldsymbol{\Re}$ は凹かつ**単調増加**だから，

---

(1)　一般に関数 $k(x_1,\ldots,x_n):=\sum_{i=1}^n x_i^2$ は，$\Re^n_+$ において凸関数 $k_i(x_1,\ldots,x_n):=x_i^2$ の $i=1,\ldots,n$ についての和であるから凸である。

$$
\begin{aligned}
\ln a \prod_{i=1}^{n} \Bigl(\lambda y_i + (1-\lambda) x_i\Bigr)^{p_i} &= \ln a + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \Bigl(\lambda y_i + (1-\lambda) x_i\Bigr) \\
&\geq \ln a + \sum_{i=1}^{n} p_i \Bigl(\lambda \ln y_i + (1-\lambda) \ln x_i\Bigr) \\
&= \ln a + \lambda \sum_{i=1}^{n} \ln y_i^{p_i} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{p_i} \\
&= \ln a + \lambda \ln \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i} + (1-\lambda) \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \\
&\geq \ln a + \lambda \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} + (1-\lambda) \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \\
&= \ln a + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = \ \ln a \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}.
\end{aligned}
$$

(2) $\Re^n_{++}$ の 2 点 $(1,\ldots,1)$, $(2,\ldots,2)$ と $\lambda = \frac{1}{2}$ をとると,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}(1,\ldots,1) + \frac{1}{2}(2,\ldots,2)\right) = f\left(\frac{3}{2},\ldots,\frac{3}{2}\right) = a\left(\frac{3}{2}\right)^p &< \ a\left(\frac{1^p + 2^p}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} f(1,\ldots,1) + \frac{1}{2} f(2,\ldots,2)
\end{aligned}
$$

となることが次のように示される。$g(z) := z^p$, $p > 1$ で与えられる関数 $g : \Re_{++} \to \Re$ は $\boldsymbol{-g(z)}$ が**狭義凹**（i.e., $g(z)$ は狭義凸）であるから,

$$
a\left(\frac{3}{2}\right)^p = ag\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) < a\frac{1}{2}g(1) + a\frac{1}{2}g(2) = a\left(\frac{1^p + 2^p}{2}\right) \ .
$$

ゆえに $p > 1$ ならば f は凹でない。

□

対数の基本的性質だけを主な拠り所にしているという意味で，この証明は多変数の場合，微分演算をともなう必要十分条件に訴えるより初等的で親しみやすいと言えるだろう[(2)]。

系 1. 次の関数 $f : \Re^n_{++} \to \Re$, ただし

$$
\boldsymbol{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} x_i \ , \quad n > 1}
$$

は：

(1) 準凹である。（$a = 1$, $p_i = 1$, $i = 1,\ldots,n$ より）

---

(2) Berck and Sydsæter [1] の p.62 12.33 には 2 階微分可能関数についての必要十分条件が証明無しで述べられている。また，伊藤・戸瀬 [3] には 2 変数コブ・ダグラス型関数の準凹性をこの条件を用いて確かめる練習問題がある。

(2)　凹ではない。($p = n > 1$ より)

正象限で定義された 2 変数関数 $\boldsymbol{u(x, y) = xy}$ **は準凹であって凹でない**効用関数の典型的な例である。

命題 2.　各 $i = 1, \ldots, n$ について，関数 $u_i : \Re^m_+ \to \Re$ は準凹，$a_i \geq 0$，$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ であるとすると，関数 $v(\cdot\ , a) : \Re^m_+ \to \Re$，ただし，

$$v(x, a) := \min_{i|a_i>0} \frac{u_i(x)}{a_i}$$

は準凹である。

証明.　2 点 x，$y \in \Re^m_+$ をとり，$0 \leq h \leq 1$ とすると，

$$\begin{aligned} v\Big(hx + (1-h)y,\ a\Big) &= \min_{i|a_i>0} \left(\frac{u_i\Big(hx + (1-h)y\Big)}{a_i}\right) \\ &\geq \min_{i|a_i>0} \left(\frac{1}{a_i} \min\Big(u_i(x),\ u_i(y)\Big)\right) \\ &\geq \min\left(\min_{i|a_i>0} \left(\frac{u_i(x)}{a_i}\right),\ \min_{i|a_i>0} \left(\frac{u_i(y)}{a_i}\right)\right) \\ &= \min\Big(v(x, a),\ v(y, a)\Big)\ . \end{aligned}$$

□

資源配分のパレート効率性は，通常，各消費者の凹効用関数の非負線形結合で特徴付けられるが，あとで述べるようにこの関数 $v(x, a)$ は異なる意味をもつ特徴付けを可能にする。(3)

命題 3.　関数 $u : \Re^m_+ \times \Re \to \Re$ と $U : \Re^m_+ \to \Re$ を次のように与える：

$$u(x, m) := U(x) + m \quad \forall (x, m) \in \Re^m_+ \times \Re\ .$$

すると，$\boldsymbol{u}$ **は準凹** $\boldsymbol{\iff U}$ **は凹**。

証明.　(十分性)。 凹関数 $U(x) + m$ は準凹である。
(必要性)。 $u(x, m) = U(x) + m = U(y) + m' = u(y, m')$ であるとしよう。すると，u の準凹性から任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

(3)　筆者はこの関数を [5] で均衡資源配分の存在証明に，また [6] で「仁」の一般化に応用した。

$$
\begin{aligned}
U\Big(\lambda x+(1-\lambda)y\Big) &\geq -\Big(\lambda m+(1-\lambda)m'\Big)+U(x)+m \\
&= U(x)+m-m'-\lambda(m-m') \\
&= U(x)+(1-\lambda)(m-m') \\
&= U(x)+(1-\lambda)\Big(U(y)-U(x)\Big)=\lambda U(x)+(1-\lambda)U(y)
\end{aligned}
$$

となって U の凹性が示された。

$\square$

u が効用関数ならば, u は**準線形効用関数**と呼ばれることがある。このとき, U は**市場ゲーム (market game)** などで用いられる**譲渡可能効用 (transferable utility)** となる。こうして，合理的経済主体の譲渡可能効用は凹関数でなければならないことがわかる。

4.　ジャンセンの不等式

ジャンセンの不等式とは凹関数の定義を 2 点の重み付き平均（これを**凸結合**という）から**任意有限個**の点の凸結合に拡張できることを示す不等式であり，以下にみるように本稿では主要な役割を果たす。(4)

ジャンセンの不等式 (Jensen's Inequality)：関数 $f:\Re^n\to\Re$ は凹　$\Longleftrightarrow$

任意有限 m 個の $x^i\in\Re^n$　と任意の $p_i\geq 0$（ただし $\sum_{i=1}^m p_i=1$）に対して,

$$
f\left(\sum_{i=1}^m p_i x^i\right)\geq\sum_{i=1}^m p_i f(x^i).
$$

証明. （必要性）。 $m=1$, 2 ならば自明。$m>2$ に対して不等式が成立するとし，$0<p_{m+1}<1$ とすると,

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{m+1} p_i x^i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^m p_i x^i+p_{m+1}x^{m+1}\right) \\
&= f\left((1-p_{m+1})\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{1-p_{m+1}}x^i+p_{m+1}x^{m+1}\right) \\
&\geq (1-p_{m+1})\ f\left(\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{1-p_{m+1}}x^i\right)+p_{m+1}f(x^{m+1})
\end{aligned}
$$

---

(4)　ジャンセンの不等式に言及している経済数学テキストとしてはたとえば西村 [7]，伊藤・戸瀬 [3] などがあるが，ファイナンス関連のテキストを除けば余り多くないようである。ゲーム理論では市場ゲームの平衡性の証明に不可欠である（ルーツは Shapley and Shubik [10]）。

$$
\begin{aligned}
&\geq \ (1-p_{m+1})\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{1-p_{m+1}}f(x^i)+p_{m+1}f(x^{m+1}) \\
&=\sum_{i=1}^{m}p_i f(x^i)+p_{m+1}f(x^{m+1}) \\
&=\sum_{i=1}^{m+1}p_i f(x^i)\ .
\end{aligned}
$$

また，$p_{m+1}=0$,1 ならば不等式は自明である。

（十分性）。 $m=2$ とすれば凹関数の定義が得られる。

□

系 2. **狭義凹関数** $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{\Re^n}\rightarrow\boldsymbol{\Re}$ に対するジャンセンの不等式で $m\geq 2,\ p_i>0,\ i=1,\ldots,m$ とすると

$$
\textbf{等号成立}\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x^1=\cdots=x^m}
$$

証明. 十分であることはあきらか。必要性は $m\geq 2$ として，f に対するジャンセンの不等式で等号が成立するならば

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{m}p_i x^i\right) &= f\left((1-p_m)\sum_{i=1}^{m-1}\frac{p_i}{1-p_m}x^i+p_m x^m\right) \\
&=(1-p_m)f\left(\sum_{i=1}^{m-1}\frac{p_i}{1-p_m}x^i\right)+p_m f(x^m)
\end{aligned}
$$

となるが，f は狭義凹であるから $\boldsymbol{x^m=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{p_i}{1-p_m}x^i}$ ，すなわち $\boldsymbol{x^m=\sum_{i=1}^{m}p_i x^i}$ 。ここで x^m は他の任意の x^j （ただし $j=1,\ldots,m-1$）に置き換えることができるから

$$
\boldsymbol{x^j=\sum_{i=1}^{m}p_i x^i\ ,\quad j=1,\ldots,m}
$$

でなければならない。

□

ジャンセンの不等式の応用例として，ここではまず**エントロピー**の最大化を考えてみよう。エントロピーとは**無秩序の尺度**を与えると解釈される関数で，すべての事象が等確率で生じるときに最大となる(5)。この証明はほとんどジャンセンの不等式そのものである。

(5)　最近ではエントロピー最大化をゲーム理論に取り込む研究も行われている。たとえば，Oliva [8] など。

エントロピー（entropy）最大化：$\Delta^n := \{p \in \Re^n_{++} \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ とすると，確率ベクトル $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta^n$ のエントロピー

$$\boldsymbol{e(p) := -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i}$$

は

$$\boldsymbol{p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}}$$

であるとき，およびそのときに限って最大になる。

証明. 開区間 (0, 1) で定義された**狭義凹関数** $\boldsymbol{f(q) := -q \ln q}$ をとり，任意の確率ベクトル $p \in \Delta^n$ に対して $q = \dfrac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}$ とすると

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(p_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(-p_i \ln p_i\Big) = \frac{1}{n} e(p)\ .$$

左辺 $f(\frac{1}{n})$ は定数だから，$e(p)$ は上式の等号が成立するときに最大になる。ゆえに，関数 $f(q)$ の狭義凹性と系 2 より $e(p)$ の最大値は $p_1 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，およびそのときに限って達成される。

□

次の命題は，よく知られた**相加平均（算術平均）**と**相乗平均（幾何平均）**の大小関係を特殊ケースとして含む一般的な不等式を与えている。この証明も対数関数に対するジャンセンの不等式そのものである。

命題 4. 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $a_i > 0$ であるとすると

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{p_i} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{a_i}}\ ,\quad \text{ただし}\quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,\ p_i > 0\ ,\quad i = 1, \ldots, n\ .$$

等号は，$a_1 = \cdots = a_n$ のとき，およびそのときに限って成立する。

証明. 単調増加凹関数 $\mathbf{ln} : \Re_{++} \to \Re$ に対するジャンセンの不等式より，左辺については

$$\ln \sum_{i=1}^n p_i a_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln a_i = \sum_{i=1}^n \ln a_i^{p_i} = \ln \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}$$

が得られる。右辺についても同様に

$$\ln \prod_{i=1}^n a_i^{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \ln a_i = \sum_{i=1}^n p_i \left(-\ln \frac{1}{a_i}\right) \geq -\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{a_i}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{a_i}}\right)$$

となるから，関数 $\mathbf{ln}$ の単調性に注意すれば求める結果

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}$$

が得られる。等号は，$\mathbf{ln}$ の狭義凹性と系 2 より $\boldsymbol{a_1 = \cdots = a_n}$ のとき，およびそのときに限って成立する。

□

算術平均 (arithmetic mean), 幾何平均 (geometric mean), 調和平均 (harmonic mean):

$$\boldsymbol{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ \geq\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \ \geq\ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}\ ,} \qquad \text{ただし}\ \ \boldsymbol{x_i > 0\ ,\ \ i = 1, \ldots, n}\ .$$

等号は $\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$ のとき，およびそのときに限って成立する。

証明. 命題 4 において，$p_i = \dfrac{1}{n}$, $a_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ とすればよい。

□

5. 最適化

ここでは価格システム $p = (p_1, \ldots, p_n)$ のもとで，消費者が所得 I を制約としてコブ・ダグラス型効用関数を最大化する問題を，まず上に述べた**相加・相乗平均不等式**を応用して解いてみよう。この方法は標準的ではないが，ラグランジュ未定乗数法をただ機械的に適用するのではなく，不等式の理解を通して最適解に到達する推論過程がわかるという利点がある。

予算制約のもとでの効用最大化：

$$\boldsymbol{\max\ a \prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i} \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ \leq\ I}$$

ここで $a\ , I\ >\ 0\ ,\ h_i\ >\ 0\ ,\ p_i > 0\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$

答： $\boldsymbol{x_i = \left(\frac{h_i}{h}\right) \frac{I}{p_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n\ ,}$ ただし $\boldsymbol{h := \sum_{i=1}^{n} h_i}$

証明. 予算制約は次のような等式として与えることができる。

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{p_i}{h_i} x_i\right) = I\ .$$

この式には $\boldsymbol{\dfrac{p_k}{h_k} x_k}$ の形の変数が合計 $h := \sum_{i=1}^{n} h_i$ 個含まれていると考えることができる。ゆえに相加・相乗平均不等式より

$$\frac{I}{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{p_i}{h_i} x_i\right)}{h} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{h_i} x_i\right)^{h_i}\right)^{\frac{1}{h}} .$$

系 2 より等号は h 個の $\dfrac{p_k}{h_k} x_k$ がすべて互いに等しいときに限って成立するので

$$\frac{p_1}{h_1} x_1 = \cdots = \frac{p_n}{h_n} x_n$$

となるときに最大値 $\frac{I}{h}$ が達成される。ゆえに,

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{h}\left(h \frac{p_i}{h_i} x_i\right) = \frac{p_i}{h_i} x_i \quad \text{または} \quad \boldsymbol{x_i = \left(\frac{h_i}{h}\right) \frac{I}{p_i} \, , \qquad i = 1, \ldots, n} \ .$$

このとき $\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{h_i} x_i\right)^{h_i}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^{h_i} \left(x_i\right)^{h_i}\right)^{\frac{1}{h}}$ は最大, すなわち $a \prod_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^{h_i}$ が最大になる。

□

この問題を標準的方法であるラグランジュ未定乗数法で解くには, まず効用関数を対数変換しておくと計算が楽になる。数学的根拠はこれまでも利用してきた対数関数の単調性であるが, 経済学的根拠は**序数的効用関数**の単調変換に関する一意性である。(6)

証明. まず, コブ・ダグラス型効用関数を関数 $\ln$ によって単調変換すると

$$\boldsymbol{\ln a \prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i} = \ln a + \sum_{i=1}^{n} h_i \ln x_i} \ .$$

予算制約は等式になるので**ラグランジュ関数**は

$$\boldsymbol{L(x, \lambda) := \ln a + \sum_{i=1}^{n} h_i \ln x_i + \lambda \left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)} \ .$$

微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{h_i}{x_i} - \lambda p_i = 0 \text{ または } \frac{h_i}{p_i x_i} = \lambda \, , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

ゆえに

$$I = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{\lambda} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} h_i} := \frac{I}{h} \ .$$

こうして

$$\boldsymbol{x_i = \frac{h_i}{\lambda p_i} = \left(\frac{h_i}{h}\right) \frac{I}{p_i} \, , \quad i = 1, \ldots, n} \ .$$

□

(6) 効用関数の単調変換についての言及がある経済数学のテキストとしては永田・田中 [4] や 尾山・安田 [9] などがあるが, 経済学的意味をもつ操作でもあるのでもっと普及してもいいのではないだろうか。

対数変換をせずに解くには次のようにすればよい。

証明.

$$L(x,\lambda) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i} + \lambda\left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad ah_i \prod_{j\neq i} x_j^{h_j} x_i^{h_i-1} = \lambda p_i$$

両辺に x_i を乗じることにより

$$\boldsymbol{ah_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{h_j} = \lambda p_i x_i\ ,\quad i = 1,\ldots,n \quad \cdots \quad (*)}$$

$$\therefore \quad \lambda I = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda p_i x_i\Big) = a\sum_{i=1}^{n} h_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{h_j} = ah\prod_{j=1}^{n} x_j^{h_j}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{I}{ah\prod_{j=1}^{n} x_j^{h_j}}$$

こうして $(*)$ より

$$\boldsymbol{\therefore \quad x_i = \frac{ah_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{h_j}}{\lambda p_i} = \left(\frac{h_i}{h}\right)\frac{I}{p_i}\ , \quad i = 1,\ldots,n}\ .$$

□

ここでのポイントは，見通しのよい式 $(*)$ を得ることである。ミクロの教科書では 2 変数効用関数を扱うことが多いので，普通はそのまま微分して指数演算をしているが，対数変換するだけでも計算はかなり楽になるだろう。いずれにせよこのような最大化問題を解く常套手段はラグランジュ未定乗数法であり，前に述べたエントロピー最大化も例外ではないが，機械的な微分演算だけでは面白みもないというものである。

さて，最後に命題 2 で与えた準凹関数をパレート効率的資源配分の特徴付けへ応用してみよう。$N = \{1,\ldots,n\}$ を消費者の集合，$X \subsetneq \prod_{i\in N}\Re_+^m = \Re_+^m \times \cdots \times \Re_+^m$ を実行可能資源配分の集合，また任意の $x = (x^1,\ldots,x^n) \in X$ と任意の $i \in N$ に対して，関数 $U_i(x^i)$ は消費者 i の**準凹**かつ**単調増加**[(7)]で $U_i(0) = 0$ をみたす**連続**な効用関数であるとする。配分 $x^* \in X$ が **パレート効率的** であるとは

(7)　$y^i \geq x^i$ かつ $y^i \neq x^i$ ならば $U_i(y^i) > U_i(x^i)$.

$$\boldsymbol{U_i(x^i) \geq U_i(x^{*i}) \ \ \forall i \in N \quad \text{and} \quad U_j(x^j) > U_j(x^{*j}) \quad \exists j \in N \quad \Rightarrow \quad x \notin X}$$

となることをいう。配分 $x \in X$ において，すべての $i \in N$ が $\boldsymbol{U_i(x^i) = 0}$ となるならば配分 x はパレート効率的でないと仮定する。$A := \{a \in \Re^n_+ \mid \sum_{i \in N} a_i = 1\}$ とし，任意の $a \in A$ と任意の $x \in X$ に対し関数 $v(x, a)$ を

$$\boldsymbol{v(x, a) = \min_{i \mid a_i > 0} \frac{U_i(x^i)}{a_i}}$$

と与える。すると

命題 5. 配分 $x^* \in X$ について：

$$\text{パレート効率的} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\exists a \in A \quad s.t. \quad v(x^*, a) = \max_{x \in X} v(x, a)} \ .$$

証明. （十分性）。配分 x^* がパレート効率的でなければ, ある $x \in X$ に対して $U_j(x^j) \geq U_j(x^{*j}) \ \forall j \in N$ かつ $U_i(x^i) > U_i(x^{*i}) \ \ \exists i \in N$ が成り立つ。すると効用関数の単調性と連続性から

$$U_i(y^i) > U_i(x^{*i}) \qquad \forall i \in N$$

をみたす配分 $y \in X$ が存在する。それゆえ，任意の $a \in A$ に対して

$$\frac{U_i(y^i)}{a_i} > \frac{U_i(x^{*i})}{a_i} \quad \forall i \in N \ \ (\text{ただし } a_i > 0) \ ,$$

すなわち $v(y, a) > v(x^*, a)$ となるが，これは矛盾である。

（必要性）。配分 $x^* \in X$ がパレート効率的であるならば

$$\boldsymbol{\forall x \in X \ , \ \exists i \in N \ : \ U_i(x^{*i}) \geq U_i(x^i) \ \text{ and } \ U_i(x^{*i}) > 0}$$

でなければならない。というのはこれを否定すると

$$\boldsymbol{\exists x \in X \ , \ \forall i \in N \ : \ U_i(x^{*i}) \geq U_i(x^i) \quad \Rightarrow \quad U_i(x^{*i}) = 0 = U_i(x^i)}$$

となるが，すべての $i \in N$ について $U_i(x^{*i}) \geq U_i(x^i)$ ならば，仮定より x^* はパレート効率的でない。また，ある $i \in N$ について $U_i(x^{*i}) < U_i(x^i)$ ならば，やはり x^* はパレート効率的でない。ゆえに

$$\min_{i \mid U_i(x^{i*}) > 0} \frac{U_i(x^i)}{U_i(x^{*i})} \leq 1 \ , \quad \text{また } \ U_i \ \text{ の単調性より } \ \sum_{i \in N} U_i(x^{*i}) > 0$$

であることがわかる。そこで，$a \in A$ を

$$\boldsymbol{a_i := \frac{U_i(x^{*i})}{\sum_{j \in N} U_j(x^{*j})} \qquad \forall i \in N}$$

と定義すると，任意の $x \in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
v(x^*, a) &= \min_{i|a_i>0} \frac{U_i(x^{*i})}{a_i} = \sum_{j\in N} U_j(x^{*j}) \\
&\geq \sum_{j\in N} U_j(x^{*j}) \left(\min_{i|U_i(x^{*i})>0} \frac{U_i(x^i)}{U_i(x^{*i})} \right) \\
&= \min_{i|a_i>0} \frac{U_i(x^i)}{a_i} = v(x, a)
\end{aligned}
$$

となって，求める不等式が得られた。

□

効用関数 U_i の準凹性は証明には不必要であるが，命題 2 より $v(\cdot\,, a)$ は準凹関数となる。パレート効率的配分 x^* はこうして，ある $a \in A$ のもとで準凹関数 $v(\cdot\,, a)$ を最大化する配分として特徴付けられる。この関数の形は有名な Rawls の**差別原理**にもとづく**社会厚生関数**を思い起こさせる。これに対して非負線形結合

$$
w(x, a) := \sum_{i|a_i>0} a_i U_i(x^i)
$$

の最大化は**功利的**社会厚生関数の形であるが，これには U_i の凹性が必要である。もっとも，単調増加準凹関数は単調変換によって凹関数に変換できることが知られている (Fenchel [2]) ので，効用関数を凹関数にとることは一般性を損なうわけではない。ただ，同じ $a \in A$ のもとでも $v(\cdot\,, a)$ および $w(\cdot\,, a)$ の最大解は一般には互いに異なるので，どのようなパレート効率的配分に注目するのかということは価値判断に委ねなければならない問題である。

6.　おわりに

本稿では述べなかったが，ゲーム理論においても脚注 4 で触れたようにジャンセンの不等式を使う市場ゲームの問題や，一定値を分割する多人数ナッシュ交渉解，さらにかなり専門的になるが階層的多人数ナッシュ交渉解を経由するシャープレイ値の導出など，相加・相乗平均不等式を応用できる最大化問題がある。また，複占モデルのシュタッケルベルグ均衡も，テキストにみられる標準的解法のほかにラグランジュ未定乗数法による「普通でない」方法でも簡単に得られることは言うまでもない。もっとも，2 人完全情報ゲームのサブゲーム完全均衡としては，追随者の均衡経路外の行動を無視することは正しくないのであるが。いずれにせよ，ゲームの解としてナッシュ均衡を求めるには，一般公式は存在しないので，どのようなモデルでも多少の工夫が必要となる。これらについてはまた別の機会に譲りたい。

参 考 文 献

[1] Berck, P., and K. Sydsæter, *Economists' Mathematical Manual*, Springer-Verlag, 1991.

[2] Fenchel, W., "Über Konvexe Funktionen mit Vorgeschriebenen Niveaumannigfaltigkeiten," *Mathematische Zeitschrift*, vol.63, pp. 496–506, 1956.

[3] 伊藤幹夫・戸瀬信之『経済学とファイナンスのための基礎数学』共立出版，2008 年。

[4] 永田良・田中久稔『経済学教室 3　経済数学』培風館，2012 年。

[5] Nakayama, M., "An Existence Proof of a Pareto Optimal Allocation under a Proportional Income Tax in a Public Goods Economy," *The Economic Studies Quarterly*, vol.29 no.1, pp. 84–87, April 1978.

[6] Nakayama, M., "A Note on a Generalization of Nucleolus to a Game without Sidepayments," *International Journal of Game Theory* , vol.12 issue 2, pp. 115–122, 1983.

[7] 西村清彦『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会，1990 年。

[8] Oliva, E., "Entropy and Negentropy: Applications in Game Theory." In: Bourguignon, J-P., Jeltsch, R., Pinto, A.A., and Viana, M. (eds.) *Dynamics, Games and Science*. CIM Series in Mathematical Sciences, vol.1 Springer, Cham 2015.

[9] 尾山大輔・安田洋祐『経済学で出る数学』日本評論社，2013 年。

[10] Shapley, L.S., and M. Shubik, "On Market Games," *Journal of Economic Theory*, vol.1, pp. 9–25, 1969.