慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	最尤法を用いた集約ルールの設計
Sub Title	Maximum likelihood social choice rule
Author	中村, 祐太(Nakamura, Yuta)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2017
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.109, No.4 (2017. 1) ,p.615(61)- 632(78)
JaLC DOI	10.14991/001.20170101-0061
Abstract	本稿では, 選択肢の集合上における"正しい"社会的順序を, 投票者の順序付けから見つけ出す方法(集約ルール)について考察する。本稿の目的は, 統計学の手法である最尤法を用いて新たな集約ルールを設計し, その性能を分析することである。本稿で設計する新たな集約ルールは, 投票者たちの順序付けプロファイルが与えられると, 正しい社会的順序のトップと考えるのが"最も尤もらしい"選択肢を選び取る。さらに, この集約ルールは正しい社会的順序のトップの選択肢を, 他のどのような中立的集約ルールよりも高い確率で選び取る。 This study is related to a Condorcetian problem of information aggregation that finds a "true" social ordering using individual orderings, that are supposed to partly contain the "truth". In this problem, we introduce a new maximum likelihood rule and analyze its performance. This rule selects an alternative that maximizes the probability of realizing individual orderings, conditional on the alternative being the top according to a true social ordering. We show that under a neutrality condition of alternatives, the probability that our rule selects the true top alternative is higher than that of any other rule.
Notes	特集 : 伝統的・ 非伝統的な観点からの規範経済学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20170101-0061

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」109 巻 4 号（2017 年 1 月）

最尤法を用いた集約ルールの設計

中村祐太 *

Maximum Likelihood Social Choice Rule

Yuta Nakamura *

Abstract: This study is related to a Condorcetian problem of information aggregation that finds a "true" social ordering using individual orderings, that are supposed to partly contain the "truth". In this problem, we introduce a new maximum likelihood rule and analyze its performance. This rule selects an alternative that maximizes the probability of realizing individual orderings, conditional on the alternative being the top according to a true social ordering. We show that under a neutrality condition of alternatives, the probability that our rule selects the true top alternative is higher than that of any other rule.

Key words: Condorcet jury theorem, Young's method, maximum likelihood method, scoring rule, social choice

JEL classifications: D63, D71.

本稿は，Nakamura, Y. "Maximum Likelihood Social Choice Rule," *Japanese Economic Review*, Vol. 66, pp. 271–284, 2015 を翻訳したものである。

This article is the author's own Japanese translation of the article published in *Japanese Economic Review* (Vol.66, No.2, pp.271–284) with the same title.

本稿を作成するに当たり，慶應義塾大学経済学部の坂井豊貴教授からは，多大なるご指導とご助言を賜った。ここに，感謝の意を表する。私と同じ坂井研究室の学生である大谷秀平氏，河田陽向氏，岡本実哲氏からは，本稿の細部にわたる有益なコメントを頂いた。また，本稿について報告を行った SAET Satellite Conference, "Normative Economics from the Traditional and Nontraditional View"（慶應義塾大学，2014 年 8 月），The Summer Meeting on Game Theory（下諏訪，2014 年 8 月），第 20 回 DC コンファレンス（福岡大学，2014 年 10 月）の参加者の皆様からは，刺激的な議論を頂き，多くの示唆を得た。ここに，謝意を表する。

* 慶應義塾大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Keio University

1　序論

本稿では，選択肢の集合上における “正しい” 社会的順序を，投票者の順序付けから見つけ出す方法（集約ルール）について考察する。我々の目的は，統計学的手法である最尤法を用いて新たな集約ルールを設計し，その性能を分析することである。本稿で設計する新たな集約ルールは，正しい社会的順序のトップの選択肢を他のどのような中立的集約ルールよりも高い確率で選び取る（定理 1）。

Condorcet（1785）は，ペアごとの多数決から生じる循環（コンドルセ循環）を除去する方法について考察し，具体的な循環の除去方法を提示した（コンドルセの方法）。しかし，Black（1958）が Condorcet（1785）の議論を整理して以降，コンドルセの方法が正常に機能するのは選択肢の数が 3 つ以下の場合のみであることが知られている。そこで，Young（1988）は，最尤法という統計学の手法を用いて集約ルールを定義し（ヤングの方法），その集約ルールがコンドルセの主張を体現することを示した。さらに，Young（1988）は，正しい社会的順序のトップと考えるのが “最も尤もらしい” 選択肢と，正しいと考えるのが “最も尤もらしい” 社会的順序のトップの選択肢とが，異なりうることを指摘した。ヤングの方法は，後者の選択肢を選び取るものである。

しかし，Young（1988）の研究では，投票者がある選択肢のペアを比較するときに「正しく判断できる」確率が，比較する選択肢のペアに関わらず一定であることを仮定していた。そこで，Conitzer and Sandholm（2005）及び Conitzer, Rognlie, and Xia（2009）は，この仮定を緩め，各投票者がもつ順序自体を確率要素とする，より一般的なモデルを構築した[(1)]。彼らは，この一般的なモデルのもと，正しいと考えるのが “最も尤もらしい” 社会的順序のトップの選択肢を選び取る集約ルールを定義し，その性能を分析した。一方で，我々が設計する「最尤法ルール」は，正しい社会的順序のトップと考えるのが “最も尤もらしい” 選択肢を選び取る。さらに我々は，この最尤法ルールが正しい社会的順序のトップの選択肢を，他のどのような中立的集約ルールよりも高い確率で選び取ることを証明する。また，正しい社会的順序のトップでない選択肢がどれも同様に望ましくない場合には，我々の最尤法ルールが選び取る選択肢は期待社会厚生を最大化する。

本稿は以下のように構成されている。2 節では我々のモデルを構築する。3 節では我々の主要定理を述べる。4 節ではいくつかの補足的な議論を行う。5 節では我々の結論を述べる。付録では補題の証明がなされる。

---

(1)　例えば，Ben-Yashar and Paroush（2001）や Drissi-Bakhkhat and Truchon（2004）もこれとは異なる一般化を行っている。

2　モデル

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ を有限な**選択肢**の集合，$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ を有限な**投票者**の集合とする。（X **上の**）**順序**とは，完備性，推移性及び反対称性を満たす X 上の二項関係 $\succsim_i$ のことをいう。[(2)] $\mathscr{R}$ をすべての順序からなる集合とする。$x \in X$ の $\succsim_i \in \mathscr{R}$ における**ランキング**を

$$r(x, \succsim_i) = \mid \{y \in X : y \succsim_i x\} \mid$$

により定義する。投票者たちの（順序付け）**プロファイル**とは，

$$\succsim = (\succsim_1, \succsim_2, \ldots, \succsim_n) \in \mathscr{R}^n$$

のことをいう。次に，投票者たちがもつ順序付けを 1 つの選択肢に集約する方法（集約ルール）を，2 種類定義する。

定義 1. 社会的選択対応とは，対応 $F : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ のことをいう。

定義 2. 社会的選択関数とは，関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ のことをいう。

任意の社会的選択関数 f と，任意の社会的選択対応 F について，$f(\succsim) \in F(\succsim)$ がすべての $\succsim \in \mathscr{R}^n$ について成り立つとき，f を F の**セレクション**という。

X から X 自身への全射 $\pi : X \to X$ を**置換**と呼び，Π をすべての置換からなる集合とする。記法の簡便化のため，任意の $\succsim_i \in \mathscr{R}$ と，任意の $\pi \in \Pi$ について，$\pi(\succsim_i)$ により，

$$x \succsim_i y \Longleftrightarrow \pi(x)\pi(\succsim_i)\pi(y) \quad \forall x, y \in X$$

となる順序を表すことにする。また，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ と，任意の $\pi \in \Pi$ について，

$$\pi(\succsim) \equiv (\pi(\succsim_1), \pi(\succsim_2), \ldots, \pi(\succsim_n))$$

と定義する。

本稿では，各選択肢を中立的に扱う社会的選択対応（関数）のみに焦点を当て分析を行う。

---

(2)　完備性：任意の $x, y \in X$ について，$x \succsim_i y$ もしくは $y \succsim_i x$ が成り立つ。推移性：任意の $x, y, z \in X$ について，$x \succsim_i y$ かつ $y \succsim_i z$ ならば，$x \succsim_i z$ が成り立つ。反対称性：任意の $x, y \in X$ について，$x \succsim_i y$ かつ $y \succsim_i x$ ならば，$x = y$ が成り立つ。

定義 3. 社会的選択対応 $F : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ が，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ と，任意の $\pi \in \Pi$ について，

$$F(\pi(\succsim)) = \pi(F(\succsim))$$

を満たすとき，F は**中立的**であるという。

定義 4. 社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ が，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ と，任意の $\pi \in \Pi$ について，

$$f(\pi(\succsim)) = \pi(f(\succsim))$$

を満たすとき，f は**中立的**であるという。

補題 1 は，中立的な社会的選択対応には，中立的なセレクションが存在すること保証している。

補題 1. 任意の中立的な社会的選択対応 $F : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ について， 中立的な F のセレクション $f : \mathscr{R}^n \to X$ が存在する。

証明：付録を参照。 □

本稿では，1 つの正しい社会的順序が確率的に決まる状況を考える。ここで，R_0 を正しい社会的順序を表す確率要素とする。また，Young（1988）に従い，ある順序が正しい順序である先験的確率は，すべての順序について等しいものと仮定する。つまり，任意の $R \in \mathscr{R}$ について，$\mathrm{P}(R_0 = R) = 1/m!$ とする。投票者たちは，どの順序が正しい順序であるかを知らないが，$\succsim_i \in \mathscr{R}$ を正しい順序と考えている。我々の目的は，正しい社会的順序のトップの選択肢を見つけることである。

ここで，各投票者の順序 $\succsim_i \in \mathscr{R}$ は，共通の確率分布に従い，確率的に独立であるとする。すると，$\mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R)$ は，$R \in \mathscr{R}$ が正しい社会的順序であるときに，投票者 i が $\succsim_i \in \mathscr{R}$ を正しい順序と考える確率を表す。ただし，$\sum_{\succsim_i \in \mathscr{R}} \mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R) = 1$ である。簡便化のため，$\mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R) > 0$ が，任意の $\succsim_i \in \mathscr{R}$ と任意の $R \in \mathscr{R}$ について成り立つものとする。また，各投票者の順序 $\succsim_i \in \mathscr{R}$ は確率的に独立であるため，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ と，任意の $R \in \mathscr{R}$ について，

$$\mathrm{P}(\succsim | \, R_0 = R) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R)$$

が成り立つ。

さらに本稿では，任意の $\succsim_i \in \mathscr{R}$，任意の $R \in \mathscr{R}$ 及び任意の $\pi \in \Pi$ について，

$$\mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R) = \mathrm{P}(\pi(\succsim_i) \mid R_0 = \pi(R))$$

が成り立つことを仮定する。この条件は，投票者がもつ順序と正しい社会的順序との関係が，選択肢に付けられた番号に依存しないことを示している。[3]

いま，

$$\mathscr{Q}(x) \equiv \{R \in \mathscr{R} : r(x, R) = 1\}$$

とすると，$x \in X$ が正しい社会的順序のトップであるときに，投票者たちがプロファイル $\succsim \in \mathscr{R}^n$ をもつ確率は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) &= \mathrm{P}(\succsim \text{ and } r(x, R_0) = 1 \mid r(x, R_0) = 1) \\
&= \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \mathrm{P}(\succsim \text{ and } R_0 = R \mid r(x, R_0) = 1) \\
&= \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \mathrm{P}(R_0 = R \mid r(x, R_0) = 1)\mathrm{P}(\succsim \mid R_0 = R \text{ and } r(x, R_0) = 1) \\
&= \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \mathrm{P}(R_0 = R \mid r(x, R_0) = 1)\mathrm{P}(\succsim \mid R_0 = R) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \mathrm{P}(\succsim \mid R_0 = R) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\succsim_i \mid R_0 = R) \qquad (1)
\end{aligned}$$

となる。ここで，3 つ目の等号はベイズの公式から従う。

補題 2. 任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$，任意の $x \in X$ 及び任意の $\pi \in \Pi$ について，

$$\mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) = \mathrm{P}(\pi(\succsim) \mid r(\pi(x), R_0) = 1)$$

が成り立つ。

証明：任意に $\succsim \in \mathscr{R}$，$x \in X$ 及び $\pi \in \Pi$ をとる。任意の $R \in \mathscr{R}$ について，

$$\begin{aligned}
r(\pi(x), \pi(R)) &= \mid \{y \in X : y\pi(R)\pi(x)\} \mid \\
&= \mid \{y \in X : \pi^{-1}(y)Rx\} \mid \\
&= \mid \{y \in X : yRx\} \mid \\
&= r(x, R)
\end{aligned}$$

---

(3) この条件は，Conitzer, Rognlie and Xia（2009）においても仮定されている。

なので，$R \in \mathscr{Q}(x)$ と $\pi(R) \in \mathscr{Q}(\pi(x))$ は同値である。よって，(1) から，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\pi(\succsim) \mid r(\pi(x), R_0) = 1) &= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R \in \mathscr{Q}(\pi(x))} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\pi(\succsim_i) \mid R_0 = R) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\pi(\succsim_i) \mid R_0 = \pi(R)) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\succsim_i \mid R_0 = R) \\
&= \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1)
\end{aligned}$$

となる。 □

次に，**最尤法ルール**を 1 つの社会的選択対応として定義する。

定義 5. 最尤法ルール $F_M : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ とは，

$$F_M(\succsim) = \arg\max_{x \in X} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1)$$

で定義される社会的選択対応のことをいう。

最尤法ルールが，各プロファイル $\succsim \in \mathscr{R}^n$ に対応させる非空部分集合 $F_M(\succsim) \subset X$ の各要素は，それを正しい社会的順序のトップと仮定すると，投票者たちがプロファイル $\succsim \in \mathscr{R}^n$ をもつ確率を最大化する。また，補題 2 から，最尤法ルール F_M は中立的であることがわかる。これ以降，F_M の中立的なセレクション f_M を任意に 1 つ取り，本稿を通して固定する。

3　最尤法ルールの性能

本節では，最尤法ルールの性能を分析する。まず初めに，任意の社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ と，任意の $x \in X$ に対して，$\mathscr{S}_f(x) \equiv \{\succsim \in \mathscr{R}^n : f(\succsim) = x\}$ と定義する。すると，$x \in X$ が正しい社会的順序のトップであるときに，社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ が x を選び取る確率は

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[f(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] &= \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_f(x)} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_f(x)} \sum_{R \in \mathscr{Q}(x)} \mathrm{P}(\succsim \mid R_0 = R)
\end{aligned}$$

で与えられる。我々の主要定理は，f_M が正しい社会的順序のトップの選択肢を，他のどのような社会的選択関数よりも高い確率で選び取ることを示している。

定理 1. 最尤法ルールのセレクションではない任意の社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ と，任意の $x \in X$ について，

$$\mathrm{P}[f(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] < \mathrm{P}[f_M(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1]$$

が成り立つ。

証明：最尤法ルールのセレクションではない社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ と $x \in X$ を任意に取り，$C \equiv \mathscr{S}_f(x) \cap \mathscr{S}_{f_M}(x)$ とする。すると，

$$\mathrm{P}[f(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] = \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_f(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) + \sum_{\succsim \in C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1),$$

$$\mathrm{P}[f_M(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] = \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) + \sum_{\succsim \in C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1)$$

が従う。したがって

$$\sum_{\succsim \in \mathscr{S}_f(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1) < \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1)$$

を示せば十分である。

最尤法ルールの定義から，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ について，

$$\mathrm{P}(\succsim \mid r(f(\succsim), R_0) = 1) \leq \mathrm{P}(\succsim \mid r(f_M(\succsim), R_0) = 1) \tag{2}$$

が成り立つ。f は最尤法ルールのセレクションではないので，ある $\succsim' \in \mathscr{R}^n$ で

$$\mathrm{P}(\succsim' \mid r(f(\succsim'), R_0) = 1) < \mathrm{P}(\succsim' \mid r(f_M(\succsim'), R_0) = 1) \tag{3}$$

となるものが存在する。いま，$\pi \in \Pi$ を $\pi(f_M(\succsim')) = x$ となるように定義しよう。すると，(3) と補題 2 から，

$$\mathrm{P}(\pi(\succsim') \mid r(\pi(f(\succsim')), R_0) = 1) < \mathrm{P}(\pi(\succsim') \mid r(\pi(f_M(\succsim')), R_0) = 1)$$

が成り立つ。さらに，f と f_M の中立性から

$$\mathrm{P}(\pi(\succsim') \mid r(f(\pi(\succsim')), R_0) = 1) < \mathrm{P}(\pi(\succsim') \mid r(f_M(\pi(\succsim')), R_0) = 1) \tag{4}$$

となる。ここで，$f_M(\pi(\succsim')) = \pi(f_M(\succsim')) = x$ となることに注意せよ。また，$f(\succsim') \neq f_M(\succsim')$ なので，$f(\pi(\succsim')) = \pi(f(\succsim')) \neq \pi(f_M(\succsim')) = x$ となる。したがって，$\pi(\succsim') \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ が成立

する。よって，(2) と (4) から，

$$\sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x)\setminus C} \mathrm{P}(\succsim |\, r(f(x), R_0) = 1) < \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x)\setminus C} \mathrm{P}(\succsim |\, r(x, R_0) = 1)$$

が成り立つ。

次に，

$$\sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x)\setminus C} \mathrm{P}(\succsim |\, r(f(x), R_0) = 1) = \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f}(x)\setminus C} \mathrm{P}(\succsim |\, r(x, R_0) = 1)$$

を示そう。$y \neq x$ となる各 $y \in X$ について，互換 $\tau^{yx} \in T$ を，$\tau^{yx}(y) = x$ かつ $\tau^{yx}(x) = y$ となるように定義する[(4)]。まず，任意の $\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ について，$\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \in \mathscr{S}_f(x) \setminus C$ となることを示す。任意に $\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ を取る。f の中立性から，

$$f(\tau^{f(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f(\succsim)x}(f(\succsim)) = x$$

が成り立つ。よって，$\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \in \mathscr{S}_f(x)$ である。

次に，$\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \notin C$ を示す。$\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ なので，$f_M(\succsim) = x$ かつ $f(\succsim) \neq x$ となる。f_M の中立性から，

$$f_M(\tau^{f(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f(\succsim)x}(f_M(\succsim)) = \tau^{f(\succsim)x}(x) = f(\succsim) \neq x$$

が成り立つ。よって，$\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \notin \mathscr{S}_{f_M}(x)$ が成り立ち，$\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \notin C$ となる。

したがって，関数 $g : \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C \to \mathscr{S}_f(x) \setminus C$ で

$$g(\succsim) = \tau^{f(\succsim)x}(\succsim)$$

となるものを定義できる。g が全単射であることを示そう。まず，g が単射であることを示す。$\succsim, \succsim'' \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ で $\succsim \neq \succsim''$ となるものを任意に取る。$f(\succsim) = f(\succsim'')$ のとき，$\succsim \neq \succsim''$ なので，

$$g(\succsim) = \tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \neq \tau^{f(\succsim)x}(\succsim'') = \tau^{f(\succsim'')x}(\succsim'') = g(\succsim'')$$

となる。よって，$f(\succsim) \neq f(\succsim'')$ となるときを考えれば十分である。$\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x)$ ならば，$f_M(\succsim) = x$ なので，f_M の中立性から

$$f_M(\tau^{f(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f(\succsim)x}(f_M(\succsim)) = \tau^{f(\succsim)x}(x) = f(\succsim)$$

が成り立つ。同様に，$f_M(\tau^{f(\succsim'')x}(\succsim'')) = f(\succsim'')$ を示すことができる。よって，

$$g(\succsim) = \tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \neq \tau^{f(\succsim'')x}(\succsim'') = g(\succsim'')$$

---

(4)　互換とは，置換 $\tau \in \Pi$ のうち，ある $x, y \in X$ が存在し，$\tau(x) = y$ かつ $\tau(y) = x$ となり，さらに $z \neq x$ かつ $z \neq y$ となる任意の $z \in X$ について，$\tau(z) = z$ となるものをいう。T をすべての互換からなる集合とする。

となる。したがって，g は単射である。

次に，g が全射となることを示す。任意に $\succsim \in \mathscr{S}_f(x) \setminus C$ を取る。まず先に，$\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim) \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ を示す。f_M の中立性から，$f_M(\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(f_M(\succsim)) = x$ となる。したがって，$\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim) \in \mathscr{S}_{f_M}(x)$ が成り立つ。ここで，$f(\succsim) = x$ かつ $f_M(\succsim) \neq x$ なので，f の中立性から，$f(\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(f(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(x) = f_M(\succsim) \neq x$ となる。したがって，$\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim) \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ が成り立つ。よって，

$$g(\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim)) = \succsim$$

となる。ここで，1 つ目の等号は，

$$f(\tau^{f_M(\succsim)x}(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(f(\succsim)) = \tau^{f_M(\succsim)x}(x) = f_M(\succsim)$$

から成り立つ。したがって，g は全射である。

すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(f(\succsim), R_0) = 1) &= \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C} \mathrm{P}(\tau^{f(\succsim)x}(\succsim) \mid r(\tau^{f(\succsim)x}(f(\succsim)), R_0) = 1) \\
&= \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C} \mathrm{P}(g(\succsim) \mid r(x, R_0) = 1) \\
&= \sum_{\succsim \in g(\mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C)} \mathrm{P}(g(g^{-1}(\succsim)) \mid r(x, R_0) = 1) \\
&= \sum_{\succsim \in \mathscr{S}_f(x) \setminus C} \mathrm{P}(\succsim \mid r(x, R_0) = 1)
\end{aligned}$$

となる。ここで，1 つ目の等号は命題 2 から，2 つ目の等号は g と $\tau^{f(\succsim)x}$ の定義から，3 つ目と 4 つ目の等号は g が $\mathscr{S}_{f_M}(x) \setminus C$ から $\mathscr{S}_f(x) \setminus C$ への全単射であることから成り立つ。 □

定理 1 の系として，最尤法ルールによる判断は，1 人の投票者による判断よりも確率的に正しいことがわかる。これを見るために，各 $i \in I$ について，$f_i : \mathscr{R}^n \to X$ を

$$f_i(\succsim) = x, \quad \text{where} \;\; r(x, \succsim_i) = 1$$

となるように定義する。

系 1. 任意の $i \in I$ と，任意の $x \in X$ について，f_i が最尤法ルールのセレクションになっていなければ，

$$\mathrm{P}[f_i(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] < \mathrm{P}[f_M(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1]$$

が成り立つ。

表 1　ボルダルールの勝者

voter 1\2	xyz	xzy	yxz	yzx	zxy	zyx
xyz	x	x	x, y	y	x	x, y, z
xzy	x	x	x	x, y, z	x, z	z
yxz	x, y	x	y	y	x, y, z	y
yzx	y	x, y, z	y	y	z	y, z
zxy	x	x, z	x, y, z	z	z	z
zyx	x, y, z	z	y	y, z	z	z

証明：定理 1 から直ちに従う。 □

4　補足的な議論

4.1　定理 1 についての補足

定理 1 では，f_M が中立的な社会的選択関数の中で最も望ましいものであることを示した。ここでは，なぜ我々が中立的な社会的選択関数のクラスに着目したのかを説明する。

4.1.1　社会的選択対応の比較の困難性

定理 1 では，最尤法ルールのある 1 つのセレクションと，任意の中立的な社会的選択関数とを比較した。ここで，社会的選択対応ではなく，社会的選択関数を比較したのは，社会的選択対応の比較が困難であるからである。これを見るために，最尤法ルールがボルダルールと一致する状況を考えよう[(5)]。いま，3 つの選択肢と 2 人の投票者が存在し，正しい社会的順序のトップの選択肢が x である状況を考える。表 1 は，各プロファイルに対するボルダルールの勝者（ボルダ勝者）を表している。ここで，xyz は x が y よりも高く評価され，y が z よりも高く評価され，x が z よりも高く評価されていることを示している。例えば，投票者 1 の順序が yxz であり，投票者 2 の順序が zyx であるならばボルダ勝者は y である。一方で，表 2 は，ボルダルールとは異なる中立的な社会的選択対応（改ボルダルールと呼ぶ）の勝者を表している。ここで，改ボルダルールと通常のボルダルールを比較すると，両者の勝者が異なっているのは対角線上のみであり，他のプロファイル上では両者の勝者は一致している。対角線上のプロファイルでは，改ボルダルールは 2 つの選択肢を選び取っており，通常のボルダルールはただ 1 つの選択肢を選び取っている。

社会的選択対応では，複数の選択肢が選び取られることから，これら 2 つのルールをうまく比較

(5)　Conitzer and Sandholm（2005）は，ある条件付き確率分布においては，最尤法ルールがボルダルールに一致することを示した。したがって，このような状況は存在する。4.2 節では最尤法ルールがあるスコアリングルールに一致するための十分条件を与える。

表 2　改ボルダルールの勝者

voter 1\2	xyz	xzy	yxz	yzx	zxy	zyx
xyz	x, y	x	x, y	y	x	x, y, z
xzy	x	x, z	x	x, y, z	x, z	z
yxz	x, y	x	x, y	y	x, y, z	y
yzx	y	x, y, z	y	y, z	z	y, z
zxy	x	x, z	x, y, z	z	x, z	z
zyx	x, y, z	z	y	y, z	z	y, z

表 3　ボルダルールの中立的セレクションの勝者

voter 1\2	xyz	xzy	yxz	yzx	zxy	zyx
xyz	x	x	x	y	x	x
xzy	x	x	x	x	x	z
yxz	x	x	y	y	x	y
yzx	y	x	y	y	z	y
zxy	x	x	x	z	z	z
zyx	x	z	y	y	z	z

できないことがある。これを見るために，両投票者が共に順序 xyz をもつ場合を考えよう。すると，ボルダルールでは x が勝者となり，改ボルダルールでは x と y が勝者となる。ここで，正しい選択肢は x であったので，このプロファイルに対しては，ボルダルールの方が改ボルダルールよりも望ましいと考えられる。次に，両投票者が共に順序 yxz をもつ場合を考えよう。すると，ボルダルールでは y が勝者となり，改ボルダルールでは x と y が勝者となる。したがって，このプロファイルに対しては改ボルダルールの方がボルダルールよりも望ましい。つまり，これら 2 つの社会的選択対応のうち，どちらが望ましいかは単純にはわからないのである。この議論は，社会的選択対応の比較の困難性を示している。

4.1.2　中立性の役割

定理 1 の証明では，中立性が重要な役割を果たしている。したがって，例えば匿名的な社会的選択関数のクラスについて同様の結果を得ることはできない。これを見るために，x を正しい社会的順序のトップの選択肢とし，すべてのプロファイルに対し x を選ぶ社会的選択関数を考えよう。ここで，この社会的選択関数は匿名的であることに注意しよう。そして，この社会的選択関数は，すべてのプロファイルに対して正しい選択肢を選び取るため，明らかに最尤法ルールよりも望ましい。

別の例を考えよう。いま，x を正しい社会的順序のトップの選択肢とし，表 3 と表 4 で表される社会的選択関数を考える。表 3 と表 4 の社会的選択関数は，それぞれボルダルールの匿名的なセレクションと改ボルダルールの匿名的なセレクションとなっている。これらの社会的選択関数は，プ

表 4　改ボルダルールの中立的セレクションの勝者

voter 1\2	xyz	xzy	yxz	yzx	zxy	zyx
xyz	x	x	x	y	x	x
xzy	x	x	x	x	x	z
yxz	x	x	x	y	x	y
yzx	y	x	y	y	z	y
zxy	x	x	x	z	x	z
zyx	x	z	y	y	z	z

ロファイル（yxz, yxz）と，プロファイル（zxy, zxy）でのみ異なっており，そこでは改ボルダルールの匿名的なセレクションのみが x を選び取っている。よって，改ボルダルールの匿名的なセレクションは，ボルダルールの匿名的なセレクションよりも望ましい。したがって，最尤法ルールがボルダルールに一致する場合には，その匿名的なセレクションが，匿名的な社会的選択関数のクラスの中で最も望ましいものにならなくなってしまう。

4.2　最尤法ルールとスコアリングルールの関係

この項では，最尤法ルールがスコアリングルールに一致する条件を明らかにする。**スコアベクトル**とは，m 次元ベクトル $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(m)) \in \mathbb{R}^m$ のことをいう[(6)]。$\succsim \in \mathscr{R}^n$ に対する $x \in X$ の $\alpha \in \mathbb{R}^m$ における**スコア**を

$$S_\alpha(x, \succsim) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(r(x, \succsim_i))$$

によって定義する。スコアベクトル $\alpha \in \mathbb{R}^m$ における **スコアリングルール**とは，社会的選択対応 $F_\alpha : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ で，任意の $\succsim \in \mathscr{R}^n$ に対して，

$$F_\alpha(\succsim) = \arg\max_{x \in X} S_\alpha(x, \succsim)$$

となるものをいう。

命題 1.　ある $R \in \mathscr{R}$ と，ある $x \in X$ で，$r(x, R) = 1$ となり，かつ $r(x, \succsim_i) = r(x, \succsim_i')$ ならば $\mathrm{P}(\succsim_i | R_0 = R) = \mathrm{P}(\succsim_i' | R_0 = R)$ となるものが存在すると仮定する。このとき，最尤法ルールは，あるスコアベクトルにおけるスコアリングルールとなる。つまり，ある $\alpha \in \mathbb{R}^m$ が存在し，

$$F_M(\succsim) = F_\alpha(\succsim) \quad \forall \succsim \in \mathscr{R}^n$$

となる。

---

(6)　後に，減少的なスコアベクトル $\alpha(1) \geq \alpha(2) \geq \cdots \geq \alpha(m)$ のみに絞って議論を行う。

証明：ある $R \in \mathscr{R}$ と，ある $x \in X$ で，$r(x,R) = 1$ となり，かつ $r(x,\succsim_i) = r(x,\succsim'_i)$ ならば $\mathrm{P}(\succsim_i|\ R_0 = R) = \mathrm{P}(\succsim'_i|\ R_0 = R)$ となるものが存在すると仮定する。任意に $\succsim \in \mathscr{R}^n$ を取る。各 $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ に対して，$\mathscr{U}_k \equiv \{\succsim'_i \in \mathscr{R} : r(x,\succsim'_i) = k\}$ とし，

$$\mathrm{P}_k \equiv \sum_{\succsim'_i \in \mathscr{U}_k} \mathrm{P}(\succsim'_i|\ R_0 = R) \tag{5}$$

と定義する。証明の冒頭における仮定から，$r(x,\succsim_i) = k$ ならば，

$$\mathrm{P}(\succsim_i|\ R_0 = R) = 1/(m-1)! \cdot \mathrm{P}_k$$

である。

各 $R' \in \mathscr{R}$ に対して，$\pi^{R'R} \in \Pi$ を $\pi^{R'R}(R') = R$ となるように取る。任意に $y \in X$ を取ろう。すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(m-1)!}\sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\succsim_i|\ R_0 = R') &= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\pi^{R'R}(\succsim_i) \mid R_0 = \pi^{R'R}(R')) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\pi^{R'R}(\succsim_i) \mid R_0 = R) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\mathrm{P}_{r(x,\pi^{R'R}(\succsim_i))} \qquad (6)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$R' \in \mathscr{Q}(y)$ であるならば，$\mathscr{Q}(y)$ の定義より $r(y,R') = 1$ となる。したがって，任意の $R' \in \mathscr{Q}(y)$ に対して，

$$r(\pi^{R'R}(y),R) = r(\pi^{R'R}(y),\pi^{R'R}(R')) = r(y,R') = 1 = r(x,R)$$

となり，$\pi^{R'R}(y) = x$ となる。すると，任意の $R' \in \mathscr{Q}(y)$ に対して，

$$r(x,\pi^{R'R}(\succsim_i)) = r(\pi^{R'R}(y),\pi^{R'R}(\succsim_i)) = r(y,\succsim_i)$$

が成り立つ。したがって，

$$\begin{aligned}
(6) &= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\mathrm{P}_{r(y,\succsim_i)} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}_{r(y,\succsim_i)} \qquad (7)
\end{aligned}$$

を得る。

最後に，$\alpha = (\log \mathrm{P}_1, \log \mathrm{P}_2, \ldots, \log \mathrm{P}_\mathrm{m}) \in \mathbb{R}^m$ とすれば，

$$F_M(\succsim) = \arg\max_{y \in X} \mathrm{P}(\succsim|\ r(y,R_0) = 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \arg\max_{y \in X} \frac{1}{(m-1)!} \sum_{R' \in \mathscr{Q}(y)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\succsim_i | \, R_0 = R') \\
&= \arg\max_{y \in X} \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{r(y, \succsim_i)} \\
&= \arg\max_{y \in X} \sum_{i=1}^{n} \log \mathrm{P}_{r(y, \succsim_i)} \\
&= \arg\max_{y \in X} \sum_{i=1}^{n} \alpha(r(y, \succsim_i)) \\
&= \arg\max_{y \in X} S_\alpha(y, \succsim) = F_\alpha(\succsim)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 □

系 2. 命題 1 の仮定が成り立つと仮定する。さらに，命題 1 の証明中の $(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ について $P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_m$ が成り立つとする。このとき，最尤法ルールは $\alpha(1) \geq \alpha(2) \geq \cdots \geq \alpha(m)$ を満たすあるスコアベクトル $\alpha \in \mathbb{R}^m$ におけるスコアリングルールと一致する。つまり，

$$
F_M(\succsim) = F_\alpha(\succsim) \quad \forall \succsim \in \mathscr{R}^n
$$

が成り立つ。

証明：命題 1 の証明から直ちに従う。 □

ここで，命題 1 の仮定が成り立つ例を挙げる。

例 1. n 人の投票者が，$X = \{x, y, z\}$ の中から，最も大きいボールを見つけようとしている状況を考えよう。x は直径 11.0 cm，y 直径 10.1 cm，z は直径 10.0 cm であるとする。このとき，ボールを大きい順に並べた「正しい社会的順序」は $R_0 = xyz$ となる。このとき，各投票者は y と z の大きさの区別がつかないであろう。よって，近似的に，$\mathrm{P}(xyz \mid R_0 = xyz) = \mathrm{P}(xzy \mid R_0 = xyz)$，$\mathrm{P}(yxz \mid R_0 = xyz) = \mathrm{P}(zxy \mid R_0 = xyz)$，$\mathrm{P}(yzx \mid R_0 = xyz) = \mathrm{P}(zyx \mid R_0 = xyz)$ と仮定することができる。すると，命題 1 の仮定が成り立つため，最尤法ルールはスコアベクトル

$$
(\log \mathrm{P}(xyz \mid R_0 = xyz), \log \mathrm{P}(yxz \mid R_0 = xyz), \log \mathrm{P}(yzx \mid R_0 = xyz)) \in \mathbb{R}^m
$$

におけるスコアリングルールと一致する。

4.3 期待社会厚生

定理 1 から，正しい社会的順序のトップ以外の選択肢が，等しく望ましくない場合には，最尤法ルールは期待社会厚生を最大化することがわかる。これを見るため，$R_0 = R$ のとき，$x \in X$ にお

ける社会厚生を，$W(r(x,R)) \in \mathbb{R}$ によって定義する。ここで $W(1) \geq W(2) \geq \cdots \geq W(m)$ とする。そして，$f : \mathscr{R}^n \to X$ における期待社会厚生を

$$\mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0))] = \sum_{R \in \mathscr{R}^n} \sum_{\succsim \in \mathscr{R}^n} W(r(f(\succsim), R))\mathrm{P}(\succsim | \, R_0 = R)\mathrm{P}(R_0 = R)$$

によって定義する。命題 2 は，正しい社会的順序のトップ以外の選択肢が等しく望ましくないときには，f_M における期待社会厚生が，他のどのような中立的社会的選択関数におけるそれよりも望ましくなることを示している。

命題 2. $W(1) > W(2) = \cdots = W(m)$ とする。このとき，最尤法ルールのセレクションでない任意の社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ について，

$$\mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0))] < \mathrm{E}[W(r(f_M(\succsim), R_0))]$$

が成り立つ。

証明：最尤法ルールのセレクションでない任意の社会的選択関数 $f : \mathscr{R}^n \to X$ を取り，$\bar{W} \equiv W(2) = \cdots = W(m)$ とする。任意に $x \in X$ を取る。$r(x, R_0) = 1$ であるときの f における条件付き期待社会厚生は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1] \\
&= \sum_{y \in X} \mathrm{E}[W(r(y, R_0)) \mid f(\succsim) = y \,\mathrm{and}\, r(x, R_0) = 1] \cdot \mathrm{P}[f(\succsim) = y \mid r(x, R_0) = 1] \\
&= W(1)\,\mathrm{P}[f(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] + \bar{W}\,\{1 - \mathrm{P}[f(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1]\} \qquad (8)
\end{aligned}$$

となる。

定理 1 から

$$\begin{aligned}
(8) &< W(1)\,\mathrm{P}[f_M(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1] + \bar{W}\,\{1 - \mathrm{P}[f_M(\succsim) = x \mid r(x, R_0) = 1]\} \\
&= \mathrm{E}[W(r(f_M(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1]
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって，

$$\mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1] < \mathrm{E}[W(r(f_M(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1]$$

となり，

$$\mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0))] = \sum_{x \in X} \mathrm{E}[W(r(f(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1]\mathrm{P}(r(x, R_0) = 1)$$

$$< \sum_{x \in X} \mathrm{E}[W(r(f_M(\succsim), R_0)) \mid r(x, R_0) = 1]\mathrm{P}(r(x, R_0) = 1)$$
$$= \mathrm{E}[W(r(f_M(\succsim), R_0))]$$

が従う。 □

5　結論

本稿では，各投票者の順序が，同一の確率分布に従う独立な確率要素であると仮定し，最尤法ルールの性能を分析した。我々の主要定理は，最尤法ルールが，正しい社会的順序のトップの選択肢を，他のどのような中立的な社会的選択関数よりも高い確率で選ぶことを示した。この結果は，最尤法ルールによる情報集約の正当性を保証している。確率要素について置いた，独立性の仮定の緩和がこれからの課題である。

付録：補題 1 の証明

中立的な社会的選択対応 F を任意に取り，

$$B_1 \equiv \{\succsim \in \mathscr{R}^n : |F(\succsim)| > 1\}$$

とする。もし，$B_1 = \emptyset$ ならば，F のただ 1 つのセレクションが所望の社会的選択関数となる。そこで，$B_1 \neq \emptyset$ の場合を考える。F は中立的なので，任意の $\succsim \in B_1$ と，任意の $\pi \in \Pi$ について，$\pi(\succsim) \in B_1$ が成り立つ。$\succsim' \in B_1$ と $x \in F(\succsim')$ を任意に取り，社会的選択対応 $F_1 : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ を

$$F_1(\succsim) = \begin{cases} F(\succsim) & \text{if } \nexists \pi \in \Pi, \succsim = \pi(\succsim'), \\ \{\pi(x)\} & \text{if } \exists \pi \in \Pi, \succsim = \pi(\succsim'), \end{cases}$$

によって定義する。

F_1 が中立的であることを示すため，任意に $\succsim \in \mathscr{R}^n$ と $\pi' \in \Pi$ を取る。もし，$\succsim = \pi(\succsim')$ となる $\pi \in \Pi$ が存在しないならば，明らかに，$\pi'(\succsim) = \pi(\succsim')$ となる $\pi \in \Pi$ も存在しない。したがって，

$$F_1(\pi'(\succsim)) = F(\pi'(\succsim)) = \pi'(F(\succsim)) = \pi'(F_1(\succsim))$$

が成り立つ。一方で，もし，$\succsim = \pi(\succsim')$ となる $\pi \in \Pi$ が存在するならば，$\pi'(\succsim) = \pi'(\pi(\succsim'))$ となる。したがって，

$$F_1(\pi'(\succsim)) = \{\pi'(\pi(x))\} = \pi'(\{\pi(x)\}) = \pi'(F_1(\succsim))$$

が従う。よって，F_1 は中立的である。

次に，

$$B_2 \equiv \{\succsim \in \mathscr{R}^n : |F_1(\succsim)| > 1\}$$

とする。F_1 の定義から，$\succsim' \notin B_2$ が成り立つ。もし，$B_2 = \emptyset$ ならば，F_1 のただ 1 つのセレクションが所望の社会的選択関数となる。そこで，$B_2 \neq \emptyset$ の場合を考える。F_1 は中立的なので，任意の $\succsim \in B_2$ と $\pi \in \Pi$ について，$\pi(\succsim) \in B_2$ が成り立つ。再び，任意に $\succsim'' \in B_2$ と $x' \in F(\succsim'')$ を取り，社会的選択対応 $F_2 : \mathscr{R}^n \twoheadrightarrow X$ を

$$F_2(\succsim) = \begin{cases} F_1(\succsim) & \text{if } \nexists \pi \in \Pi, \succsim = \pi(\succsim''), \\ \{\pi(x')\} & \text{if } \exists \pi \in \Pi, \succsim = \pi(\succsim'') \end{cases}$$

によって定義する。すると，以前と同様の議論から，F_2 が中立的であることがわかる。

同様の手順で，任意の $k \in \mathbb{N}$ について，B_k と中立的社会的対応 F_k を定義する。すると，明らかに，任意の $k \in \mathbb{N}$ について，

$$B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \cdots \supsetneq B_k$$

である。B_1 は有限集合であったから，ある $k' \in \mathbb{N}$ で，$B_{k'} = \emptyset$ となるものが存在する。すると，$F_{k'-1}$ のただ 1 つのセレクションが所望の社会的選択関数となる。 □

参 考 文 献

Ben-Yashar, R. and J. Paroush (2001) “Optimal Decision Rules for Fixed-size Committees in Polychotomous Choice Situations”, *Social Choice and Welfare*, Vol. 18, No. 4, pp. 737–746.

Black, D. (1958)[2011] *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press.

Condorcet, M. de (1785) *Essai sur l’application de l’analysea la probabilité des décisions renduesa la pluralité des voix*, Chelfea Publishing Company (1972).

Conitzer, V., M. Rognlie and L. Xia (2009) “Preference Functions That Score Rankings and Maximum Likelihood Estimation”, *Proceedings of the Twenty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 9, pp. 109–115.

Conitzer, V., and T. Sandholm (2005) “Common Voting Rules as Maximum Likelihood Estimators”, *Proceedings of the Twenty-First Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 145–152.

Drissi-Bakhkhat, M. and M. Truchon (2004) “Maximum Likelihood Approach to Vote Aggregation with Variable Probabilities”, *Social Choice and Welfare*, Vol. 23, No. 2, pp. 161–185.

Kemeny, J. G. (1959) “Mathematics without Numbers”, *Daedalus*, Vol. 88, No. 4, pp. 577–591.

Young, H. P. (1988) “Condorcet’s Theory of Voting”, *American Political Science Review*, Vol. 82, No. 4, pp. 1231–1244.

Young, H. P. (1995) “Optimal Voting Rules”, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 9, pp. 51–64.

要旨: 本稿では，選択肢の集合上における “正しい” 社会的順序を，投票者の順序付けから見つけ出す方法（集約ルール）について考察する。本稿の目的は，統計学の手法である最尤法を用いて新たな集約ルールを設計し，その性能を分析することである。本稿で設計する新たな集約ルールは，投票者たちの順序付けプロファイルが与えられると，正しい社会的順序のトップと考えるのが “最も尤もらしい” 選択肢を選び取る。さらに，この集約ルールは正しい社会的順序のトップの選択肢を，他のどのような中立的集約ルールよりも高い確率で選び取る。

キーワード: 社会的選択，コンドルセ循環，最尤法，コンドルセの方法，ヤングの方法