Title	立地モデルにおける一般意志の探索
Sub Title	A search for the general will in a spatial model
Author	坂井, 豊貴(Sakai, Toyotaka)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2017
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.109, No.4 (2017. 1) ,p.601(47)- 613(59)
JaLC DOI	10.14991/001.20170101-0047
Abstract	ジャン＝ジャック・ルソーは『社会契約論』第4篇2章で, 議会で意見が満場一致に近づくほど一般意志はより優勢になると述べた。本論ではこの古典的議論を, 選択肢集合のサイズが可変的な, 一次元立地モデルで再考する。そこでボルダ勝者とコンドルセ勝者とがほぼ一致し, 一般意志に合致する選択肢を疑いなく選び取れるための必要条件を見つけてゆく。この条件は, 選択肢の評価について投票者の間である種の共感が存在することを求めるが, 満場一致の要求よりはるかに弱いものだ。 In Book IV, Chapter II of The Social Contract, Jean-Jacques Rousseau argued that the nearer opinion approaches unanimity in an assembly, the greater is the dominance of the general will. The present study revisits this classical argument in a one-dimensional spatial model with variable agendas. The study obtains a sufficient condition under which the Borda winner and the Condorcet winner almost coincide so that we can unambiguously find an alternative that conforms to the general will. This condition describes the existence of certain sympathy among voters on the evaluation of alternatives, and it is much weaker than the unanimity requirement.
Notes	特集 : 伝統的・ 非伝統的な観点からの規範経済学
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20170101-0047

「三田学会雑誌」109 巻 4 号（2017 年 1 月）

立地モデルにおける一般意志の探索

坂井豊貴 *

A Search for the General Will in a Spatial Model

Toyotaka Sakai *

Abstract: In Book IV, Chapter II of *The Social Contract*, Jean-Jacques Rousseau argued that the nearer opinion approaches unanimity in an assembly, the greater is the dominance of the general will. The present study revisits this classical argument in a one-dimensional spatial model with variable agendas. The study obtains a sufficient condition under which the Borda winner and the Condorcet winner almost coincide so that we can unambiguously find an alternative that conforms to the general will. This condition describes the existence of certain sympathy among voters on the evaluation of alternatives, and it is much weaker than the unanimity requirement.

Key words: Condorcet winner, Borda rule, General will, Spatial model

JEL classifications: D71, D63.

著者は，貴重なコメントをいただいた匿名レフェリー，河田陽向，岡本実哲，および大谷秀平らの各氏に感謝する。本稿は，慶應義塾大学で開催されたコンファレンス「伝統的・非伝統的観点からの規範的経済学」で報告された。本研究は科研費（24220003）による支援を受けている。

本稿は *Japanese Economic Review*, Vol. 66, No. 2, June 2015, pp. 260–270 に掲載された Sakai, T. “A Search for the General Will in a Spatial Model”の邦訳である。ルソー『社会契約論』の引用においては，2010 年に白水社から刊行された作田啓一による同書の邦訳を用いた。

This article is the author’s own Japanese translation of the article published in *Japanese Economic Review* (Vol. 66, No.2, pp.260–270) with the same title.

* 慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University

1　はじめに

周知のとおり，一般意志はジャン＝ジャック・ルソーの『社会契約論』の核心にある概念である。[(1)] 一般意志は，市民たちが共通善に関して有する熟議的理性の一形態であり，制度としては法により実現される。[(2)] だが一般意志が意志するものを，各人は常に見つけられるわけではない。この困難を解決するために，各人は提案された法案が一般意志に適うか否かを，投票で判別する。大まかにいうと，そこで投票は集合知を見つける手段として用いられる。次の引用文はルソーの投票観をよく表している。

> ある法が人民の集会に提案されるとき，人民に問われていることは，正確には，彼らが提案を承認するか拒絶するかということではなくて，それが人民の意志たる一般意志に合致しているかいないか，ということなのである（ルソー（1762）『社会契約論』第 4 篇 2 章）。

年齢的にはルソーより 30 歳ほど若いコンドルセ侯は，パリ王立科学アカデミーの終身書記であった。[(3)] ルソーの投票観を受けて彼は，「真実」を見つけるためにはどの投票ルールが優れているかを分析した。[(4)] コンドルセ陪審定理についての議論でよく見られるように，選択肢が 3 つだけのときは多数決ルールで構わない。[(5)] だが選択肢が 3 つ以上のとき多数決ルールではサイクルが起こりうる。それゆえコンドルセは，彼の有名な著作のなかで，サイクルを合理的に崩す方法を分析した（Condorcet 1785/1972）。今日では，彼が実質的に着想していたのは最尤法であることが知られている（Young 1988）。

コンドルセの方法で最も特徴的なのは，ペア比較により選択肢の社会的順序を決めることだ。[(6)] 実際コンドルセは，スコアリングルールを，コンドルセ勝者がいてもそれを選べないことがあるという理由により，否定している（Condorcet 1785/1972, pp. clxxvij-clxxviij）。

（1）　J.-J. Rousseau（1762）*Du contrat social* について，G. D. H. Cole による英訳 *The Social Contract and Discourses*（1973）を参照。

（2）　一般意志およびルソーの政治哲学については Rawls（2008）を参照されたい。また，Sreenivasan（2000）と Douglass（2013），およびそれらの参考文献も参照されたい。

（3）　社会的選択理論の黎明期の歴史については Black（1958）と McLean and Hewitt（1994）を参照されたい。

（4）　Grofman et al.（1983），Grofman and Feld（1988），および Young（1988）を参照されたい。

（5）　Grofman et al.（1983）はコンドルセ陪審定理の歴史を解説し，Ladha（1992）は同定理の詳細な分析を行っている。

（6）　Arrow（1951, 1963）の「二項独立性」条件は，そうしたコンドルセのアプローチの定式化のひとつと見ることができる。

だがスコアリングルール，なかでもボルダルール（Borda 1784）をそう単純に否定することは，現代の社会的選択理論の立場からは正当化しがたい。例えば，パレート安定性（Sen 1977），満場一致に最も近いこと（Farkas and Nitzan 1979），ペア比較での平均得票率の最大化（Black 1976; Coughlin 1979），さらにコンドルセ敗者を選ばないこと（Fishburn and Gehrlein 1976; Okamoto and Sakai 2013）など，数々の望ましい性質をボルダルールが満たすと示されている。またコンドルセ勝者を選ぶことには批判もある。なぜならペア比較だけで選ぶことは，個人の選好の推移性から得られる情報を完全に無視してしまうからだ。Saari（2006）がいうように，コンドルセ勝者とボルダ勝者のどちらがよいかは 2 世紀にわたる問いである。どちらの勝者も魅力はあるが，両者は競合している。

この不確定性は，ルソーの投票観に関連して深刻な問題を引き起こす。真実を見つけ出そうとするときに，これら 2 つの勝者のどちらを選ぶかが結果を変えるからだ。だが逆にいうと，両者が一致すれば，それこそが一般意志に適う選択肢だと判断するのは妥当であろう。それゆえ一般意志に適う選択肢を見つけるうえでは，これら 2 つの勝者が一致する条件を知るのは重要である。これについて本稿では，コンドルセ勝者が常に存在する（Black 1948a, b），投票者がユークリッド選好（Downs 1957）を持つ一次元立地モデルで分析を行う。このモデルではコンドルセ勝者が分析の焦点となることがほとんどだが，前述した数々の望ましい性質により，ボルダ勝者も十分な注目に値するものだ。このリタラチャーでは，戦略的操作への頑健性がコンドルセ勝者に注目する主な理由だが（Black 1948a; Dummett and Farquharson 1961; Moulin 1980），真実の探求というわれわれの分析においては，それは想定する問題状況からしてさほど重要ではない。

本稿で重要な条件は，ユークリッド選好プロファイル上で定義される共感条件というものだ[(7)]。それは，投票者の間である種の強い共感があることを表す。「一番左」の投票者は，「一番右」の投票者がよいと考える選択肢を，最極左の選択肢よりも支持する。また「一番右」の投票者は「一番左」の投票者がよいと考える選択肢を，最極右の選択肢よりも支持する。この条件は強いものではあるが，ルソーは，意見が満場一致に近づくほど一般意志はより優勢になると述べている（『社会契約論』第 4 篇 2 章）。ルソーによる満場一致のような要求に比べれば，われわれの共感条件ははるかに弱い。本稿の主要定理は，共感条件のもとでは，どのような大きさのアジェンダであっても，ボルダ勝者が，コンドルセ勝者か次点コンドルセ勝者のいずれかであることを示している。この結果は，ボルダルールが通常どおり定義できるよう有限個の選択肢を持つアジェンダで，またアジェンダのサイズが可変である，新しいモデルで示されている。アジェンダが豊かになるほど，ボルダ勝者の集合は中位投票者の最適選択肢という一点に収束していく。

技術的な観点からは，Feld and Grofman（1988）による研究がわれわれの研究に最も関係が深い。

（7）　この条件自体は単峰的選好プロファイル上で定義できる。ユークリッド選好プロファイルはどれも単峰的だが，逆は成り立たない。本稿ではユークリッド選好プロファイルに焦点を絞る。

彼らの幾何学的な議論は，アジェンダが連続区間でそのサイズが十分大きいならば，ボルダルールを選択肢の連続体が扱えるようううまく定義するかぎり，ボルダ勝者がただひとつ存在してコンドルセ勝者と一致することを示している。本稿は有限個の選択肢からなるアジェンダを扱っているが，共感条件は彼らの議論から着想を得ている。われわれの結果も彼らの結果も論理的には独立している。ただし彼らの結果は，われわれの結果においてアジェンダのサイズが大きくなったときの極限のケースとして見ることができる。一方で，彼らは共感も一般意志も扱っていないため，両研究は概念的にはあまり関係していない。本稿では，共感条件と投票結果との関係を説明する例もいくつか与えている。

2　アジェンダが可変的な空間モデル

高々有限個の選択肢からなり，サイズが可変的なアジェンダを伴う，一次元立地モデルを導入しよう。**投票者**の集合を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ で表し，あるひとつの議題に関する潜在的な**選択肢**の集合を $[0, 1]$ で表す。各 $i \in I$ は，$[0, 1]$ 上に $t_i \in [0, 1]$ を最適選択肢とするユークリッド選好 $R(t_i)$ を持っており，それは

$$xR(t_i)y \iff |t_i - x| \leq |t_i - y| \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

により表される。$R(t_i)$ の対称，非対称部分をそれぞれ $I(t_i)$，$P(t_i)$ で表す。一般性を失うことなく

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$$

と置く。ルソー的な投票状況を考えるうえでは，各 i は利己的な経済主体というよりは，啓蒙された市民と理解される。このとき t_i は i の効用を最大化する点ではなく，i の理性的な判断と解釈すべきである[(8)]。ただし表現の単純化のために，i を投票者，t_i を i の最適選択肢と呼ぶ。

アジェンダは，$[0, 1]$ の非空な有限部分集合 X である。アジェンダの集合を $\mathscr{X}$ で表す。次のアジェンダの点列に注目しよう。

$$\begin{aligned}
&X_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \\
&X_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\} \\
&\cdots \\
&X_k = \left\{0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \cdots, \frac{2^k - 2}{2^k}, \frac{2^k - 1}{2^k}, 1\right\} \\
&\cdots.
\end{aligned}$$

（8）　Rousseau（1762）の第 4 篇 1 章を参照されたい。

すべての $k \in \mathbb{N}$ について $|X_k| = 2^k + 1$ であることに注意されたい。ただし $\mathbb{N}$ は自然数の集合を表す。この点列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考えるのには少なくともふたつの理由がある。ひとつは，どの X_k においても選択肢が対称的に与えられており，左と右の中立性を保証するからである。もうひとつは，この点列が単調的に増えており，アジェンダの豊富性が果たす役割を理解するのに有用だからである。これは $[0,1]$ やその部分集合といった固定的なアジェンダを扱うだけではできないことに注意されたい。第 3.3 節では議論を一般化してより広いアジェンダのクラスを扱うが，議論の本質を理解するには $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考えれば十分である。

タイケースによる議論の不要な複雑化を防ぐべく，次の 2 条件を仮定する。第 3.3 節ではどちらの条件も落としている。

仮定 1：n は奇数である。

仮定 2：各 $i \in I$ について，$t_i \notin \cup_{k\in\mathbb{N}} X_k$。

仮定 1 は，$t_{\frac{n+1}{2}}$ が $t_1, t_2, \ldots, t_n$ における唯一の中位選択肢であることを意味する。今後，$t_m \equiv t_{\frac{n+1}{2}}$ と表し，$t_i = t_m$ である投票者 i を**中位投票者**と呼ぶ。仮定 2 は，各投票者 i がすべての X_k に対して線形選好を持っており，$x \neq y$ であるすべての $x, y \in X_k$ に対して，$xP(t_i)y$ か $yP(t_i)x$ のいずれかが成り立つことを意味する。

各 X_k において，投票者の意志に関する定義を導入する。

- 各 i について，X_k における i の最適選択肢を $t_i(X_k) \in X_k$ で表す。つまり

$$t_i(X_k)P(t_i)x \quad \forall x \in X_k$$

  である。Black（1948a,b）の画期的な研究以降，中位投票者の最適選択肢は，ペアごとの多数決で他のすべての選択肢に勝つことがよく知られている。つまり

$$|\{i \in I : t_m(X_k)P(t_i)x\}| > |\{i \in I : xP(t_i)t_m(X_k)\}| \quad \forall x \in X_k \setminus \{t_m(X_k)\}$$

  が成り立つ。$t_m(X_k)$ を X_k における**コンドルセ勝者**と呼ぶ。
- X_k において，中位投票者が次点とする選択肢を $t'_m(X_k) \in X_k$ で表す。つまり，$t_m(X_k)P(t_m)t'_m(X_k)$ かつ

$$t'_m(X_k)P(t_m)x \quad \forall x \in X_k \setminus \{t_m(X_k)\}$$

  である。このときユークリッド選好の仮定は，$t'_m(X_k)$ がペア多数決ですべての $x \neq t_m(X_k)$ に勝つことを意味する。つまり

$$|\{i \in I : t'_m(X_k)P(t_i)x\}| > |\{i \in I : xP(t_i)t'_m(X_k)\}| \quad \forall x \in X_k \setminus \{t_m(X_k), t'_m(X_k)\}$$

が成り立つ。$t'_m(X_k)$ を X_k における**次点コンドルセ勝者**と呼ぶ。

- 各 i と各 $x \in X_k$ に対して

$$r(t_i, X_k, x) \equiv |\{y \in X_k : xR(t_i)y\}|$$

を i にとっての X_k における x の順位とする。$x \in X_k$ の**ボルダ得点**は

$$b(X_k, x) \equiv \sum_{i \in I} r(t_i, X_k, x)$$

で与えられ，$x \in X_k$ のボルダ得点が最も高いとき x を X_k における**ボルダ勝者**と呼ぶ。つまり

$$b(X_k, x) \geq b(X_k, y) \quad \forall y \in X_k$$

である。X_k におけるボルダ勝者の集合を $B(X_k)$ で表す。

明らかに，$t_m(X_k)$，$t'_m(X_k)$，および $B(X_k)$ はすべて非空である。

3　分析

3.1　共感条件

ここで，投票者の判断についてある種の類似性を表す，本稿の中心的概念を導入する。**共感条件**が満たされているとは

$$t_n R(t_1) 0 \text{ かつ } t_1 R(t_n) 1$$

が成り立つことをいう。この条件が意味することは明らかである。一番左の投票者 t_1 は，一番右の投票者 t_n の最適選択肢を，左端の選択肢 0 以上に好む。そして一番右の投票者 t_n は，一番左の投票者 t_1 の最適選択肢を，右端の選択肢 1 以上に好む。共感条件は強い条件ではあるが，満場一致の要求よりはるかに弱いことには注意されたい。例えば，すべての $i \in I$ について $\frac{1}{3} \leq t_i \leq \frac{2}{3}$ であるならば，共感条件は満たされている。

共感条件の理解に有用な例を 3 つ挙げよう。一つ目の例は，共感条件が満たされず，ボルダ勝者とコンドルセ勝者とが異なる状況を表している。

例 1（共感条件が満たされないとき）．5 人の投票者がいて，

$$t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{111} \text{ かつ } t_4 = t_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{111}$$

とする。このとき共感条件は満たされていない。

まず X_1 を考える。$t_1(X_1)=0$，$t_4(X_1)=\frac{1}{2}$ であり，ボルダ得点は

$$b(X_1,0)=3\times 3+1\times 2=11,$$
$$b(X_1,\frac{1}{2})=3\times 2+2\times 3=12$$

である。ここでは 0 がコンドルセ勝者だが，$\frac{1}{2}$ がボルダ勝者である。

次に X_2 を考える。$t_1(X_2)=0$，$t_4(X_2)=\frac{1}{2}$ であり，ボルダ得点は

$$b(X_2,0)=5\times 3+1\times 2=17,$$
$$b(X_2,\frac{1}{2})=5\times 2+3\times 3=19$$

である。ここでも 0 がコンドルセ勝者だが，$\frac{1}{2}$ がボルダ勝者である。

最後に X_3 を考える。$t_1(X_3)=0$，$t_4(X_3)=\frac{1}{2}$ であり，ボルダ得点は

$$b(X_3,0)=9\times 3+1\times 2=29,$$
$$b(X_3,\frac{1}{2})=9\times 2+5\times 3=33$$

である。ここでも 0 がコンドルセ勝者だが，$\frac{1}{2}$ がボルダ勝者である。

この例では，すべての X_k においてボルダ勝者とコンドルセ勝者とが異なる。実際，コンドルセ勝者の列 $\{t_1(X_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $k\to\infty$ につれて t_1 に収束するのは明らかである。しかし，どの $k\in\mathbb{N}$ についても $x_k\in B(X_k)$ であるすべての点列 $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対し，$\lim_{k\to\infty}x_k=t_4$ が成り立つ。(9) □

二つ目の例は，共感条件が満たされて，ボルダ勝者がコンドルセ勝者か次点コンドルセ勝者のいずれかと一致する状況を表している。

例 2（共感条件が満たされるとき）．15 人の投票者がいて

$$t_i=\frac{3}{8}-\frac{1}{111}\quad \forall i=1,\dots,9,$$
$$t_i=\frac{4}{8}+\frac{1}{111}\quad \forall i=10,11,12,$$
$$t_i=\frac{5}{8}-\frac{1}{111}\quad \forall i=13,14,15$$

であるとする。このとき共感条件は満たされている。

---

(9) 証明は簡単だがルーティンなので，ここではアウトラインのみを与える。すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して $B(X_k)\in\{t(X),t'(X)\}$ が示せる。区間 $[t_4(X_k),t_4'(X_k)]$ は $k\to\infty$ に応じて一点 t_4 に収縮するので，どの $k\in\mathbb{N}$ についても $x_k\in B(X_k)$ であるようなすべての点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対し，$\lim_{k\to\infty}x_k=t_4$ が成り立つ。

まず X_1 を考える。このとき $\frac{1}{2} = t_m(X_1)$ であり，$\frac{1}{2}$ が X_1 における唯一のボルダ勝者である。よって $B(X_1) = \{t_m(X_1)\}$ が成り立つ。

次に X_2 を考える。$t_m(X_2) = \frac{1}{4}$，$t'_m(X_2) = \frac{2}{4}$ であり，ボルダ得点は

$$
\begin{aligned}
b(X_2, \frac{1}{4}) &= 5 \times 9 + 3 \times 3 + 3 \times 3 = 63, \\
b(X_2, \frac{2}{4}) &= 4 \times 9 + 5 \times 3 + 5 \times 3 = 66, \\
b(X_2, x) &< 63 \quad \forall x \in X_2 \setminus \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

である。よって $B(X_2) = \{t'_m(X_2)\}$ が成り立つ。

最後に X_3 を考える。$t_m(X_3) = \frac{3}{8}$，$t'_m(X_3) = \frac{2}{8}$ であり，ボルダ得点は

$$
\begin{aligned}
b(X_3, \frac{3}{8}) &= 9 \times 9 + 7 \times 3 + 6 \times 3 = 120, \\
b(X_3, \frac{4}{8}) &= 7 \times 9 + 9 \times 3 + 8 \times 3 = 114, \\
b(X_3, x) &< 114 \quad \forall x \in X_3 \setminus \left\{\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right\}
\end{aligned}
$$

である。よって $B(X_3) = \{t_m(X_3)\}$ が成り立つ。 $\square$

最後の例は，共感条件のもとでは，コンドルセ勝者・次点コンドルセ勝者がともにボルダ勝者である場合を表している。

例 3（コンドルセ勝者・次点コンドルセ勝者がともにボルダ勝者であるとき）． 7 人の投票者がいて

$$
\begin{aligned}
t_1 = t_2 = t_3 &= \frac{6}{16} + \frac{1}{111}, \\
t_4 = t_5 &= \frac{8}{16} - \frac{1}{111}, \\
t_6 = t_7 &= \frac{9}{16} + \frac{1}{111}
\end{aligned}
$$

であるとする。明らかに共感条件は満たされている。X_4 を考える。$\frac{7}{16} = t'_m(X_4)$，$\frac{8}{16} = t_m(X_4)$ に注意されたい。このとき

$$
\begin{aligned}
b(X_4, \frac{7}{16}) &= 16 \times 3 + 16 \times 2 + 13 \times 2 = 106, \\
b(X_4, \frac{8}{16}) &= 14 \times 3 + 17 \times 2 + 15 \times 2 = 106, \\
b(X_4, x) &< 106 \quad \forall x \in X_4 \setminus \left\{\frac{7}{16}, \frac{8}{16}\right\}
\end{aligned}
$$

なので，$B(X_4) = \left\{\frac{7}{16}, \frac{8}{16}\right\}$ が成り立つ。 $\square$

3.2　主要結果

例 2 と 3 は，共感条件が成り立ち，ボルダ勝者が，コンドルセ勝者と次点コンドルセ勝者のいずれかであるケースを表している。われわれの主要定理は，共感条件が成り立つときには，それと同じ結果がアジェンダの規模に関わらず常に成り立つことを示している。

定理 1．共感条件が満たされているならば，各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$B(X_k) \subset \{t_m(X_k), t'_m(X_k)\}$$

が成り立つ。

証明．任意の $k \in \mathbb{N}$ について考える。$t_1 = t_n$ ならば，明らかに $B(X_k) = \{t_m(X_k)\}$ が成り立つ。それゆえ，$t_1 < t_n$ の場合を以下では考える。一般性を失うことなく，$t_m(X_k) < t'_m(X_k)$ とする。

ケース 1：$\boldsymbol{t_1 < t_m(X_k) < t_n}$。$x_s < t_m(X_k)$ である任意の $x_s \in X_k$ をとる。$t_m \leq t_i$ である各 $i \in I$ について，共感条件より

$$x_{s+1}P(t_i)yP(t_i)x_s$$

を満たす $y \in S_k$ がただ 1 つ存在するので，$r(t_i, X_k, x_{s+1}) = r(t_i, X_k, x_s) + 2$ が成り立つ。一方，$t_i < t_m$ である各 $i \in I$ について $r(t_i, X_k, x_{s+1}) \leq r(t_i, X_k, x_s) + 2$ が成り立つ。$t_m \leq t_i$ である投票者 i は少なくとも $\frac{n+1}{2}$ 人存在するので，$b(X_k, x_s) < b(X_k, x_{s+1})$ が成り立つ。よって，$x_s \notin B(X_k)$ である。

同様の議論により，$t'_m(X_k) < x_s$ であるすべての $x_s \in X_k$ について，$b(X_k, t'_m(X_k)) > b(X_k, x_s)$ なので $x_s \notin B(X_k)$ が成り立つ。

すべての $x_s \notin \{t_m(X_k), t'_m(X_k)\}$ に対して，ある $y \in X_k$ が存在し，$b(X_k, x) < b(X_k, y)$ が成り立つことを示した。よって $B(X_k) \subset \{t_m(X_k), t'_m(X_k)\}$ が成り立つ。このケースでは $t_m(X_k)$ と $t'_m(X_k)$ のどちらが大きいかは分からない。例 3 は，$b(X_4, t_m(X_4)) = b(X_4, t'_m(X_4))$ である状況を与えている。

ケース 2：$\boldsymbol{t_m(X_k) < t_1 < t'_m(X_k)}$。このケースでは

$$t_1 \leq t_i < \frac{t_m(X_k) + t'_m(X_k)}{2}$$

である投票者 i が少なくとも $\frac{n+1}{2}$ 人存在する。I' をこうした投票者の集合とする。$x < t_m(X_k)$ である各 $x \in X_k$ について，明らかに $b(X_k, x) < b(X_k, t_m(X_k))$ が成り立つ。共感条件を用いて，ケー

ス 1 と同様の議論により，$t'_m(X_k) < x$ である各 $x \in X_k$ について $b(X_k, t'_m(X_k)) > b(X_k, x)$ が成り立つ。よって $B(X_k) \subset \{t_m(X_k), t'_m(X_k)\}$ が成り立つ。このケースでも $t_m(X_k)$ と $t'_m(X_k)$ のどちらが大きいかは分からない。

ケース 3：$\boldsymbol{t_m(X_k) < t_1 < t_n < t'_m(X_k)}$。$t_m(X_k)$ と $t'_m(X_k)$ は隣同士なので

$$I_1 \equiv \{i \in I : t_i(X_k) = t_m(X_k)\},$$
$$I_2 \equiv \{i \in I : t_i(X_k) = t'_m(X_k)\}$$

とすれば，$I_1 \cup I_2 = I$ と $|I_1| > |I_2|$ が成り立つ。明らかに，$t_m(X_k)$ はスコア

$$b(X_k, t_m(X_k)) = (2^k + 1)|I_1| + 2^k|I_2|$$

を持つ，唯一のボルダ勝者である。

ケース 4：$\boldsymbol{t_n < t_m(X_k) < t'_m(X_k)}$。$x_s = t_m(X_k)$ とする。このケースでは

$$\frac{x_{s-1} + x_s}{2} < t_i \leq t_n$$

である投票者 i が少なくとも $\frac{n+1}{2}$ 人存在する。I' をこうした投票者の集合とすると，各 $i \in I'$ について $t'_i(X_k) = x_{s-1}$ となり，$t_m(X_k) < t'_m(X_k)$ に矛盾する。よって，このケースは起こらない。□

共感条件は，定理 1 の結果を得るために十分ではあるが，常に必要だとは限らない。例えば，t_1 が 0 にきわめて近く，他のすべての t_i が 1 にきわめて近い同じ数だとすると，共感条件は満たされないが，すべての X_k においてボルダ勝者とコンドルセ勝者は $t_n(X_k)$ で一致する。しかしアジェンダの規模と完全に無関係に成り立つという点で，定理 1 が意味することは強い。

次の系は，アジェンダが豊かになるにつれ，ボルダ勝者が中位投票者の最適選択肢に収束することを表している。この結果は定理 1 から直ちに導かれる。

系 1．共感条件が満たされているならば，どの $k \in \mathbb{N}$ についても $x_k \in B(X_k)$ である，あらゆる点列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ について

$$\lim_{k \to \infty} = t_m$$

が成り立つ。

3.3　一般化

本小節は，仮定 1 と 2 を落とし，より一般的なアジェンダのクラスを扱う。

アジェンダ $X \in \mathscr{X}$ が一様であるとは,

$$X = \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-2}{k}, \frac{k-1}{k}, 1\right\}$$

となる整数 $k \geq 2$ が存在することをいう。どの X_k も一様であることに注意されたい。これから任意の一様アジェンダ X を考える。

仮定 1 と 2 を落とすと話はやや複雑になる。仮定 2 を落とすので, X 上の選好は線形でも単峰的でもないかもしれない。実際, $x, y \in X$ が $t_i = \frac{x+y}{2}$ を満たし, どの $z \in X$ も $x < z < y$ を満たさないならば, x と y の両方が i の X における最適選択肢である。しかし, i の選好は X 上で単台地的（single-plateaued）である。よって, コンドルセ勝者は常に存在する。同じことが次点コンドルセ勝者についてもいえる。仮定 1 を落とすので, これらの勝者は複数存在しうる。単台地性とこれに関する結果については Moulin（1984）を参照されたい。勝者の厳密な定義は以下のとおりである。

- コンドルセ勝者の集合は

$$T(X) \equiv \{x \in X : |\{i \in I : xP(t_i)y\}| \geq |\{i \in I : yP(t_i)x\}| \ \forall y \in X\}$$

　で与えられる。

- 次点コンドルセ勝者の集合は

$$T'(X) \equiv \{x \in X : |\{i \in I : xP(t_i)y\}| \geq |\{i \in I : yP(t_i)x\}| \ \forall y \in X \setminus T(X)\}$$

　で与えられる。

- Black（1976）は弱順序を許容するボルダ得点の一般化を与えており, それはこのモデルでは次のように書ける。$x \in X$ の X における（一般的）ボルダ得点は

$$b^*(X, x) \equiv \sum_{i \in I} \Big(|\{y \in X : xP(t_i)y\}| + \frac{1}{2} |\{y \in X : xI(t_i)y\}| \Big)$$

　である。このとき X における（一般的）ボルダ勝者の集合は

$$B^*(X, x) \equiv \{x \in X : b^*(X, x) \geq b^*(X, y) \ \forall y \in X\}$$

　で与えられる。

明らかに, $T(X)$, $T'(X)$, および $B^*(X)$ はすべて非空である。

定理 1 と同じ結果がこの一般的設定で成り立つ。証明は定理 1 のときと同様であり省略する。

定理 2.　この一般的な設定において, 共感条件が満たされるならば, すべての一様なアジェンダ $X \in \mathscr{X}$ に対し

$$B^*(X) \subset T(X) \cup T'(X)$$

が成り立つ。

4　結語

一般意志に適う選択肢を探索する手段として投票を考えるとき，ボルダ勝者とコンドルセ勝者は，いずれも魅力的だが競合する 2 つの主要な候補である。われわれは，これら 2 つが一致し，真実の探索手段に曖昧さがないといえるための条件を分析した。そして共感条件がそのための本質的な十分条件であることが分かった。より一般的な条件を見つけることは今後の研究課題として残されているが，共感条件はルソーの議論によく馴染み，またそれ自体で明瞭な解釈ができるものだ。

参 考 文 献

Arrow, K. J. (1951) *Social Choice and Individual Values*, 1st edn, New York: John Wiley & Sons.

Arrow, K. J. (1963) *Social Choice and Individual Values*, 2nd edn, New Haven: Yale University Press.

Black, D. (1948a) "On the Rationale of Group Decision-Making", *Journal of Political Economy*, Vol.56, pp.23–34.

Black, D. (1948b) "The Decisions of a Committee Using a Special Majority", *Econometrica*, Vol.16, pp.245–261.

Black, D. (1958) *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge: Cambridge University Press, reprinted by Cambridge university Press (2011).

Black, D. (1976) "Partial Justification of the Borda Count", *Public Choice*, Vol.28, pp.1–15.

Borda, J.-C. de (1784) "Mémoire sur les élections au scrutin", *Histoire de l'Accadémie Royal des Sciences*, pp.657–664.

Condorcet, M. de (1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisiions rendues à la pluralité des voix*, reprinted by Chelsea Publishing Company (1972).

Coughlin, P. (1979) "A Direct Characterization of Black's First Borda Count", *Economics Letters*, Vol.4, pp.131–133.

Douglass, R. (2013) "Rousseau's Critique of Representative Sovereignty: Principled or Pragmatic?", *American Journal of Political Science*, Vol.57, pp.735–747.

Downs, A. (1957) "An Economic Theory of Political Action in a Democracy", *Journal of Political Economy*, Vol.65, pp.135–150.

Dummett, M. and R. Farquharson (1961) "Stability in Voting", *Econometrica*, Vol.29, pp.33–43.

Farkas, D. and S. Nitzan (1979) "The Borda Rule and Pareto Stability: A Comment", *Econometrica*, Vol.47, pp.1305–1306.

Feld, S. L. and B. Grofman (1988) "The Borda Count in N-Dimensional Issue Space", *Public Choice*, Vol.59, pp.167–176.

Fishburn, P. C. and W. V. Gehrlein (1976) "Borda's Rule, Positional Voting, and Condorcet's Simple Majority Principle", *Public Choice*, Vol.28, pp.79–88.

Grofman, B. and S. L. Feld (1988) "Rousseau's General Will: A Condrcetian Perspective", *American Political Science Review*, Vol.82, pp.567–576.

Grofman, B., G. Owen and S. L. Feld (1983) "Thirteen Theorems in Search of the Truth", *Theory*

and Decision, Vol.15, pp.261–278.
Ladha, K. K. (1992) “The Condorcet Jury Theorem, Free Speech, and Correlated Votes”, *American Journal of Political Science*, Vol.36, pp.617–634.
McLean, I. and F. Hewitt (1994) *Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory*, Aldershot: Edward Elgar Publishing Limited.
Moulin, H. (1980) “On Strategy-Proofness and Single Peakedness”, *Public Choice*, Vol.35, pp.437–455.
Moulin, H. (1984) “Generalized Condorcet-Winners for Single Peaked and Single-Plateau Preferences”, *Social Choice and Welfare*, Vol.1, pp.127–147.
Okamoto, N. and T. Sakai (2013) “The Borda Rule and the Pairwise-Majority-Loser Revisited”, Unpublished manuscript, Keio University.
Rawls, J. (2008) *Lectures on the History of Political Philosophy*, S. Freeman, ed., London: Belknap Press.
Rousseau, J.-J. (1762) *Du Contrat Social*, English translation: Cole, G. D. H. (1973) *The Social Contract and Discourses*, London and Toronto: J. M. Dent & Sons Ltd.
Saari, D. G. (1995) *Basic Geometry of Voting*, New York: Springer-Verlag.
Saari, D. G. (2006) “Which is Better: The Condorcet or Borda Winner?”, *Social Choice and Welfare*, Vol.26, pp.107–129.
Saari, D. G. (2010) “From Black’s Advice and Arrow’s Theorem to the Gibbard-Satterthwaite Result”, in A. Van Deemen and A. Rusinowska, eds, *Collective Decision Making*, New York: Springer, pp.1–16.
Sen, A. K. (1977) “Social Choice Theory: A Re-Examination”, *Econometrica*, Vol.45, pp.53–89.
Sreenivasan, G. (2000) “What Is the General Will?”, *Philosophical Review*, Vol.109, pp.545–581.
Young, H. P. (1988) “Condorcet’s Theory of Voting”, *American Political Science Review*, Vol.82, pp.1231–1244.

要旨: ジャン＝ジャック・ルソーは『社会契約論』第 4 篇 2 章で，議会で意見が満場一致に近づくほど一般意志はより優勢になると述べた。本論ではこの古典的議論を，選択肢集合のサイズが可変的な，一次元立地モデルで再考する。そこでボルダ勝者とコンドルセ勝者とがほぼ一致し，一般意志に合致する選択肢を疑いなく選び取れるための必要条件を見つけてゆく。この条件は，選択肢の評価について投票者の間である種の共感が存在することを求めるが，満場一致の要求よりはるかに弱いものだ。

キーワード: コンドルセ勝者，ボルダルール，一般意志，立地モデル