Title	ナイト流不確実性の数学的構造を用いた新しい意思決定問題の分析
Sub Title	Applying mathematical structures of Knightian uncertainty to new decision problems
Author	小井田, 伸雄(Koida, Nobuo)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2018
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.110, No.4 (2018. 1) ,p.417(57)- 438(78)
JaLC DOI	10.14991/001.20180101-0057
Abstract	本稿では, ナイト流不確実性に関連する数学的構造を用いて, さまざまな意思決定問題の分析を行う。このようなアプローチの特徴は, 意思決定者が複数の信念あるいは効用関数に基づいて選択を行うと仮定することである。特に, マキシミン期待効用の数学的構造を用いた確率的選択の特徴づけ, 複数の期待効用関数を持つ不完備選好と柔軟性への選好の関連づけ, 多属性効用の不完備選好を用いた意思決定時間のモデル化に着目し, 将来の研究の発展可能性も概観する。 In this study, we discuss recent issues in decision theory by applying mathematical structures of Knightian uncertainty to various problems. We discuss characterizing stochastic choice over menus, unifying indecisive tastes and preference for flexibility, and modeling decision time by an incomplete preference over multiattribute objects. The results indicate that mathematical structures generated by multiple beliefs or tastes are useful in analyzing a wide range of decision-making problems, especially for those susceptible to psychological heuristics or biases. Future studies are also discussed.
Notes	特集 : 経済学の本質としての数学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20180101-0057

「三田学会雑誌」110 巻 4 号（2018 年 1 月）

ナイト流不確実性の数学的構造を用いた新しい意思決定問題の分析

小井田伸雄 *

（初稿受付 2017 年 12 月 13 日，査読を経て掲載決定 2018 年 1 月 16 日）

Applying Mathematical Structures of Knightian Uncertainty to New Decision Problems

Nobuo Koida *

Abstract: In this study, we discuss recent issues in decision theory by applying mathematical structures of Knightian uncertainty to various problems. We discuss characterizing stochastic choice over menus, unifying indecisive tastes and preference for flexibility, and modeling decision time by an incomplete preference over multiattribute objects. The results indicate that mathematical structures generated by multiple beliefs or tastes are useful in analyzing a wide range of decision-making problems, especially for those susceptible to psychological heuristics or biases. Future studies are also discussed.

Key words: Knightian uncertainty, stochastic choice, preference for flexibility, decision time, incomplete preference

JEL Classifications: D81, D91

* 岩手県立大学総合政策学部
Faculty of Policy Studies, Iwate Prefectural University
nobuo@iwate-pu.ac.jp

1　はじめに

将来が不確実な状況，すなわち不確実性の下での選択は意思決定理論における中心的なテーマである。その中で，1980 年代の後半から 2000 年代にかけて，意思決定者が主観的確率分布（信念）を一つに定めることができない，いわゆるナイト流不確実性（Knightian uncertainty）の研究が盛んに行われてきた（Gilboa and Schmeidler, 1989; Schmeidler, 1989; Bewley, 1986; Dubra et al., 2004）[(1)]。たとえば，Gilboa and Schmeidler（1989）は，複数の確率分布の中で最も悲観的な（期待効用を最小にする）ものを用いて，Schmeidler（1989）は，確率分布の代わりに確率容量（probability capacity）を用いてそれぞれ不確実性を評価する意思決定モデルを提案しており，後者において確率容量が凸であるとき同じ選好を前者の形式でも表現できるという意味で両者の間に密接な関連があることも示されている。さらに，Bewley（1986）は，複数の確率分布のすべてについてある選択肢の期待効用が他方より高いときのみ前者を後者より選好する意思決定モデルを，また，同様のモチベーションから，Dubra et al.（2004）は，意思決定者が複数の効用関数を持ち，そのすべてについてある選択肢が他方より高く評価されるときのみ前者を後者より選好する意思決定モデルを提案している[(2)]。

本稿の目的は，筆者の近年の研究に触れながら，このようなアプローチで得られた数学的構造をさまざまな意思決定問題に応用することで新しい知見が得られることを示すとともに，これらの分野における将来の研究の発展可能性を概観することである。特に，本稿では次の 3 点に注目する。まず，第 2 節では，Koida（2017a）を紹介しながら，ナイト流不確実性モデルの一つであるマキシミン期待効用（maxmin expected utility, MMEU）理論（Gilboa and Schmeidler, 1989）と同様の数学的構造を持ち，確率的選択（stochastic choice）として解釈できるメニュー（選択肢集合）上の選好表現を特徴づける。次に，第 3 節では，Koida（2017b）を紹介しながら，追加的公理を要請することで，ナイト流不確実性の研究から派生した Dubra et al.（2004）の不完備選好モデルと Dekel

(1)　Bewley（1986）は「ナイト流不確実性モデル（ナイト流意思決定理論）」という用語を，（1）意思決定者が（単一の確率分布の代わりに）複数の確率分布を持っており（2）そのすべての確率分布における主観的期待効用が一方の選択肢が他方より高く評価するときのみ前者を後者より選好するという意味で用いている。しかし，本稿では，より広義な意味でこの用語を用い，必ずしも条件（2）が成立しない場合でも，条件（1）あるいはそれと（一定の仮定の下で）同値な条件が成立している状況をナイト流不確実性と呼ぶ。

(2)　Dubra et al.（2004）は，信念ではなく効用関数が複数存在するような状況を考慮しているため，厳密に言うと，これは（意思決定者が複数の信念に基づいて選択を行うという意味での）ナイト流不確実性モデルではない。しかし，このモデルは，ナイト流不確実性モデルの一つである Bewley（1986）に類似した数学的構造を持っており，信念または効用に関する不確実性に対して全体一致ルールで意思決定を行うという点は共通しているため，本稿では Dubra et al.（2004）を含めた「ナイト流不確実性に関連した数学的構造を持つモデル」を分析対象とする。

et al.（2001）が特徴づけたメニュー上の選好を互いに関連づけられることを示す。さらに，第 4 節では，Koida（2017c）を紹介しながら，Bewley（1986）の数学的構造を応用することで意思決定時間（decision time）の特徴づけができ，実験経済学や関連分野におけるさまざまな研究結果を説明できることを示す。最後に，これらをふまえ，第 5 節において全体を総括する。

2　確率的選択の特徴づけ

本節では，先行研究と異なるメニューの混合操作を仮定することで，アクト上の選好に関して得られた数学的構造をメニュー上の選好に応用できることを示した Koida（2017a）に基づき，このような分析の一例として，Gilboa and Schmeidler（1989）のマキシミン期待効用と同様の数学的構造を持つ，予想された確率的選択（anticipated stochastic choice, ASC）モデルを説明する。

まず，本節の結果に関する直観を述べよう。第 1 節で触れたように，ナイト流不確実性分析の特徴は，意思決定者が複数の信念（信念の集合）を持っていると仮定していることである。特に，Gilboa and Schmeidler（1989）のマキシミン期待効用は，信念の集合の中で期待効用を最小にするようなものに基づいて意思決定者が選択を行う状況を表現している。つまり，マキシミン期待効用に従う意思決定者は，直面するナイト流不確実性に対処するため，期待効用理論が想定するような単一の「シナリオ」（信念）ではなく，複数の「シナリオ」の中から最も悲観的なものに基づいて選択を行うのである。

一方，Selten（1975）の摂動（trembling hand）モデルのように，合理的でありながら，選択実行上の誤り（implementation error）を犯す可能性がある意思決定者を考えよう。このような確率的選択からもたらされる不確実性は，ナイト流不確実性で想定するような，自然や他者の行動など意思決定者の力が及ばないものではなく，意思決定者自身にとって制御できる（可能性がある）ものであり，後述するように，意思決定者が，利用可能な複数の選択肢上の確率分布から期待効用を最大化するものを選ぶような選択行動として記述することができる。

したがって，もし，アクト上の選好で得られた数学的構造をメニュー上の選好の分析に応用できることがわかっていれば，期待効用「最小化」を行うアクト上の選好表現であるマキシミン期待効用の数学的構造を利用して，期待効用「最大化」を行うメニュー上の選好表現を特徴づけることができる。このように，アクト上の選好とメニュー上の選好という異なる意思決定問題を関連づけることにより，数学的には同一の構造を持っていても，先行研究では得られなかった新しい知見が得られる可能性がある。これが，本節における議論の概要である。

以下では，まず，アクト上の選好上に定義されるマキシミン期待効用の説明を行い，その後，メニュー上の選好に定義される ASC モデルを説明した後，マキシミン期待効用と ASC の関係を述べる。なお，意思決定理論において，選好に対して要請されるさまざまな公理の含意や妥当性を議論

することは重要な手続きとされているが，本稿の目的は技術的詳細より基本的な着想を紹介することにあるため，以下では（次節以降も）一部の重要な公理を除いてその説明を省略する。

それでは，まずマキシミン期待効用の基本的な枠組みを説明しよう。B を有限な賞品（prize）の集合とし，ΔB を B 上のくじ（lottery），つまり確率分布の集合とする。さらに，S を有限な客観的状態空間（objective state space），L_0 をすべてのアクト（act），つまり S から ΔB への関数の集合とする。ここで，L_0 上の選好（順序関係）$\succsim$ を仮定する。

このとき，以下の定理が示される。

定理１（Gilboa and Schmeidler, 1989）
以下の２つの命題は同値である。

（a） 選択肢上の選好 $\succsim$ が弱順序，C-独立性，連続性，単調性，不確実性回避を満たす[(3)]。

（b） アファイン関数 $u : \Delta B \to \Re$ と非空閉凸な S 上の確率分布の集合 C が存在し，すべての f, $g \in L_0$ について

$$f \succsim g \iff \min_{P \in C} \sum_{s \in S} u(f(s))P(s) \geq \min_{P \in C} \sum_{s \in S} u(g(s))P(s)$$

が成立する。

さらに，$\succsim$ が非退行性[(4)]も満たす場合，上記の選好表現は一意であることも示される。

この選好表現は，将来の不確実性が信念，すなわち主観的確率分布の集合 C で表され，その中で（効用関数 u で評価される）期待効用を最小化するものを用いて意思決定を行う状況に対応する。つまり，前述したように，直面するナイト流不確実性に対処するため，マキシミン期待効用に従う意思決定者は複数のシナリオ（確率分布）の中から最も悲観的なものに基づいて選択を行うのである。

それでは，次に，メニュー（選択肢集合）内の選択肢上の確率的選択を特徴づける ASC の枠組みを説明しよう。まず，このモデルでは，アクト上の選好ではなくメニュー上の選好を考慮することに注意が必要である。上述した枠組みを緩用し，B を賞品の集合，ΔB をくじの集合とすると，有限なメニューの集合は ΔB のすべての部分集合の集合であるから，$\mathcal{A} = \mathcal{K}_0(\Delta B)$ と表される[(5)]。メニュー上の選好に関する先行研究である Dekel et al.（2001）では $\mathcal{A}$ 上に選好を定義しているが，本

（3） 原論文では，これらの公理はそれぞれ weak order, C-independence, continuity, monotonicity, uncertainty aversion と表記されている。

（4） 非退行性は，原論文では non-degeneracy と表記され，厳密な選好関係が成立する選択肢の組の存在を要請する公理である。

（5） 以下では，集合 X のすべての有限部分集合の集合を $\mathcal{K}_0(X)$，すべての（有限または無限な）部分集合の集合を $\mathcal{K}(X)$ と表記する。

節では，選択の対象となる領域により豊富な構造を与えるため，ランダムメニュー（メニュー上のくじ）の集合 $\Delta\mathcal{A}$ を考え，$\Delta\mathcal{A}$ 上に選好 $\succsim$ を定義する。なお，メニュー $x \in \mathcal{A}$ は確率 1 で x を生成するランダムメニュー $P \in \Delta\mathcal{A}$ と同一視できるため，以下では，必要に応じて，より直感的に理解しやすい（ノンランダムな）メニュー上の選好を用いてモデルの解釈を行う。

このモデルでは，このような選好の表現として以下のようなものを考える。

定義 1（Koida, 2017a）

以下の(a)～(d)の条件が成立するとき，$(u, \phi, S, \mathcal{M})$ を選好 $\succsim$ の ASC 表現と呼ぶ。

(a)　$S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ （すべての $n \in \mathbb{N}$ について $S_n = \{s_1, \ldots, s_n\}$）；

(b)　$\mathcal{M} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ （すべての $n \in \mathbb{N}$ について $\mathcal{M}_n \subseteq \Delta S_n$ は凸閉）；

(c)　$\phi : \mathcal{A} \times S \to \Delta B$ はすべての $x \in \mathcal{A}$ と $s \in S$ について $\phi(x, s) \in x$ を満たす；

(d)　アファイン関数 $u : \Delta B \to \Re$ が存在して，$\succsim$ はすべての $P \in \Delta\mathcal{A}$ に対して

$$V(P) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\bar{n}(P)}} \sum_{s \in S_{\bar{n}(P)}} \mu(s) \int_{x \in \mathcal{A}} u(\phi(x, s)) dP(x) \tag{1}$$

を満たす関数 $V : \Delta\mathcal{A} \to \Re$ で表現される（$\bar{n}(P)$ はランダムメニュー P が正の確率を与えるメニューにおける最大の基数を表す[(6)]）。

条件(a)は心理状態（mental state）の集合 S を，条件(b)は S 上の確率分布の集合 $\mathcal{M}$ を，条件(c)は心理状態に依存する選択関数（choice function）ϕ を，条件(d)はそれらを用いた選好表現を規定している。さらに，条件(d)で規定される選好表現は以下のように解釈できる。まず，メニュー x と心理状態 s が与えられたとき，$\phi(x, s)$ は x の中から選択される選択肢（くじ）を表し，そのときの効用は $u(\phi(x, s))$ となる。さらに，これをランダムメニュー P が生成する確率分布と心理状態上の確率分布 μ によって平均したもの，すなわち P と μ から生成される期待効用を考える。選好表現 V は，このような期待効用の最大値を与えるように $\mathcal{M}$ の中から μ が選ばれるものとして定義される。Koida（2017a）では，さらに上記の選好表現(1)において選択関数 ϕ が一定の性質を満たすものを正規な（regular）ASC と呼び，ASC の一意性も定義しているが，本稿ではそれらについての説明は省略する。

以上ではランダムメニューに対する選好表現を説明したが，一般のメニュー x に対しては，上記(1)の選好表現は以下のように書き直すことができる。

$$V(x) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{|x|}} \sum_{s \in S_{|x|}} u(\phi(x, s)) \mu(s) \tag{2}$$

---

(6)　厳密には $\bar{n}(P) = \max_{x \in \mathrm{supp}(P)} |x|$ で定義される。

これによると，意思決定者は，心理状態 s を直接制御することはできないものの，利用可能な心理状態上の確率分布の集合 $\mathcal{M}_{|x|}$ から μ を選択することで $u(\phi(x,\cdot))$ から生成される期待効用を最大にしていると解釈できる。

以上のような選好表現を公理化したものが以下の定理である。

定理 2（Koida, 2017a）
以下の 2 つの命題は同値である。

(a) メニュー上の選好 $\succsim$ が弱順序，完全相関メニュー混合，同じ基数のメニューに関するアルキメディアン連続性，S-独立性，劣ったメニューとのランダム化の回避，支配，領域の豊富さを満たす[(7)]。

(b) $\succsim$ が本質的に一意かつ正規な ASC $(u,\phi,S,\mathcal{M})$ で表現される。

ここで，定理 1 と定理 2 を比較しながら，マキシミン期待効用と ASC を比較しよう。定理 2 の選好表現(2)において，メニュー x が与えられたときの心理状態の集合 $S_{|x|}$ を客観的状態空間，$S_{|x|}$ 上の確率分布 μ を主観的確率分布（信念），$\phi(x,\cdot)$ をアクト $f: S_{|x|} \to \Delta B$ と解釈し，「最大」を「最小」に変えれば，この 2 つのモデルは数学的にはほぼ同一の構造を持つことがわかる。このような解釈が可能になるのは，Koida（2017a）は先行研究と異なるメニュー間の混合操作を仮定しているからである。メニュー上の選好に関する先行研究（たとえば Dekel et al.（2001））ではメニュー間の混合操作をミンコウスキー和で定義しているため，メニュー x と y を混合して得られるメニューは基数 $|x| \times |y|$ のメニューと同一視されるが，Koida のモデルでは（定理 2 の命題(a)で規定されている）完全相関混合によってメニュー間の混合操作を行うため，メニュー x と y を混合して得られるメニューは基数 $\max\{|x|,|y|\}$ のメニューと同一視される。したがって，特に $|x| = |y|$ の場合を考慮すれば，メニュー x と y の混合は状態空間 $S_{|x|}$ 上のアクトの混合と同一の数学的構造を持つ。

一方，マキシミン期待効用と ASC の数学的構造が基本的に同一であったとしても，前者はアクト上の選好で，後者はメニュー上の選好でそれぞれ特徴づけられているため，その解釈は大きく異なる。特に，以下に示すように，定理 2 で得られる ASC 表現は，完全合理性を含む幅広い状況を特殊ケースとして含み，一般に顕示選好の弱公理を満たさないため，さまざまな選択行動のアノマリーを説明することができる。

このことについて触れる際に，まず，選好表現(1)(2)における心理状態上の確率分布の集合 $\mathcal{M}$ は，さまざまな心理的効果に対する意思決定者の頑強性の指標だと解釈できることを指摘してお

(7) 原論文では，これらの公理はそれぞれ weak order, perfectly correlated mixtures of menus, Archimedean continuity for menus with constant cardinalities, S-independence, aversion to randomizations with inferior menus, dominance, richness of domain と表記されている。

きたい。たとえば，ASC $(u, \phi, S, \mathcal{M})$ を用いて以下のような順序効果（order effect）を考えてみよう[(8)]。今，メニュー $x = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ における選択肢に対して，客観的あるいは主観的な順序が与えられている（つまり，選択肢 β_1 は 1 番目，選択肢 β_2 は 2 番目，…，選択肢 β_n は n 番目，という順序でメニュー上に並んでいると意思決定者は認識している）とする。さらに，心理状態 $s_j (j = 1, \ldots, n)$ が生成されると，順序効果により意思決定者は j 番目の選択肢を無意識に選択してしまう（$\phi(x, s_j) = \beta_j$）としよう。

このような仮定はかなり強く感じられるかもしれないが，次に示すように，必ずしもそうではない。今，$\mathcal{M}_n = \Delta S_n$，すなわち，意思決定者がすべての心理状態上の確率分布を用いて期待効用最大化をすることができるとすれば，上記(2)の選好表現は

$$V(x) = \max_{\beta \in x} u(\beta) \tag{3}$$

となり，通常の間接効用関数として書き直すことができる。つまり，$\mathcal{M}_n$ が十分に大きければ，意思決定者は順序効果の影響を排除しながらメニューから任意の選択肢を選択することができ，心理状態の生成がただちに特定の選択肢の選択を導くという仮定はまったく制約的ではない。一方，$\mathcal{M}_n = \{\mu_n\}$，すなわち意思決定者が心理状態を間接的にすら制御することができず，単一の確率分布 μ_n に従って心理状態が生成される場合は，メニューからの選択肢の選択も確率的に行われ，選好表現(2)は

$$V(x) = \sum_{s \in S_{|x|}} u(\phi(x, s)) \mu_n(s) \tag{4}$$

となる。特に，$\mu_n(s_1) = 1$ であるなら，順序効果が最も極端な形で表れ，各選択肢の効用水準にかかわらずメニューにおける 1 番目の選択肢が確率 1 で選択される。以上から，$\mathcal{M}$ の大小は順序効果の影響への頑強性（あるいは脆弱性）の指標となっていることが示唆される[(9)]。

さらに，これらの中間の場合を考えてみよう。たとえば，意思決定者にとって，$1 - \epsilon$ の確率で S_n のすべての確率分布の集合 ΔS_n が利用可能であり，ϵ の確率である単一の確率分布 μ_n しか利用可能でない場合，つまり，$\mathcal{M}_n = \{(1 - \epsilon)\mu + \epsilon \mu_n : \mu \in \Delta S_n\}$ と表される場合，選好表現(2)は以下のような，2 つの選好表現(3)(4)の凸結合として書くことができる。

---

(8)　順序効果は，選択肢の評価がそれらを提示する順序の影響を受けるという心理的効果で，多数の研究結果によって実証されている（たとえば Murdock, 1962; Christenfeld, 1995; Bruine de Bruin, 2005）。

(9)　これは，Selten（1975）の摂動モデルや，より高い認知的能力が順序効果や誘引効果などの心理的効果の影響を軽減するという心理学における実証研究（Tentori et al., 2001; Sherman et al., 2008; Krueger and Salthouse, 2011）とも整合的である。

$$V(x) = (1-\epsilon)\max_{\beta \in x} u(\beta) + \epsilon \sum_{s \in S_{|x|}} u(\phi(x,s))\mu(s)$$

この選好表現は，確率 $1-\epsilon$ でメニュー x の選択肢の中で効用を最大にするものを選択し，確率 ϵ でメニュー x の選択肢を確率的に選択する行動，つまり，Selten（1975）が提案した摂動を表していると解釈することができる。

最後に, ASC は限定された注意（limited attention）の要因の一つである, 選択実行上の誤りを表現することもできる（Masatlioglu et al., 2012; Manzini and Mariotti, 2015）。たとえば, 以下のような誘引効果（attraction effect, Huber et al., 1982）を考えてみよう。α, β, δ_β を選択肢, $x = \{\alpha, \beta\}, y = \{\alpha, \beta, \delta_\beta\}$ をメニューとすると，誘引効果は，x から α が，y から β がそれぞれ（高確率で）選択されることを示唆する。これは，選択肢 β より α の方が選好されるのにもかかわらず，メニューに β より明らかに劣る δ_β を加えると，それが引き立て役となって選択肢 β がより魅力的に見えるため，メニュー y からは β が選択されるからだと解釈でき，顕示選好の弱公理に反している。[10]

このような選択行動は ASC を用いて表現することができる。まず，メニュー x, y は各メニューを確率 1 で生成するランダムメニューとそれぞれ同一視されるため，選好表現(2)によって評価できることに注意しよう。また，$S_2 = \{s_1, s_2\}, S_3 = \{s_1, s_2, s_3\}$ とし，各選択肢間の選好について $\{\alpha\} \succ \{\beta\} \succ \{\delta_\beta\}$，メニュー x からの選択について $\phi(x, s_1) = \alpha, \phi(x, s_2) = \beta$，メニュー y からの選択について $\phi(y, s_1) = \beta, \phi(y, s_2) = \delta_\beta, \phi(y, s_3) = \alpha$ と仮定する。このとき，十分に小さい実数 ϵ について $\mathcal{M}_2 = \{\mu \in \Delta S_2 : \mu(s_i) \leq 1-\epsilon \text{ for } i = 1, 2\}$ とおくと，最も選好される選択肢 α の選択確率を最大化するような確率分布 $\mu \in \mathcal{M}_2$ が(2)式において選ばれるため，メニュー x からは選択肢 α が確率 $1-\epsilon$，β が確率 ϵ で選択される。[11] 一方，十分に小さい実数 ϵ, ϵ' について $\mathcal{M}_3 = \{\mu \in \Delta S_3 : \mu(s_i) \leq 1-\epsilon \text{ for } i = 1, 2 \text{ and } \mu(s_3) \leq \epsilon'\}$ とおくと，最も選好される選択肢 α は（心理状態 s_3 に対応するため）高々 ϵ' の確率でしか選択されない一方，残りの確率 $1-\epsilon'$ は次善の選択肢である β にすべて割り当てるような確率分布 $\mu' \in \mathcal{M}_3$ が選ばれるため，メニュー y からは選択肢 β が確率 $1-\epsilon'$，α が確率 ϵ'（そして δ_β は確率 0）で選択される。つまり，「おとり」の選択肢 δ_β がメニュー y に含まれることで意思決定者の注意が β に引き付けられる一方，α は「死角」に入ってしまう（心理状態 s_3 に関連づけられる）ため，α は低い確率でしか選択されないのである。

これまで述べてきたように，Koida（2017a）の貢献の一つは，先行研究とは異なるメニュー間の混合操作（完全相関メニュー混合）を仮定することにより，アクト上の選好に関して得られた数学的

（10） 選択肢 δ_β は意思決定者の注意を選択肢 β に引き付ける「おとり」だと解釈できるため，誘引効果をおとり効果（decoy effect）と呼ぶ場合もある。

（11） この結果は，ほかの条件を変えずに，メニュー x からの選択について $\phi(x, s_1) = \beta, \phi(x, s_2) = \alpha$ としても変わらない。つまり，メニュー x からの選択は，（心理的状態との対応とは無関係に）選択肢 α, β の間の選好関係だけで決定される。

結果を，同一の数学的構造を持つメニュー上の選好の分析に応用できることを示した点にある。つまり，この方法を用いると，Schmeidler（1989）のショケ期待効用や Bewley（1986）の不完備選好モデルなど，これまでアクト上の選好に関して得られた数学的構造を用いてメニュー上の選好を分析することができ，本節で得たような新しい知見が得られる可能性がある。このような研究の方向性は，特に，完全合理的なモデルや ASC では分析することができない，選択行動のアノマリーのモデルを構築するために有益だと考えられる。

3 不完備選好と選好の柔軟性の関連づけ

本節では，選択肢上の選好とメニュー上の選好を同時に仮定し，追加的な公理を置くことにより，選択肢上の不完備選好（incomplete preference）とメニュー上の選好を同一の主観的状態空間（subjective state space）を持つものとして関連づけられることを示す。以下では，まず，選択肢上の選好表現である Dubra et al.（2004）の期待複数効用（expected multi-utility）とメニュー上の選好表現である Dekel et al.（2001）の序数的期待効用（ordinal expected utility）について説明し，その後，支配整合性（dominance consistency）と呼ばれる追加的な公理を置くことで両者を関連づけられることを示す。

結論を述べる前に，まずは直観を述べよう。今，意思決定者が見知らぬ場所への旅行の準備をしており，スーツケースの空きに余裕がないため，サングラスと傘のどちらか一方を選んで持っていかなければいけないとする。これらの選択肢は，その評価が目的地の天候という状態に依存するいわゆる状態依存財（state-contingent good）であり，もし目的地が晴れており，日差しが強いことが予想されるならサングラスを，雨が降ると予想されるなら傘を持って行くことが望ましい。しかし，もし意思決定者が目的地の天候に関する情報を持っておらず，どちらの選択肢がより有用になるかわからない場合，その場で選択を行わず，新たな情報が到着するまで待つという選択の先延ばし（choice deferral）を行うかもしれない（Bewley, 1986; Dubra et al., 2004; Kopylov, 2009）。一方，このとき，より大きいスーツケースを使えばサングラスと傘の両方を持っていけるならば，小さなスーツケースを使ってサングラスか傘の一方のみしか持って行けない場合よりも不確実性によりうまく対処できる可能性がある。したがって，大きいスーツケースが提供するメニュー（選択肢集合）は小さいスーツケースが提供するそれより高く評価されると考えられる。これが柔軟さへの選好（preference for flexibility）あるいは単調性（monotonicity）と呼ばれる性質の直観である（Kreps, 1979, 1992; Dekel et al., 2001）[(12)]。

(12) ここで述べられている単調性はメニューの大きさに関する単調性であり，定理 1 で要請されているアクトに関する単調性とは異なることには注意が必要である。

先行研究では，選択の先延ばしと柔軟性への選好は，それぞれ独立に，選択肢上の選好とメニュー上への選好の枠組みを用いて議論されてきた。しかし，前の段落に示した例では，この 2 つの行動はどちらも晴れまたは雨という同一の不確実性（状態空間）から生成されており，両者は互いに関連を持つことが示唆される。以下では，Koida（2017b）に従い，このような直観が裏づけられることを述べる。

まず，選択肢上の選好として，Dubra et al.（2004）が提案した期待複数効用を説明しよう。前節と同様に ΔB をくじの集合とし，ΔB 上に選好 $\succsim^*$ を定義する。ここで，B が有限であることから，期待効用関数 $v : \Delta B \to \Re$ は $|B|$-次元ユークリッド部分空間上の点と同一視される。さらに，Ergin and Sarver（2010）の正規化を用いて，すべての期待効用関数の集合を $\mathcal{U} = \{u \in \Re^B : \sum_{b \in B} u_b = 0, \sum_{b \in B} u_b^2 = 1\}$ と表す。

このとき，次のような定理が示される。

定理 3（Dubra et al., 2004）
以下の 2 つの命題は同値である。

(a)　選択肢上の選好 $\succsim^*$ が前順序，独立性，連続性を満たす。[13]

(b)　一意な凸閉集合 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ が存在して，すべての $\alpha, \beta \in \Delta B$ に対して，

$$\alpha \succsim^* \beta \iff \text{すべての } v \in \mathcal{V} \text{ に対して } v(\alpha) \geq v(\beta)。 \tag{5}$$

選好表現(5)を期待複数効用表現と呼び，意思決定者が集合 $\mathcal{V}$ で表される複数の期待効用関数を持ち，そのすべてが選択肢 α を選択肢 β より高く評価したとき，かつそのときのみ α を β より選好することを示す。これは，意思決定者が将来の嗜好に関する不確実性に対処するために，すべての $v \in \mathcal{V}$ による選択肢の評価が一致するときのみ選択を行う状況を表しており，このとき，2 つの選択肢 α と β の間の選択は決定的（decisive）であると言う。一方，複数の期待効用関数の評価が食い違う（たとえば，ある期待効用関数 v は α を β より厳密に高く評価するのに対して，v' は β を α より厳密に高く評価する）場合は選択は行われない。この場合を，2 つの選択肢間の選択は不決定的（indecisive）だと呼び，$\alpha \bowtie^* \beta$ と表記する。これが期待複数効用における選択の先延ばしに対応する。

次に，メニュー上の選好として，Dekel et al.（2001）が提案した選好表現を説明する。まず，前節におけるメニューの集合 $\mathcal{K}(\Delta B)$ の記号を用いて，$\mathcal{K}(\Delta B)$ 上に選好 $\succsim$ を定義する。本節では，このようなメニュー上の選好 $\succsim$ について，以下のような選好表現を考える。

---

(13)　原論文では，それぞれ preorder, independence, continuity と表記されている。

定義 2（Dekel et al., 2001）
メニュー上の選好 $\succsim$ が序数的期待効用表現 (S,g) を持つとは，$S \subseteq \mathcal{U}$ および $\mathcal{U}^* \equiv \{(\sup_{\beta \in x} u(\beta))_{u \in S} : x \in \mathcal{K}(\Delta B)\}$ 上で連続かつ厳密な増加関数 $g : \Re^S \to \Re$ が存在して，$\succsim$ が次のような式で表現できることである。

$$W(x) = g\left(\left(\sup_{\beta \in x} u(\beta)\right)_{u \in S}\right) \tag{6}$$

期待効用関数の部分集合 S は主観的状態空間（subjective state space）と呼ばれ，意思決定者が将来起こり得る状態として想定するものの集合だと解釈できる[14]。この選好表現において，関数 g は厳密な増加関数であることから，メニュー x が（集合の包含関係の意味で）拡大すると評価関数 $W(x)$ の値も増加する，すなわち，「$x \supseteq x'$ なら $x \succsim x'$」という柔軟性への選好あるいは単調性の公理が満たされる。

Dekel et al.（2001）および Dekel et al.（2007）は次のような定理において，このような選好表現の公理化を行っている。

定理 4（Dekel et al., 2001; Dekel et al., 2007）
以下の 2 つの命題は同値である。

（a） メニュー上の選好 $\succsim$ が弱順序，連続性，非自明性，弱独立性，単調性を示す[15]。
（b） $\succsim$ が本質的に一意な序数的期待効用表現を持つ。

彼らが定義する一意性の概念には，主観的状態空間 S の（ラベルの付け替え以外の）一意性も含まれている。したがって，彼らの定理は，メニュー上の選好の公理化を行うことで一意な主観的状態空間 S の特徴づけを行うものだと解釈できる。

さて，これまで選択肢上の選好表現として期待複数効用を，メニュー上の選好表現として序数的期待効用をそれぞれ説明してきたが，両者を比較して気づくのは，どちらも期待効用関数の集合——すなわち $\mathcal{V}$ と S——を用いているということである。つまり，これらの集合がともに将来の意思決定者の嗜好を表すものだと解釈すると，本節の最初で述べたように，この 2 つの選好表現には関連があることが示唆される。

（14） 厳密には，Dekel et al.（2001）は主観的状態空間を特に構造が与えられていない抽象的なものとして定義しているが，彼らは状態依存の期待効用関数によってメニュー内の選択肢を評価するような選好に焦点を当てているため，各状態を各状態における期待効用関数と同一視すると，主観的状態空間 S を期待効用関数の部分集合だと解釈することができる。
（15） 原論文では，それぞれ weak order, continuity, nontriviality, weak independence, monotonicity と表記されている。

したがって，以下では，Koida（2017b）に従い，追加的な公理を要請することでこのような直観が裏づけられることを示す。なお，他の節では，公理の詳細には立ち入らず，主に選好表現の説明を行うことで議論を進めてきたが，本節では，2 つの選好表現を結びつける公理の含意が特に重要であるため，その説明に多くの紙面を割くことにする。

まず，選択肢上の選好 $\succsim^*$ とメニュー上の選好 $\succsim$ をそれぞれ（何らかの公理を要請しない限り）独立に仮定する。次に，これらの選好を関連づける公理を定義するために，以下のような支配の概念を導入する。

定義 3（Koida, 2017b）
すべての $x \in \mathcal{K}(\Delta B)$ と $\alpha \in \Delta B$ に対して，以下のように定義する。

(a)　α は x に $\succsim^*$-支配される $\Longleftrightarrow$ $\beta \succsim^* \alpha$ となる $\beta \in \mathrm{conv}\,(x)$ が存在する。
(b)　α は x に $\succsim^*$-支配されない $\Longleftrightarrow$ 条件(a)のような β が存在しない。

この定義の直観は以下の通りである。まず，意思決定者は選択肢の選択に関して混合戦略を利用できる，つまり，直面するメニュー x の中から選択肢を確率的に選択することができるとしよう。このような操作から生成される選択肢の集合は x の凸包 $\mathrm{conv}\,(x)$ と同一視できる。もし，このような操作によって選択肢 α より（選択肢上の選好 $\succsim^*$ の意味で）選好される選択肢 β を生成できるのであれば，意思決定者は α を選択する代わりにメニュー x 上の選択肢を確率的に選択することでより高い効用を得られるため，選択肢 α がメニュー x（に含まれる選択肢）によって支配されると呼ぶことは自然であろう（条件(a)）。一方，このような操作で α より選好される β を生成することができないならば，このような支配関係は成立しない（条件(b)）。なお，この説明でわかるように，定義 3 における支配関係は選択肢上の選好 $\succsim^*$ を用いて選択肢とメニューの間の関係を特徴づけていることに注意が必要である。

さらに，次の公理は，このような支配関係を用いて選択肢上の選好とメニュー上の選好を関連づける。

公理 1（支配整合性, Koida, 2017b）
すべての $x \in \mathcal{K}(\Delta B)$ および $\alpha \in \Delta B$ について，以下の条件が成立する。

(a)　$x \cup \{\alpha\} \succ x \Longleftrightarrow \alpha$ が x に $\succsim^*$-支配されない。
(b)　$x \cup \{\alpha\} \sim x \Longleftrightarrow \alpha$ が x に $\succsim^*$-支配される。

条件(a)は，選択肢 α がメニュー x に $\succsim^*$-支配されないとき，かつそのときのみメニュー x に選択肢 α を付け加えることでメニューの評価が上昇することを，条件(b)は，α が x に $\succsim^*$-支配されるとき，かつそのときのみ x に α を付け加えてもメニューの評価は不変であることを示している。

定義3によると，選択肢 α がメニュー x に $\succsim^*$-支配されないならば，α より選好される選択肢を x 上の選択肢上の確率的選択によって生成することができないため，α は x に含まれる既存の選択肢にはない新たな価値を持ち，メニュー x に選択肢 α を付け加えることでメニューの評価が上昇すると仮定することは自然であろう。一方，α が x に $\succsim^*$-支配されるなら，x 上の選択肢上の確率的選択によって α より選好される選択肢を生成できるため，α が新たな価値を生むことはなく，x に α を付け加えてもメニューの評価が上昇することはない。これが支配整合性の直観である。

上述したように，支配関係の定義には選択肢上の選好 $\succsim^*$ が用いられているため，支配整合性は，支配関係を用いて選択肢上の選好 $\succsim^*$ とメニュー選好 $\succsim$ を関連づける公理になっている。また，この公理は，メニューへの選択肢の追加がメニューの評価を下げないことを保証するため，柔軟性への選好を含意し，また，支配関係の定義より，連続性の公理の下で，ランダム化への無差別性（indifference to randomization, Dekel et al., 2001），すなわち，メニュー x とその凸包 $\mathrm{conv}(x)$ が無差別であることも含意する。

次の定理は，ここで定義した支配整合性を含む複数の公理を要請することで期待複数効用と序数的期待効用を関連づけるものである。なお，以下では，簡単化のために，前順序（選択肢上の選好 $\succsim^*$ の場合）および弱順序（メニュー上の選好 $\succsim$ の場合），連続性，非退行性をまとめて「基本的性質（basic conditions）」と呼ぶ。

定理5（Koida, 2017b）
以下の2つの命題は同値である。

（a） 選択肢上の選好 $\succsim^*$ は基本的性質と独立性を，メニュー上の選好 $\succsim$ は基本的性質を，選好の組 $(\succsim^*, \succsim)$ は支配整合性を満たす。[16]

（b） $\succsim^*$ は一意な期待複数効用表現 $\mathcal{V}$ を，$\succsim$ は一意な序数的期待効用表現 (S, g) を持ち，$\mathcal{V} = S$ が成立する。

この定理において，特に命題(b)で $\mathcal{V} = S$，つまり期待複数効用における期待効用関数の集合と序数的期待効用における主観的状態空間が等しいことは，これらの選好表現が将来の選好に関する同一の不確実性を表現する，いわば表裏一体の関係であることを示しており，本節の最初に述べた直観を裏づけるものである。

また，定理5の命題(a)は，選択肢上の選好 $\succsim^*$ だけに独立性公理を要請し，メニュー上の選好 $\succsim$ には独立性を要請していないことにも注意する必要がある。つまり，メニュー上の選好 $\succsim$ に直接要請されるのは（独立性公理を含まない）基本的性質だけであり，命題(b)における序数的期待効用表現は，主に選択肢上の選好 $\succsim^*$ に要請された独立性公理と支配整合性の組み合わせから導出されて

（16） 原論文では，選択肢上の選好に要請される独立性を alternative independence と表記している。

いる。これは，序数的期待効用表現を持つメニュー上の選好 $\succsim$ が，複数期待効用表現を持つ選択肢上の選好 $\succsim^*$ と支配整合性によって基礎づけられることを示しており，これまで特に関連がないとされてきたこの2つの選好表現が密接に関わっていることを示している。

最後に，本節の分析の注意点と今後の研究の方向性について述べたい。まず，この節の分析では，メニュー上の選好表現として序数的期待効用という特定のクラスを考慮したが，このような選好表現は Dekel et al.（2001）における最も強い選好表現である加法的期待効用（additive expected utility）や，Epstein et al.（2007）の提案する複数信念（multiple prior）モデル，Ergin and Sarver（2010）の提案するコストを伴う熟考（costly contemplation）モデルなど幅広いクラスのメニュー上の選好表現を特殊ケースとして含んでいる。したがって，このような選好表現に着目するのは必ずしも制約的でない。次に，今後の研究の方向性としては次の2点が考えられる。第一に，本節と同様の分析を信念に関する不確実性の枠組みに適用することにより Bewley（1986）のナイト流不確実性モデルをメニュー選好と関連づけるものが挙げられる。第1節で述べたように，本来，ナイト流不確実性は信念に関する不確実性を分析対象としているため，期待効用関数に関する不確実性を特徴づけた Dubra et al.（2004）のモデルではなく，信念に関する不確実性を分析した Bewley のモデルを直接的にメニュー上の選好と関連づけることで，ナイト流不確実性に関するより豊富な含意が得られる可能性がある。第二に，本節のように柔軟性への選好を前提とする代わりに，小さいメニューをより大きいメニューより選好するという「コミットメントへの選好」を許容する方向での拡張も考えられる。なお，前述したように，支配整合性は柔軟性への選好を含意するため，このような拡張を行うためには支配整合性を緩和する必要がある。

4　意思決定時間の特徴づけ

本節では，不完備選好の数学的構造を応用することで意思決定時間（decision time）の特徴づけを行う[(17)]。以下では，最初に意思決定時間の説明を行った後，本節で用いる数学的構造をナイト流不確実性の枠組みで最初に特徴づけた Bewley（1986）のモデルを紹介し，それを動学的な多属性効用（multiattribute utility）の枠組みに応用した Koida（2017c）の多属性意思決定時間（multiattribute decision time）モデルを説明する。

まず，意思決定時間とは，ある選択を行うのに要する時間のことであり，その中にはさまざまな情報が含まれていると考えられることから，心理学や実験経済学において意思決定に関する指標として用いられている[(18)]。意思決定時間を特徴づける要因には，情報処理速度，戦略的状況に関する理

（17）　意思決定時間は反応時間（response time または reaction time）とも呼ばれる。

（18）　心理学や実験経済学における意思決定時間の適用例やその解釈については Spiliopoulos and Ortmann（2017）や Koida（2012）を見よ。

解の速度・深度，選択行動を物理的に実行するときの速度，内的葛藤（internal conflict）あるいは優柔不断さなどが挙げられる。第 3 節の旅行の準備をする意思決定者の例では，選択の先延ばしを行い，意思決定に時間をかける理由として，外部から新たな情報の到着を待つためだという解釈を述べたが，ほかにも，意思決定者は過去の記憶から得られる情報を整理する時間を確保するために選択の先延ばしをしたいと願うかもしれないし，食事の注文のように，内的葛藤や優柔不断さにより自分の好みをなかなか明確にすることができないかもしれない。したがって，意思決定理論で主に分析対象とする選択の結果に加えて，意思決定時間を分析することで，このような心理的・認知的な効果の影響をより精緻に分析できると考えられる。

本節では，このような意思決定時間を増加させる要因の中でも，特に内的葛藤あるいは優柔不断さに焦点を当てる。たとえば，豪華だが高価な乗用車 x と，安価だが平凡な乗用車 y の間で意思決定者が選択を行う場面を考えよう。もし，豪華さと経済性という 2 つの基準の相対的な重要性（ウェイト）が意思決定者にとって明確である（一意に定まっている）ならば，乗用車間に存在するトレードオフを評価し，選択を行うことは難しくない。しかし，2 つの基準に関するウェイトが不確実な場合，意思決定者は，将来実現する可能性があるウェイトの集合の中からどれが実現するか確信を持てないと考えられる。たとえば，集合に含まれるあるウェイトは豪華さを，もう一つは経済性をより重視するとすれば，実現するウェイトによって乗用車 x と y の評価が逆転するため，事前に選択を行うことは著しく困難であるかもしれない。このような場合には，できるだけ多くの情報を収集したり，得た情報を十分に吟味したりするために，意思決定者は選択を先延ばしし，時間をかけて意思決定を行うと考えることは自然であろう。これが内的葛藤による意思決定時間増加の直観である。

意思決定理論で一般に要請される完備性公理の下では，任意の選択肢の組について必ず選好関係が成立し，選択は即座に行われると考えられるため，このような選択の先送り行動を分析することは不可能である。したがって，意思決定理論の枠組みの中で内的葛藤による意思決定時間の増加を分析するためには，2 つの選択肢の間で選好関係が成立しない（どちらも他方より選好されない）場合を許す不完備選好を仮定する必要がある（Bewley, 1986; Dubra et al., 2004; Kopylov, 2009）。さらに，実験経済学や関連分野で得られた意思決定時間に関する知見を分析するためには，このような枠組みを複数時点の多属性効用モデルに拡張することが望ましい。これが，Koida（2017c）の基本的な着想である。

以下では，このような着想に基づき，まず，本節で適用する数学的構造の元となる Bewley（1986）を紹介し，それを動学的な多属性効用モデルに応用する。第 2 節の前半の枠組みを援用すると，Bewley（1986）は有限な客観的状態空間 S を仮定し，アクトの集合 L_0 上に定義される選好 $\succsim$ に関して以下のような定理を示している。

定理 6（Bewley, 1986）
以下の 2 つの命題は同値である。

（a） 選好 $\succsim$ が前順序，連続性，独立性，単調性，C-完備性を満たす。[19]

（b） 関数 $u : B \to \Re$ と S 上の確率分布の集合 $\mathcal{M}$ が存在し，すべての $f, g \in L_0$ に対して

$$f \succsim g \Longleftrightarrow \text{すべての}\mu \in \mathcal{M} \text{ に対して} \sum_{s \in S} \mu(s) E_{f(s)}[u(b)] \geq \sum_{s \in S} \mu(s) E_{g(s)}[u(b)]。\quad (7)$$

このモデルの解釈は以下の通りである。まず，u は効用関数を表し，$E_{f(s)}[u(b)], E_{g(s)}[u(b)]$ はアクト f, g と状態 s からそれぞれ生成される期待効用を表す。すると，選好表現(7)は，$\mathcal{M}$ に含まれるすべての信念 μ に対して，アクト f から生成される期待効用がアクト g から生成される期待効用以上であるとき，かつそのときのみ f は g より選好されることを示す。すなわち，このモデルは，意思決定者が状態に関する不確実性を恐れるがあまり，すべての信念に関して一方のアクトが他方より高い期待効用を与えない限り選択を行わない状況を表すと解釈することができる。

次に，このような数学的構造を多属性効用の枠組みに応用した動学モデルを考え，意思決定時間を特徴づける。自然数 n に対して，$I = \{1, \ldots, n\}$ を属性（たとえば乗用車であれば，経済性，排気量，デザイン等）の集合，すべての $i \in I$ に対して X_i を属性値の集合とする。また，$X = X_{i=1}^{n} X_i$ はこのような属性値の組の集合を表す。さらに，X 上のくじの集合 ΔX を考え，$p \in \Delta X$ を選択肢と呼ぶ。最後に，ΔX 上に時点 $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ における選好 $\succsim^{\tau}$ を定義する。直感的には，Bewley（1986）のモデルにおける各状態 $s \in S$ を属性 $i \in I$ と，各アクト $f \in L_0$ を属性値の組上のくじ（各属性に対して属性値のくじを与える関数）$p \in \Delta X$ と読み替えたものが本節で考慮するモデルである。[20]

このようなモデルは不完備選好を許容するため，時点 τ において選択肢 p と q の間で一方が他方より選好される場合だけでなく，どちらも他方より選好されない場合も考慮する必要がある。第 3 節と同様に，このような場合を p と q の間の選択は不決定的だと呼び，$p \bowtie^{\tau} q$ と書く。一方，ある時点で p と q のどちらかが他方より選好される場合を選択肢間の選択は決定的であると呼ぶ。

以下では，このように定義された選好の列 $\{\succsim^{\tau}\}_{\tau=0}^{\infty}$ に対して次のような選好表現を考える。

定義 4（Koida, 2017c）
以下の(a)～(c)の条件が成立するとき，選択肢上の選好の列 $\{\succsim^{\tau}\}_{\tau=0}^{\infty}$ が多属性意思決定時間表現を持つと言う。

（19） Bewley 自身はこれらの公理に特に名前を与えていないが，これらは一般に preorder, continuity, independence, monotonicity, C-completeness と表記される。

（20） 一般には，属性値の組上のくじ $p \in \Delta X$ と各属性に対して属性値のくじを与える関数は異なるが，Koida（2017c）が要請する「単一属性に関する正規性」の公理の下では両者は同一視される。

(a)　$u \equiv (u_1, \ldots, u_n)$（すべての $i \in I$ について，$u_i : X_i \to [0,1]$ は $\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) = 1, \min_{x_i \in X_i}$ $u_i(x_i) = 0$ であるような連続関数）；

(b)　$\Lambda \equiv \{\Lambda^\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$（すべての $\tau < \tau'$ について，$\Lambda^\tau \subseteq \Delta I$ は凸閉かつ $\Lambda^\tau \supseteq \Lambda^{\tau'}$）；

(c)　$\tau = 0, 1, 2, \ldots$ およびすべての $p, q \in \Delta X$ について，

$$p \succsim^\tau q \Longleftrightarrow \text{すべての}\lambda^\tau = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^\tau \text{に対して} \sum_{i \in I} \lambda_i E_{p|_i}[u_i(x_i)] \geq \sum_{i \in I} \lambda_i E_{q|_i}[u_i(x_i)]$$

なお，$\Delta I \equiv \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Re^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ for all } i \in I\}$ は $(n-1)$-次元単体を，$E_{p|_i}[u_i(x_i)], E_{q|_i}[u_i(x_i)]$（$i = 1, \ldots, n$）は属性 i における効用 $u_i(\cdot)$ と選択肢 p, q の周辺分布 $p|_i$, $q|_i$ からそれぞれ生成される，属性 i に関する期待効用を表す。また，これらの期待効用から生成される期待効用の n-次元ベクトルを $E_p[u(x)] \equiv (E_{p|_1}[u_1(x_1)], \ldots, E_{p|_n}[u_n(x_n)])$, $E_q[u(x)] \equiv (E_{q|_1}[u_1(x_1)], \ldots, E_{q|_n}[u_n(x_n)])$ と書く。

この選好表現の解釈は以下の通りである。まず，各属性 i に対して $[0,1]$ 区間に正規化された効用関数 u_i を定義し，それをまとめた効用ベクトルを u と書く（条件(a)）。次に，各時点 τ における各属性の効用のウェイトの集合を Λ^τ で表し，それをすべての τ について考えた列を Λ と書く。また，Λ^τ は時間の経過につれて（集合の包含関係の意味で）縮小する（条件(b)）。最後に，条件(c)はこれらを組み合わせた選好表現を表す。これによると，時点 τ において，選択肢 p に関する各属性の期待効用の加重平均が選択肢 q に関する各属性の期待効用の加重平均より $\Lambda^\tau \subseteq \Re^n$ に含まれるすべてのウェイトに対して大きいあるいは等しいとき，かつそのときのみ p は q より選好される。

Bewley（1986）と多属性意思決定時間モデルの相違点は以下の 3 点にまとめられる。第一に，前者は一時点における静学的モデルを考慮しているのに対して，後者は無限期間の動学的モデルを考慮している。第二に，前者では状態上の確率分布 μ を考慮しているのに対して，後者は（各時点 τ における）各属性の効用のウェイト λ^τ を考慮している。第三に，前者において効用関数 u は状態に依存しない（すべての状態 s に対して同一の効用関数を仮定する）のに対し，後者においては効用関数は属性に依存する（一般に効用関数 u_i は属性 i によって異なる）。特に，最後の点は，多属性効用の標準的な仮定と整合的である。[21]

次の定理では，このような選好表現の公理化を行っている。

定理 7（Koida, 2017c）
以下の 2 つの命題は同値である。

(a)　選好の列 $\{\succsim^\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$ が前順序，連続性，独立性，単一属性に関する正規性，単調性，整合性

(21)　多属性効用のサーベイについては Keeney and Raiffa（1993）を見よ。

を満たす。[22]

(b) $\{\succsim^\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$ は一意な多属性意思決定時間表現 (u,Λ) を持つ。

ここで，整合性公理とは，早い時点 τ である選択肢 p と q の間の選択が決定的であれば，その後の時点 τ' でも p と q の間の選択は決定的であること（すなわち，$\tau<\tau'$ に関して $p\succsim^\tau q$ なら $p\succsim^{\tau'} q$）を要請するものである（Kopylov, 2009）。したがって，この公理が満たされる限り，ある選択肢の組 (p,q) に対して，初めて選択が決定的になる時点 τ は一意に定まる。[23] この性質を用いて，本節では以下のように意思決定時間を定義する。

定義 5（Koida, 2017c）

すべての選択肢 $p,q\in\Delta X$ に対して，p と q の間の意思決定時間 $\tau^*(p,q)$ は，次の 2 つの条件を満たす非負整数である。また，このような非負整数が存在しない場合は $\tau^*(p,q)=\infty$ と定義する。

(a) すべての $\tau<\tau^*(p,q)$ について $p\bowtie^\tau q$。

(b) すべての $\tau\geq\tau^*(p,q)$ について $p\succsim^\tau q$，または，すべての $\tau\geq\tau^*(p,q)$ について $q\succsim^\tau p$。

特定の選択肢の組における意思決定時間の長さは，選択における内的葛藤の強さや情報探索にかかる時間の長さを示し，選択の困難さを表す指標だと解釈することができる。本節のモデルでは，すべての選択肢の組 (p,q) について意思決定時間 $\tau^*(p,q)$ が 0 に等しいならば，すべての時点 τ において選択は決定的となり，選好は完備になる。一方，すべての選択肢の組 (p,q) について意思決定時間 $\tau^*(p,q)$ が無限大になるのなら，すべての時点 τ において選択は不決定的となる。一般の多属性意思決定時間選好はその中間であり，任意の選択肢の組 (p,q) について意思決定時間が 0 と無限大の間の整数となる。

本節における意思決定時間を用いたアプローチの利点は，選択肢の間で選択が行われるかどうかだけではなく，その選択が「どれくらい」困難かを特徴づけられることである。たとえば，ある選択肢の組 (p,q) がほかの選択肢の組 (p',q') より意思決定時間が長いとき，前者における選択は後者より困難だと解釈することができるが，これは，ある一時点において選択肢間の選択が決定的あるいは不決定的な場合のみを考慮する先行研究とは大きく異なる。[24]

また，多属性意思決定時間モデルでは，ある選択肢の組における意思決定時間あるいは選択の困難さは以下のような幾何的な性質によって特徴づけられる。いま，すべての $\tau=0,1,2,\ldots$ につい

---

(22) 原論文においては, 公理はそれぞれ preorder, continuity, independence, single-attribute regularity, monotonicity, consistency と表記されている。

(23) 詳細については，Koida（2017c）の系 1 を見よ。

(24) 数少ない例外として，アクトの組について選択の困難さを定義した Minardi and Savochkin（2015）がある。

て $\lambda^{\infty} \in \Lambda^{\tau}$ となるような λ^{∞} が存在するとしよう。このとき，λ^{∞} は任意の時点 τ において選択肢の評価に用いられるため，λ^{∞} を長期的な効用のウェイトと呼ぶ。Koida（2017c）は，このような長期的な効用のウェイトから生成される超平面と選択肢の組 (p,q) から生成される期待効用のベクトル差 $E_p[u(x)] - E_q[u(x)]$ が（n-次元ユークリッド空間上で）なす角が小さいほど意思決定時間が長いことを示している。λ^{∞} から生成される超平面は長期的な無差別曲線に対応するため，この結果は，2 つの選択肢 p, q が上記の意味で「より無差別に近づく」ほど意思決定時間が長くなることを示しており，意思決定時間に関する多数の実証研究と整合的である（Berlyne, 1960; Festinger, 1964; Tversky and Shafir, 1992; Gabaix et al., 2006）。

さらに，各属性の効用に関するウェイトの集合 Λ は意思決定者が各時点において保持する異なる価値観の集合だと解釈できる。したがって，Λ が（集合の包含関係の意味で）拡大した場合，異なるウェイトによる選択肢の評価の不一致が生じやすくなり，一般に意思決定時間は増大する。特に，ある時点 τ において $\Lambda^{\tau} = \Delta I$ であれば，考え得るすべてのウェイトに対して選択肢の評価が一致したときのみ選択が行われるため，支配関係にある（一方の選択肢がすべての属性において他方より高い値を与える）場合を除いてすべての選択の組に対して選択が不決定的になる。一方，$\Lambda^{\tau} = \{\lambda\}$ であれば，効用のウェイトは一意に定まるため，通常の多属性効用関数に従って意思決定が行われ，すべての選択肢の組について選択は決定的となる。

最後に，多属性意思決定時間モデルは，行動経済学や心理学を含むさまざまな分野における意思決定問題に関する実証結果と整合的である。たとえば，Knoch et al.（2006）によると，最後通牒ゲームの実験において不公正な申し出を受けた受け手は，(1)ただちに申し出を拒否するグループと (2)しばらく考えた後に申し出を受け入れるグループに大別される。多属性意思決定時間モデルを用いると，この結果は次のように解釈することができる。まず，各グループに所属する意思決定者はそれぞれ自己利益と Fehr and Schmidt（1999）が仮定する公正さへの効用の加重平均に基づいて選択を行うとしよう。すると，前者のグループは，自己利益から得られる効用より公正さへの効用を重視するウェイトだけを持つため，躊躇なく不公正な申し出を拒否する一方，後者は，公正さを重視するウェイトに加え，自己利益を重視するウェイトも持つため，たとえ最終的には受け入れを選ぶとしても，自己利益と公正さの間の葛藤によってすぐに選択を行うことができないと考えられる。つまり，多属性意思決定時間モデルによると，Knoch et al.（2006）における選択や意思決定時間の違いはウェイトの集合 Λ の大きさの違いに帰着することができるのである。ほかにも，選択肢の組が引き起こす葛藤を分析した Tversky and Shafir（1992）や動学的な投資プロジェクトの選択を分析した Chabris et al.（2009）などの実験結果と多属性意思決定時間モデルの予測は整合的である。

なお，このような研究の今後の方向性としては，次の 2 点が考えられる。まず第一に，Koida（2017c）では，多属性効用の枠組みにおいて，与えられた選択肢の組に対する選択の困難さの指標を

定義し，それが意思決定時間と関連することを示しているが，同様のモチベーションから，Minardi and Savochkin (2015) は，ナイト流不確実性の枠組みにおいて不決定の段階 (grades of indecisiveness) と呼ばれる選択の困難さの指標を定義している。したがって，この 2 つの指標の関係を明らかにすることで，不完備選好の性質や選択の先延ばしに関する新たな知見が得られる可能性がある。第二に，本節で考慮した内的葛藤に着目して，実験経済学や関連分野における意思決定時間の分析をより精緻化する方向も考えられる。先行研究の多くは，意思決定時間の増加を，直面する状況や思考過程の複雑化によって生じる情報処理時間の増加と同一視しているが（たとえば Gabaix et al., 2006; Rubinstein, 2007, 2013），この解釈に基づくと，選択肢（および選択肢を特徴づける属性）の数が少ない場合に選択の先延ばしが生じる理由を十分に説明することができない。一方，多属性意思決定時間モデルでは，このような場合でも内的葛藤により意思決定時間が増加する可能性を示唆しているため，こうした観点による分析を新たに加えることで，実験結果のより豊かな含意が得られる可能性がある。

5　おわりに

本稿では，筆者自身の研究を紹介しながら，ナイト流不確実性の枠組みで用いられている数学的構造を近年注目されているさまざまな意思決定問題に応用することで新たな知見が得られることを示した。このアプローチの大きな特徴は，信念の集合，心理状態の集合，主観的状態空間，各属性の効用のウェイトの集合などで表現される意思決定問題における不確実性を互いに関連づけることにより，意思決定理論における既存のモデルに対する新しい解釈を与えることにとどまらず，確率的選択や意思決定時間などの他分野における研究成果を意思決定理論の枠組み内で厳密に議論できることにある。

同様のアプローチを適用することで，今後も経済学における新たな知見が得られる可能性がある。たとえば，Lehrer and Teper (2011) はナイト流不確実性の枠組みにおいて正当化可能性 (justifiability) という概念を用いて複数の信念の中から一つを適用して意思決定を行うモデルを提案している。このようなモデルを応用することにより，従来は経済理論で分析することができなかった限定合理的な選択行動の分析や既知の選択行動の再解釈が可能になることが期待される。

参 考 文 献

Berlyne, D.E. (1960), *Conflict, Arousal, and Curiosity*, NY: McGraw-Hill.

Bewley, T. (1986), Knightian uncertainty theory: Part I, Cowles Foundation Discussion Paper No. 807.

Bruine de Bruin, W. (2005), Save the last dance for me: Unwanted serial position effects in jury

evaluations, *Acta Psychologica* 118, 245–260.
Chabris, C.F., Laibson, D.I., Morris, C.L., Schuldt, J.P., Taubinsky, D. (2009), The allocation of time in decision-making, *Journal of the European Economic Association* 7, 628–637.
Christenfeld, N. (1995), Choices from identical options, *Psycholocial Science* 6, 50–55.
Dekel, E., Lipman, B., Rustichini, A. (2001), Representing preferences with a unique subjective state space, *Econometrica* 69, 891–934.
Dekel, E., Lipman, B., Rustichini, A., Sarver, T. (2007), Representing preferences with a unique subjective state space: A corrigendum, *Econometrica* 75, 591–600.
Dubra, J., Maccheroni, F., Ok, E.A. (2004), Expected utility theory without the completeness axiom, *Journal of Economic Theory* 115, 118–133.
Epstein, L., Marinacci, M., Seo, K. (2007), Coarse contingencies and ambiguity, *Theoretical Economics* 2, 355–394.
Ergin, H., Sarver, T. (2010), A unique costly contemplation representation, *Econometrica* 78, 1285–1339.
Fehr, E., Schmidt, K.M. (1999), A theory of fairness, competition, and cooperation, *Quarterly Journal of Economics* 114, 817–868.
Festinger, L. (1964), *Conflict, Decision and Dissonance*, CA: Stanford University Press.
Gabaix, X., Laibson, D., Moloche, G., Weinberg, S. (2006), Costly information acquisition: Experimental analysis of a boundedly rational model, *American Economic Review* 96, 1043–1068.
Gilboa, I., Schmeidler, D. (1989), Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics* 18, 141–153.
Huber, J., Payne, J., Puto, C. (1982), Adding asymmetrically dominated alternatives: Violations of regularity and the similarity hypothesis, *Journal of Consumer Research* 9, 90–98.
Keeney, R.L., Raiffa, H. (1993), *Decisions with Multiple Objects: Preferences and Value Tradeoffs*, Cambridge: Cambridge University Press.
Knoch, D., Pascual-Leone, A., Meyer, K., Treyer, V., Fehr, E. (2006), Diminishing reciprocal fairness by disrupting the right prefrontal cortex, *Science* 314, 829–832.
Koida, N. (2012), A survey on decision time, *RIMS Kokyuroku* 1788, 28–40.
Koida, N. (2017a), Anticipated stochastic choice, forthcoming in *Economic Theory*.
Koida, N. (2017b), Indecisiveness, preference for flexibility, and a unique subjective state space, *mimeo*, Iwate Prefectural University.
Koida, N. (2017c), A multiattribute decision time theory, *Theory and Decision* 83, 407–430.
Kopylov, I. (2009), Choice deferral and ambiguity aversion, *Theoretical Economics* 4, 199–225.
Kreps, D.M. (1979), A representation theorem for “preference for flexibility,” *Econometrica* 47, 565–577.
Kreps, D.M. (1992), Static choice in the presence of unforeseen contingencies, In: Dasgupta, P., Gale, D., Hart, O., Maskin, E. (eds.), *Economic Analysis of Markets and Games: Essays in Honor of Frank Hahn*, MA: MIT Press, 258–281.
Krueger, L.E., Salthouse, T.A. (2011), Influence of cognitive abilities and age on word recall performance across trials and list segments, *American Journal of Psychology* 124, 291–300.
Lehrer, E., Teper, R. (2011), Justifiable preferences, *Journal of Economic Theory* 146, 762–774.
Manzini, P., Mariotti, M. (2015), Imperfect attention and menu evaluation, *mimeo*, University of St. Andrews. http://www.st-andrews.ac.uk/~wwwecon/repecfiles/4/1319.pdf. Accessed 15 March 2016.
Masatlioglu, Y., Nakajima, D., Ozbay, E.Y. (2012), Revealed attention, *American Economic Review*

102, 2183–2205.
Minardi, S., Savochkin, A. (2015), Preferences with grades of indecisivenss, *Journal of Economic Theory* 155, 300–331.
Murdock, B.B. (1962), The serial position effect of free recall, *Journal of Experimental Psychology* 64, 482–488.
Rubinstein, A. (2007), Instinctive and cognitive reasoning: A study of response times, *Economic Journal* 117, 1243–1259.
Rubinstein, A. (2013), Response time and decision making: An experimental study, *Judgment & Decision Making* 8, 540–551.
Schmeidler, D. (1989), Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* 57, 571–587.
Selten, R. (1975), Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.
Sherman, J.W., Gawronski, B., Gonsalkorale, K., Hugenberg, K., Allen, T.J., Groom, C.J. (2008), The self-regulation of automatic associations and behavioral impulses, *Psychological Review* 115, 314–335.
Spiliopoulos, L., Ortmann, A. (2017), The BCD of response time analysis in experimental economics, forthcoming in *Experimental Economics*.
Tentori, K., Osherson, D., Hasher, L., May, C. (2001), Wisdom and aging: Irrational preferences in college students but not older adults, *Cognition* 81, B87–B96.
Tversky, A., Shafir, E. (1992), Choice under conflict: The dynamics of deferred decision, *Psychological Science* 3, 358–361.

要旨: 本稿では，ナイト流不確実性に関連する数学的構造を用いて，さまざまな意思決定問題の分析を行う。このようなアプローチの特徴は，意思決定者が複数の信念あるいは効用関数に基づいて選択を行うと仮定することである。特に，マキシミン期待効用の数学的構造を用いた確率的選択の特徴づけ，複数の期待効用関数を持つ不完備選好と柔軟性への選好の関連づけ，多属性効用の不完備選好を用いた意思決定時間のモデル化に着目し，将来の研究の発展可能性も概観する。

キーワード: ナイト流不確実性，確率的選択，柔軟性への選好，主観的状態空間，不完備選好，意思決定時間