Title	非期待効用理論 : 確率的に洗練された選好とショケ期待効用
Sub Title	Notes on the non-expected utility theory : probabilistic sophistication and choquet expected utility
Author	中田, 里志(Nakada, Satoshi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2018
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.110, No.4 (2018. 1) ,p.493(133)- 510(150)
JaLC DOI	10.14991/001.20180101-0133
Abstract	結果の集合が与えられており, それぞれの結果がどのような確率で生じるかを表した確率分布をクジとよぶ。いくつかのクジが与えられており, どのようなクジが望ましいかを選択する問題をリスク下の意思決定とよぶ。これに対し, クジのような客観的な確率分布が与えられていない状況で行う意思決定問題を不確実性下の意思決定とよぶ。本稿では, 不確実性下の意思決定理論で代表的な確率的に洗練された選好(Probabilitistic sophistication)とショケ期待効用(Choquet expected utility)について紹介し, 両者の接点となるランク依存型主観的期待効用(Rank-dependent subjective expected utility)とよばれるクラスの選好の基礎付けについて考察する。 When a decision maker does not know the true probability distribution of an outcome, the decision problem she or he faces is called "decision under uncertainty." In this aper, we introduce two novel classes of decision models under uncertainty, probabilistically sophisticated preferences and Choquet expected utility, and explain basic axiomatic foundations of these two models. Furthermore, we discuss the axiomatic foundation of rank-dependent subjective expected utility, which satisfies both properties of probabilistically sophisticated preferences and Choquet expected utility.
Notes	特集 : 経済学の本質としての数学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20180101-0133

「三田学会雑誌」110 巻 4 号（2018 年 1 月）

非期待効用理論

——確率的に洗練された選好とショケ期待効用——

中田里志 *

（初稿受付 2017 年 12 月 18 日，査読を経て掲載決定 2018 年 1 月 9 日）

Notes on the Non-expected Utility Theory:

Probabilistic Sophistication and Choquet Expected Utility

Satoshi Nakada *

Abstract: When a decision maker does not know the true probability distribution of an outcome, the decision problem she or he faces is called "decision under uncertainty." In this paper, we introduce two novel classes of decision models under uncertainty, probabilistically sophisticated preferences and Choquet expected utility, and explain basic axiomatic foundations of these two models. Furthermore, we discuss the axiomatic foundation of rank-dependent subjective expected utility, which satisfies both properties of probabilistically sophisticated preferences and Choquet expected utility.

Key words: Choquet expected utility, probabilistic sophistication, rank-dependent subjective expected utility, axiomatization

JEL Classifications: D01, D81

本稿の作成にあたり，尾崎裕之氏，岸下大樹氏および匿名のレフェリーから詳細なコメントを頂いた。ここに感謝いたします。またこの研究を進めるにあたり，日本学術振興会からのサポートを受けています。

* 一橋大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Hitotsubashi University
s.nakada0911@gmail.com

1　はじめに

人々の意思決定は多くの場合に，選択対象の情報が完全にはわからない状況下で行われる。選択対象の情報が何らかの確率分布に従い，その確率分布に基づいて意思決定を行う状況をリスク下の意思決定とよぶ。一方で，どのような確率分布が真の確率分布であるかは必ずしもわからず，様々なシナリオを考慮して意思決定を行う状況を不確実性下の意思決定とよぶ。このようなリスク下／不確実性下の意思決定において中心となるのが，期待効用仮説である。本稿では，客観的／主観的期待効用理論の基礎的な結果および，期待効用仮説への批判として発展した非期待効用理論のうち代表的な確率的に洗練された選好（Probabilitistic sophistication）とショケ期待効用（Choquet expected utility）について紹介し，その後確率的に洗練された選好とショケ期待効用の両性質を満たすランク依存型（主観的）期待効用（Rank-dependent subjective expected utility）とよばれるクラスの選好の基礎付けについて考察する。

期待効用理論（expected utility）の基礎付けを初めて与えたのは von Neumann and Morgenstern（1944）である。彼らは，リスク下の意思決定者の選好として妥当であると考えられる公理を定式化し，それらの公理を満たす意思決定様式は何かという問いへの答えとして期待効用理論を構築した。その後，リスク下の意思決定のように客観的な確率分布に基づく意思決定ではなく，意思決定者それぞれが主観的な確率分布を用いて予想を形成する主観的期待効用理論の基礎付けが Savage（1954），Anscombe and Aumann（1963）により行われた[(1)]。

このような期待効用理論の記念碑的な研究に対し，期待効用理論では説明不可能である意思決定者の行動が様々な実験により明らかになった[(2)]。期待効用理論はその後，このような批判を解消するような理論を構築すべく発展してきた。その中でも有名なものとして，Machina and Schmeidler（1992, 1995）による確率的に洗練された選好と Schmeidler（1989）によるショケ期待効用がある。確率的に洗練された選好を持つ個人は，期待効用理論のように何らかの確率分布に基づいた予想形成を行うが，より複雑な意思決定方法を許容する[(3)]。一方ショケ期待効用を持つ個人は，必ずしも何らかの確率分布に基づいた予想形成を行わず，より一般的な非加法的な確率分布（non-additive probability）に

（1）　Savage（1954）による特徴付けでは，クジのような客観的な確率分布の存在を一切前提としない。一方で，Anscombe and Aumann（1963）はクジの存在を認めることにより，Savage（1954）による基礎付けよりも数学的な取り扱いを容易にし，簡潔な証明を行っている。両者の違いについては，第 2 節で議論する。また，このような主観確率に関しての議論の歴史についての包括的なサーベイとして，Gilboa and Marinacci（2016）を参照せよ。

（2）　有名なものとして，第 3 節で説明する Allais（1953）と Ellsberg（1961）による反例がある。

（3）　厳密な定義は，第 4 節で与える。

基づいた意思決定を行う[(4)]。確率的に洗練された選好を持つ個人は Allais（1953）による反例を，ショケ期待効用を持つ個人は Ellsberg（1961）による反例を説明可能であることが知られている。

確率的に洗練された選好とショケ期待効用は互いに反する意思決定様式ではなく，両性質を満たすことがある。自然な疑問として，この二つの性質を満たす意思決定者の選好は一般的にどのようなものであるか，またどのような公理により特徴付けられるかという点がある。この問題を初めて考察したのは Marinacci（2002）である。彼は，Gilboa and Schmeidler（1989）によるマキシミン期待効用（maximin expected utility）とよばれるクラスと確率的に洗練された選好の両性質を満たす選好はどのようなものであるかという問題を考察した[(5)]。Nakada and Ozaki（2017）はこの問いに対して完全な回答を与え，確率的に洗練された選好とショケ期待効用の両性質を満たす選好がランク依存型主観的期待効用とよばれるクラスに一致することを示し，このクラスの公理的基礎付けを与えた[(6)]。

以下では，まず第 2 節において基本的な客観的／主観的期待効用理論の基礎についての導入を与える。第 3 節では，期待効用理論への批判として最も有名な Allais（1953）による反例と Ellsberg（1961）による反例を紹介する。第 4 節では，確率的に洗練された選好とショケ期待効用の定義を導入し，第 5 節において Nakada and Ozaki（2017）によるランク依存型主観的期待効用とよばれるクラスの基礎付けについて紹介する。第 6 節は本稿の結びである。

2　期待効用理論

2.1　客観的期待効用

ある結果の集合 Z 上に選好を持つ意思決定者を考える。この意思決定者は，Z のうちどの結果が実現するかは事前にはわからない場面に直面しており，Z のうちどの結果が実現するかについて確率的なクジを選択できるとする。例えば，$Z = \{\$0, \$10, \$100\}$ という金銭的帰結であるとし，あるクジ p は 1/2 ずつの確率で \$0 もしくは \$100 となり，別のクジ q は確率 1/20, 1/2, 9/20 でそれぞれ \$0, \$10, \$100 が実現するものとする。このようないくつかのクジが与えられたとき，どのクジが

(4)　このような非加法的確率分布は，キャパシティー（capacity）ともよばれる。厳密な定義は，第 4 節で与える。

(5)　より一般的な結果として，Grant and Kajii（2005）を参照せよ。彼らは，Marinacci（2002）が課した条件を緩めたとき，両性質を満たす選好を ε-汚染（ε-contamination, Huber 1981; Nishimura and Ozaki 2006; Kojima 2008; Asano and Kojima 2015）とよばれる選好のクラスの一種として特徴付けた。

(6)　ランク依存型期待効用はリスク下の意思決定において Quiggin（1982）と Yaari（1987）によって公理化がなされた。Nakada and Ozaki（2017）の結果は，これらの結果の不確実性下の意思決定への一般化と見なせる。

自分にとって望ましいかを選択する意思決定をリスク下の意思決定とよぶ。

リスク下の意思決定に関しての基礎付けを与えたのは von Neumann and Morgenstern（1944）である。彼は，意思決定主体がクジの選択をする際に満たすであろう（あるいは，満たすべきだと考える）性質を公理として定式化し，その公理を満たす意思決定主体の行動様式を特定化した。彼らのフォーマルな議論は以下のようになる。$\Delta(Z)$ を Z 上のクジの集合とし，意思決定者の $\Delta(Z)$ 上の選好を二項関係 $\succsim$ と表すものとする。また，$p \succ q \Leftrightarrow p \succsim q$ かつ $q \not\succsim p$, $p \sim q \Leftrightarrow p \succsim q$ かつ $q \succsim p$ であるとする。意思決定者の選好 $\succsim$ が満たすべき性質として以下を仮定する。

公理 1（合理性（Order））. $\succsim$ は完備性と推移性を満たす。

公理 2（連続性（Continuity））. 任意の $p, q, r \in \Delta(Z)$ について，集合 $\{\lambda \in [0,1] | \lambda p + (1-\lambda)q \succsim r\}, \{\lambda \in [0,1] | r \succsim \lambda p + (1-\lambda)q\}$ は $[0,1]$ の閉集合である。

公理 3（独立性（Independence））. 任意の $p, q, r \in \Delta(Z)$ と $\lambda \in [0,1]$ について，$p \succsim q \Rightarrow \lambda p + (1-\lambda)r \succsim \lambda q + (1-\lambda)r$ である。

定理 1（von Neumann and Morgenstern 1944）. $\Delta(Z)$ 上の選好関係が公理 1〜3 を満たすことの必要十分条件はある関数 $u : Z \to \mathbb{R}$ が存在し，

$$p \succsim q \Leftrightarrow \int_Z u(z)dp(z) \geq \int_Z u(z)dq(z)$$

を満たすことである。ここで，u は正一次変換を除いて一意である。

この定理は，任意のクジ p を関数 $U(p) = \int_Z u(z)dp(z)$ の値により評価し，この値の大小によりクジの間の選好を表現するという意思決定者の行動様式に対しての公理的基礎付けを与えている。ここで重要なのは，このようなリスク下の意思決定では，選択肢として所与の客観的な確率分布が与えられていることである。意思決定者はこの与えられた確率分布に関して事後的に得られる帰結からの効用 $u(z)$ の期待値を計算し，それを用いて選択を行う。この意味で，リスク下の意思決定は客観的期待効用理論ともよばれている。

2.2　主観的期待効用

一方で，意思決定に関してこのような客観的確率が常に与えられているとは限らない。このような場合の意思決定者の行動様式を考えるために，次のような設定を考える。意思決定者はある行動 $a \in A$ を選んだ帰結としてある結果 $z \in Z$ を得るとする。選択した行動 a に対してどのような結果が得られるかは自然が選択した状態に依存するが，意思決定者は真の状態を観察することができない。あらゆる状態の集合を S とし，S の冪集合を $\mathcal{A} = 2^S$ とする。行動と状態の組 (a, s) が決まる

と，それに応じて一つの結果 $z \in Z$ が得られる。このとき，意思決定者の直面する問題はどのような行動を選択するかという問題である。ここで，行動を一つ決定することにより，生じた状態 $s \in S$ に応じて結果が一つ定まるので，行動を選択することは関数 $f : S \to Z$ を選択することと同一視することができる。このような関数 f を（Savage）アクトとよぶ。リスク下の意思決定とは異なり，このようにどのような状態が生じるかについての確率分布についての客観的な情報が与えられていない中で，アクトの選択を行う意思決定を不確実性下の意思決定とよぶ。Savage（1954）は，このような不確実性下の意思決定に対して定理 1 の結果を次のように一般化した。アクト f が有限個の結果しか取らない，すなわち $|f(S)| < \infty$ であるようなものをシンプルアクトとよび，シンプルアクト全体の集合を $\mathcal{F}$ とする。前節とは異なり，意思決定者の選好 $\succsim$ は $\mathcal{F}$ 上に与えられているとする。意思決定者の選好 $\succsim$ が満たすべき性質として以下を仮定する。

公理 4（合理性）. $\succsim$ は完備性と推移性を満たす。

公理 5（確実性原理（Sure-thing principle））. 任意の $f, f', g, g' \in \mathcal{F}$ と事象 $A \subset S$ について，

$$\begin{bmatrix} f & s \in A \\ g & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} f' & s \in A \\ g & s \in A^c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f & s \in A \\ g' & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} f' & s \in A \\ g' & s \in A^c \end{bmatrix}$$

公理 6（事象単調性（Eventwise monotonicity））. 任意の $x, y \in Z$，ナル事象でない $E \subset S$[7] および $f \in \mathcal{F}$ について，

$$\begin{bmatrix} x & s \in E \\ f & s \in E^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y & s \in E \\ f & s \in E^c \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \succ y$$

公理 7（弱確率比較（Weak comparative probability））. 任意の事象 $A, B \subset S$ と $x \succ x', y \succ y'$ を満たす結果 x, x', y, y' について，

$$\begin{bmatrix} x & s \in A \\ x' & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} x & s \in B \\ x' & s \in B^c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y & s \in A \\ y' & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y & s \in B \\ y' & s \in B^c \end{bmatrix}$$

公理 8（非退化（Non-degeneracy））. ある帰結の組 $x, x' \in Z$ で $x \succ x'$ を満たすものが存在する。

公理 9（小さな事象についての連続性（Small event continuity））. 任意の $x \in Z$ と $f \succ g$ を満たす

（7） 事象 $E \subset S$ がナル事象であるとは，任意の $f, g \in \mathcal{F}$ について，E^c 上で $f = g$ であるならば $f \sim g$ が成り立つことである。

$f, g \in \mathcal{F}$ について，S 上のある有限分割 $\langle E_i \rangle_{i=1}^n$ が存在して，

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}) \quad f \succ \begin{bmatrix} x & s \in E_i \\ \\ g & s \in E_i^c \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} x & s \in E_j \\ \\ f & s \in E_j^c \end{bmatrix} \succ g$$

定理 2（Savage 1954）．$\mathcal{F}$ 上の選好関係 $\succsim$ が公理 4–9 を満たすことの必要十分条件は $(S, \mathcal{A})$ 上の一意な凸値（convex-ranged）[(8)] である確率測度 p と関数 $u : Z \to \mathbb{R}$ が存在し

$$f \succsim g \;\Leftrightarrow\; \int_S u(f(s))\, dp(s) \geq \int_S u(g(s))\, dp(s)$$

を満たすことである。ここで，u は正一次変換を除いて一意である。

定理 1 と定理 2 ではともに事後的に得られる結果からの効用の期待値を用いて選択肢を評価している。両者の最も大きな違いは，定理 1 では意思決定に用いる確率は客観的に与えられているが，定理 2 では意思決定者が主観的にそのような確率を持ち，その主観確率を用いて期待効用を考えている点である。この意味で，不確実性下の意思決定は主観的期待効用理論ともよばれている。

Savage（1954）とは異なる方法で主観的期待効用理論の基礎付けを与えたのが，Anscombe and Aumann（1963）である。彼らは，アクトとして $f : S \to \Delta(Z)$ を考え，このような（Anscombe and Aumann）アクト上の選好について考えた。L_0 をシンプルな（Anscombe and Aumann）アクト全体の集合とし，意思決定者の選好 $\succsim$ は L_0 上に与えられているとする。意思決定者の選好 $\succsim$ が満たすべき性質として以下を仮定する。

公理 10（合理性）．$\succsim$ は完備性と推移性を満たす。

公理 11（連続性）．任意の $f, g, h \in L_0$ について，集合 $\{\lambda \in [0,1] | \lambda f + (1-\lambda) g \succsim h\}, \{\lambda \in [0,1] | h \succsim \lambda f + (1-\lambda) g\}$ は $[0,1]$ の閉集合である。

公理 12（独立性）．任意の $f, g, h \in L_0$ と $\lambda \in [0,1]$ について，$f \succsim g \Leftrightarrow \lambda f + (1-\lambda) h \succsim \lambda g + (1-\lambda) h$ である。

公理 13（単調性）．任意の $f, g \in L_0$ について，すべての $s \in S$ に対して $f(s) \geq g(s)$ であるならば，$f \geq g$ である。

公理 14（非退化）．あるアクトの組 $f, g \in L_0$ で $f \succ g$ を満たすものが存在する。

---

(8)　確率測度 p が凸値であるとは，任意の $A \in \mathcal{A}$ と $r \in [0, p(A)]$ に対し，ある $B \in \mathcal{A}$ $(B \subset A)$ が存在し，$p(B) = r$ を満たすことである。

Savage（1954）が用いた公理系とは異なり，これらの公理系は von Neumann and Morgenstern（1944）の公理系をベースにしている点が特徴的である。

定理 3（Anscombe and Aumann 1963）．L_0 上の選好関係 $\succsim$ が公理 10–14 を満たすことの必要十分条件は $(S, \mathcal{A})$ 上の一意な確率測度 p とアフィン関数 $u : Z \to \mathbb{R}$ が存在し

$$f \succsim g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))\, dp(s) \geq \int_S u(g(s))\, dp(s)$$

を満たすことである。ここで，u は正一次変換を除いて一意である。

（savage）アクトは（Anscombe and Aumann）アクトの特殊ケースであるから，この結果は定理 2 の結果の拡張であるとも考えられる。また，どの状態においても同一のクジを与えるアクトを考えれば，これはクジ上の選択と考えることができ，$u(\cdot)$ がアフィンであるから，これは定理 1 の結果の拡張にもなっている。技術的な違いとして，次の 2 点があげられる。まず，定理 2 においては S は（前述していないが）無限集合であることが仮定されているが，定理 3 では S は有限でもよく，また事象の集合も $\mathcal{A} = 2^S$ である必要はない。この意味で，定理 2 では状態空間に関しての制限が強い。一方で，定理 2 ではアクトの値域として結果そのもの（Z）を用いているが，定理 3 では結果の上のクジ（$\Delta(Z)$）を用いている。この意味で，定理 3 では客観的な確率の存在も仮定している点で制限的である。定理 3 は，このような制限を加えることにより，定理 2 の複雑な証明を簡略化している。

3　パラドックス

意思決定者が（主観的）期待効用理論に基づく行動を取るとする期待効用仮説は，しばしば実際に観察される実験結果と矛盾することが知られている。有名なものとして，以下のアレのパラドックスとエルズバーグのパラドックスとよばれるものがある。

例 1（アレのパラドックス）．1 から 100 までの数字が書かれたボールがあり，ボールの目に応じて賞金が得られるアクト $a_1, \cdots, a_4$ がある。$S = \{1, \cdots, 100\}$ とし，各アクトは表 1 で表されている。

ここで，$A = \{1, \cdots, 11\}, A^c = \{12., \cdots 100\}$ とすると，a_1 と a_3 は A 上で実現するアウトカムは同じであり，また，a_2 と a_4 も同様に A 上で実現するアウトカムは同じである。したがって，もしこの意思決定者が Savage の公理系と整合的であるとすると，「$a_1 \succ a_2$ であるならば，$a_3 \succ a_4$」という意思決定のパターンを示すはずである。しかし，実験においてしばしば観察される選好は $a_1 \succ a_2$ かつ $a_4 \succ a_3$ である。すなわち，Savage の公理系に照らし合わせると，この選好は確実性原理を満たしていないことがわかる。また，これと同様な比較により，Anscombe and Aumann の公理系に

表１　アレのパラドックス

a	1	2–11	12–100
a_1	\$1000	\$1000	\$1000
a_2	0	\$2500	\$1000
a_3	\$1000	\$1000	0
a_4	0	\$2500	0

表２　エルズバーグのパラドックス

f	R	B	W
f_1	\$1000	0	0
f_2	0	\$1000	0
f_3	\$1000	0	\$1000
f_4	0	\$1000	\$1000

照らし合わせると，この選好は独立性公理を満たしていないことがわかる。よって，この選好は期待効用仮説と矛盾する。 □

例２（エルズバーグのパラドックス）．壺の中に 90 個のボールが入っており，そのうち赤が 30 個，黒と白が合計で 60 個ある。意思決定者は，黒と白のボールがそれぞれいくつずつ入っているかは知らないものとする。ここで，出たボールの色に応じて賞金がもらえるアクト $f_1, \cdots, f_4$ がある。$S = \{R, B, W\}$ とし，各アクトは表２で表されている。

ここで，実験においてしばしば観察される選好は $f_1 \succ f_2$ かつ $f_4 \succ f_3$ である。例１と同様に，Savage の公理系に照らし合わせると，この選好は確実性原理を満たしていないことがわかる。また，Anscombe and Aumann の公理系に照らし合わせると，この選好は独立性公理を満たしていないことがわかる。よって，この選好は期待効用仮説と矛盾する。 □

このような批判から，期待効用理論を修正する理論がいくつも提唱されている。次節では，代表的なものとして確率的に洗練された選好（Machina and Schmeidler 1992, 1995）とショケ期待効用理論（Schmeidler 1989）について紹介する。

4　確率的に洗練された選好とショケ期待効用

4.1　確率的に洗練された選好

例１で観察された選好を説明するためには，確実性原理を取り除く必要がある。その一方で，あたかも「主観確率に基づいているかのように行動する」意思決定者の選好を表現するには，何か別の公理を要請する必要がある。Machina and Schmeidler（1992）は Savage モデルにおいて公理５

の代わりに次の公理を導入した。[9]

公理 15（強確率比較（Strong comparative probability））．互いに排反な事象 $A, B \subset S$ と $x \succ x', y \succ y'$ を満たす結果の組 $x, x', y, y' \in Z$ および任意の $g, h \in \mathcal{F}$ について，

$$\begin{bmatrix} x & s \in A \\ x' & s \in B \\ g & s \in (A \cup B)^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} x' & s \in A \\ x & s \in B \\ g & s \in (A \cup B)^c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y & s \in A \\ y' & s \in B \\ h & s \in (A \cup B)^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y' & s \in A \\ y & s \in B \\ h & s \in (A \cup B)^c \end{bmatrix}$$

公理 15 は公理 7 を強めたものになっている。実際，公理 15 が公理 7 を含意することは次のように示すことができる。任意の事象 $A, B \subset S$ と $x \succ x', y \succ y'$ を満たす結果の組 $x, x', y, y' \in Z$ を取る。このとき，

$$\begin{bmatrix} x & s \in A \\ x' & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} x & s \in B \\ x' & s \in B^c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & s \in A \setminus B \\ x' & s \in B \setminus A \\ x & s \in A \cap B \\ x' & s \in A^c \cap B^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} x' & s \in A \setminus B \\ x & s \in B \setminus A \\ x' & s \in A \cap B \\ x & s \in A^c \cap B^c \end{bmatrix}$$

(9)　Machina and Schmeidler（1992）は Savage モデルに基づき議論をしている。これに対し，Machina and Schmeidler（1995）は Anscombe and Aumann モデルに基づき同様の議論を行っている。ここでは，Savage による定理 2 との比較および後の議論のために Savage モデルに基づいた議論をしている。Anscombe and Aumann モデルに基づいた議論に興味のある読者は Machina and Schmeidler（1995）を参照せよ。

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y & s \in A \setminus B \\ y' & s \in B \setminus A \\ y & s \in A \cap B \\ y' & s \in A^c \cap B^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y' & s \in A \setminus B \\ y & s \in B \setminus A \\ y' & s \in A \cap B \\ y & s \in A^c \cap B^c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y & s \in A \\ y' & s \in A^c \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y & s \in B \\ y' & s \in B^c \end{bmatrix}$$

となるため，公理 7 が導かれる。一方，公理 15 と公理 5 は選択肢が二つのときは同値であるが，選択肢が三つ以上存在するときは独立である[10]。

例 1 において，公理 5 は $a_1 \succ a_2 \Leftrightarrow a_3 \succ a_4$ を要請するが，公理 15 は $\{a_1, a_2\}$ の間の選好と，$\{a_3, a_4\}$ の間の選好に何ら制約を加えない。そのため，ここから導かれる選好はアレのパラドックスを説明できる可能性がある。一方，例 2 では，公理 15 は公理 5 と同様に $f_1 \succ f_2 \Leftrightarrow f_3 \succ f_4$ を要請するため，ここから導かれる選好はエルズバーグのパラドックスを説明できない。これらのことから，次のことがわかる。例 1 において，$\{a_1, a_2\}$ の間の選好は意思決定者がそれぞれの事象 $\{1\}$ および $\{2 \cdots, 11\}$ が起こることに対する予想だけでなく，リスク態度も表している。例えば，a_1 では $s = 1$，$s = 2 \cdots$，11 のいずれについても必ず \$1000 がもらえるが，a_2 では $s = 1$ 以外ではより高い金額を \$2500 をもらえる一方で $s = 1$ のときには 0 になる可能性がある。この意味で，a_1 よりも a_2 の方がリスクの大きな選択肢である。公理 5 はこのようなリスクに対しての選好についても整合性を要請するため，$a_1 \succ a_2 \Leftrightarrow a_3 \succ a_4$ となるが，公理 15 はリスク態度には一切制約を置かない。そのため，$\{a_3, a_4\}$ の間の選好に $\{a_1, a_2\}$ の間の選好は影響を与えない。一方，例 2 において公理 5 および 15 が $f_1 \succ f_2 \Leftrightarrow f_3 \succ f_4$ を要請するのは，意思決定者の予想に対して制約を置くからであると考えられる。まとめると，公理 5 は意思決定者の予想とリスク態度の両方に制約を置くが，公理 15 は意思決定者の予想に対してのみ制約を置いている。

$\mathcal{F}$ 上の選好関係 $\succsim$ が確率的に洗練された選好であるとは，$(S, \mathcal{A})$ 上の凸値な確率測度 p と確率優位性（first order stochastic dominance）に関して強単調増加な関数 $V : \Delta(Z) \to \mathbb{R}$ が存在し，任意の $f, g \in \mathcal{F}$ に対して，

$$f \succsim g \Leftrightarrow V(p(f^{-1})) \geq V(p(g^{-1}))$$

を満たすことである。ここで，$p(f^{-1}) \in \Delta(Z)$ は $p(f^{-1})(x) = p(\{s \in S | f(s) = x\})$ により定めら

（10） この議論については Machina and Schmeidler（1992）を参照せよ。

れる。[11]

定理 4（Machina and Schmeidler 1992）．$\mathcal{F}$ 上の選好関係 $\succsim$ が公理 4, 6, 8, 9, 15 を満たすことの必要十分条件は $\succsim$ が確率的に洗練された選好であることである。

ここで, $f \in \mathcal{F}$ に対し, $f(S) = \{x_1, \cdots, x_k\}$ とすると, 主観的期待効用は $V(f) = \sum_{i=1}^{k} u(x_i)p(f^{-1})(x_i)$ となる特殊ケースである。

4.2　ショケ期待効用

確率的に洗練された選好では，例 2 で観察された選好は依然として説明することができない。そもそも期待効用理論で説明できない理由は，次のような計算による。一般性を失うことなく $u(\$1000) = 1, u(0)$ と仮定する。このとき，各アクトに対しての期待効用は

$$f_1; p(R) \quad f_2; p(B) \quad f_3; p(R \cup B) \quad f_4; p(B \cup W)$$

である。そのため，$f_1 \succ f_2$ かつ $f_4 \succ f_3$ であるためには $p(R) > p(B)$ かつ $p(R \cup W) > p(B \cup W)$ でなければならないが，$p(R \cup W) = p(R) + p(W) < p(B) + p(W) = p(B \cup W) \Leftrightarrow p(R) < p(B)$ となり矛盾する。

技術的には，ここで問題となっているのは確率測度 p の加法性である。確率測度が持つ加法性を弱め，非加法的な測度を用いることで問題となる選考を説明できないだろうか。これが，ショケ期待効用のアイディアである。集合知関数 $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ が非加法的測度であるとは，$\theta(\emptyset) = 0$ かつ $A \subset B \Rightarrow \theta(A) \leq \theta(B)$ $(A, B \subset \mathcal{A})$ を満たすことである。特に，$\theta(S) = 1$ であるものを非加法的確率測度とよぶ。非加法的測度について，関数 $a : S \to \mathbb{R}$ のショケ積分を以下のように定義する。

$$\int_S a(s)d\theta(s) = \int_{-\infty}^{0} (\theta(\{s | a(s) \geq z\} - \theta(S))dz + \int_0^{\infty} \theta(\{s | a(s) \geq z\})dz.$$

特に，$|a(S)| < \infty$ であるときには取りうる値を $a_1 > \cdots > a_k, a_{k+1} = 0$ とし，対応する事象についての S の分割を $(E_i)_{i=1}^{k} \subset S$ とすると $a = \sum_{i=1}^{k} a_i E_i^*$ と書くことができる。[12] このとき

（11）　任意の $p, q \in \Delta Z$ に対し，p が q に対し確率優位であるとは

$$(\forall x \in X) \qquad \sum_{\{\, i \,|\, x_i \preceq x \,\}} p_i \ \leq \ \sum_{\{\, j \,|\, y_j \preceq x \,\}} q_j$$

を満たすことである。ここで，$p = (x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m)$, $q = (y_1, q_1; \ldots; y_n, q_n)$ とクジを表記する。もし，ある結果 x について厳密な不等式が成り立つならば，p は q に対し厳密に確率優位であるという。

（12）　$E^* : S \to \mathbb{R}$ は集合 $E \subset S$ 上の指示関数である。

$$\int_S a(s)d\theta(s) = \sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i+1})\theta(\cup_{j=1}^{i} E_j),$$

となる。もし θ が加法性を満たせば，これは通常のルベーグ積分と同じである。

Schmeidler（1989）は，Anscombe and Aumann モデルを用いて，公理 12 を次のように弱めた公理を導入した。[13]

公理 16（共単調独立性（Comonotonic independence））．互いに共単調（Comonotonic）であるアクト $f, g, h \in L_0$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して $f \succ g \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)h \succ \lambda g + (1-\lambda)h$.[14]

この公理は，公理 12 とは異なり共単調なアクトの間にしか独立性を要請していない。

定理 5（Schmeidler 1989）．L_0 上の選好 $\succsim$ が公理 10, 11, 13, 14, 16 を満たすことの必要十分条件は $(S, \mathcal{A})$ 上の非加法的確率測度 θ とアフィン関数 $u : Y \to \mathbb{R}$ が存在し

$$f \succsim g \;\Leftrightarrow\; \int_S u(f(s))\, d\theta(s) \geq \int_S u(g(s))\, d\theta(s)$$

を満たすことである。ここで，u は正一次変換について一意である。

先ほども述べた通り，θ が加法性を満たせばショケ積分は通常のルベーグ積分と一致するため，その場合のショケ期待効用は主観的期待効用と一致する。定理 3 と定理 5 を比較するとわかる通り，θ の加法性は選好の独立性の程度に対応する。[15]

ショケ期待効用を用いると，例 2 で観察された選好のパターンが説明可能なものを構成することができる。例えば，次のような非加法的測度を考える。

$$\theta(R) = \frac{1}{3},\ \theta(B) = \theta(W) = \frac{1}{6},$$
$$\theta(R \cup B) = \theta(R \cup W) = \frac{1}{3},\ \theta(B \cup W) = \frac{2}{3},$$
$$\theta(S) = 1.$$

この θ は，$\theta(R) > \theta(B)$ かつ $\theta(R \cup W) < \theta(B \cup W)$ を満たすため，ショケ期待効用を用いると例 2 の選好を説明することができる。

（13） Savage モデルにおけるショケ期待効用については Gilboa（1987）を参照せよ。

（14） $f, g \in L_0$ が共単調であるとは任意の $s, t \in S$ に対し，$f(s) \succ f(t) \Rightarrow g(t) \not\succ g(s)$ が成り立つことである。

（15） 要請する独立性の程度により表現される意思決定者の選好は異なるものになる。詳しくは，Asano and Kojima（2015）を参照せよ。

5　ランク依存型主観的期待効用

前節で紹介した二つの非期待効用理論は，一般には全く異なるクラスの選好であり，そのため説明可能な現象も異なる。先に見たように，確率的に洗練された選好を持つ意思決定者はアレのパラドックスを説明可能であるが，エルズバーグのパラドックスは説明不可能である。一方，ショケ期待効用はエルズバーグのパラドックスを説明することが可能であった。では，この二つの理論から導かれた選好が両立する場合はどんなときであろうか。Nakada and Ozaki（2017）はこの問題をAnscombe and Aumann モデルにおいて考察した。

前節で考えたものとは異なる次のような非加法的測度を考える。

$$\theta'(R) = \frac{1}{3},\ \theta'(B) = \theta'(W) = \frac{1}{6},$$
$$\theta'(R \cup B) = \theta'(R \cup W) = \frac{2}{3},\ \theta'(B \cup W) = \frac{1}{2},$$
$$\theta'(S) = 1.$$

例えば $\theta'(R \cup B) \neq \theta'(R) + \theta'(B)$ であるから θ' は加法性を満たさない。一方，$\theta'(R) > \theta'(B)$ であるが $\theta'(R \cup W) > \theta'(B \cup W)$ であるため，前節で考えた θ とは異なり例 2 の選好を説明することはできない。この例からわかる通り，非加法的測度を用いたとしても必ずしもエルズバーグのパラドックスを説明できるとは限らない。

ここで構成した θ' は次のような特徴を持つ。厳密な増加関数 $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ で $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$ を満たすものを考える。また，確率測度 p として $p(R) = \dfrac{1}{3}, p(B) = p(W) = \dfrac{1}{6}$ を満たすものを考える。すると，適切な γ に対して $\theta'(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ と書ける。

いま，γ は厳密な増加関数であるから，θ' によるショケ期待効用で表現される意思決定者の選好は，確率測度 p を用いた確率的に洗練された選好となる(16)。このような選好は次のように解釈できる。まず，この意思決定者は主観的確率測度として p を持っており，事象の確率的な予想は基本的にはこの p に基づいて行われる。そのため，この確率測度に基づき確率的に洗練されたものとなる。しかし，主観的期待効用での意思決定とは異なり，帰結からの効用 u の重み付けは p そのものではなく γ を介した非加法的測度 $\theta'(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ を用いて行う(17)。

このように，主観的確率を持ちそれを主観的なディストーション関数を用いて非加法的測度に変

（16）前節では，確率的に洗練された選好は Savage モデルにおいて定義したが，適切に読み替えることで Anscombe and Aumann モデルにおいても全く同じように定義される。

（17）このような関数 γ は一般に重み付け関数もしくはディストーション関数とよばれている。

換した上でショケ期待効用に従う意思決定者の選好をランク依存型主観的期待効用とよぶ。

定義 1. L_0 上の選好 $\succsim$ がランク依存型主観的期待効用であるとは，$(S, \mathcal{A})$ 上の非加法的確率測度 θ,
確率測度 p, ディストーション関数 $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ およびアフィン関数 $u : Y \to \mathbb{R}$ が存在し

$$f \succsim g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))\, d\theta(s) \geq \int_S u(g(s))\, d\theta(s),$$

かつ $\theta(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ を満たすことである。

特に，$\gamma(x) = x$ である場合が主観的期待効用である。次の命題が成立する。

命題 1 (Nakada and Ozaki 2017). L_o 上の選好 $\succsim$ がショケ期待効用かつ確率的に洗練された選好であることの必要十分条件は $\succsim$ がランク依存型主観的期待効用であることである。

ショケ期待効用がランク依存型主観的期待効用で表されるのは，対応する非加法的測度 θ がある確率測度 p とディストーション関数を用いて $\theta'(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ と書ける場合であるので，どのような場合にこのような分解が可能であるかという点が重要である。これに関して，次の性質が重要である。非加法的測度 θ が弱加法的（weak additive）であるとは，$E \subset A \cap B, F \subset (A \cup B)^c$ を満たす任意の $A, B, E, F \subset S$ について $\theta((A \backslash E) \cup F) > \theta((B \backslash E) \cup F) \Rightarrow \theta(A) > \theta(B)$ が成り立つことである。

定理 6 (Scott 1964). $\mathcal{A} = 2^S$ とする。凸値である非加法的測度 θ がある確率測度 p とディストーション関数を用いて $\theta'(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ と書けることの必要十分条件は，θ が弱加法的であることである。

ランク依存型主観的期待効用で表されるいくつかの特殊ケースについて紹介する。

例 3 (ε-汚染). 任意の $\varepsilon \in (0,1]$ を一つ固定する。次のような非加法的測度を考える。

$$\theta^{\varepsilon,p}(A) = \begin{cases} (1-\varepsilon)p(A) & (A \neq S), \\ 1 & (A = S). \end{cases}$$

ここで，$p : \mathcal{A} \to [0,1]$ は確率測度である。このような確率測度 $\theta^{\varepsilon,p}$ を ε-汚染とよぶ（Huber 1981; Nishimura and Ozaki 2006; Kojima 2008; Asano and Kojima 2015）。

命題 2 (Nakada and Ozaki 2017). $\theta^{\varepsilon,p}(\cdot) = \gamma(p(\cdot))$ と分解可能である必要十分条件は $p(A) = 1 \Leftrightarrow A = S$ を満たすことである。

簡単にわかる通り $\gamma(x) = (1-\varepsilon)x$ と取ればよい。このとき，$\theta^{\varepsilon,p}$ は特に次のように書ける。

$$\theta^{\varepsilon,p}(A)=\begin{cases}(1-\varepsilon)p(A) & (p(A)\neq 1),\\ 1 & (p(A)=1).\end{cases}$$

例 4（Neo-加法的測度（Neo-additive capacity））．事象の族 $\mathcal{N}$ がナル（Null）であるとは以下の三つの条件を満たすものである:

(i) $\emptyset\in\mathcal{N}$,

(ii) $B\subset A$ を満たすすべての $A,B\subset\mathcal{A}$ に対して，$A\in\mathcal{N}\Rightarrow B\in\mathcal{N}$,

(iii) $A,B\in\mathcal{N}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{N}$.

θ が $\mathcal{N}$ に合致するとは任意の $A\in\mathcal{N}$ に対し $\theta(A)=0$ かつ $\theta(S\setminus A)=1$ を満たすことである。$\mathcal{N}$ に合致する（$\mathcal{N}$-congrudent）確率測度 p と，$\delta\in(0,1]$ および $\alpha\in[0,1]$ について，Neo-加法的な測度 $\theta_{\mathcal{N},p,\delta,\alpha}$（Chateauneuf et al. 2007）を次のように定義する。

$$\theta_{\mathcal{N},p,\delta,\alpha}=(1-\delta)p+\delta\mu_\alpha^{\mathcal{N}}$$

ここで

$$\mu_\alpha^{\mathcal{N}}(A)=\begin{cases}0 & (A\in\mathcal{N}),\\ \alpha & (A\notin\mathcal{N}\ \text{かつ}\ S\setminus A\notin\mathcal{N}),\\ 1 & (S\setminus A\in\mathcal{N}).\end{cases}$$

命題 3（Nakada and Ozaki 2017）．$\theta_{\mathcal{N},p,\delta,\alpha}$ が p について絶対連続であるとする[18]。このとき, $\theta_{\mathcal{N},p,\delta,\alpha}=\gamma(p(\cdot))$ と分解可能である。逆に，$\alpha>0$ であるとき，$\theta_{\mathcal{N},p,\delta,\alpha}=\gamma(p(\cdot))$ と分解可能であるならば p について絶対連続である。

特に，γ として次の関数を取ればよい。

$$\gamma(x)=\begin{cases}0 & (x=0),\\ (1-\delta)x+\delta\alpha & (0<x<1),\\ 1 & \text{if}(x=1).\end{cases}$$

意思決定者の選好が定理 5 で示した公理系に加えて追加的な公理を満たせば，ランク依存型主観的期待効用に対する基礎付けを与えることができる。Nakada and Ozaki（2017）は次の公理を導入

(18) すべての $A\in\mathcal{A}$ について $p(A)=0\Rightarrow A\in\mathcal{N}$ であることと同値である。

した。

公理 17（ランク依存型確率比較（Rank-dependent comparative probability））．あるクジ $\underline{y} \in \Delta(Z)$ が存在し，以下が満たされる：$E \subset A \cup B, F \subset (A \cup B)^c$ を満たす任意の $A, B, E, F \subset S$ と $x \succ \underline{y}$ を満たす $x \in \Delta(Z)$ について

$$\begin{bmatrix} x\ (s \in (A \backslash E) \cup F) \\ \underline{y}\ (s \in S \backslash ((A \backslash E) \cup F)) \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} x\ (s \in (B \backslash E) \cup F) \\ \underline{y}\ (s \in S \backslash ((B \backslash E) \cup F)) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x\ (s \in A) \\ \underline{y}\ (s \in S \backslash A) \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} x\ (s \in B) \\ \underline{y}\ (s \in S \backslash B) \end{bmatrix}.$$

公理の中で記述した $\underline{y} \in Y$ をリファレンスポイントとよぶ。この公理は，意思決定者が各事象に関してどのような予想を持つかについて記述している。あるリファレンスポイントより望ましいクジが得られる事象がほぼ A であり，リファレンスポイントとして用いたクジが得られる事象がほぼ B であるようなアクトを考える。これとは反対に，リファレンスポイントより望ましいクジが得られる事象がほぼ B であり，リファレンスポイントとして用いたクジが得られる事象がほぼ A であるようなアクトを考える。このような二つのアクト同士の比較を行う際，一貫して前者の方がよいとするならば，この意思決定者は主観的に事象 A の方が事象 B より起こりやすいと予想していると考えられる[19]。このような事象に対しての予想の記述は公理 7, 15 と似ているが，公理 17 はこのようにして作られる事象間の順序が非完備である点が異なる[20]。

定理 7（Nakada and Ozaki 2017）．L_0 上の選好 $\succsim$ が公理 10, 11, 13, 14, 16, 17 を満たすことの必要十分条件は，$(S, \mathcal{A})$ 上の確率測度 p とアフィン関数 $u : Y \to \mathbb{R}$ およびディストーション関数 $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ が存在し

$$f \succsim g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))\, d\gamma(p(s)) \geq \int_S u(g(s))\, d\gamma(p(s))$$

を満たすことである。ここで，u は正一次変換を除いて一意である。

---

(19) 実際には，公理の中で記述した集合 E, F は任意であるので，$(A \backslash E) \cup F$ および $(B \backslash E) \cup F$ は A および B とは大きく異なる集合であることもある。ここでの比較で重要であるのは，このような様々な集合上での比較をリファレンスポイントを用いて行い，事象間の比較を行っていることである。

(20) 事象間の順序は $\mathcal{A}$ 上の選好関係と捉えることができる。このような選好関係を質的確率（Qualitative probability）とよぶ。定理 2 および定理 4 の証明では，この質的確率が完備性を満たし，さらにいくつかの性質を満たすことから確率測度 p を導出している。

6　おわりに

不確実性下の意思決定理論は Savage（1954）が公理的基礎付けを与えた主観的期待効用理論を出発点とし，それに対する批判に応えることを目標として進展してきた。本稿ではこれらのうち代表的なものとして，確率的に洗練された選好とショケ期待効用について紹介した。両者は，一般的には異なる意思決定のモデルであり，説明可能な選好のパターンも異なる。一方で，両モデルの性質を満たすような意思決定パターンも存在する。このような意思決定モデルをランク依存型（主観的）期待効用とよび，特にリスク下の意思決定を中心に研究されてきた。最後に，ランク依存型（主観的）期待効用に関しての基礎付けとしての最新の研究である Nakada and Ozaki（2017）による公理化を紹介し，この二つの意思決定モデルを包括的に取り扱った。ここで紹介した非期待効用理論は，近年様々な経済分析に対しても応用されている。このような近年の潮流をまとめた研究書として，Nishimura and Ozaki（2017）を参照されたい。

参　考　文　献

Allais, M. (1953). “Rational man’s behavior in the presence of risk: Critique of the postulates and axioms of the American school,” *Econometrica*, 21, 503–546.

Anscombe, F., and Aumann, R. (1963). “A definition of subjective probability,” *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 199–205.

Asano, T., and Kojima, H. (2015). “An axiomatization of Choquet expected utility with cominimum independence, *Theory and Decision*, 78, 117–139.

Chateauneuf, A., Eichberger, J., and Grant, S. (2007). “Choice under uncertainty with the best and worst in mind: Neo-additive capacities,” *Journal of Economic Theory*, 137, 538–567.

Ellsberg, D. (1961). “Risk, ambiguity and the Savage axioms,” *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643–669.

Gilboa, I. (1985). “Subjective distortions of probabilities and non-additive probabilities,” Foerder Institute for Economic Research, Tel Aviv University.

Gilboa, I. (1987). “Expected utility with purely subjective non-additive probabilities,” *Journal of Mathematical Economics*, 16, 65–88.

Gilboa, I., and Schmeidler, D. (1989). “Maxmin expected utility with non-unique prior,” *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141–153.

Gilboa, I., and Marinacci, M. (2016). “Ambiguity and the Bayesian paradigm,” in *Readings in Formal Epistemology*, Springer International Publishing, 385–439.

Grant, S., and Kajii, A. (2005). “Probabilistically sophisticated multiple priors,” mimeo.

Kojima, H. (2008). “An approach to the Decision Theory under Knightian Uncertainty,” Doctoral dissertation, University of Tokyo.

Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*, Wiley, New York.

Machina, M., and D. Schmeidler (1992). “A more robust definition of subjective probability,” *Econo-*

metrica, 60, 745–780.

Machina, M., and Schmeidler, D. (1995). "Bayes without Bernoulli: Simple conditions for probabilistically sophisticated choice," *Journal of Economic Theory*, 67, 106–128.

Marinacci, M. (2002). "Probabilistic sophistication and multiple priors," *Econometrica*, 70, 755–764.

Nakada, S., and Ozaki, H. (2017). "An axiomatic characterization of rank-dependent subjective expected utility," *Working paper*.

Nishimura, K. G., and Ozaki, H. (2006). "An axiomatic approach to ε-contamination," *Economic Theory*, 27, 333–340.

Nishimura, K. G., and Ozaki, H. (2017). *Economics of Pessimism and Optimism: Theory of Knightian Uncertainty and Its Application*, Springer.

Quiggin, J. (1982). "A theory of anticipated utility," *Journal of Economic Behavior & Organization*, 3, 323–343.

Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

Schmeidler, D. (1989). "Subjective probability and expected utility without additivity," *Econometrica*, 571–587.

Scott, D. (1964). "Linear inequalities and measures on Boolean algebras," (unpublished manuscript).

von Neumann, J., and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

Wakker, P. (1990). "Under stochastic dominance Choquet-expected utility and anticipated utility are identical," *Theory and Decision*, 29, 119–132.

Yaari, M. E. (1987). "The dual theory of choice under risk," *Econometrica*, 55, 95–115.

要旨: 結果の集合が与えられており，それぞれの結果がどのような確率で生じるかを表した確率分布をクジとよぶ。いくつかのクジが与えられており，どのようなクジが望ましいかを選択する問題をリスク下の意思決定とよぶ。これに対し，クジのような客観的な確率分布が与えられていない状況で行う意思決定問題を不確実性下の意思決定とよぶ。本稿では，不確実性下の意思決定理論で代表的な確率的に洗練された選好（Probabilitistic sophistication）とショケ期待効用（Choquet expected utility）について紹介し，両者の接点となるランク依存型主観的期待効用（Rank-dependent subjective expected utility）とよばれるクラスの選好の基礎付けについて考察する。

キーワード: ショケ期待効用，確率的に洗練された選好，主観的ランク依存型期待効用，公理化