Title	連続時間再帰的ダイナミック・プログラミング理論の構築に向けて：「レ・プレリュード」
Sub Title	Toward a theory of dynamic programming for recursive objective functions in continuous time models : "Les Préludes"
Author	尾崎, 裕之(Ozaki, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2018
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.110, No.4 (2018. 1) ,p.531(171)- 540(180)
JaLC DOI	10.14991/001.20180101-0171
Abstract	本稿では, 連続時間モデルにおける動学的最適化問題を取り上げる。特に, 再帰的効用関数(再帰的目的関数)を用いたモデルにダイナミック・プログラミングと呼ばれる手法を適用するために必要となる数学的な仮定についての検討を行う。効用関数と生産関数に対する「上収束」「下収束」と名付けた仮定が重要であることが主張されるが, これは連続時間モデルにおける全く新しい仮定である。本稿は, この仮定のもとで展開される壮大なリサーチ・プロジェクトの序章となるであろう。 This paper considers continuous-time infinite-horizon dynamic optimization problems, where the objective functions are recursive rather than time-separable. We propose a new assumption called upper convergence, imposed jointly on the felicity function and the production function. Under the assumption of upper convergence, we prove the value function exists and it is a unique solution to Bellman's equation.
Notes	特集：経済学の本質としての数学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20180101-0171

「三田学会雑誌」110 巻 4 号（2018 年 1 月）

連続時間再帰的ダイナミック・プログラミング理論の構築に向けて

——「レ・プレリュード」——

尾崎裕之 *

Toward a Theory of Dynamic Programming for Recursive Objective Functions in Continuous Time Models:

"Les Préludes"

Hiroyuki Ozaki *

Abstract: This paper considers continuous-time infinite-horizon dynamic optimization problems, where the objective functions are recursive rather than time-separable. We propose a new assumption called upper convergence, imposed jointly on the felicity function and the production function. Under the assumption of upper convergence, we prove the value function exists and it is a unique solution to Bellman's equation.

Key words: dynamic programming, value function, Bellman's equation, recursive utility function, upper convergence

JEL Classifications: C61, C90

* 慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University
ozaki@econ.keio.ac.jp

「ねえ，この線，何なの」

その問いに返ってきたのは，今まで聞いたこともない言葉だった。

「ああ，それはね，《不連続線》っていうんだよ」

竹本健治『匣の中の失楽』より

1 はじめに：離散時間モデルから連続時間モデルへ

時間を表すパラメータが（0 を含む）自然数で表現されるようなモデルを「離散時間モデル」と呼び，それが非負の実数で表現されるようなモデルを「連続時間モデル」と呼ぶ。筆者がこれまでに行ってきた研究は，若干の例外を除いて，そのほとんどが前者のモデルに属している。理由は簡単で，数学的な取り扱いについて，離散時間モデルの方がはるかに簡単だからである。例えば，離散時間モデルで解析的な解（いわゆる，closed-form solution）が得られることは稀であるが，その存在や一意性などの定性的な分析を厳密に行うことは比較的容易である。一方，連続時間モデルで解析的な解（のようなもの）が得られることはよく観察されることであるが，それが，真に，モデルの解であるのかどうかを確認する作業は一般的には相当に骨が折れる（実際，それをしていない研究がほとんどであるが，この業界では，それでも良いことになっている）。

本稿を皮切りに，筆者は，連続時間の「厳密な」経済動学モデルを構築していく中長期的な研究計画を立ちあげた。数学的に厳密なモデルを希求する筆者の唯一の動機は，「数理経済学」の在り方にかかわることであり，ほかでも書いたことがあるので，ここでは繰り返さない[(1)]。

本稿で取り上げる連続時間モデルは，「再帰的効用関数」の理論であり，離散時間モデルにおけるそれは，最初に，Koopmans（1960）によって開発された。以下では，これを簡単に説明しよう。

時間パラメータを $t = 0, 1, 2, \ldots$ で表し，それぞれの期の消費を $c_t\,(\in \mathbb{R}_+)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ と書くと，無限期間生きる消費者の消費プロファイルは $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ となる。消費プロファイルの集合 $\mathcal{C}$（$\mathbb{R}_+^\infty$ の然るべき部分空間）上で定義された実数値汎関数 U を効用関数と呼ぶ。

ある効用関数 U について，第 2 変数に関して狭義に増加的な関数 $W : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$(\forall (c_0, c_1, \ldots) \in \mathcal{C}) \quad U(c_0, c_1, \ldots) = W\left(c_0, U(c_1, c_2, \ldots)\right) \tag{1}$$

と書けるとき，U を「再帰的である」と定義する。このとき，関数 W を「集計関数」，式 (1) を「クープマンス方程式」と呼ぶ。

再帰的効用関数の非常の特殊なケースが「時間分離的な」効用関数で，これは，あるフェリシティー（効用インデックス）$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ と割引因子 $\beta > 0$ によって，集計関数が $(\forall c, v)\; W(c, v) = u(c) + \beta v$

（1）『三田学会雑誌』108 巻 3 号「特集：経済の数理解析・序」（2015）を参照。

のように分解できるときに得られる。

時間分離的では「ない」再帰的効用関数を用いると，異時点間の消費の代替弾力性と危険回避に対する選好という，選好の持つ 2 つの異なる側面を分離することが可能となる。その一方で，再帰的効用関数は「時間整合的」であるがゆえに,「ダイナミック・プログラミング」の適用を可能にする。時間分離的な効用関数を用いたモデルでは説明できなかった経済現象を,「再帰的効用関数 ＋ ダイナミック・プログラミング」によって解明しようとする研究が Koopmans（1960）以来相次いだが，その文献はあまりにも膨大なので，本稿ではその幾つかを紹介することすら（中途半端になるので）しない[(2)]。

もちろん，時間整合的だからと言って，闇雲にダイナミック・プログラミングを適用してよかろうはずは当然なくて，こちらについての数学的な研究も現在では相当数に上る（この分野では，先ずは Ozaki and Streufert（1996）が必読であることは，今更言うまでもないだろう）。

離散時間モデルで示された事柄が，連続時間モデルでも観察されるかどうかを調べることは研究プログラムとしては当然の流れであり，また実際に，連続時間モデルでは解析的な解（と思われるもの）が発見されることも多く，連続時間再帰的効用モデルも Epstein and Hynes（1983）以来，研究されてはきた。しかしながら，離散時間モデルのそれと比較すると，ダイナミック・プログラミングの応用を含めたその数学的な基礎研究は著しく乏しい（例えば，再帰的効用関数を用いた無限期間連続時間最適化モデルを,「変分法に依らず，つまり，時間整合性を思いっきり搾取して」解明する試みについては，筆者はそれを知らない)。

本稿の目的は，前段で述べた壮大なリサーチ・プログラムの「序文」を書くことである。紙幅の関係で，厳密性は大幅に犠牲にしているが（若干，矛盾気味ではあるが)，序文なので許してほしい。本稿が，今後展開されるであろう筆者による研究の，リスト風の前奏曲となってくれることを祈る。

2　連続時間モデルのクープマンス方程式

2.1　消費経路の空間と効用関数

非負の実数の集合 $\mathbb{R}_+$ からそれ自身への写像のうち，区間連続であるものの集合を $\mathcal{C}$ と書き，これを，取り得る消費経路の集合とする。また，C のもとでの時点 $t \geq 0$ における消費を $C(t)$ と書く。

任意の消費経路 $C \in \mathcal{C}$ と，任意の時点 $t \geq 0$ が与えられたとき，新たな消費経路 ${}_tC \in \mathcal{C}$ を

$$(\forall s \geq 0) \quad {}_tC(s) := C(t+s)$$

(2)　ただし，この段落で述べたことは，Nishimura and Ozaki（2017）に詳しく書いてあるので，そちらを参照してほしい。

によって定義する。

消費経路の空間 $\mathcal{C}$ 上で定義された実数値汎関数を効用関数と呼び，U と書く。

2.2　再帰的効用関数とクープマンス方程式

割引率を ρ と書き，$\rho > 0$ を仮定する。また，$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ はフェリシティーであり，有界かつ可測な関数とする。このとき，効用関数 $U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ を

$$(\forall C \in \mathcal{C}) \quad U(C) := \int_0^\infty e^{-\rho s} u(C(s)) ds \tag{2}$$

によって定義する。すると，効用関数 (2) について，

$$(\forall C \in \mathcal{C})(\forall t \geq 0) \quad U(C) = \int_0^t e^{-\rho s} u(C(s)) ds + e^{-\rho t} U({}_tC) \tag{3}$$

が成立する。これは，時間 t の経過後，消費者は同じ効用関数を用いて，それ以降の消費経路を評価することを意味し，この効用関数を「再帰的」と呼ぶことはさして不自然ではない。さらに，

$$(\forall C \in \mathcal{C})(\forall t \geq 0) \quad U({}_tC) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} u(C(s)) ds$$

が成立し，$U({}_tC)$ が t について微分可能であることから，式 (3) の両辺を t で微分し，次を得る（左辺は，t と独立なので，微分した結果はゼロである）：

$$(\forall t) \quad 0 = e^{-\rho t} u(C(t)) - \rho e^{-\rho t} U({}_tC) + e^{-\rho t} \cdot \frac{d}{dt} U({}_tC)$$

これを整理すると，

$$(\forall t) \quad \frac{d}{dt} U({}_tC) = -u(C(t)) + \rho U({}_tC)$$

となるが，いま，$(\forall (c, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})\ V(c, v) := u(c) - \rho v$ と定義することによって，この式は

$$(\forall t) \quad \frac{d}{dt} U({}_tC) = -V\left(C(t), U({}_tC)\right) \tag{4}$$

とも書くことができる。

以上の議論を逆転させて，効用関数が「再帰的である」ということを，次で定義する。

定義：連続な関数 $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して，式 (4) の形で書けるときに，効用関数 $U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ を「再帰的である」と定義する。このとき，関数 V を「生成関数」と呼ぶ。

2.3　例（宇沢 = Epstein = Hynes）

Uzawa（1968）や Epstein and Hynes（1983）は，$V(c, v) := u(c) - \rho(c)v$ と定義される生成関

数を用いて，再帰的効用関数を定義した。割引率はもはや一定ではなく，現在と過去の消費水準に依存する。この効用関数を用いた経済モデルの分析は多いが，第 1 節で書いたように，その数学的な基礎は不十分である。本稿と今後の研究の成果を，このクラスの効用関数を用いたモデルに応用することは，「約束された」リサーチ・プログラムであると言ってよい。

3　ダイナミック・プログラミング

3.1　資本蓄積経路と許容される消費経路

非負の実数の集合 $\mathbb{R}_+$ からそれ自身への写像のうち，区間 C^1-級であるものの集合を $\mathcal{X}$ と書き，これを，取り得る資本蓄積経路の集合とする。また， X のもとでの時点 $t \geq 0$ における資本ストックを $X(t)$ と書き，同期の投資（X の時間微分）を $\dot{X}(t)$ と書く。

経済の生産技術は「生産関数」$f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ で表現されており，この経済の初期資本は $x_0 \in \mathbb{R}_+$ で与えられているものとする。消費経路 $C \in \mathcal{C}$ が「（x_0 のもとで）許容されている」とは，資本蓄積経路 $X \in \mathcal{X}$ で，$X(0) = x_0$，かつ，ほとんどのすべての時点において（ほとんどすべての t について）

$$\dot{X}(t) = f(X(t), C(t)) \tag{5}$$

を満たしているものが存在するときを言う。以下では，生産関数 f は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で C^1-級であると仮定する。

3.2　価値関数とハミルトン = ジャコビ = ベルマン（HJB）方程式

価値関数 $J^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を次によって定義する：

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}_+) \quad J^*(x_0) := \max\left\{ U(C) \;\middle|\; C \in \mathcal{C} \text{ は } x_0 \text{ のもとで許容されている} \right\}$$

価値関数が存在する保証は全くない。すなわち，最大値があるとは限らないし，それが有限値であるとも限らない。ここでは，「価値関数」を，<u>単に定義しているだけ</u>である。

関数 $J : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が「ハミルトン = ジャコビ = ベルマン（HJB）方程式を解く」というのは，J が微分可能であり，次が成立するときを言う：

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad 0 = \max_{c \in \mathbb{R}_+} \left[V(c, J(x)) + J'(x) \cdot f(x, c) \right]$$

3.3　上収束の仮定と下収束の仮定

「経済」が与えられたとする。すなわち，効用関数 U と生産関数 f が与えられたとする。或る割引率 $\hat{\rho} > 0$ が存在して，任意の初期資産 $x_0 \geq 0$ と，そのもとで許容される任意の消費経路について，

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) \leq 0$$

が成立するとき，経済は「上収束」の仮定を満たす，と言う。また，不等式が逆向きのとき，経済は「下収束」の仮定を満たす，と言う。当然，$\rho_1 \geq \rho_2$ ならば $e^{-\rho_1 t}|U({}_tC)| \leq e^{-\rho_2 t}|U({}_tC)|$ であるから，上収束と下収束の両方を満たす経済では，両方の仮定を同時に満たす $\hat{\rho}$ を共通に取ることができる（例えば，$\hat{\rho} := \max\{\rho_1, \rho_2\}$ とすればよい）。

「上収束」並びに「下収束」の仮定は，離散時間モデルにおいて Streufert（1990）によって初めて導入された。連続時間における定義は，本稿のものが最初である。

4　例：「CRRA + AK」モデル

本節では，前節で定義された上収束の仮定と下収束の仮定が満たされる経済の例を考える。

4.1　CRRA 効用関数と AK 生産関数

割引率 $\rho > 0$ と相対的危険回避度 $\theta > 0$（$\theta \neq 1$）が与えられたとき，効用関数 U を次で定義する：

$$(\forall C \in \mathcal{C}) \quad U(C) = \int_0^\infty e^{-\rho s}\frac{(C(s))^{(1-\theta)}}{1-\theta}ds$$

この効用関数では，フェリシティーが有界ではない。したがって，生産関数によっては，効用関数が定義できない（実数値ではない）可能性がある。しかし，上収束の仮定と下収束の仮定は，本来はそのような経済にこそ適用されるべき仮定であり，以下で示す両者の十分条件が満たされるときには，効用関数が実数値関数として綺麗に定義できる。本稿では，紙幅の関係で，その詳細には触れない。

また，生産技術については AK モデルを仮定する。すなわち，この経済の生産技術は生産関数 $f(x, c) := \gamma x - c$ によって表現されるとする。ただし，γ（> 0）は定数である。

4.2　純粋資本蓄積経路と上収束の十分条件

消費を一切行わないと仮定する。つまり，$(\forall t)\ C(t) = 0$ とする。このとき，式 (5) で定義される微分方程式は，

$$X(0) = x_0 \quad \text{かつ} \quad (\forall t \geq 0)\ \dot{X}(t) = \gamma X(t)$$

となり，これは $\hat{X}(t) = x_0 e^{\gamma t}$ と完全に解けてしまう。また，この経済で許容される消費経路は，究極的には，$\hat{C} := \hat{X}$ によって定義される純粋資本蓄積経路によって上から抑えられる。

したがって，十分に大きな t を考えると，

$$U({}_tC) \leq \int_0^\infty e^{-\rho s}\frac{(\hat{C}(t+s))^{1-\theta}}{1-\theta}ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\rho s}x_0^{1-\theta}}{1-\theta}e^{\gamma(1-\theta)(t+s)}ds$$

$$= \frac{{x_0}^{1-\theta}}{1-\theta}e^{\gamma(1-\theta)t}\int_0^\infty e^{(\gamma(1-\theta)-\rho)s}ds$$

が成立している。

いま，$\rho > \gamma(1-\theta)$ を仮定しよう。すると，十分に大きな t について

$$U({}_tC) \leq \frac{{x_0}^{1-\theta}}{1-\theta}e^{\gamma(1-\theta)t}\cdot\frac{1}{\rho-\gamma(1-\theta)}$$

であるから，任意の $\hat{\rho}$ に関して，t が十分に大きい限り，

$$e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) \leq \frac{{x_0}^{1-\theta}}{1-\theta}e^{(\gamma(1-\theta)-\hat{\rho})t}\cdot\frac{1}{\rho-\gamma(1-\theta)}$$

である。

以上のことから, $\rho > \gamma(1-\theta)$ であるならば, $\hat{\rho}$ を $\hat{\rho} \geq \rho$ とすることによって, $\lim_{t\to+\infty} e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) \leq 0$ とできることがわかる。つまり，そのとき，経済は上収束の仮定を満たす。

また，$\theta < 1$ であったとすると，$(\forall t)\ e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) \geq 0$ であることより，経済は常に下収束の仮定を満たす。

4.3　離散時間モデルとの類似

本節で考えたものと同様のCRRA効用関数とAK生産関数を使った離散時間動学モデルを構成したとき, 経済が, (Streufert (1990) で導入された) 上収束の仮定を満たすための十分条件が $(1+\gamma)^{1-\theta} < 1+\rho$ であることはよく知られているが，4.2節で求めた条件は，この条件の連続時間バージョンになっている（両辺の自然対数を取ればよい)。

5　価値関数はHJB方程式の解である！

ダイナミック・プログラミングを用いて示せることを列挙すると以下のようになる。(1) 価値関数が存在する。(2) 価値関数はHJB方程式を解く。(3) ある条件を満たす関数のクラスの中で，価値関数「のみ」がHJB方程式を解く（(1) と (3) から,「HJB方程式の解は，価値関数である」という，いわゆる「ベルマンの最適性原理」が従う)。(4) 価値関数をある方法で逐次近似できる。(5) HJB方程式を消費経路について逐次的に解くことによって，最適経路が得られる（「逐次最適解は最適解である」)。

価値関数を sup で定義し，$+\infty$ をその値として許すと，(1)は自明のこととなるが，応用上，最も大事なのは，(3)が保証されていることを大前提に，(5)の方法でモデルを解くことなので，sup で定義しようがしまいが，結局，max の存在を言わなければ意味はない。

上記の結果を示していくのが，本稿冒頭で述べたリサーチ・プロジェクトであるのだが，その「序曲」である本稿では，最も簡単な(2)のみを証明することにする。

定理 1. 考えている経済で，上収束の仮定，下収束の仮定のいずれもが満たされているものとする。このとき，価値関数 J が存在して，しかも，それが微分可能であるならば，J は *HJB* 方程式の解である。

証明. いま，上収束と下収束の両方の仮定が $\hat{\rho} > 0$ で満たされているものとする。すると，これより，

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC)\right]\, dt = \lim_{t\to+\infty} e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) - U(C) = -U(C)$$

が直ちに従う。効用関数 U の再帰性から，

$$\begin{aligned}
U(C) &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC)\right] dt \\
&= -\int_0^\infty \left[-\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}\frac{d}{dt}U({}_tC)\right] dt \\
&= \int_0^\infty \left[\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt
\end{aligned}$$

となり，さらに，価値関数の定義から，

$$\begin{aligned}
J(x_0) &= \max\left\{U(C)\,\middle|\, C \text{ は } x_0\text{のもとで許容されている}\right\} \\
&= \max_C \int_0^\infty \left[\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt \\
&= \max_C \left[\int_0^{\Delta t} \left[\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt \right.\\
&\quad \left. + \int_{\Delta t}^\infty \left[\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt\right] \\
&= \max_C \left[\int_0^{\Delta t} \left[\hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t}V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \int_{\Delta t}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[e^{-\hat{\rho}t} U({}_tC)\right] dt \Bigg] \\
&= \max_{C} \left[\int_{0}^{\Delta t} \left[\hat{\rho} e^{-\hat{\rho}t} U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t} V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt + e^{-\hat{\rho}\Delta t} U({}_{\Delta t}C) \right] \\
&= \max_{C} \Bigg[\int_{0}^{\Delta t} \left[\hat{\rho} e^{-\hat{\rho}t} U({}_tC) + e^{-\hat{\rho}t} V\left(C(t), U({}_tC)\right)\right] dt \\
&\quad + e^{-\hat{\rho}\Delta t} \max_{C} U({}_{\Delta t}C) \Bigg] \\
&= \max_{C} \left[\left[\hat{\rho} U(C) + V\left(C(0), U(C)\right) \right] \Delta t + (1 - \hat{\rho}\Delta t)\, J(x_0 + \Delta x) \right] \\
&= \max_{C} \Bigg[\left[\hat{\rho} U(C) + V\left(C(0), U(C)\right) \right] \Delta t \\
&\quad + \ (1 - \hat{\rho}\Delta t) \left(J(x_0) + J'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \right) \Bigg]
\end{aligned}
$$

である。ただし，5 番目の等式では，上収束と下収束の両方の仮定を再び用い，最後の等式では，J の微分可能性を用いた。

故に，

$$
\begin{aligned}
0 &= \max_{C(0)} \left[\left[\hat{\rho} U(C) + V\left(C(0), U(C)\right) \right] \Delta t - \hat{\rho} J(x_0)\Delta t + J'(x_0)\Delta x + o(\Delta t) \right] \\
&= \max_{C(0)} \left[V(C(0), U(C)) + J'(x_0)\dot{X}(0) \right] \\
&= \max_{C(0)} \left[V(C(0), J(x_0)) + J'(x_0) f(x_0, C(0)) \right]
\end{aligned}
$$

となり，証明が完了した。 □

参　考　文　献

Epstein, L. G. and J. A. Hynes (1983): “The rate of time preference and dynamic economic analysis,” *The Journal of Political Economy* 91, 611–635.

Koopmans, T. C. (1960): “Stationary ordinal utility and impatience,” *Econometrica* 32, 287–309.

Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2017): *Economics of Pessimism and Optimism: Theory of Knightian Uncertainty and Its Applications*, Springer: Japan.

Ozaki, H. and P. A. Streufert (1996): “Dynamic programming for non-additive stochastic objectives,” *Journal of Mathematical Economics* 25, 391–442.

Streufert, P. A. (1990): “Stationary recursive utility and dynamic programming under the assumption of biconvergence,” *Review of Economic Studies* 57, 79–97.

Uzawa, H. (1968): “Time preference, the consumption function, and optimum asset holdings.” In *Value, Capital, and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*, edited by J. N. Wolfe. Aldine: Chicago.

竹本健治 (1991): 『匣の中の失楽』，講談社ノベルズ [Takemoto, Kenji, 1991, *Hako no naka no Sitsuraku*, Kodansha. (in Japanese)]

要旨: 本稿では，連続時間モデルにおける動学的最適化問題を取り上げる。特に，再帰的効用関数（再帰的目的関数）を用いたモデルにダイナミック・プログラミングと呼ばれる手法を適用するために必要となる数学的な仮定についての検討を行う。効用関数と生産関数に対する「上収束」「下収束」と名付けた仮定が重要であることが主張されるが，これは連続時間モデルにおける全く新しい仮定である。本稿は，この仮定のもとで展開される壮大なリサーチ・プロジェクトの序章となるであろう。

キーワード: 動的計画法，価値関数，ベルマン方程式，再帰的効用関数，上収束