Title	ジェラール· ドブリューと滑らかな選好の理論
Sub Title	Gerald Debreu and smooth preferences
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2018
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.110, No.4 (2018. 1) ,p.455(95)- 491(131)
JaLC DOI	10.14991/001.20180101-0095
Abstract	本稿は, ジェラール· ドブリューが1972年にEconometrica誌に載せた論文"SmoothPreferences"の内容を解説することをその目標としている。合わせて, 1976年に出版された訂正論文の解説も行う。これらの論文には消費者理論的に重要な内容が多く含まれているが, ドブリューは証明の細部を埋めておらず, また一部は正しくないことが知られている。これらについてきちんと整理し, わかっていることについてはきちんと理解できる形で提示するのが本稿の目的である。 This paper aims to explain the details of "Smooth Preferences" written by Gerald Debreu, published in Econometrica in 1972, together with its corrigendum published in 1976. Although these papers include many important results on consumer theory, Debreu does not give details for proofs. Moreover, some results are known to be incorrect. This paper clarifies these arguments for better understanding.
Notes	特集 : 経済学の本質としての数学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20180101-0095

「三田学会雑誌」110 巻 4 号（2018 年 1 月）

ジェラール・ドブリューと滑らかな選好の理論

細矢祐誉 *

（初稿受付 2017 年 12 月 13 日，査読を経て掲載決定 2017 年 12 月 27 日）

Gerald Debreu and Smooth Preferences

Yuhki Hosoya *

Abstract: This paper aims to explain the details of “Smooth Preferences” written by Gerald Debreu, published in *Econometrica* in 1972, together with its corrigendum published in 1976. Although these papers include many important results on consumer theory, Debreu does not give details for proofs. Moreover, some results are known to be incorrect. This paper clarifies these arguments for better understanding.

Key words: integrability theory, regular economy, smooth preference, Jacobi’s condition, demand function, Gaussian curvature

JEL Classifications: C65, D11

* 関東学院大学経済学部
College of Economics, Kanto Gakuin University
hosoya@kanto-gakuin.ac.jp

1　序論

1972年にジェラール・ドブリューがEconometrica誌に掲載した“Smooth Preferences”は非常に著名な論文であるが，同時に悪名高い論文でもある。この論文はどれほどよく評価しようとしたとしても乱暴に書かれていると言わざるを得ず，悪く言うと理解できない。しかも1976年に訂正記事“Smooth Preferences: a Corrigendum”が掲載されていて，それによるとどうやらこの論文は間違っているらしい。さらにその訂正記事の内容も理解が難しく，実のところどの推論が間違っていたのか，よくわからない。筆者は2005年にこの論文と出会い，それからずっと格闘し続けているが，未だにすべてを理解できたとは言えない状況である。

本稿はこの論文について，その内容の中でこの論文の主張と言える部分を三つに分けた。そして，その分けた三つの主張について，それぞれ詳細な解説をつけることにした。読者諸氏は本稿を読むことで，ドブリューが消費者理論において成した正確な貢献が理解できるようになり，また正しさに疑問がある部分については，さらなる議論を重ねることができるようになる。場合によっては，そこから新しい論文が生まれることもあるだろう。実際，Hosoya（2013）はそうして生まれた論文のひとつである。

三つの主張はそれぞれ，独立して証明することができる。第一は効用関数から需要関数への主張であり，二階連続微分可能で正則な効用関数が与えられたとき，対応する需要関数が連続微分可能になるための必要十分条件はなにか，という問題を扱っている。第二は選好関係から効用関数への主張であり，選好関係が二階連続微分可能で正則な効用関数で表現されるための必要十分条件はなにか，という問題を扱っている。第三は全微分方程式についての主張であり，ベクトル場がどのような条件を満たしていれば大域的な全微分方程式の解があるか，という問題を扱っている。第三の問題だけ他と毛色が違うように見えるのは，この問題が元々，第二の問題を解くために使われたものだったからである。しかし現代では，第二の問題を直接証明する方法が開発されており，第三の問題はこの議論については不要になっている。それ以上に，第三の問題についてのドブリューの議論にはわからないことが多いため，独立して取り扱う必要がある。“Smooth Preferences”で扱われている問題は多岐に渡るが，この論文で初めて生み出された主張は，以上の三つだけである。

以下，本稿の構成を述べる。まず，2節で我々は，この論文が生み出された背景について述べる。なぜこのような研究をドブリューが行ったのか，ということについて触れ，経済学の大きな潮流の中でのこの論文の位置づけを理解できるようにするのである。この節はあまり数学的なことがわからなくても読めるようにしてある。

3節では，第一の主張を取り上げる。併せて，この節において我々は，効用関数，需要関数といった用語について厳密な定義を与える。この節は，論文全体の中では比較的理解が容易な箇所である。

必要な知識は初等的な微分についての議論と，行列式の性質についての議論のみである。また，主要な定理の証明は補論で行う。

4 節では，第二の主張を取り上げる。併せて，選好関係という用語についての定義を与える。ドブリューが与えた二階連続微分可能な効用関数の存在の条件は微分位相幾何学の用語で書かれているため，主張を理解するためには少なくとも「多様体」という名前で呼ばれている用語を理解しなければならない。その意味でこの節は前の節よりも難しい。主要な定理の証明はやはり補論で行うが，この証明は前の節よりずっと，難易度が高い。

5 節では，第三の主張を取り上げる。ここは最も理解が困難な場所である。主張の是非について完全に本稿で解決することは紙数の関係で不可能なので，ここではイメージを理解するための説明に終始した。この部分の主張を部分的にとはいえ解決した論文が Hosoya（2013）であるが，ドブリュー自身がどうやって解決しようとしたのかは筆者には未だわかっていない。

6 節は結語であり，本稿ではまだ扱っていない未解決問題をいくつか挙げている。

2　研究の背景

Arrow, Block, and Hurwicz（1959）はいわゆるワルラス型価格調整過程について分析を行い，均衡価格がこの過程において大域安定になるための十分条件を求めた。この論文は次の二点で価値を持つ。第一に，均衡価格がワルラス過程において大域安定であることは，均衡を通じて経済を分析する大きな理論的根拠を与える。実際，通俗的によく言われる「価格が高すぎると需要が減って供給が増えるので市場に物が大きく売れ残り，結果として価格は下がる。逆に低すぎると需要が高すぎて市場から物がなくなり，稀少価値から価格が上がる。よって結局価格は，需要と供給が釣り合うちょうどいい値になる」といった説明は，均衡が経済の長期的実現点であると見なせるためのひとつの理論的根拠であるが，これを数学的に表現したのがまさにワルラス型価格調整過程の大域安定性なのである。よって，アローたちは上の文章が一般均衡モデルにおいて正しくあるための条件を導出したと言える。

もうひとつの，負けず劣らず重要な価値は次の事実である。実は，均衡価格がワルラス過程において大域安定であるならば，均衡価格はひとつしかないことが示せるのである。これは一般均衡モデルにおいて均衡が複数ある状況を排除することを可能にしてくれ，モデルの予測可能性を大きく引き上げてくれることになる。

ところが，問題なのはアローたちが提唱した十分条件だった。これは，超過需要関数についての粗代替性という条件であった。この条件は顕示選好の弱公準と言われる性質と密接に関係しており，つまり，経済全体が一個人としての合理性をある程度持つという，いわゆる代表的経済主体の仮定にかなり近い性質を持っていたのである。

ちょうど，未だサミュエルソンによるミクロ経済学とマクロ経済学の統合，いわゆる新古典派総合の気風が意気軒昂であった時代である。まだ多くの経済学者が，代表的経済主体のような仮定をミクロ理論的に強く正当化しうるという考えを持っていたことは，想像に難くない。しかし一方で，それが難しいと感じている人間も当然ながら少なからずいた。彼らが特に問題にしたのは，このような経済の合成を可能にするための，経済についてのプリミティブかつ妥当な仮定が，一向に見つからないという事実であった。

超過需要関数はその定義上，よりプリミティブな経済モデルから計算によって「導出」されるものである。この「導出されるもの」の形状に仮定を置くことが，経済モデル自体にどんな仮定を置いていることになるのかは，不明瞭であった。そこを明確にできればよかったのだが，この問題はとても難しく，アローたちをはじめとして誰も「経済モデルについてのプリミティブな仮定で，十分に妥当で，かつ超過需要関数の粗代替性を保証できる条件」を，見つけられなかったのである。この結果，当時の理論経済学会は大きく二分されることになる。片方のグループが超過需要関数の粗代替性を受け入れ，もう片方はそれを拒絶した。

この論争は 1974 年に，まさにドブリューがとどめを刺す形で幕引きされることになる。いわゆるソンネンシャイン = マンテル = ドブリューの定理の完全な証明が発表されたのである（Debreu (1974)）。この定理はおおざっぱに言うと，基本単体上でワルラス法則を満たすほとんどどんな連続関数もなにかの経済の超過需要関数となりうることを示している。ウリゾーンの補題により，基本単体上のどんなコンパクト集合もなんらかの連続関数の零点集合になっていることが示せるので，これは一般論として均衡の一意性を述べることが絶望的であることを意味していた。これによって粗代替性を受け入れる派の経済学者は激減し，同時に，代表的経済主体の仮定をミクロ的に正当化することの不可能性も示され，ミクロ理論とマクロ理論の統合を目指す思想は，理論的には終焉を迎えることになる。

さかのぼって 1970 年に戻ろう。ドブリューはこの頃にはすでに，均衡の一意性を保証する仮定は強すぎて受け入れがたい，という感想を持っていたようである。実際，“Smooth Preferences” には，一意性を保証する仮定は “exceedingly strong” である，と書かれている。そこで彼は，均衡がせめて「有限」，それも「局所的にはひとつ」であるような経済の条件を見つけることができないか，と考えた。彼のアイデアは極めて斬新であった——というのも，経済を人々の初期保有によって変動するものと捉え，その初期保有について「ほとんどすべての」場合には，均衡が有限個であり，さらにそれが初期保有の微細な変動によって滑らかに変移することを示した（Debreu (1970)）のである。ここで言う「ほとんどすべての」というのはもちろん口語的な意味ではなく，積分論的な「そうならない初期保有の集合の体積がゼロ」という意味である。厳密に言えばドブリューは，それに加えてその集合が閉集合である，したがって “nowhere dense” という性質を持つことまで示している。というわけで，均衡というのはひとつではないかもしれないが，普通はせいぜい有限個しかな

いし，それらは初期保有の計算を少し間違えても大差ないことがわかったのである。[1]

ところがここでまた問題が生ずる。ドブリューはこの論文で，証明に「サードの定理」という定理を用いた。このサードの定理は，扱われる関数の微分可能性に強く依存していることがわかっている（ミルナー（2012）を参照）。したがって彼は，需要関数に微分可能性を仮定せざるを得なかった。しかしこの二年前，カッツナーが極めて普通の効用関数から，微分できない需要関数が導出されることを示してしまっていた（Katzner（1968））。そこでドブリューは，自説の擁護のために，需要関数が微分可能になるための消費者の好みの条件を，導出せざるを得なかったのである。

以上が，この "Smooth Preferences" が出版されるまでの経緯である。ドブリューがやりたかったことは次の文に集約されている：需要関数が微分可能になるような消費者の好みとはなにか？　この論文は，その問題を解決するために書かれたのであった。

3　第一の主張：効用関数から需要関数へ

本節では，ドブリューの "Smooth Preferences" で述べられた主張のうち，効用関数の仮定から微分可能な需要関数を導出するための議論について解説する。ここで使われる技術はすべて通常の微分についてのものに限られるので，本節を読む数学的難易度はさほど高くないと言える。

3.1　消費者理論の基礎

まず，消費者理論の基本を思い出そう。消費者の行動を表すモデルは以下の最大化問題で表現される。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega, \\ & p \cdot x \le m. \end{aligned} \tag{1}$$

この問題を**効用最大化問題**（utility maximization problem）と呼ぶ。$x \in \Omega$ は**消費計画**（consumption plan）と呼ばれ，その第 i 座標 x_i は，i 番目に数えられる財の消費量を表している。Ω は**消費集合**（consumption set）と呼ばれ，ありうる消費計画の全体を表している。これは n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合であることが，通常仮定される。$u : \Omega \to \mathbb{R}$ は消費計画 x に対してその望ましさの度合いを表す数値を返す関数であり，**効用関数**（utility function）と呼ばれる。p は**価格ベクトル**（price vector），m は**所得**（income）をそれぞれ表している。p と m は通常，正であることがあらか

（1）　この性質は，計量的に均衡を計算しようとしたときに，初期保有の観測誤差が小さければ均衡の観測誤差も小さいという，無視できない意味合いを持っている。

じめ仮定されている。

与えられた価格 p と所得 m の下でこの問題に解がただひとつ存在するとき，その解を $f(p,m)$ と書くことにする。この関数 f を，効用関数 u に対応する**需要関数**（demand function）と呼ぶ。

と，ここまで用語の定義を与えてきたが，ここでひとつ問題が生じる。上の問題(1)に解がただひとつ存在するという状況は，果たしてどれほど一般的なのだろうか？

まず，教科書的な普通の消費者理論では，Ω は**非負象限** $\mathbb{R}^n_+$，つまり，すべての座標において 0 以上であるベクトルの集合であると仮定される。この場合，問題(1)に解がただひとつ存在するための条件としてよく知られているのが，u の**狭義準凹性**（strict quasi-concavity）である。u が狭義準凹であるとは，$x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in \Omega$ と $0 < t < 1$ を満たす任意の t に対して，

$$u((1-t)x+ty) > \min\{u(x), u(y)\}$$

であることを言う。これを少し弱めて，$x, y \in \Omega$ かつ $0 \le t \le 1$ であるときに

$$u((1-t)x+ty) \ge \min\{u(x), u(y)\}$$

という条件に変えた場合，この条件を満たす u は**準凹**（quasi-concave）であると言う。

Ω が $\mathbb{R}^n_+$ で u が連続かつ狭義準凹であるならば，任意の正の価格ベクトル p と正の所得 m に対して，問題(1)にはただひとつの解が存在する。この証明の概略は難しくないので，ここに書いてしまおう。まず，制約条件を満たす x の集合

$$\Delta(p,m) = \{x \in \mathbb{R}^n | x \ge 0, p \cdot x \le m\}$$

は，容易にコンパクトであることが示せるため，この上で連続関数 u は必ず最大点を持つ。したがって解は少なくともひとつは存在する。その点を x^* として，$x \neq x^*$ となる $x \in \Delta(p,m)$ をひとつ取ってこよう。そして，$y = \frac{1}{2}(x+x^*)$ とする。このとき，仮定から $p \cdot x \le m, p \cdot x^* \le m$ なので，

$$p \cdot y = \frac{1}{2}(p \cdot x + p \cdot x^*) \le \frac{1}{2}(m+m) = m$$

となる。明らかに $y \ge 0$ なので，$y \in \Delta(p,m)$ がわかる。x^* は問題(1)の解なので $u(x^*) \ge u(y)$ かつ $u(x^*) \ge u(x)$ である。一方，$t = \frac{1}{2}$ として上の狭義準凹性の式に当てはめると，

$$u(y) > \min\{u(x^*), u(x)\} = u(x)$$

であることがわかり，これと $u(x^*) \ge u(y)$ をつなげて $u(x^*) > u(x)$ を得る。x は x^* と異なる $\Delta(p,m)$ 上の任意の点だったから，これは x^* と同じ u の値を持つ点が $\Delta(p,m)$ 内には x^* 以外にひとつもないことを意味する。したがって解は x^* ただひとつである。以上で証明が完成した。

ところが，この結果は実はドブリューには使えなかった。というのは，$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ とすると，この集

合が開集合でないため，f の微分可能性を出すことがものすごく難しくなってしまうのである。これを避けるために，ドブリューは Ω として**正象限** $\mathbb{R}^n_{++}$，つまりすべての座標において厳密に 0 より大きいベクトルの集合を考えることにした。しかしその結果，需要関数 f がきちんと存在しているための，上の結果を使えなくなってしまった。

幸いにして，上の定理の中で $\Omega=\mathbb{R}^n_+$ であることが必要なのは，$\Delta(p,m)$ がコンパクトであり，したがって x^* が存在する，という論証のところだけである。だからここさえ諦めれば，残りは $\Omega=\mathbb{R}^n_{++}$ であっても問題なく結果は成り立つ。しかしそうすると，(p,m) の取り方によっては問題(1)に解が存在しないかもしれない。これを避けるためによく使われるのは，u の**上部等高線集合**（upper contour set），つまり

$$U(x)=\{y\in\Omega|u(y)\ge u(x)\}$$

という集合が，$\mathbb{R}^n$ の位相において閉集合である，という仮定である[(2)]。ドブリューもこれを仮定している[(3)]。以下，この仮定を**端点禁止条件**と呼ぼう。

この仮定を置くとなぜ問題が解決するのかを見てみよう。まず，$x,y\in\mathbb{R}^n$ として，x がすべての座標で y よりも大きくなるとき，$x\gg y$ と書くと約束しよう。$\Omega=\mathbb{R}^n_{++}$ の場合，制約条件を満たす x の集合は

$$\Delta(p,m)=\{x\in\mathbb{R}^n|x\gg 0,p\cdot x\le m\}$$

と定義される。いま $x\in\Delta(p,m)$ をひとつ取り，$U(x)\cap\Delta(p,m)$ という集合を見よう。$\Delta(p,m)$ は

$$\tilde{\Delta}(p,m)=\{x\in\mathbb{R}^n|x\ge 0,\ p\cdot x\le m\}$$

の部分集合であるが，$\tilde{\Delta}(p,m)$ はコンパクト集合である。そして $U(x)$ は $\mathbb{R}^n$ の位相で閉だったので，

$$U(x)\cap\tilde{\Delta}(p,m)$$

は $\mathbb{R}^n$ の位相で閉であり，しかもコンパクト集合の部分集合なのだから，コンパクトである。ところが，$U(x)\subset\mathbb{R}^n_{++}$ なので，実は

$$U(x)\cap\tilde{\Delta}(p,m)=U(x)\cap\Delta(p,m)$$

---

(2)　u が連続であれば，

$$U(x)=u^{-1}([u(x),+\infty[)$$

なので，閉集合なのは当たり前だと読者は思われるかもしれない。しかし，u の定義域は Ω なので，あくまで「Ω の相対位相において」閉集合であることまでしか，一般論としては言えない。

(3)　他のやり方として，そもそもすべての (p,m) に対して $f(p,m)$ が定義されていることを諦める，というやり方もあるが，そうすると以下の議論の難易度がかなり高くなる。

が言える。よって $U(x)\cap\Delta(p,m)$ もコンパクトであり，したがって連続関数 u はこの集合上で最大になる点を持つ。ところが，これは $\Delta(p,m)$ 上全体での u の最大点である――なぜなら，$\Delta(p,m)$ の点で $U(x)$ に含まれていない点 y は常に $u(x)>u(y)$ を満たすため，絶対に上の最大点よりは低い値しか取らないからである。こうして問題は解決し，$f(p,m)$ はきちんとすべての価格と所得に対して定義された関数になる。

もうひとつ，よく使われるのが，u が増加的であるという仮定である。u が増加的であるとは，$x\gg y$ のときには必ず $u(x)>u(y)$ になる，という性質を意味している。この性質が成り立っているならば，問題(1)の解は必ず $p\cdot x=m$ を満たすことが，容易に証明できる。言い換えると，

$$p\cdot f(p,m)=m$$

という仮定が成り立つということである。この式は**ワルラス法則**（Walras' law）と呼ばれている。

なお，仮定なしで出せる性質として，f の **0 次同次性**（homogeneity of degree zero）という性質がある。つまり，$\lambda>0$ であるとき，$f(\lambda p,\lambda m)=f(p,m)$ が常に成り立つ。これは，$\Delta(\lambda p,\lambda m)=\Delta(p,m)$ となることを考えれば，むしろ当たり前であろう。この性質は後によく用いる。

3.2　縁付きヘッセ行列の符号条件

この文脈を語る上で外せないのが，縁付きヘッセ行列の符号条件と呼ばれる条件である。この条件は行列式で記述する方法と二次形式で記述する方法があるが，今回は後者を採用したい。ふたつの条件の関係は Debreu（1952）を確認するとよい。

いま，開凸集合 Ω 上で定義された関数 u が二階連続微分可能であるとする。このとき，u が**縁付きヘッセ行列の符号条件**（bordered Hessian condition）を満たすとは，次の関係

$$v\cdot Du(x)=0\Rightarrow v^TD^2u(x)v\le 0 \tag{2}$$

が任意の $x\in\Omega$ と $v\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つことを言う。ここで $Du(x)$ は第 i 座標に $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ が入っているベクトルであり，$D^2u(x)$ は (i,j)-要素が $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}(x)$ であるような行列である。また，(2)式を強めて，任意の $x\in\Omega$ と任意の $v\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$v\cdot Du(x)=0,\ v\neq 0\Rightarrow v^TD^2u(x)v<0 \tag{3}$$

が成り立つ，という条件を，**強い縁付きヘッセ行列の符号条件**（strict bordered Hessian condition）と呼ぶ。

よく経済数学の教科書には，(3)式が成り立てば u は狭義準凹であることと，u が準凹であれば(2)式が成り立つことが書かれている。(2)式が成り立てば u は準凹か，というと，これには一変数関数の中にすら，$u(x)=x^4$ という極めてシンプルな反例がある[(4)]。一方で，$Du(x)\neq 0$ という条件が常に

成り立つような u を**正則**（regular）と言うが，Otani（1983）は，u が開凸集合上で定義された二階連続微分可能で正則な実数値関数であるとき，(2)式と準凹性が同値であることを示している[(5)]。一方で，狭義準凹で(3)式を満たさない関数としては，有名なカッツナーの反例 $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ が知られている。

ドブリューの “Smooth Preferences” における最も重要な貢献のひとつは，次の結果である。

定理 1：$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ で，u が二階連続微分可能で増加的，正則，狭義準凹な効用関数で端点禁止条件を満たしているとし，f が u に対応する需要関数であるとする。このとき，f が連続微分可能であるための必要十分条件は，u が常に(3)式を満たすことである。

3.3　ガウス曲率

定理 1 の結果はまた，べつの文脈で捉えることができる。いま，関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n_{++}$ を，$x \in \Omega$ に対して，$x = f(g(x), g(x) \cdot x)$ を満たすような価格 $g(x)$ を与える関数と考えよう。このような関数を**逆需要関数**（inverse demand function）と呼ぶ。

定理 1 の仮定の下で，微分可能な逆需要関数が存在することは，それほど難しくなく確認できる。実際，まず任意の $x^* \in \Omega$ を取って固定しよう。u が増加的かつ狭義準凹であることから，その上部等高線集合

$$\{x \in \Omega | u(x) \geq u(x^*)\}$$

は x^* を端点に持つ凸集合であり，よって接超平面定理（supporting hyperplane theorem）から，ある $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を法とした x^* を通る接超平面を持つ。$p \gg 0$ か $0 \gg p$ のどちらかであることは簡単に示せるが，p が条件を満たせば $-p$ も条件を満たすから，$p \gg 0$ を仮定してよい。そして $m = p \cdot x^*$ とすれば，接超平面の定義から，

$$u(x) \geq u(x^*) \Rightarrow p \cdot x \geq p \cdot x^* = m$$

であることがわかる。すると，対偶を取れば

$$p \cdot x < m \Rightarrow u(x) < u(x^*)$$

であり，u の連続性から

（4）　にもかかわらず，Mas-Colell, Whinston, and Green（1995）の数学付録には(2)式と同値な条件が準凹性の必要十分条件として紹介されている。これは間違いであるので注意されたい。

（5）　これを少し拡張した結果が Hosoya（2014）である。

$$p \cdot x \leq m \Rightarrow u(x) \leq u(x^*)$$

を得る。よって，x^* は少なくともこの (p, m) に対する問題(1)の解であることがわかる。

次に，ラグランジュ未定乗数法の原理から，定理 1 の仮定の下で x^* が問題(1)の解であるならば，次の関係を満たす $\lambda^* > 0$ が存在することがわかる[(6)]：

$$Du(x^*) = \lambda^* p.$$

そこで $x^* = f(p, m)$ から，$g(x^*) = Du(x^*)$ と定義することで，f の 0 次同次性から

$$f(g(x^*), g(x^*) \cdot x^*) = f(\lambda^* p, \lambda^* p \cdot x^*) = f(p, p \cdot x^*) = f(p, m) = x^*$$

となって，この g が連続微分可能な逆需要関数であることがわかる。

ここで，$\|g(x)\| \equiv 1$ となるような，連続微分可能な逆需要関数 g をひとつ取る[(7)]。これに対して，

$$c = -\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) & g_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) & g_n(x) \\ g_1(x) & \ldots & g_n(x) & 0 \end{vmatrix}$$

を，x を通る無差別超曲面の**ガウス曲率**（Gaussian curvature）と呼ぶ[(8)]。すると次が成り立つ。

定理 2：定理 1 と同じ仮定の下で，需要関数が連続微分可能であることは，$c \neq 0$ が常に成り立つことと同値である。

これらの定理の証明は補論で行う。この結果はドブリューが “Smooth Preferences” で出した結果の中で最も鮮やかなものである。つまり，需要関数の微分可能性は，効用関数が(3)式を満たすことと同値であること，またさらに言えば，ガウス曲率という微分幾何の概念を用いて，無差別超曲面がきちんと曲がっていることと同値であることがわかったのである。

3.4　証明のアイデア

正式な証明は補論で行うのだが，アイデアだけをここでは簡潔に示しておこう。まず Katzner

---

(6)　なお，ここからただちに，定理 1 の仮定の下では $Du(x) \gg 0$ が常に成り立つことがわかる。この結果は，後で定理 1 と定理 2 の証明で用いる。

(7)　たとえば，$g(x) = \frac{1}{\|Du(x)\|} Du(x)$ と定義すればよい。

(8)　この言葉遣いの正当性については補論で議論する。

（1968）に書かれている，効用関数が二階連続微分可能，正則，狭義準凹で端点禁止条件を満たすにも関わらず，需要関数が微分可能にならない例を見てみよう。すでに書いたように，その例は $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ である。カッツナーは，この u に対する需要関数を計算しているのだが，そこには $|p_1 - p_2|$ の三乗根に相当するものが出てくる。三乗根なのだから，0 のところでは微分が $+\infty$ に発散していて，結果として $p_1 = p_2$ となるところで微分できない――これが，カッツナーの反例の本質である。つまり，微分できない理由は，微分の速度が $+\infty$ に発散しているからなのである。

カッツナーは，上の定理 1 のうち「十分性」，つまり(3)式が成り立てば需要関数が微分可能であるところまでは示していた。だが(3)式が成り立たなければ需要関数が微分可能にならないことは，例を示しただけである。ドブリューはこれをさらに推し進めた。彼が考えたのは需要関数ではなく，問題(1)の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & p \cdot y \\ \text{subject to.} \quad & y \in \Omega, \\ & u(y) \geq \bar{u} \end{aligned} \tag{4}$$

の解 $h(p, \bar{u})$（これを**補償需要関数**（compensated demand function）と呼ぶ）である。一般に，f よりも h のほうが p についての微分の性質を考えやすいと言われているが，これは h_i の p_j についての偏微分が，いわゆる**スルツキー行列**（Slutsky matrix）の (i, j)-成分に対応しているからである。ドブリューの考え方は以下の通りであった。基本的に上の問題の解は $u(y) = \bar{u}$ となるところに出てくる。したがって $\bar{u} = u(x)$ のとき，$h(p, \bar{u})$ は p が動くにつれて x を通る無差別超曲面上を動く。ラグランジュの条件から，$h(p, \bar{u})$ は無差別超曲面が p を法線ベクトルとする超平面と接しているような点になることがわかる。ここで無差別超曲面の曲がり方がひどくゆるやかであるときを考えれば，逆に p がほんのちょっと動いただけで，それを法線ベクトルとする超平面と無差別超曲面が接するところは，かなり離れてしまう。つまり，h がすごいスピードで動いてしまうのである。

ドブリューは，この「h がすごいスピードで動いてしまう」ことこそが，カッツナーの反例で本質的に起こっていることだと判断したのである。そこで，それを禁止するために，無差別超曲面が「ちゃんと曲がっている」という仮定，つまり「ガウス曲率が 0 でない」という仮定を持ち出してみた。すると，h が微分できるようになり，それと連動して f も微分できるようになったのである。

なお，ガウス曲率が 0 だとどうやっても h は微分可能にならない。上の定理 1 が「必要十分」なのは，この事実に由来する。

4　第二の主張：選好関係から効用関数へ

ドブリューの論文のうち正しい主張の第二は，選好関係と効用関数に関係するものである。いま，Ω を消費集合とする。Ω^2 の部分集合 $\succsim$ は，次のふたつの性質：

- **完備性**（completeness）。すべての $x, y \in \Omega$ について $(x, y) \in \succsim$ と $(y, x) \in \succsim$ の少なくとも一方は成り立つこと。
- **推移性**（transitivity）。$(x, y) \in \succsim$ かつ $(y, z) \in \succsim$ であれば $(x, z) \in \succsim$ であること。

を満たすとき，**弱順序**（weak order）と呼ばれる。順序であることを強調するために，$(x, y) \in \succsim$ を $x \succsim y$ と記述することがほとんどである。一方で，$(x, y) \notin \succsim$ は $x \not\succsim y$ と書かれる。$x \succsim y$ かつ $y \succsim x$ であることは $x \sim y$ と，$x \succsim y$ かつ $y \not\succsim x$ であることは $x \succ y$ と略記される。

ミクロ経済学において消費者の好みは，だいたいの場合には，弱順序で表現されると考えるのが普通である。そこで $\succsim$ が消費者の好みを表していると解釈されるとき，それは**選好関係**（preference relation）と呼ばれる。選好関係と効用関数には密接な関係がある。いま効用関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられているとしよう。このとき，

$$\succsim = \{(x, y) | u(x) \geq u(y)\}$$

と定義すれば，これが弱順序になることは簡単に証明できる。したがって効用関数をひとつ与えることは，選好関係をひとつ与えることにつながる。逆に選好関係 $\succsim$ をひとつ与えたとき，もしある実数値関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

が成り立っているならば，この u は選好関係 $\succsim$ を**表現する**（represent）効用関数と呼ぶ。

与えられた選好関係は常に効用関数による表現を持つだろうか？　この予想は正しくない。Kreps（1988）に反例があるので参照されたい。一方で，Debreu（1954）は選好関係が**連続**（continuous），つまり Ω^2 の相対位相について閉集合であるときには，必ず連続な効用関数でその選好関係を表現するものが存在することを示している[(9)]。ドブリューはこれを推し進めて，効用関数が微分可能になるための選好関係の条件を述べようとしたのである。が，その条件を述べるためには，数学的な準備をしなければならない。

（9）　本稿では Ω は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であると仮定してあるので問題ないが，一般の場合には，Ω に第二可算公理が必要である。丸山（1980）の第二章が詳しいので参照されたい。

4.1　微分可能多様体

ドブリューの結果を理解するには，微分可能多様体についての知識が不可欠である。ただし，一般の微分可能多様体ではなく，ユークリッド空間上の正規部分多様体だけを考えれば十分である。そしてそれは，一般的な理論（たとえば松本（1988））を知らなくても，比較的簡単に議論できることがわかっている。本稿における多様体の知識は Guillemin and Pollack（1974）に大部分を依拠しているが，これと一般論の関係は Hosoya（2015）がわかりやすい[(10)]。

微分は，基本的には開集合上で定義された関数について考える。その場合には，関数が C^k 級であるとは，単にすべての k 次の偏導関数が定義できて連続であることを意味する用語である。しかしこの用語は，開集合上で定義されない関数についても定義を拡張することができる。いま，X を $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合としよう。$f : X \to \mathbb{R}^\ell$ について，$x \in X$ の $\mathbb{R}^n$ における近傍 U 上で定義された関数 $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ が f の x 周辺における**局所拡張**（local extension）であるとは，$y \in X \cap U$ である限り $F(y) = f(y)$ が必ず成り立つことを言う。f が C^k 級であるとは，X の任意の点 x において，その周辺における C^k 級の局所拡張が存在することを言う。

次に何次元かのユークリッド空間の部分集合 X と，同じく何次元かのユークリッド空間の部分集合 Y を考える。このふたつの集合が含まれるユークリッド空間は異なっていてよい。ここでもし，ある $\phi : X \to Y$ が存在して，ϕ は全射かつ一対一で，ϕ も ϕ^{-1} も共に C^k 級であるとき，X と Y は C^k **級微分同相**（diffeomorphic）であると言う。対応する ϕ は**微分同相写像**（diffeomorphism）と呼ぶ。

さて，$X \subset \mathbb{R}^N$ を考える。この中の任意の点 $x \in X$ に対して，その X の相対位相での開近傍 V と，$U \subset \mathbb{R}^k$ が存在して，このふたつが C^ℓ 級微分同相であるとき，X は C^ℓ **級 k 次元微分可能多様体**（differential manifold）と呼ばれる。このとき対応する微分同相写像 $\phi : U \to V$ は x のまわりの**助変数化**（parametrization）と呼ばれる。

多様体論についてはこの後もいろいろと使うところがあるが，さしあたりドブリューの第二の主張を理解するためには，ここまでで十分である。

4.2　滑らかな選好

さて，消費者理論に戻ろう。いま，$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ とし，連続かつ単調（これは，$x \gg y$ ならば $x \succ y$ という意味である）な選好関係 $\succsim$ が与えられているとする。このとき，$x \sim y$ という記号の定義はすでに述べたが，これを Ω^2 の部分集合であると新しく解釈する。つまり，

（10）　参考文献一覧にはこの論文の掲載誌が Keizaikei とあるが，この雑誌『経済系』は関東学院大学経済学部の紀要である。なお，雑誌名は日本語であるが，論文としては和文・英文どちらも受け付けている雑誌であり，この論文も英語で書かれている。

$$\sim = \{(x,y) \in \Omega^2 | (x,y) \in \succsim \text{ and } (y,x) \in \succsim\}$$

として新しい集合を定義する。この集合 $\sim$ が $(2n-1)$ 次元の C^k 級微分可能多様体であるとき，$\succsim$ は C^k 級であると言うことにする。

ドブリューの二番目の貢献は，この C^k 級の選好関係に関係するものである。

定理 3：$\succsim$ は連続かつ単調な選好関係であるとする。このとき，$\succsim$ を表現する C^k 級の正則な効用関数が存在するための必要十分条件は，それが C^k 級であることである。

この証明も補論に回す。ただし，これはドブリューの証明をそのまま追うことができない。次の節で扱っている議論を経由していかなければならないからだが，実際には別証明があって，その議論は不要である。この証明はムーランによって与えられたという記述が Mas-Colell（1977）にあったが，筆者はマスコレルの論文の参考文献表にあるムーランの書籍（らしきもの）を，とうとう見つけることができなかった。なお，Bridges and Mehta（1995）には，この定理から単調性の仮定を取り除いた結果が与えられているようだが，筆者は未読である。[11]

とはいえ，これで完成である。現代のミクロ理論において，消費者の最もプリミティブな構成要素は選好関係であると見なされる。したがって，選好関係がどのような性質を持っていれば需要関数が連続微分可能になるか，というのが，最も関心の集まるところだった。ドブリューはこれを解決した。定理 1 が，効用関数から需要関数へとつなげるものであり，定理 3 が，選好関係と効用関数をつなげてくれる。よって，ドブリュー自身の証明が正しかったかという点はさておき，ドブリューがやろうとしたこと自体は，完結したことになる。

5　第三の主張：積分可能な逆需要関数

最後に，ドブリューが示したうちで，筆者にとって最も解読困難であった主張について述べよう。この主張は元々，定理 3 を証明する途中のロジックでドブリューが用いていたものであった。ドブリューはそもそも，次の 3 つの概念の同値性を証明しようとしていたのである：

1）　C^2 級で単調な選好関係。

2）　C^1 級で，常に $g(x) \gneq 0$ を満たす逆需要関数。

（11）　ざっと確認した限りでは，単調性を仮定しない代わりに，任意の $x \in \Omega$ に対して，x と無差別な点の作る集合 $\sim_x$ が連結であることを仮定するようである。なお，単調性があると，そこから $\sim_x$ が弧状連結であることを証明することができるし，本稿の定理 3 の証明にもそのステップが存在する。B.2 節を参照。

3）　C^2 級で，常に $Du(x) \gneq 0$ を満たす効用関数。

この 3 つが「同値」だという言葉の意味がどういう意味であるかについては，深く踏み込まない。ふんわりと考えると，3）から 1）を示すのには微分位相幾何学にほぼ直接使える定理がある。一方で，1）から 2）は面倒ではあるが，逆関数定理の応用を少し考えるだけで解決する。よって，問題となっているのは 2）から 3）への議論であった。これについてのドブリューの議論を，少しずつ追っていこう。

5.1　全微分方程式とフロベニウスの定理

また用語をいくつか追加しなければならない。まず，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω 上で定義された連続微分可能な関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を考えよう。ただし，すべての $x \in \Omega$ について $g(x) \neq 0$ であると仮定する。このような関数は**ベクトル場**（vector field）とも呼ばれる。この g に対して，与えられた点 x^* の開近傍 U において，

$$Du(x) = \lambda(x)g(x) \tag{5}$$

を常に満たす連続微分可能な関数 $u : U \to \mathbb{R}$ と，至るところ正の連続関数 $\lambda : U \to \mathbb{R}$ が存在するとき，この g は x^* のまわりで**積分可能**（integrable）であると言う。この方程式(5)は**全微分方程式**（total differential equation）と呼ばれることもある。

見るとわかるように，$g(x)$ が 3 節の終盤で述べた逆需要関数であるとき，この u は各点においてラグランジュの条件を満たすような増加関数になる。したがってそれは，効用関数と解釈できるかもしれない。古典的には Antonelli（1886）や Pareto（1906），さらには Samuelson（1950）などの，需要から効用を逆算する問題を考える論文は，おおむねどれもこの方程式(5)の解を効用関数と見なしていて，それが解を持つための逆需要関数や，あるいは需要関数の条件を求めようとしていたのである。

古典的には，全微分方程式(5)の解の存在については，有名な必要十分条件が存在した。それはヤコビの積分可能性条件と言われる次の条件：

$$g_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_j}) + g_j(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_k}) + g_k(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i}) = 0 \tag{6}$$

である（ただし i, j, k は任意の座標）。これが上の解の存在を保証するという定理はフロベニウスの定理と呼ばれているが，これの現代的な証明は Hosoya（2012）に載っている。ドブリューは論文でべつの条件（これは**かっこ積**（bracket product）というものを用いた条件である）を挙げているが，それはこの(6)式と同値である。

5.2　全微分方程式の大域解の非存在

本題に行く前に，ひとつ用語を追加しておきたい。多様体という用語の定義はすでに 4 節で述べた。$X \subset \mathbb{R}^N$ が k 次元 C^ℓ 級微分可能多様体であるならば，任意の $x \in X$ に対して，ある微分同相写像 $\phi : U \to V$ が存在して，U は $\mathbb{R}^k$ の開集合であり，V は x の開近傍である。この ϕ を助変数化と呼ぶのであった。このとき，$\phi(u) = x$ であるとして，導関数写像 $D\phi(u)$ は $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^N$ への線形写像であるが，この像を $T_x(X)$ と書くことにすると，これは助変数化の取り方に依らず一様に定まる k 次元の線形空間であることが知られている。これは x における微分可能多様体 X の**接空間**（tangent space）と呼ばれる。

前節にあるように，(6)式が成り立つならば，(5)式を満たす u が存在する。補論で述べる**逆像定理**（inverse image theorem）によって，このとき $\{x \in U | u(x) = a\}$ という等高面集合は $n-1$ 次元の微分可能多様体であり，その x における接空間 $T_x(X)$ は $Du(x)$ と直交している。(5)式から，$g(x)$ もまた，$T_x(X)$ と直交していることになる。このように $T_x(X)$ が常に $g(x)$ と直交する微分可能多様体を通常，ベクトル場 g の**積分多様体**（integral manifold）と呼ぶ。

より重要なのは(6)式が**成り立たない**場合である。この場合，なにが起こっているのだろうか？Samuelson（1950）の説明の大部分はこの部分の解説に充てられているのだが，しかしこれは経済学的には示唆に富むものの，数学的に理解することはかなり難しい。

このようなことを議論する際に，図で書いてイメージを理解するため，二次元平面を使う場合が多い。しかしここが問題であって，(6)式は実は，i, j, k のうちどれかが同じ座標であれば自動的に成り立つことを，簡単に確認することができる。となると，(6)式は二次元のモデル（つまり，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の場合）では自動的に成り立ってしまうということである。したがって「成り立たない場合」を考えるのに二次元平面は使えない。これが，この問題を難しくしている根源である。

そこで一歩妥協して，$\mathbb{R}^2$ から一点 x^* を取り除いたところで定義されたベクトル場 g を考えよう。$x \neq x^*$ ならば，(6)式が常に成り立っているので，このような点の近傍では常に u が存在する。言い換えると，積分多様体（この場合は一次元微分可能多様体なので，**積分曲線**と呼んでもよい）は常にすべての点の近傍で定義できるということである。では，x^* 自身の近傍では，積分曲線はどういう形状をしているのだろうか？

よく，積分可能性条件(6)式が成り立たない場合として書かれるのが，**渦巻き**のケースである。つまり，x^* に渦を巻きながら吸い込まれていく曲線（図 1 参照）が積分曲線である，というケースでは，x^* のところで積分可能にならないことが知られている。

なぜそうなるかというと，この渦は積分曲線であるから，もし x^* の近傍上で(5)式が成り立つ u が存在しているならば，この渦上で u は定数でなければならない。したがってその極限である x^* でもその渦と同じ値を取らなければならないことになるが，こういう場合にはだいたいこの渦巻きの間の点でも積分多様体が定義できて，そちらもやはり x^* に吸い込まれる渦巻きになっている。そ

図１　x^* に吸い込まれる渦巻き

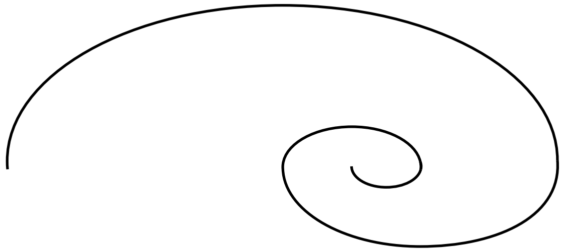

図２　円に漸近する渦巻き

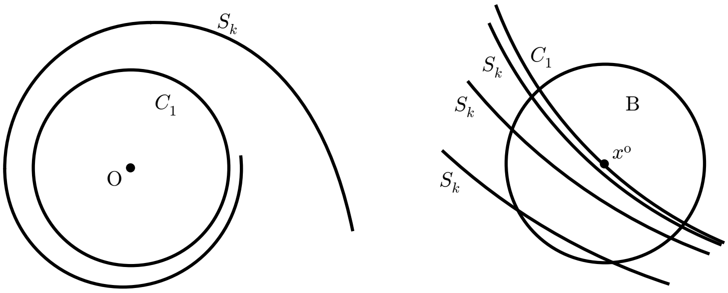

Figure 1.　　　Figure 2.

うするとそこでも x^* と同じ u の値を取っていることになり……ということが重なっていった結果，すべての点で u が定数であるということになってしまう。$g(x) \neq 0$ かつ $\lambda(x) > 0$ なのだから，これはありえない，ということで(5)式を満たす u の存在が否定される。

この，よくある積分可能にならない場合を，まったくべつの発想から考えたのがドブリューであった。彼の関心を思い出してみよう。5 節の冒頭で述べたように，それは逆需要関数 $g(x)$ から効用関数 $u(x)$ を導き出すことであった。しかし効用関数は $\mathbb{R}^n_{++}$ 全体で定義されるものでなければならない。フロベニウスの定理では(6)式は「局所的な」u の存在定理であって，$\mathbb{R}^n_{++}$ 全体で定義される u は，相変わらず存在しないかもしれない。

では，(6)式を満たすけれども全体で定義される u が存在しないケースはありうるのか？　について考えてみよう。これについては，ドブリュー自身が作った図を眺めるのが早い。

ドブリューが考えたのは次のようなベクトル場であった。相変わらず $x^* \in \mathbb{R}^2$ 以外の全平面で定義されていて，その積分曲線は，x^* から一定の距離までは，円である。一番離れた一定の距離のところの円をドブリューは C_1 と名付けた。そして，そこから外側では，積分曲線は C_1 に巻き付いていく渦巻きになる。これを表したのが図 2 の左側にある，ドブリューの論文における Figure 1 であった。

ドブリューは極座標で厳密にこの図に対応する積分曲線を定義しているが，本稿ではそこまで立ち入らない。重要なのは，この場合に円周 C_1 を含む開集合上で定義されるような(5)式を満たす関

図 3　三次元座標への投射

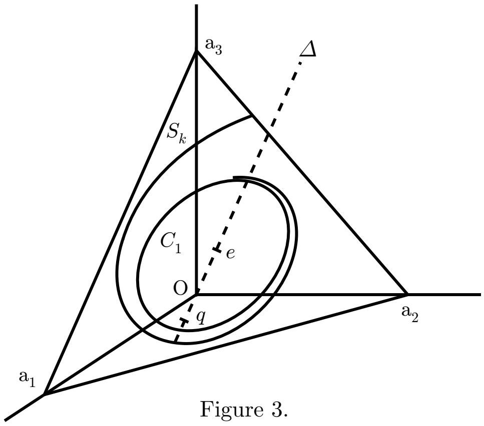

Figure 3.

数 u は絶対に存在できないという事実である。断っておくと，この場合には C_1 内のどの点 x においても，その近傍上では(5)式を満たす u が作れる――これは(6)式が二次元では自動的に成り立つことと，フロベニウスの定理から明らかである。にもかかわらず，全体としてはそのような u を貼り合わせることはできないのである。

これを見るために，背理法の仮定として，そのような関数 u が存在したとしてみよう。そして，x^* より左下側にある C_1 上の点 x を取ろう。$g(x) \neq 0$ なので，$Du(x) \neq 0$ であるが，x は円の左下側にあるので，$g(x)$ は第一象限か第三象限に属している。一般性を失うことなく第一象限に属している，つまり $g(x) \gg 0$ を仮定すると，$Du(x) \gg 0$ である。したがってこの点の近傍で，x から左下側に移動すると u の値は下がる。よって図 2 にあるような渦巻き S_k の上では，必ず u の値が $u(x)$ よりも小さいはずである。一方で S_k は C_1 に巻き付いているのだから，C_1 内に極限点を持つ。よって u の連続性から S_k 上での u の値はその極限点の u の値と同じはずだが，C_1 も S_k も u の等高線だったのだから，これは S_k 上の点が x と同じ u の値を持つことになり，矛盾である。

もちろん，これは二次元平面から x^* を抜いた空間上の話であり，$\mathbb{R}^n_{++}$ の話ではない。ところが，ドブリューはそれを斬新なやり方で，$\mathbb{R}^3_{++}$ 上のベクトル場に変形する方法を思いついた。

図 3 が，このアイデアをドブリューが説明した図である。ドブリューは，平面 $H = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ を考え，さらに基準点 $q = (-1, -1, -1)$ を考えた。そして，x^* を $(1, 1, 1) \in H$ と同一視して上の例と同じ積分曲線を考え，H 以外の点に対しては，その点と q を結ぶ直線が H との間に持つ交点における $g(x)$ の値を参照するようなベクトル場を考えたのである。このベクトル場は，$(1, 1, 1)$ のところでは $g(x)$ が平面 H と直交するように，それ以外では上の例に出てきた二次元の場合の $g(x)$ に射影で対応するように，それぞれ作られている。こうすることで，上とまったく同じ理屈から，このベクトル場に対応する $\mathbb{R}^3_{++}$ 上の(5)式を満たす u の非存在が導ける，というのがドブリューの主張である。

この主張について，これ以上細部に立ち入ることはしない。ドブリューの書き方は厳密ではなく，それを数学的にきちんと確認するという作業は残っているが，それはさほど重要ではない。重要なのは，ドブリューは $\mathbb{R}^3_{++}$ において，一般論として(6)式は全微分方程式(5)式の大域解の存在には不十分であると考えており，その証明の概略も上に述べたような形で作っていた，ということである。

5.3　葉体と積分可能性

さて，それでは逆需要関数 g から効用関数 u を構築するのは不可能なのだろうか？　ドブリューはそれに対して，$g(x) \gneq 0$ という追加の仮定を入れることによって，この反例は消えて，問題は解決すると述べた。ここが実はこの論文で最も難解な部分であり，筆者はこの論文に出会って 12 年以上が経ったいまも，理解できていない箇所である。

ひとつ用語を追加しよう。積分多様体の定義は上ですでに述べた。この積分多様体のうち，**連結**（connected）で，しかも包含関係 $\subset$ を順序と見たときに**極大**（maximal）であるものを，**葉体**（leaf）と呼ぶ[(12)]。もし逆需要関数から効用関数に戻れるならば，逆需要関数の積分多様体は効用関数の等高面，すなわち**無差別超曲面**（indifference hypersurface）である。ドブリューはここから，葉体を用いて効用を定義することができるのではないかと考えた。

次の結果は Mas-Colell, Whinston, and Green（1995）の第三章にその証明がある。いま，$\mathbb{R}^n_{++}$ 上に連続かつ単調な選好関係 $\succsim$ が与えられているとし，$e = (1, 1, \ldots, 1)$ とする。このとき，$x \in \mathbb{R}^n_{++}$ をひとつ与えたとき，$x \sim ce$ となるような $c > 0$ が，必ずただひとつだけ存在することが証明できる。そこでその c を $u(x)$ と書くと，この u は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で定義された，$\succsim$ を表現する効用関数である。

ドブリューが考えたのは，まさにこのやり方をいま考えている問題に適用しようというものだった。まず $e = (1, 1, \ldots, 1)$ は相変わらずとして，$g(x) \gneq 0$ を満たす $\mathbb{R}^n_{++}$ 上のベクトル場 g が与えられていたとする。ここで，$x \in \mathbb{R}^n_{++}$ を与えて，x を通る g の葉体をひとつ取ってこよう。するとこれは e 方向の半直線とただ一点のみで交わる。そこが ce だったとすれば，この c を $u(x)$ として定義すれば，ベクトル場 g から効用関数 u に戻れたことになる。図 4 はドブリューが書いた，このアイデアを説明した図である。

さて，筆者がこの論文を読んだときに感じた疑問をここで書こう。第一の疑問は，「なぜ葉体は e 方向の直線と交わるのか？」である。第二の疑問は「葉体が e 方向の直線と二回交わることはないのか？」である。明らかに，ドブリューの u の構築法は，このふたつの疑問が両方解決されない限りにおいては，不可能だと言えるであろう。

まず第二の疑問から考えよう。二次元で考えると，葉体（つまり積分曲線）は $g(x)$ と直交してい

（12）　ドブリューの元論文には**極大連結積分多様体**（maximal connected integral manifold）という用語が使われている。しかしこれは同じ概念である。

図 4　効用関数の構築

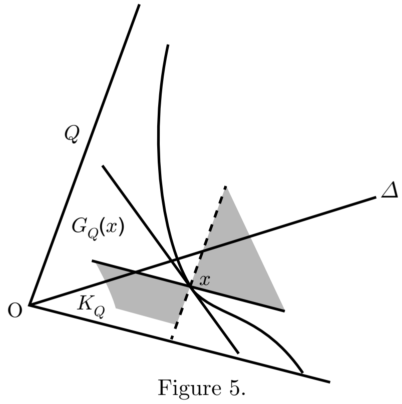

Figure 5.

るので，右上方向や左下方向に伸びることができず，したがって e 方向の半直線，すなわち 45 度線と交われるのはせいぜい 1 回であろう。したがって二次元では，この問題は解決する。しかし問題は三次元であって，この場合には，へんな曲がり方をした葉体が e 方向の半直線と何回も交わる可能性が，筆者にはどうしても否定しきれなかった。これが，この問題を深刻に感じた理由である。

上のアイデアから，第二の疑問は二次元では解決できるという確信が筆者にはあったので，最初に考えたのは，$n=2$ のときに第一の疑問を解決できるか，ということだった。これを考えるに当たって，筆者は微分方程式を用いた。いま，$g(y)$ と次の関数

$$h(y)=(g_2(y),-g_1(y))$$

は，常に直交している。したがって微分方程式

$$\dot{y}(t)=h(y(t)),\ y(0)=x \tag{7}$$

の軌道は，その微分が常に g と直交しているのだから，これこそが積分曲線のはずである。こうして筆者は，積分曲線の微分方程式での記述法を得た。こうすると，微分方程式がどこまで伸びるかという議論は，それこそ微分方程式論の教科書に山ほど書かれている（ポントリャーギン（1968）の第 4 章など)。したがって，第一の疑問を解決することもそれほど難しくなくて，筆者は二次元においてドブリューの構築法が正しく実現できることを示すことができた。これが 2006 年の年末のことである。

では，三次元以降はどうなるだろうか？　これについて筆者は 2006 年度の冬期休暇をすべて費やし，無理やり三次元以降でもどうにかする方法を編み出した。キーとなるのは，x と e の間の関係を議論すればよいのだから，x と e のふたつのベクトルで張られた平面を考えて，その平面上でだけ議論すればよいのではないか，という考え方であった。こうすることで，二次元のときと同じや

り方で，ふたつの疑問を解決することができる。(7)式に対応する微分方程式を構築するのには手間取って，最初は交代テンソルを用いて極めて抽象的な議論を行っていたが，やがてそれは整理され，次の方程式

$$\dot{y}(t) = (g(y(t)) \cdot x)e - (g(y(t)) \cdot e)x,\ y(0) = x$$

に落ち着いた。この方程式の解は x と e の張る平面上を動き，$g(y(t)) \cdot \dot{y}(t) = 0$ を常に満たし，また $w = (e \cdot x)e - (e \cdot e)x$ とすると，$\dot{y}(t) \cdot w > 0$ が常に満たされている。x と e の張る平面上では $y(t)$ が e 方向の直線上に位置することと $y(t) \cdot w = 0$ は同値なので，ここからただちに第二の問題は解決する。第一の問題は地道な計算が必要であるが，基本的には二次元の場合と同じである。[13]

これは大幅に拡張され，最終的に Hosoya（2013）として J. Math. Econ 誌に掲載された。こうしてドブリューの問題は肯定的に解決されたのだが，ひとつ残った疑問は，ドブリュー自身がどう考えていたのか，ということである。筆者は結局，微分方程式に帰着する以外に第二の疑問を解決する方法を持ちえなかったが，ドブリューは高次元の空間上の図形についてもっと優れた直観があって，これ以外の方法でこの問題を解決できていたのかもしれない。ドブリューが本当はどうやってこれを厳密に解決しようと考えていたのか――これは未だに筆者にとっては大きな謎である。が，それは “Smooth Preferences” を読んでも解決しないし，当人がすでに死没している以上，永遠の謎となるものであろう。

5.4　ドブリューの間違い

さて，ところで，本稿には訂正記事があるとすでに述べた。これはどういうものかと言うと，(5)式についての問題である。ドブリューは(5)式の解である u について，g が連続微分可能であれば，u は二階連続微分可能である，と考えていた。したがってドブリューの主張も，「連続微分可能な逆需要関数」から，「二階連続微分可能な効用関数」を計算できる，というものであった。ところが，Debreu（1976）によると，これについてシャピロとマスコレルが反例を作ってきたというのである。そこで提示されているのは次の関数：

$$g_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_2 \le 0, \\ \frac{x_2^2}{\sqrt{1+x_2^4}} & x_2 > 0, \end{cases}$$

（13） 細矢（2009）が，この考え方を最初に出版したものである。

$$g_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1+x_2^4}} & x_2 > 0. \end{cases}$$

であった。これに対応して,

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} x_2 & x_2 \le 0, \\ \frac{x_2}{1-x_1x_2} & x_2 > 0, \end{cases}$$

という関数が $(0,0)$ の近傍上で上の g に対応する方程式 (5) の解になっている。実際, 計算してみると

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & x_2 \le 0, \\ \frac{x_2^2}{(1-x_1x_2)^2} & x_2 > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 \le 0, \\ \frac{1}{(1-x_1x_2)^2} & x_2 > 0, \end{cases}$$

となって,

$$\lambda(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 \le 0, \\ \frac{\sqrt{1+x_2^4}}{(1-x_1x_2)^2} & x_2 > 0, \end{cases}$$

とすれば,

$$Du(x) = \lambda(x)g(x)$$

となるので, 正しい。ところが, λ は $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ となるところで微分可能でない。したがって, $u(x)$ は $(0,0)$ のまわりで二階連続微分可能ではない。

さて, もしここで, ある二階連続微分可能な関数 $v(x)$ について, これがいま $(0,0)$ の近傍で g に対する方程式(5)の解であったとしよう。方程式(5)の解の定義から, $Dv(x) \neq 0$ である。また, v の等高線は g の積分曲線と一致する。u の等高線も g の積分曲線と一致するから, このふたつの関数は定義域の共通部分で順序が一致しなければならない。よって, ある単調関数 ϕ が存在して, 0 の近傍においては

$$v(x) = \phi(u(x))$$

が言えなければならない。実際には $\phi(c) = v(0, c)$ であることは容易にわかるので，ϕ は二階連続微分可能である。ここで

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \phi'(u(x_1, x_2))\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

であるから，この右辺が x_2 で偏微分可能であるためには最低限，$\phi'(0) = 0$ でなければならないことが容易にわかる。しかしそうすると $Dv(0, 0) = (0, 0)$ ということになって仮定に矛盾するので，これはありえない。こうして，二階連続微分可能でこの g に対応する全微分方程式(5)の解 v は存在しないことがわかった。したがってドブリューの主張は間違いであり，連続微分可能な逆需要関数からは，連続微分可能な効用関数しか作れないことがわかったのである。

ただ，これはあくまで数学的な話に過ぎない。経済学的に意味のある例で，逆需要関数が C^1 級なのに，対応する効用関数が C^2 級のものとして取れない例があるのかどうかは，未解決問題である。

6　結語

本稿ではドブリューの “Smooth Preferences” における主張を三つに分解し，それをひとつひとつ丁寧に見ていった。第一の主張は，需要関数が微分可能になるための効用関数の条件であり，これは正しいことが確認できる。第二の主張は，効用関数が微分可能になるための選好関係の条件であり，これはドブリューのやり方以外の方法で，結果として正しいことが確認できる。第三の主張は全微分方程式の大域解の存在についてであり，これもドブリューのやり方以外の方法で，Hosoya (2013) という形で解決できた。ただし第三の主張については，微分可能性の程度についてやや疑問が残っていることも確認できた。

これがこの論文のすべてである。もちろん，これ以外にもドブリューは多くのことを述べているのだが，“Smooth Preferences” で新しく出てきたドブリューの経済学に対する貢献分は，これですべてと言ってよいであろう。この難解な論文は，本解説論文を読むことでだいぶ理解しやすくなるのではないかと，筆者は期待するものである。

最後に，残っている問題について述べておきたい。第一にドブリューは，訂正記事において，連続微分可能な逆需要関数からは連続微分可能な効用関数しか出てこない可能性があることを認めた。しかし，それについてドブリューが挙げているのはあくまで数学的なものに過ぎず，経済学的に意味がある例として同様なものがあるかどうかは，考えなければならない問題である。

第二に，ドブリューが述べた大域解が存在しない反例を，解析的にきちんと書く必要があるだろう。これは数学的には重要である。

第三に，ドブリューが与えた需要関数の微分可能性に関する条件は外形上必要十分であるが，実はその陰に「効用関数が二階連続微分可能である」という，隠れた条件がある。そして Hurwicz and Uzawa（1971）に，効用関数は微分可能でないにもかかわらず，需要関数が連続微分可能になる例が示されているのである。この例は特徴があって，二次元の例なのだが，値が 45 度線に出てくるような価格と所得の組に対して，スルツキー行列が 0 行列になる。一方で，連続微分可能な逆需要関数が存在するのであれば，スルツキー行列の階数は常に $n-1$ になることが，Samuelson（1950）で示されている。したがってこの例では連続微分可能な逆需要関数が存在しないことになるが，その場合にドブリューの考えた葉体による逆算命題がどのような形になるかというのは，興味を惹かれる内容である。

無論，これ以外にもなにか，考えられる興味深い問題があるかもしれない。本稿でこの魅力的な論文に触れた読者の中に，独創的なアイデアで，さらなる未解決問題に挑戦する方が出てくることを，筆者は期待する。

付録 A　3 節の補遺

A.1　定理 1 の証明

まず，ラグランジュの未定乗数法によって出てくる最適化の必要十分条件

$$Du(x)-\lambda p=0,\ p\cdot x-m=0 \tag{8}$$

を考え，これを x,λ と p,m についての陰関数であると考えよう[(14)]。陰関数定理を使用可能な条件は (x,λ) についてのヤコビ行列式が 0 にならないことなので，それを計算すると，

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & -p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}(x) & -p_n \\ p_1 & \dots & p_n & 0 \end{vmatrix}$$

となる。$Du(x)=\lambda p$ かつ $\lambda>0$ であることから，上の行列式は

（14）$Du(x)$ は横ベクトルで p は縦ベクトルだから計算がおかしい，と思う方がおられるかもしれないが，いちいち転置記号を書くと煩雑なので省略している，と捉えていただきたい。

$$-\frac{1}{\lambda^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}(x) & \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) & 0 \end{vmatrix}$$

と一致するが，ここに出てくる行列式が $(-1)^n$ と同じ符号である（したがって 0 でない）ことは，強い縁付きヘッセ行列の符号条件(3)から証明できる（Debreu（1952）を参照）。したがってもし(3)が成り立つならば，(8)式には陰関数定理を適用できて，

$$x(p,m), \lambda(p,m)$$

という，(8)式を恒等的に満たす連続微分可能な関数 x, λ が存在する。ところが(8)式は問題(1)の解の必要十分条件だから，$f(p,m) = x(p,m)$ であり，よって需要関数は連続微分可能である。

逆に，需要関数が連続微分可能であるとしよう。このとき，公式

$$S_f(p,m) = D_p f(p,m) + D_m f(p,m) f^T(p,m)$$

によって，スルツキー行列が定義できる。この行列の (i,j)-成分は

$$s_{ij}(p,m) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p,m) + \frac{\partial f_i}{\partial m}(p,m) f_j(p,m)$$

である。一方で，すでに述べたように，定理 1 の仮定の下で $Du(x) \gg 0$ が常に成り立つ。特に，$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) > 0$ なので，

$$g(x) = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)} Du(x)$$

として新しい逆需要関数を作れる。これに対して

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x) g_j(x)$$

と定義し，a_{ij} を (i,j)-成分とする $(n-1)$ 次正方行列 $A_g(x)$ を定義する。この行列は**アントネッリ行列**（Antonelli matrix）と呼ばれる。Samuelson（1950）は数学付録において，$x = f(p,m)$ であるとき，スルツキー行列 $S_f(p,m)$ の n 行目と n 列目を取り去ってできた行列が，このアントネッリ行列 $A_g(x)$ の逆行列と等しいことを示した。一般論としてスルツキー行列は半負値定符号かつ対称であり，この性質は逆行列に遺伝するので，アントネッリ行列も半負値定符号かつ対称である。ところがアントネッリ行列は逆行列を持つ，つまり正則なので，それは 0 を固有値として持ちえない。よってアントネッリ行列は負値定符号である。[15]

さて，$\hat{g}(x)$ を g の最後の行を取り除いた関数としよう。このとき，

$$Dg(x)=\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x) & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n}(x)\\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}A_g(x) & \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_n}(x)\\ \hline 0^T & 0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c|c}\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_n}(x)\hat{g}^T(x) & 0\\ \hline 0^T & 0\end{array}\right)$$

となる。よって，$v\cdot Du(x)=0$ となるベクトル $v\neq 0$ を取り，$\hat{v}$ をその最後の座標を取り除いたベクトルとすると，まず $Du(x)\gg 0$ から，$\hat{v}\neq 0$ である。そして $v\cdot g(x)=0$ なので，

$$\begin{aligned}v^TDg(x)v&=\hat{v}^TA_g(x)\hat{v}+v_n\hat{v}^T\frac{\partial\hat{g}}{\partial x_n}(x)+\hat{v}^T\frac{\partial\hat{g}}{\partial x_n}(x)\hat{g}^T(x)\hat{v}\\&=\hat{v}^TA_g(x)\hat{v}+(g(x)\cdot v)\hat{v}^T\frac{\partial\hat{g}}{\partial x_n} \qquad (9)\\&=\hat{v}^TA_g(x)\hat{v}<0\end{aligned}$$

がわかる。ところが，$\lambda(x)=\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)$ として，

$$D^2u(x)=\lambda(x)Dg(x)+g(x)D\lambda(x)$$

であり，よって $v\cdot g(x)=0$ から，

$$v^TD^2u(x)v=\lambda(x)v^TDg(x)v+v^Tg(x)D\lambda(x)v=\lambda(x)v^TDg(x)v<0$$

となって，(3)式が成り立つことがわかった。以上で証明が完成した。■

A.2　定理 2 の証明

実は定理 1 と同じやり方で証明できる。というのは，(9)式がある関数 g について成り立つならば，それと連続微分可能な正値関数 $\lambda:\Omega\to\mathbb{R}$ をかけてできた新しい関数 $h(x)=\lambda(x)g(x)$ についても成り立つことが，上と同様のロジックで簡単に示せるからである。しかし，ここではそのやり方を取ることはあえてせず，ドブリューのロジックをそのまま使って証明してみよう。なお，上ですでに用いていることだが，定理 1 の仮定の下で $Du(x)\gg 0$ が常に成り立つことは，常に忘れな

(15)　細矢（2010）にもこの議論の解説がある。

いでほしい。

まず，一般にベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\hat{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ を，v から最後の座標を取り除いたものとしよう。ここで

$$\bar{f}(\hat{p}, m) = f(\hat{p}, \sqrt{1 - \|\hat{p}\|^2}, m)$$

と定義すると，0 次同次性から容易にわかるように，f が連続微分可能なことと $\bar{f}$ が連続微分可能なことは同値である。一方で，問題(4)を思い出そう：

$$\begin{aligned} \min \quad & p \cdot y \\ \text{subject to.} \quad & y \in \Omega, \\ & u(y) \geq u. \end{aligned}$$

この問題の解を $h(p, u)$ と書くのだったが，$p \cdot h(p, u) = E(p, u)$ と書こう。この関数 E は**支出関数**（expenditure function）と呼ばれる。ミクロ経済学の一般論として，定理 1 の仮定の下で $x = f(p, m)$ ならば，$h(p, u(x)) = x$ で，$E(p, u(x)) = m$ となることが知られている。よって，$\bar{f}$ の逆関数を次のように書くことができる：

$$\bar{f}^{-1}(x) = (\hat{g}(x), E(\hat{g}(x), \sqrt{1 - \|\hat{g}(x)\|^2}, u(x))).$$

そこでこの関数 $\bar{f}^{-1}$ を，次のふたつの関数

$$\alpha(x) = (\hat{g}(x), u(x))$$

と，

$$\beta(\hat{p}, u) = (\hat{p}, E(\hat{p}, \sqrt{1 - \|\hat{p}\|^2}, u))$$

の合成関数と考えてみよう。α の x におけるヤコビ行列式は，

$$\begin{vmatrix} D\hat{g}(x) \\ Du(x) \end{vmatrix}$$

である。一方で β の点 $\alpha(x)$ におけるヤコビ行列式は，E が u について微分可能であれば必ず定義できて，

$$\frac{\partial E}{\partial u}(g(x), u(x))$$

と一致する[16]。そこでこれを計算しようとするのだが，これは，(3)式が成り立っているか f が連続微

分可能であるかのいずれかの場合には必ず

$$\frac{1}{\|Du(x)\|}$$

と一致することを示すことができる。(3)式が成り立っている場合には，問題(4)についてのラグランジュの条件

$$p - \lambda Du(x) = 0,\ u - u(x) = 0$$

に陰関数定理を用いることで

$$Du(x)\frac{\partial h}{\partial u}(g(x), u(x)) = 1$$

が示せ，$g(x) = \frac{1}{\|Du(x)\|}Du(x)$ だから，ここから容易に上の結果を得る。f が連続微分可能な場合には，$E(g(x), u)$ は次の方程式

$$u(f(g(x), m)) = u$$

の解となる m と一致する。したがってこの式の左辺の $m = g(x) \cdot x$ における m についての微分が 0 でなければ陰関数定理が適用できるが，これは

$$Du(x)\frac{\partial f}{\partial m}(g(x), m) = \|Du(x)\|g(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial m}(g(x), m) = \|Du(x)\| \neq 0$$

となる[(17)]。よってこの場合も E は u で微分可能で

$$\|Du(x)\|\frac{\partial E}{\partial u}(g(x), u) = 1$$

となることが示された。

さて，$Du(x) = \|Du(x)\|g(x)$ なので，$D\bar{f}^{-1}(x)$ の行列式は

$$\begin{vmatrix} D\hat{g}(x) \\ g^T(x) \end{vmatrix}$$

という値である。一方で，

---

(16) 一般に，E は p については微分可能で，

$$D_pE(p, u) = f(p, E(p, u))$$

が成り立つ。これはシェパードの補題と呼ばれる。

(17) ここで $p \cdot \frac{\partial f}{\partial m}(p, m) = 1$ はワルラス法則の両辺を m で微分することで得られる。

$$g_n(x) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (g_i(x))^2}$$

なので，

$$\frac{\partial g_n}{\partial x_j}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i(x)}{g_n(x)} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$$

であることに注意すると，

$$c = \begin{vmatrix} D\hat{g}(x) & \hat{g}(x) \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i(x)}{g_n(x)} Dg_i(x) & g_n(x) \\ g^T(x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D\hat{g}(x) & \hat{g}(x) \\ 0 & g_n(x) + \frac{\|\hat{g}(x)\|^2}{g_n(x)} \\ g^T(x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_n(x)} |D\bar{f}^{-1}(x)|$$

となる。よって次のことがわかる。

1. f が連続微分可能であるとする。このとき，$\bar{f}$ と $\bar{f}^{-1}$ は両方とも連続微分可能なので，それらのヤコビ行列は正則でなければならない。よって $D\bar{f}^{-1}(x)$ の行列式は 0 ではないが，これは $c \neq 0$ を意味する。
2. 逆に，$c \neq 0$ であるとしよう。この節の冒頭で述べたように，我々はそこから容易に(3)式を得ることができる。したがって上のロジックから $D\bar{f}^{-1}(x)$ の行列式は 0 でないことがわかるが，逆関数定理によって $\bar{f}$ は連続微分可能であり，よって f も連続微分可能である。(18)

以上によって，$c \neq 0$ と f の連続微分可能性の同値性が示された。これで証明が完成する。

A.3　ガウス曲率について

ところで，なぜ c をガウス曲率と呼ぶのだろうか？　ガウス曲率の定義が書かれた本はいろいろ

(18)　この証明で u が C^2 級であることを用いているのは，この(3)式を得るところだけである。実際のところ，$E(p, u)$ を使わなくとも，f のワルラス法則から $(g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), g(x) \cdot x)$ が $\bar{f}^{-1}$ であり，これのヤコビ行列式が c の正の定数倍になることは容易に示せる。したがって u が C^1 級であろうと定理 2 は正しい。

あるが，どれもとても難解である。ここでは，Guillemin and Pollack（1974）に書かれている定義をものすごく簡単にしたものを解説してみよう。

いま，定理 1 の条件を満たす関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられているとし，$x^* \in \Omega$ とする。ここで $y \in \mathbb{R}^{n-1}_{++}$ に対して，$u(y, y_n(y)) = u(x^*)$ となる関数 $y_n(y)$ を考えると，これは陰関数定理から $\hat{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*)$ の近傍上で定義され，二階連続微分可能であることがわかる。したがって $\bar{g}(y) = g(y, y_n(y))$ も $\hat{x}^*$ の近傍上で定義され，二階連続微分可能である。この $\bar{g}$ について，行列式

$$\begin{vmatrix} D\bar{g}(\hat{x}^*) & g(x^*) \end{vmatrix} \tag{10}$$

の値のことを点 x^* における無差別超曲面 $\{x \in \Omega | u(x) = u(x^*)\}$ の**ガウス曲率**（Gaussian curvature）と呼ぶのである。

これは我々の c と一致するであろうか？　実は一致する。実際に計算すれば,

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial y_j}(\hat{x}^*) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x^*)\frac{\partial y_n}{\partial y_j}(\hat{x}^*)$$

となる。一方で陰関数定理から

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_j}(\hat{x}^*) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*)}{\frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*)}$$

となる。右辺の式は $-\frac{g_j(x^*)}{g_n(x^*)}$ と一致するので，つまるところ(10)式は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^*) - \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*)\frac{g_1(x^*)}{g_n(x^*)} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(x^*) - \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*)\frac{g_{n-1}(x^*)}{g_n(x^*)} & g(x^*) \end{vmatrix}$$

と一致する。行列式を慎重に計算すれば，これが c と一致することが示せる。

というわけで，ドブリューのガウス曲率は通常の議論におけるガウス曲率と一致することがわかった。ただし，今回筆者は無差別超曲面の助変数化として $y \mapsto (y, y_n(y))$ を取った。一般に，ガウス曲率は助変数化について不変なものではないことが知られており，したがってドブリューの計算も助変数化の取り方に大きく依存している。もちろん，べつの無差別曲線の助変数化をすれば，べつの計算結果が現れる。ただし，ガウス曲率が「0 ではない」という性質だけは助変数化の取り方に関係なく不変な性質であり，したがって，定義としての曖昧さは存在しない。

付録 B　4 節の補遺

B.1　局所はめ込み定理と逆像定理

定理 3 を証明するためには，逆関数定理の系として知られるふたつの定理が必要不可欠である。それぞれ局所はめ込み定理（local immersion theorem），逆像定理（inverse image theorem）という名

前がついている定理である。この節では精密な証明はしないので，詳しくは Guillemin and Pollack（1974）の第一章第三節，第四節を参照されたい。

まず，ひとつ概念を追加しなければならない。X と Y は共に C^ℓ 級の微分可能多様体とし，$f: X \to Y$ は C^k 級，ただし $k \le \ell$ であるとする。ここで $x \in X$ のまわりの助変数化 $\phi: U \to V$ と，$f(x) \in Y$ のまわりの助変数化 $\psi: U' \to V'$ を取る。このとき，$\phi(u) = x$ とすれば，$\xi = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ は u の近傍で定義された，通常の意味での微分可能な写像である。そして $f = \psi \circ \xi \circ \phi^{-1}$ である。任意の $v \in T_x(X)$ に対して，$v = D\phi(u)w$ となる w がただひとつ存在するので，これに対して $D(\psi \circ \xi)(u)w$ を $Df(x)v$ と定義すると，$Df(x)$ は $T_x(X)$ から $T_{f(x)}(Y)$ への写像となる。こうして我々はふたつの微分可能多様体の間の**導関数写像**（differential mapping）の定義を得たことになる。

さて，通常の逆関数定理を思い出そう。この定理は，$f: U \to U'$ が与えられたとして，U がユークリッド空間の開集合であり，f が C^k 級かつ $Df(u)$ が全単射であれば，u の近傍 W と $f(u)$ の近傍 W' が存在して，f は W から W' への全単射であり，かつ f^{-1} は C^k 級である，という定理だった。いま，$f: X \to Y$ が与えられていて，$Df(x)$ が $T_x(X)$ から $T_{f(x)}(Y)$ への全単射であったとすれば，上で定義した ξ もまた，$D\xi(u)$ が全単射という性質を持つ。したがって通常の逆関数定理の系として，多様体上の逆関数定理が得られる。まとめると，

逆関数定理：$f: X \to Y$ が C^k 級写像で $Df(x)$ が全単射ならば，x の近傍 V と $f(x)$ の近傍 V' が存在して，f は V から V' への全単射で，しかも f^{-1} も C^k 級である。

次のふたつの定理はこれの拡張である。まず, $Df(x)$ が常に単射である写像を**はめ込み**（immersion）と呼ぶ。逆に $Df(x)$ が常に全射である写像を**しずめ込み**（submersion）と呼ぶ。逆関数定理は $Df(x)$ が全単射であれば f も局所的に全単射であるという定理だったが，これは単射，全射で分けることができる。すなわち，次が成り立つ。

局所はめ込み定理：X, Y が C^ℓ 級の微分可能多様体であり，X が k_1 次元，Y が k_2 次元とする。また，$f: X \to Y$ が C^1 級で，x において $Df(x)$ が単射であるとする。このとき，x のまわりの任意の助変数化 $\phi: U \to V$ に対して，$f(x)$ のまわりのある助変数化 $\psi: U' \to V'$ が存在して，$\xi = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ は標準的はめ込み，すなわち

$$\xi(u_1, u_2, \dots, u_{k_1}) = (u_1, u_2, \dots, u_{k_1}, 0, \dots, 0)$$

である。

局所しずめ込み定理：X, Y が C^ℓ 級の微分可能多様体であり，X が k_1 次元，Y が k_2 次元とする。

また，$f: X \to Y$ が C^1 級で，x において $Df(x)$ が全射であるとする。このとき，$f(x)$ のまわりの任意の助変数化 $\psi: U' \to V'$ に対して，x のまわりのある助変数化 $\phi: U \to V$ が存在して，$\xi = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ は標準的しずめ込み，すなわち

$$\xi(u_1, u_2, \ldots, u_{k_1}) = (u_1, u_2, \ldots, u_{k_2})$$

である。

特に後者の応用として，次を得る。

逆像定理：X, Y は C^ℓ 級の微分可能多様体であり，X が k_1 次元，Y が k_2 次元とする。そして $f: X \to Y$ は，集合 $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$ の各点で $Df(x)$ が全射であるとする。このとき，$f^{-1}(y)$ は $k_1 - k_2$ 次元の C^ℓ 級の微分可能多様体である。

証明：$f(x) = y$ として，y のまわりの Y の助変数化 $\psi: U' \to V'$ を $\psi(0) = y$ となるように取る。局所しずめ込み定理から，x のまわりの X の助変数化 $\phi: U \to V$ が存在して，$\xi = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ は標準的しずめ込みである。この場合，x の近傍 V 上で，$x' \in f^{-1}(y)$ と，$\phi^{-1}(x')$ の最初の k_2 個の座標が 0 であることは同値である。そこで，

$$w \mapsto \phi(0, \ldots, 0, w_1, \ldots, w_{k_1 - k_2})$$

という写像を考えれば，これが $f^{-1}(y)$ における x のまわりの助変数化になっている。以上で証明が完成した。■

B.2　定理 3 の証明

まず，連続，単調な選好関係 $\succsim$ に対して，それを表現する C^k 級で正則な関数 u が存在していたとしよう。このとき，$w(x, y) = u(x) - u(y)$ と定義すると w は正則である。そして，

$$\sim = w^{-1}(0)$$

なので，逆像定理からただちに，$\succsim$ が C^k 級であるという結果を得る。

逆に $\succsim$ が C^k 級，つまり，$\sim$ が $2n-1$ 次元の C^k 級微分可能多様体であると仮定する。いま，$e = (1, 1, \ldots, 1)$ として，$x \sim ce$ となるような $c > 0$ がただひとつ存在することに注意する。それを $u(x)$ と書けば，$u(x)$ は連続で，$\succsim$ を表現する効用関数である（これは 5 節で書いた通り，Mas-Colell, Whinston, and Green（1995）の命題 3.C.1 の証明において示されている）。

ここで補題がひとつ必要になる。

補題：$x, y \in \Omega$ かつ $x \sim y$ であるとする。このとき，

（i） (x,y) のある近傍上で定義された C^k 級の正則な実数値関数 w で，さらに $w(a,b) \geq 0 \Leftrightarrow a \succsim b$ であるようなものが存在する。

（ii） $Dw(x,y) = (a_1, a_2)$ となる $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ を取れば，$a_1 \geq 0$ かつ $a_2 \leq 0$ である。

（iii） 特に $x = y$ のときは，$Dw(x,y) = (a_1, -a_1)$ という形になり，$a_1 \neq 0$ である。

証明：まず，写像 $i : \sim \to \mathbb{R}^{2n}_{++}$ を，$(z,w) \in \sim$ に対して $(z,w) \in \mathbb{R}^{2n}_{++}$ を返す写像として定義する（このような写像はよく**包含写像**（inclusion mapping）と呼ばれる）。容易にわかるように i は (x,y) においてはめ込みなので，局所はめ込み定理を適用できて，$\mathbb{R}^{2n-1}$ の開集合 U_1 と $\sim$ についての (x,y) の近傍 V_1，$\mathbb{R}^{2n}$ の開球 U_2 と $\mathbb{R}^{2n}_{++}$ についての (x,y) の近傍 V_2，$\phi : U_1 \to V_1$ および $\psi : U_2 \to V_2$ をうまく取って，ϕ と ψ がどちらも微分同相写像であり，また $(\psi^{-1} \circ \phi)(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = (z^1, \ldots, z^{2n-1}, 0)$ が常に成立するようにできる。必要ならば平行移動と組み合わせて，$\phi(0) = (x,y) = \psi(0)$ が成り立つと仮定してよい。ここで $U_3 \subset U_1, U_4 \subset U_2$ を共に原点を中心とした十分小さな半径 $\varepsilon > 0$ の開球として取り，さらに $V_3 \subset \phi(U_3) \subset V_1$ は (x,y) を中心とする十分小さな半径 $\delta > 0$ の開球と $\sim$ の共通部分，$V_4 \subset \psi(U_4) \subset V_2$ は (x,y) を中心とする半径 δ の開球それ自身とする。$(a,b) \in V_4$ のとき，もし $a \sim b$ であるならば $(a,b) \in V_3$ であり，したがって $(a,b) \in V_1$ でもあるから，$\psi^{-1}(a,b) = (\psi^{-1} \circ \phi)(\phi^{-1}(a,b))$ となり，よって $\psi^{-1}(a,b)$ の最後の座標は 0 である。逆に $\psi^{-1}(a,b)$ の最後の座標が 0 であったとき，$\psi^{-1}(a,b) = (z^1, \ldots, z^{2n-1}, 0) \in U_4$ であるから，$(z^1, \ldots, z^{2n-1}) \in U_3$ である。そして $\phi(z^1, \ldots, z^{2n-1}) = (a^*, b^*)$ とすれば，$\psi^{-1}(a,b) = \psi^{-1}(a^*, b^*)$ であるが，ψ^{-1} は単射なので $(a,b) = (a^*, b^*)$ でなければならない。$(a^*, b^*) \in V_1$ だから $a \sim b$ である。かくして，V_4 の中では，$a \sim b$ と $\psi^{-1}(a,b)$ の最後の座標が 0 になることは同値であることがわかった。そこで ψ^{-1} の最後の座標を与える関数を w^* と書くことにしよう。ψ は微分同相写像なので，$Dw^*(a,b) \neq 0$ は常に成り立つ。

V_4 は開集合なので，ある $(a^*, b^*) \in V_4$ に対して，$w^*(a^*, b^*) > 0$ かつ $a^* \not\sim b^*$ となる。もし $a^* \succ b^*$ ならば $w = w^*$ とし，そうでなければ $w = -w^*$ とする。以下，どちらの場合でも任意の $(a,b) \in V_4$ に対して $a \succsim b$ と $w(a,b) \geq 0$ が同値であることを示そう。

たとえば $a^* \succ b^*$ のときを考える。$w(a,b) \geq 0$ かつ $b \succ a$ であるとする。このとき，$c(t) = \psi(t\psi^{-1}(a^*, b^*) + (1-t)\psi^{-1}(a,b))$ とすれば，$c(t)$ は V_2 内の連続曲線である。$\succsim$ の連続性と中間値の定理から，$c(t) \in \sim$ となる $t \in]0,1[$ が存在することになるが，このとき $w(c(t)) = 0$ である。ところが一方で $w(c(t)) = tw(a^*, b^*) + (1-t)w(a,b) > 0$ であるから矛盾。ゆえにこのようなことはありえず，$w(a,b) \geq 0$ ならば $a \succsim b$ である。

次に，$a \succsim b$ かつ $w(a,b) < 0$ であるとしよう。このとき，先ほどの (a^*, b^*) と同じ役割を (a,b) に

持たせることで，$w(c,d) \leq 0$ であるならば必ず $c \succsim d$ であることを示せる。すると V_4 内の任意の点 (c,d) は $c \succsim d$ という関係を持つことになるが，V_4 は開集合であるから，これは $\succsim$ が単調であるという仮定に矛盾する。ゆえに，$a \succsim b$ であれば $w(a,b) \geq 0$ でなければならない。以上で $a^* \succ b^*$ のときの証明が終わったが，$b^* \succ a^*$ のときも同様にして証明すればよい。これで（i）の証明が終わる。

（ii）と（iii）はどちらも容易であるため，その証明は省略する。■

さて，定理の証明に戻ろう。$x \in \Omega$ に対して，(x,x) について上の補題を適用して w を得る。次に方程式

$$w(x+\mu e, y) = 0$$

を μ について解いた結果出てくる関数 $\mu_x(y)$ を考える。陰関数定理より，μ_x が x のまわりで定義された実数値関数で，C^k 級かつ常に $D\mu_x(y) \neq 0$ であることがわかる。また，μ_x の定義域上で $y \succsim z$ と $\mu_x(y) \geq \mu_x(z)$ が同値であることも容易にわかる。特に $\mu_x(x) = 0$ であることに注意。

次に，多少の遠回りをして，任意の $x \in \Omega$ について $\sim_x = \{y \in \Omega | x \sim y\}$ が弧状連結であることを示そう。このためには，任意の $y \in \sim_x$ が x と連続な弧で結ばれることを示せばよい。まず，

$$z = (\min\{x^1, y^1\}, \ldots, \min\{x^n, y^n\})$$

と置く。$a(t) = (1-t)x + tz$ とし，$b(t) = (1-t)z + ty$ としよう。単調性と連続性から $t \in [0,1]$ である限り $x \succsim a(t)$, $x \succsim b(t)$ であることがわかる。そこで，$a(t) + s_1(t)e \sim x$ となるような $s_1(t) \geq 0$ および $b(t) + s_2(t)e \sim y$ となるような $s_2(t) \geq 0$ が存在しなければならない。$c_1(t) = a(t) + s_1(t)e$ とし，$c_2(t) = b(t) + s_2(t)e$ とすれば，これは $\sim_x$ 内の曲線で，これらをつなげば x と y とをつなぐ曲線になる。後はこの連続性のみを示せばよいが，議論は対称的なので $c_1(t)$ だけ示そう。

さて，$w = c_1(t)$ とし，先ほど作った関数 μ_w を取る。このとき，次の方程式

$$\mu_w(a(t') + s_1 e) = 0$$

は t の近くの t' に対して $s_1 = s_1(t')$ という唯一の解を持つ。そこで陰関数定理から，関数 s_1 は t のまわりで連続であることがわかる。ゆえに c_1 も t のまわりで連続である。これで示せた。

いよいよ最後に，u が C^k 級かつ正則であることを示す。そのために，A という集合を u が x のある近傍上で C^k 級で，かつ $Du(x) \neq 0$ となるような $x \in \Omega$ の全体としよう。我々の証明の目標は $A = \Omega$ であるが，そのためには任意の $x \in \Omega$ に対して $A \cap \sim_x = \sim_x$ であることを示せばよい。そこで $A \cap \sim_x = A_x$ と書く。$\sim_x$ は連結であるから，後は A_x が非空であり，かつ $\sim_x$ の位相について開かつ閉であることが示せればよい。

A_x が開であることは定義から明らかである。

A_x が非空であることについては, $u(x)e$ が A_x に含まれることを示せば十分である。実際, $u(x)e \sim x$ は定義から明らかであり，また $u(x)e$ のまわりで $u(y)$ は $\mu_{u(x)e}(y)+u(x)$ という形で書けるため, u はこの周囲で C^k 級であり，かつ $Du(x)=D\mu_{u(x)e}(x)\neq 0$ である。これで示せた。

最後に A_x が $\sim_x$ の相対位相で閉であることを示さなければならない。そのために，A_x の点列 (y_m) が $y\in\sim_x$ に収束していたとする。対応して μ_y を取り，その定義域を U と書く。(y_m) は y に収束しているので，十分大きな m に対して y_m は U の中に入る。そこで,

$$c(t)=u(y_m+te)$$

と定義しよう。c は 0 の近傍で C^k 級で，しかも $c'(0)>0$ を満たす。次に方程式

$$\mu_y(z)-\mu_y(y_m+te)=0$$

は $(z,t)=(y,0)$ のときに正しく，よって陰関数定理から y の近傍で上の方程式を満たす関数 t は z について C^k 級で，しかも $Dt(z)\gneq 0$ が常に成り立つ。ところが,

$$u(z)=u(y_m+t(z)e)=c(t(z))$$

であるから，u は y の近傍で C^k 級であり，しかも $Du(z)\gneq 0$ が常に成り立つ。したがって $y\in A_x$ となる。以上で，定理 3 の証明が完成した。

謝　　辞

本稿を精読し適切な修正意見を述べていただいた匿名の査読者の方に感謝致します。

参 考 文 献

[1] Antonelli, G. B. (1886) *Sulla Teoria Matematica dell' Economia Politica*. Tipografia del Folchetto, Pisa.

[2] Arrow, K. J., Block, H. D., and Hurwicz, L. (1959) "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II." Econometrica 27, pp. 82–109.

[3] Bridges, D. S. and Mehta, G. B. (1995) *Representations of Preference Orderings*. Springer, Berlin.

[4] Debreu, G. (1952) "Definite and Semidefinite Quadratic Form." Econometrica 20, pp. 295–300.

[5] ————. (1954) "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function." In: Thrall, R. M., Coombs, C. H., and Davis, R. L. (eds.) *Decision Processes*, Wiley, New York.

[6] ————. (1970) "Economies with a Finite Set of Equilibria." Econometrica 38, pp. 387–392.

[7] ————. (1972) "Smooth Preferences." Econometrica 40, pp. 603–615.

[8] ————. (1974) "Excess Demand Functions." Journal of Mathematical Economics 1, pp. 15–21.

[9] ————. (1976) "Smooth Preferences: A Corrigendum." Econometrica 44, pp. 831–832.

[10] Guillemin, V. and Pollack, A. (1974) *Differential Topology.* Prentice Hall, New Jersey.
[11] Hosoya, Y. (2012) “Elementary Form and Proof of the Frobenius Theorem for Economists.” Advances in Mathematical Economics 16, pp. 39–51.
[12] ———. (2013) “Measuring Utility from Demand.” Journal of Mathematical Economics 49, pp. 82–96.
[13] ———. (2014) “A Characterization of Quasi-concave Function in View of the Integrability Theory.” Advances in Mathematical Economics 18, pp. 135–140.
[14] ———. (2015) “The Relationship between Two Definitions of Manifolds.” Keizaikei 263, pp. 14–17.
[15] Hurwicz, L. and Uzawa, H. (1971) “On the Integrability of Demand Functions”. In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., and Sonnenschein, H. F. (eds.) *Preferences, Utility and Demand.* Harcourt Brace Jovanovich, New York, pp. 114–148.
[16] Katzner D. W. (1968) “A Note on the Differentiability of Consumer Demand Functions.” Econometrica 36, pp. 415–418.
[17] Kreps, D. M. (1988) *Notes on the Theory of Choice.* Westview Press, Boulder.
[18] Mas-Colell, A. (1977) “The Recoverability of Consumers’ Preferences from Market Demand Behavior.” Econometrica 45, pp. 1409–1430.
[19] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995) *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, Oxford.
[20] Otani, K. (1983) “A Characterization of Quasi-Concave Functions”. Journal of Economic Theory 31, pp. 194–196.
[21] Pareto, V. (1906) *Manuale di Economia Politica con una Introduzione alla Scienza Sociale.* Società Editrice Libraria, Milano.
[22] Samuelson, P. A. (1950) “The Problem of Integrability in Utility Theory.” Economica 17, pp. 355–385.
[23] レフ・ポントリャーギン (1968)『常微分方程式 新版』共立出版。[Pontryâgin, Refu, 1968, *Jôbibun Hôteisiki, Sinpan*, Kyôritu Syuppan. (in Japanese)]
[24] ジョン・ウィラード・ミルナー (2012)『微分トポロジー講義』丸善出版。[Mirunâ, Jon Wirâdo, 2012, *Bibun Toporojî Kôgi,* Maruzen Syuppan. (in Japanese)]
[25] 細矢祐誉 (2009)「消費者理論と平面の幾何学」三田学会雑誌 102–1, pp. 161–172。[Hosoya, Yûki, 2009, “Syôhisya Riron to Heimen no Kikagaku”, *Mita Gakkai Zassi*, vol. 102, no. 1, pp. 161–172. (in Japanese)]
[26] ———. (2010)『効用関数の測定理論——消費者の需要から選好を逆算する手法』三菱経済研究所。[Hosoya, Yûki, 2010, *Kôyô Kansû no Sokutei Riron: Syôhisya no Zyuyô kara Senkô o Gyakusan suru Syuhô*, Mitubisi Keizai Kenkyûsyo. (in Japanese)]
[27] 松本幸夫 (1988)『多様体の基礎』東京大学出版会。[Matumoto, Yukio, 1988, *Tayôtai no Kiso*, Tôkyô Daigaku Syuppankai. (in Japanese)]
[28] 丸山徹 (1980)『函数解析学』慶應通信。[Maruyama, Tôru, 1980, *Kansû Kaisekigaku*, Keiô Tûsin. (in Japanese)]

要旨: 本稿は，ジェラール・ドブリューが 1972 年に Econometrica 誌に載せた論文 “Smooth Preferences” の内容を解説することをその目標としている。合わせて，1976 年に出版された訂正論文の解説も行う。これらの論文には消費者理論的に重要な内容が多く含まれているが，ドブリューは証明の細部を埋めておらず，また一部は正しくないことが知られている。これらについてきちんと整理し，わかっていることについてはきちんと理解できる形で提示するのが本稿の目的である。

キーワード: 積分可能性理論，正則経済，滑らかな選好，ヤコビの条件，需要関数の微分可能性，ガウス曲率