| | |
|---|---|
| Title | 非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の一意性および大域性をめぐって |
| Sub Title | The uniqueness of stable periodic orbit and the globality of its basin of attraction in a nonlinear macroeconomic model |
| Author | 福岡, 正夫(Fukuoka, Masao)<br>須田, 伸一(Suda, Shinichi) |
| Publisher | 慶應義塾経済学会 |
| Publication year | 2015 |
| Jtitle | 三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.108, No.3 (2015. 10) ,p.599(123)- 648(172) |
| JaLC DOI | 10.14991/001.20151001-0123 |
| Abstract | 本稿は非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の問題を考察対象とするが, 内容としては二つの目的を持つ。まず第一に, いわゆるS単峰性の仮定の下で, 安定周期解の軌道は考察範囲の全域をつうじて高々1個しか存在しないことを証明する。ついで第二に, さらに加えて安定周期解が存在するものと仮定すれば, きわめて例外的な場合を除き考察範囲のどの点から出発してもその軌道は当該の安定周期軌道に限りなく接近することを証明する。証明の数理は基本的にコレット=エックマンの1980年の著書に負うが, 論旨の補強や図の添加をも含めてその脈絡が自己完結的に, より平易に辿れるように心がけた。<br>In this paper we study the problem of stable periodic orbit in a nonlinear macroeconomic model. The purpose is two-fold. First, we show that, under the assumption of S-unimodality, there exists at most one stable periodic orbit. Second, we show that, if the model has a stable periodic orbit under the S-unimodal assumption, almost every point is attracted to that periodic orbit. Although the mathematical reasoning for this proof is essentially based on Colett-Eckmann's 1980 book, we also provide additional explanations and figures for the logical context to be self-contained and more easily followed. |
| Notes | 論説 |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20151001-0123 |

「三田学会雑誌」108 巻 3 号（2015 年 10 月）

# 非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の一意性および大域性をめぐって

福岡正夫*　須田伸一**

# The Uniqueness of Stable Periodic Orbit and the Globality of its Basin of Attraction in a Nonlinear Macroeconomic Model

Masao Fukuoka*　Shinichi Suda**

**Abstract:** In this paper we study the problem of stable periodic orbit in a nonlinear macroeconomic model. The purpose is two-fold. First, we show that, under the assumption of S-unimodality, there exists at most one stable periodic orbit. Second, we show that, if the model has a stable periodic orbit under the S-unimodal assumption, almost every point is attracted to that periodic orbit. Although the mathematical reasoning for this proof is essentially based on Colett-Eckmann's 1980 book, we also provide additional explanations and figures for the logical context to be self-contained and more easily followed.

## 1

前稿[(1)]ではそこで定義された意味での局所的安定周期解の存在問題を取り上げたが，本稿では翻って，まずその前半部において当該の安定周期解の一意性（uniqueness）の問題を取り扱う。すなわ

＊　慶應義塾大学
Keio University
＊＊　慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University

（1）　福岡正夫・須田伸一「非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の存在」,『三田学会雑誌』2012 年 7 月号。

ちある種の仮定が満たされている場合には，安定周期解は存在するとしてもその数は考察範囲の全域をつうじてただ 1 組にとどまること，すなわち同じことになるが安定な周期軌道は高々ただ 1 個しか存在しないこと，が立証される。ついで後半部では安定の大域性（いわゆる引力圏 the basin of attraction の大域性）の問題に視点を転じ，同様の仮定の下で局所的安定周期解が（一意に）存在するものとすれば，無視しうるきわめて僅かな可能性を例外として，考察範囲のどんな点から出発する場合もその軌道は当該の一意的安定周期軌道に限りなく近づいていくという主張を立証する。この帰結を前稿ならびに本稿前半部のそれと併せ考えれば，前稿の定理 1 の仮定の下では，generic な見地からするかぎり大域的安定周期解もまた一意に存在するというきわめて強力な帰結が成立するのである。

## 2

前稿と一部重複せざるをえないが，主題に立ち入るに先立ち最小限必要と思われる記号ならびにモデルの概要を摘記しておくことにする。

$Y_t$ は $t$ 期の国内総生産を意味し，

$$Y_t = \bar{A} + cY_{t-1} + h(Y_{t-1}) = \theta(Y_{t-1}) \tag{2.1}$$

がモデルの基本方程式，ここで $\bar{A}$ は自発支出，$c$ は限界消費性向，$h(\cdot)$ は誘発投資関数である。いま横軸に $Y_{t-1}$，縦軸に $Y_t$ をとって，$\theta$ のグラフを描けば第 1 図のようになり，そこでは $\theta(Y)$ が $45^\circ$ 線と 3 度交わる場合すなわち不動点が $\mathring{Y}, \mathring{Y}', \mathring{Y}''$ と 3 個ある場合が想定されている。$\bar{Y}$ は誘発投資がゼロからプラスに転じる点，$\bar{\bar{Y}}$ はそれがふたたびゼロに転じる点であり，その間（かん）で $\theta$ が図のように山型を描くのは，最初誘発投資は $Y$ の増加とともに増加するが，やがてある $Y$ の値でピークに達し，その後は $Y$ が増加しても金利の高騰といったようなマイナス要因のほうが強く作用するので，減少に転じると考えられているからである。

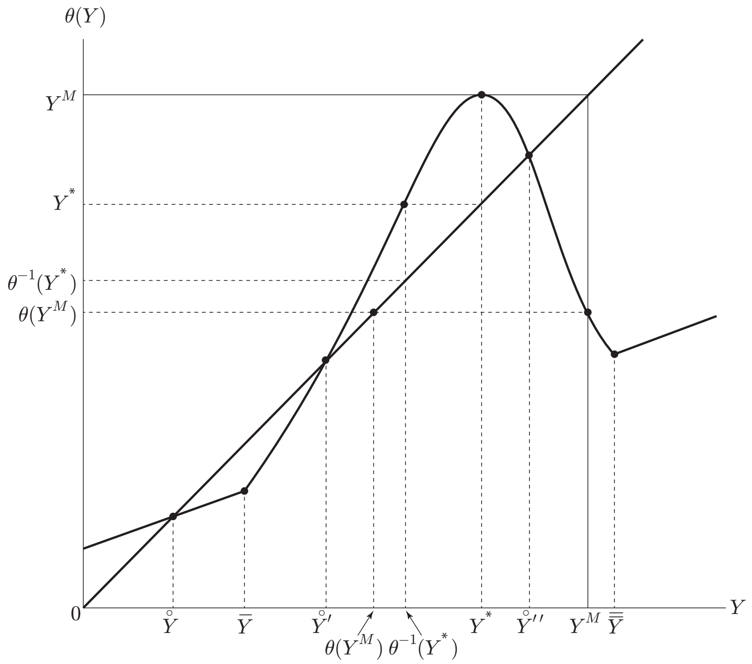
さらに $Y^M$ を $\theta(Y)$ の最大値, $Y^*$ を $\theta(Y)$ にその最大値をとらせる $Y$ の値とすると, $Y^M, Y^*, \mathring{Y}', \bar{\bar{Y}}$ のあいだには $\mathring{Y}' < \theta(Y^M) < \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M < \bar{\bar{Y}}$ というような大小関係が成り立つと想定される。それらの想定下では考察の舞台を区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ に限定することができ，よってもっぱら第 2 図として示されている範囲のみを考えていけばよいことになる。

当該の区間において $\theta$ が元来満たすとされるいくつかの前提をあらためて列記しておけば，つぎのとおりである。

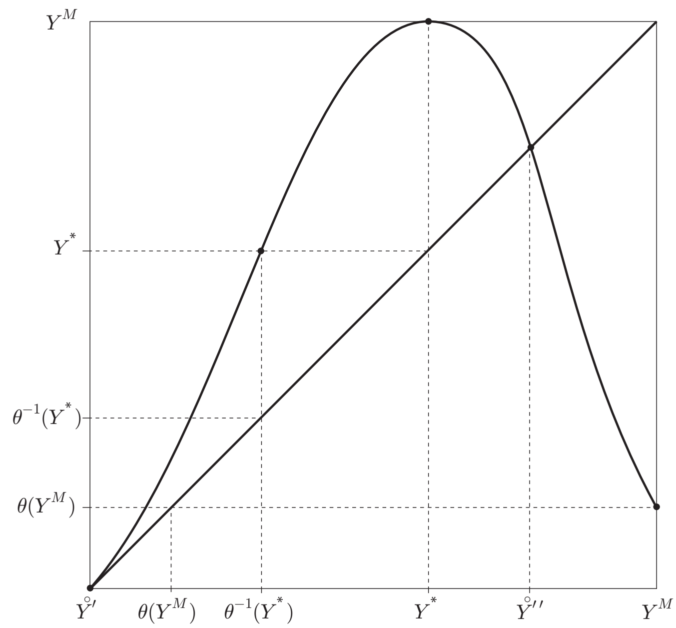
（1）　$\theta$ は連続。

（2）　$\theta$ は $Y^*$ の左側 $[\mathring{Y}', Y^*]$ では単調増加，右側 $[Y^* Y^M]$ では単調減少。

第 1 図




第 2 図



$\theta$ が（1），（2）と既述の

（3）　$\theta(Y^*) = Y^M$

を満たすとき，それは単峰型（unimodal）であると呼ばれる。

（4）　$\theta$ は必要とされる回数連続微分可能。

（1），（2），（3）にさらに加えて（4）もが満たされるとき，すなわち $\theta$ が $n$ 回 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 連続微分可能であるときには，それは $C^n$ 単峰型（$C^n$-unimodal）であると呼ばれる。

（5）　$Y^*$ においてのみ $\theta'(Y^*) = 0$。

（6）　$\theta'(\mathring{Y}') > 1$。[(2)]

（7）　$Y^*$ の左側 $(\mathring{Y}', Y^*]$ ではすべての $Y$ について $\theta(Y) > Y$。

また $\theta(Y)$ のシュヴァルツ導関数 $S\theta(Y)$ を

$$S\theta(Y) = \frac{\theta'''(Y)}{\theta'(Y)} - \frac{3}{2}\left[\frac{\theta''(Y)}{\theta'(Y)}\right]^2$$

と定義するとき，[(3)] $\theta$ が上記の条件にさらに加えて

（S）$[\mathring{Y}', Y^M]$ の全域をつうじ，$Y = Y^*$ という 1 点を除いて，$S\theta(Y) < 0$。

という条件をも満たすならば，それは S 単峰型（S-unimodal）であると呼ばれる。

以上を予備的な説明として，次節から早速安定周期解の一意性の証明にとりかかるが，ここで一意性というのは言うまでもなく区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ を考察域とみなしての主張である。元来のモデルが含む区間 $[0, \mathring{Y}']$ には安定定常解 $\mathring{Y}$ があり，これまた周期 1 の安定周期解であるに違いないが，現下の所論ではこれは論外で，安定周期解の数の勘定には含めないので，あらかじめ諒とされたい。

## 3

すでに述べたように，本論前半部での主要な課題は，つぎの第一の基本定理を証明することにある。

**定理 1**　$\theta$ が S 単峰性を満たすならば，$[\mathring{Y}', Y^M]$ 上には高々 1 組の安定周期解すなわち高々 1 個の安定周期軌道が存在するにすぎない。[(4)]

---

（2）　前稿では $\theta'(\mathring{Y}') \geq 1$ としたが，本稿では = を落とす。

（3）　シュヴァルツ導関数については，前稿の p.6 を参照されたい。

**証明**

この定理が成り立つためには，コレット＝エックマンのつぎの定理すなわち

> $\theta$ が S 単峰性を満たすならば，どんな安定周期解の軌道も $\mathring{Y}', Y^*, Y^M$ の少なくともどれか一つを引きつけるのでなくてはならない[(5)]。

が枢要な礎石となるので，まずはこの主張を立証する数理を順を追って逐一示していくことにしたい。

ここである周期 $k$ の周期解 $\mathring{Y}^k$ の軌道がたとえば $Y^*$ を引きつけるとは，$\mathring{Y}^k$ の軌道 $(\mathring{Y}^k, \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(\mathring{Y}^k), \cdots, \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k))$ が $Y^*$ から出発する軌道 $(Y^*, \theta(Y^*), \theta^2(Y^*), \cdots)$ の集積点の集合と一致すること，より分かりやすく言えば $(Y^*, \theta(Y^*), \theta^2(Y^*), \cdots)$ が限りなく $(\mathring{Y}^k, \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(\mathring{Y}^k), \cdots, \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k))$ に近づいていくことを意味している。$\mathring{Y}', Y^*, Y^M$ それぞれの軌道の集積点の集合は，それらが互いに相異なっているとしても高々 3 個しかないから，もし上記の命題が正しければ，安定周期軌道の数もまた高々 3 個にとどまることになるのである。

早速この帰結が導かれることの証明に移ることにしよう。まずその第一ステップとしてはつぎの命題すなわち

> $\theta$ が S 単峰性を満たし，かつ $\theta'(Y) = 0$ となる $Y$ が有限個であるならば，任意の $k \geq 1$ に対して周期 $k$ を持つ周期解もまた有限個しか存在しない[(6)]。

を証明する。

証明は背理法により，いまある $k \geq 1$ に対して $g = \theta^k$ としたとき，$g(Y) = Y$ となる $Y$ が無限個あったとしてみる。それら無限個の $Y$ の中から任意に相異なる 2 点 $Y^1, Y^2$ をとれば，$g(Y^1) = Y^1, g(Y^2) = Y^2, Y^1 \neq Y^2$ であることから，平均値の定理により $g'(\hat{Y}) = 1$ となるような $\hat{Y} \in (Y^1, Y^2)$ がかならず存在する（第 3 図参照）。つぎにまたこの $\hat{Y}$ を含まない区間で同じように $g(Y^3) = Y^3, g(Y^4) = Y^4, Y^3 \neq Y^4$ となるような $Y^3, Y^4$ をとり，これにも平均値の定理を適用すれば，ふたたび $g'(\hat{\hat{Y}}) = 1$，そして当然 $\hat{\hat{Y}} \neq \hat{Y}$ となる $\hat{\hat{Y}} \in (Y^3, Y^4)$ がやはり存在する（第 4 図参照）。そこで以下同じことを限りなく繰り返していけば，その都度同じことが言え，$g'(Y) = 1$ となる $Y$ が無限個存在することになる。

ところが一方，S 単峰性の仮定すなわちシュヴァルツ導関数に関する仮定 (S) があると，前稿で

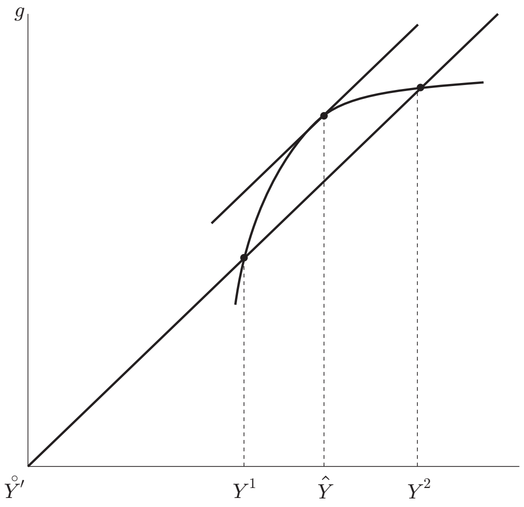
---

（4） Jean-Michel Grandmont, “Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-dimensional Dynamic Systems”, in W. Hildenbrand and A. Mas-Colell eds., *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard Debreu*, North-Holland, 1986, p.232 の Theorem 2 の（1），また P. Collet and J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Basel: Birkhäuser, 1980, p.95 の Corollary II.4.2 に該当する。

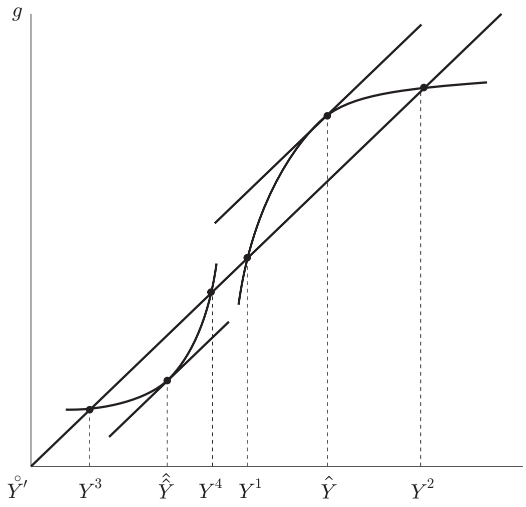
（5） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.95 の Theorem II.4.1. 証明については pp.97–100 参照。

（6） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.98 の 4 に相当する。

第 3 図




第 4 図




も見たように，$|g'|$ は $(\mathring{Y}', Y^M)$ 上で正の極小値を持つことができないという帰結がかならず成り立つ。[(7)]

そこでこの帰結を用いるならば，所望の矛盾がたちどころに得られることになる。というのは前述のところから $g'(Y) = 1$ となる $Y$ が無限個あるというのは当然 $|g'(Y)| = 1$ となる $Y$ が無限個あるということでもあるから，$|g'(Y)|$ が $(\mathring{Y}', Y^M)$ 上で正の極小値を持ちえないという上記の帰結は，分かりやすいように図示すれば，$|g'(Y)|$ のグラフが第 5 図の白丸 $\circ$ が存在するような形になってはならず，第 6 図のような形をとるほかはないということを意味するからである。このことから $|g'(Y)| = 0$ すなわち $g'(Y) = 0$ となる $Y$ もまた無限個存在せざるをえないことになるが，

$$g'(Y) = \theta'(\theta^{k-1}(Y)) \cdot \theta'(\theta^{k-2}(Y)) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta'(\theta(Y)) \cdot \theta'(Y)$$

であり，ここで $\theta'(Y) = 0$ となる $Y$ は仮定から有限個なので，$g'(Y) = 0$ となる $Y$ もまた有限個しかありえないのである。証了。

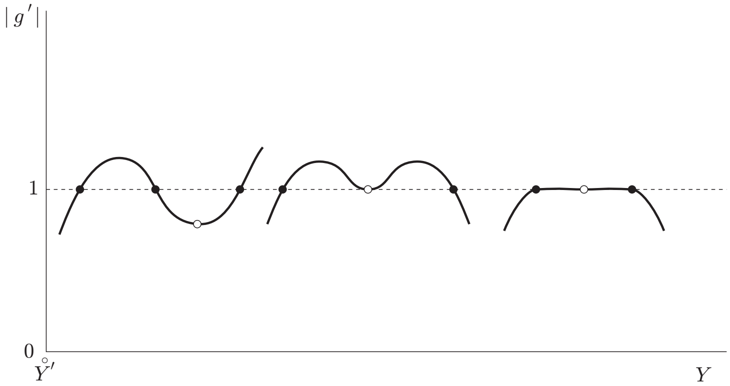
証明の第二ステップはつぎの命題すなわち

（7） 福岡・須田，前掲論文，pp.17–18 参照。
同論文 p.17 の注（20）で示したように，$S\theta(Y) < 0$ ならば，$g$ についても同様に $Sg(Y) < 0$ となることがただちに導かれる。そこでいまもし $|g'|$ がある $\tilde{Y} \in (\mathring{Y}', Y^M)$ において正の極小値を持ったとすれば，その点で $g'(\tilde{Y}) > 0$ なら $g''(\tilde{Y}) = 0$，$g'''(\tilde{Y}) \geq 0$ となるので，

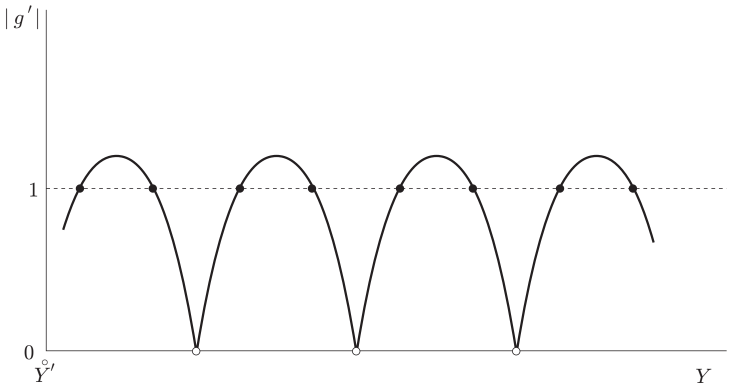
$$Sg(\tilde{Y}) = \frac{g'''(\tilde{Y})}{g'(\tilde{Y})} - \frac{3}{2}\left[\frac{g''(\tilde{Y})}{g'(\tilde{Y})}\right]^2 \geq 0$$

となって，$Sg(\tilde{Y}) < 0$ と矛盾した結果が生じざるをえない。また $g'(\tilde{Y}) < 0$ の場合も同様に $g''(\tilde{Y}) = 0$，$g'''(\tilde{Y}) \leq 0$ となるので，やはり $Sg(\tilde{Y}) \geq 0$ となり，$Sg(\tilde{Y}) < 0$ と矛盾せざるをえない。

第 5 図




第 6 図



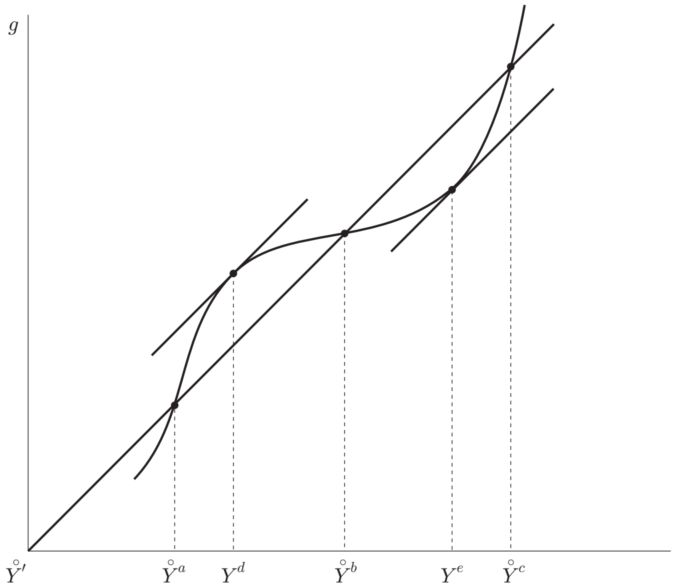

> $\theta$ がS単峰性を満たし，$\mathring{Y}^a < \mathring{Y}^b < \mathring{Y}^c$ が $g = \theta^k$ の不動点であるとき，$(\mathring{Y}^a, \mathring{Y}^c)$ 上で $g' = 0$ とならないとすれば，$g'(\mathring{Y}^b) > 1$ である。[8]

を証明することから成る。推論はつぎのとおりである。まず平均値の定理から $\mathring{Y}^a < Y^d < \mathring{Y}^b < Y^e < \mathring{Y}^c$ で，かつ $g'(Y^d) = g'(Y^e) = 1$ となるような $Y^d$，$Y^e$ が存在する（第 7 図参照）。ここで $(\mathring{Y}^a, \mathring{Y}^c)$ 上では $g' \neq 0$ という仮定から，$[Y^d, Y^e]$ 上でも当然 $g' \neq 0$ なので，そこではつねに $g' > 0$ である。なぜなら，もし $g' < 0$ になったとすれば，$g'$ はどこかで $< 0$ から $= 1$ に上昇しなければならず，その途中で $g' = 0$ となって，仮定に反するからである。

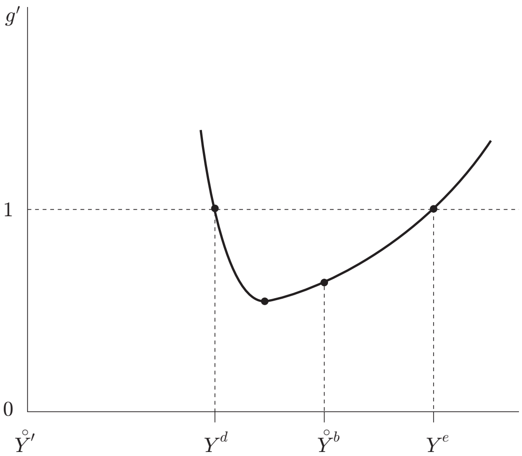
---

(8)　Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.98 の 5 に相当する。
なおコレット＝エックマンは $\mathring{Y}^a, \mathring{Y}^b, \mathring{Y}^c$ を続いて並ぶ（consecutive な）不動点としているが，重要なのはそれらの大小関係であって，あいだに他の不動点があるとしても所論には不都合ないように思われる。

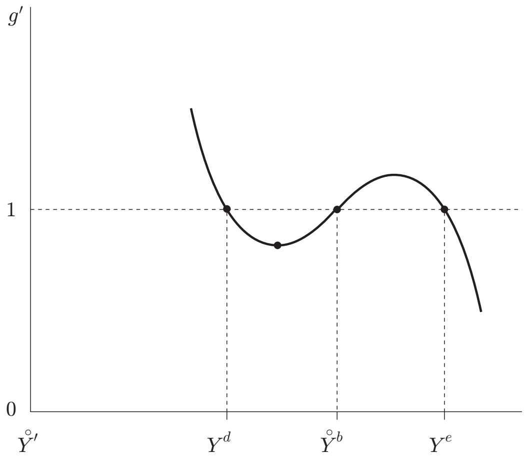
第 7 図




第 8 図




第 9 図




そこでいま主張の結論とは反対に $g'(\mathring{Y}^b) < 1$ になったとしてみよう。すると第 8 図に図示したように $g'$ は $Y^d$ における 1 という値から一度下がって，つねにプラスでありつづけつつ，また $Y^e$ における 1 に上がらなくてはならないから，$[Y^d, Y^e]$ 上で正の極小値を持つことになり，矛盾となる。また $g'(\mathring{Y}^b) = 1$ であっても，第 9 図にあるように同様の矛盾を免れない。よって命題の帰結が成立せざるをえないのである。証了。

さて，以上に得た結果にもとづいて，いよいよ本番のステップに入る。続く第三および第四のス

テップではつぎの命題すなわち

> $\theta$ が S 単峰性を満たすならば，$\mathring{Y}^k \in [\mathring{Y}', Y^M]$ を $g = \theta^k$ の安定不動点とするとき，$\mathring{Y}^k$ の軌道は $\mathring{Y}', Y^*, Y^M$ の少なくともどれか一つを引きつける。(9)

を証明する。安定性の定義から $|g'(\mathring{Y}^k)| \leq 1$ であるが，(10) 以下第三ステップではもっぱら $|g'(\mathring{Y}^k)| < 1$ の場合を取り扱い，$|g'(\mathring{Y}^k)| = 1$ の場合についてはついで第四ステップとして分けて取り上げることにする。

まず前者の場合の証明であるが，$\mathring{Y}^k = \mathring{Y}'$ あるいは $\mathring{Y}^k = Y^M$ のときは言うまでもなく帰結の成立は自明であるから，以下では一貫して $\mathring{Y}^k \in (\mathring{Y}', Y^M)$ であるものとして議論を進めていく。

初めに $\mathring{Y}^k$ の安定多様体 $M(\mathring{Y}^k)$ を

$$M(\mathring{Y}^k) = \{Y \in [\mathring{Y}', Y^M] \,|\, g^m(Y) \to \mathring{Y}^k \text{ as } m \to \infty\}$$

として定義することにしよう。すると一般にはこの $M(\mathring{Y}^k)$ は $[\mathring{Y}', Y^M]$ 上の開集合となる。なぜなら，仮定 $|g'(\mathring{Y}^k)| < 1$ から $g(U) \subset U$ となるような開区間 $U$ が存在し，その $U$ の中のすべての $Y$ に対して $g^k(Y) \to \mathring{Y}^k$ が成り立つので（第 10 図参照），$U \subset M(\mathring{Y}^k)$ となる。よって $g(U) \subset U \subset M(\mathring{Y}^k)$ の条件を満たす開区間 $U$ が存在することになるが，$M(\mathring{Y}^k)$ の定義から $M(\mathring{Y}^k) = \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(U)$ であり，各 $k$ については $g^{-k}(U)$ が開集合なので，$M(\mathring{Y}^k)$ もまた開集合となるのである。

ここで $\mathring{Y}^k$ を含む $M(\mathring{Y}^k)$ の連結成分を考えることにすると，その形としては一応 $(Y^r, Y^s)$, $[\mathring{Y}', Y^s)$, $(Y^r, Y^M]$, $[\mathring{Y}' Y^M]$ の四通りのものが考えられる。しかし目下の場合 $\theta(\mathring{Y}') = \mathring{Y}'$ であるところから，上記のうち第二，第四の場合は存在しえない。(11) よって以下では $(Y^r, Y^s)$ の場合をケース 1，また $(Y^r, Y^M]$ の場合をケース 2 として，それら可能な二つの場合のそれぞれについてのみ考えていけばよい。

**ケース 1**　連結集合の連続写像による像は連結なので，$g((Y^r, Y^s)) \subset (Y^r, Y^s)$ となる。なぜなら，もし $g((Y^r, Y^s)) \not\subset (Y^r, Y^s)$ であったとすれば，$g((Y^r, Y^s)) \setminus (Y^r, Y^s)$ を $(Y^r, Y^s)$ に付け加えることにより，$M(\mathring{Y}^k)$ の部分集合で，しかも $(Y^r, Y^s)$ より大きな区間がありうることになって，$(Y^r, Y^s)$ が $M(\mathring{Y}^k)$ の連結成分であるという事実に反するからである。そこで $g$ が連続であることを $g((Y^r, Y^s)) \subset (Y^r, Y^s)$ と結びつけて考え合わせれば，

（i）　$g(Y^r) = Y^r$，$g(Y^s) = Y^s$

（ii）　$g(Y^r) = Y^s$，$g(Y^s) = Y^r$

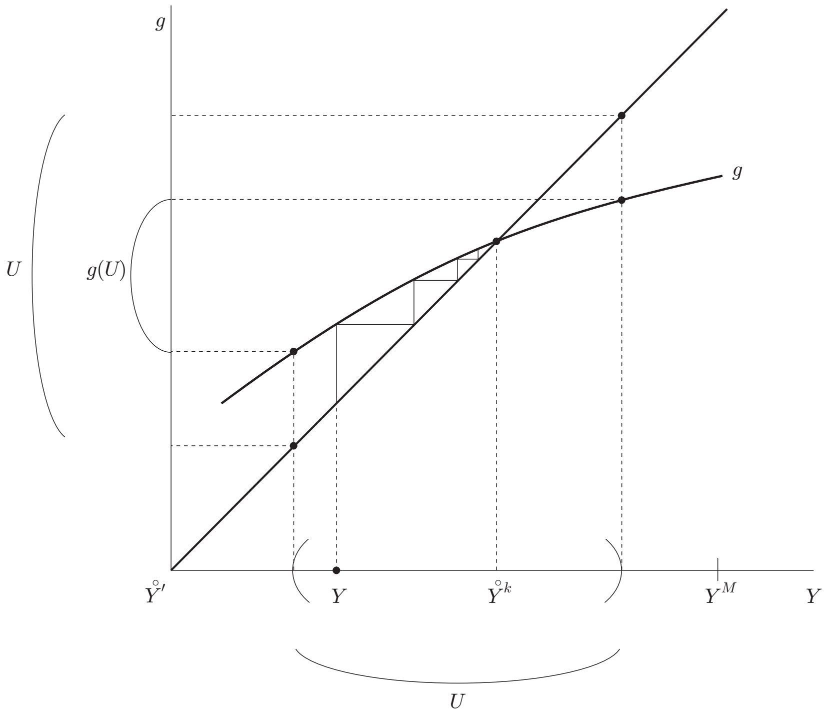
---

（9）　Collet and Eckmann, *op. cit.*, pp.99–100 の 6, 7 に相当する。

（10）　福岡・須田，前掲論文，p.5 の定義（3.2）参照。

（11）　$\theta(\mathring{Y}') = \mathring{Y}'$ より $\mathring{Y}'$ から出発して $\mathring{Y}'$ とは違う $\mathring{Y}^k$ に収束することは不可能である。

第 10 図




（iii）　$g(Y^r) = g(Y^s) = Y^s$ or $Y^r$

という三つの可能性しかないことが分かる。

そこで以下では

これら三つのいずれの場合も，$g$ は $(Y^r, Y^s)$ 上で臨界点すなわち $g'(Y^p) = 0$ となる点を持つ。

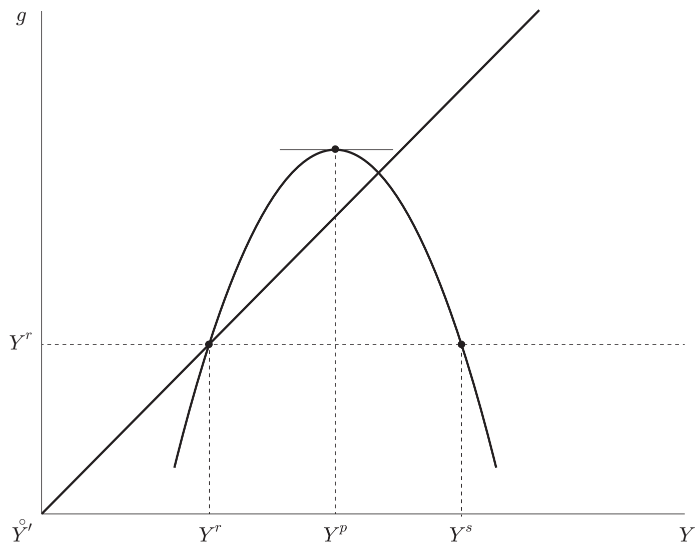
ということを示す。

まず（iii）の場合について言えば，このことはロルの定理そのものの帰結にほかならない。たとえば $g(Y^r) = g(Y^s) = Y^r$ なら，第 11 図から，$(Y^r, Y^s)$ 上に $g'(Y^p) = 0$ となる $Y^p$ があることは明らかであろう。

つぎに (i) の場合であるが，$g(Y^r) = Y^r$，$g(Y^s) = Y^s$ であるところから，この場合は $Y^r, \overset{\circ}{Y}{}^k, Y^s$ のいずれもが $g$ の不動点であり，よってもし $g$ が $(Y^r, Y^s)$ 上で臨界点を持たないとすれば，$Y^r < \overset{\circ}{Y}{}^k < Y^s$ に第二ステップで証明した命題を適用することにより，$g'(\overset{\circ}{Y}{}^k) > 1$ となるのでなくてはならない。しかし，これは仮定の $|g'(\overset{\circ}{Y}{}^k)| < 1$ と矛盾する。

残った (ii) の場合は，つぎのとおりである。いま $g^2$ を考えると，$g^2(Y^r) = Y^r, g^2(Y^s) = Y^s$ となるから，$g^2$ に (i) の場合と同様の推論をあてはめることによって，$(Y^r, Y^s)$ 上には $g^2$ の臨界点

第 11 図




がある。よって

$$g^{2'}(Y^p) = g'(g(Y^p)) \cdot g'(Y^p) = 0$$

から $g'(Y^p) = 0$ または $g'(g(Y^p)) = 0$ となり，$Y^p$ または $g(Y^p)$ が $g$ の臨界点となる。そして $g((Y^r, Y^s)) \subset (Y^r, Y^s)$ であるところから，$g(Y^p) \in (Y^r, Y^s)$ であることが言え，$Y^p$ も $g(Y^p)$ も $(Y^r, Y^s)$ に含まれていることが分かる。よって $Y^p$ が $g$ の臨界点なら，$Y^p \in (Y^r, Y^s)$ から $g$ が $(Y^r, Y^s)$ 上で臨界点を持つことになり，また $g(Y^p)$ が $g$ の臨界点なら，$g(Y^p) \in (Y^r, Y^s)$ からやはり $g$ は $(Y^r, Y^s)$ 上で臨界点を持つことになる。

以上の議論をつうじて，$g$ が $(Y^r, Y^s)$ 上で臨界点を持つという重要な主張が成立した。これは重ねて言えば $g'(Y^p) = 0$ となるような点 $Y^p$ が $(Y^r, Y^s)$ 上に存在するということにほかならない。そこで $g(Y^p) = \theta^k(Y^p)$ であることを想起すれば,

$$g'(Y^p) = \theta'(\theta^{k-1}(Y^p)) \cdot \theta'(\theta^{k-2}(Y^p)) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta'(\theta(Y^p)) \cdot \theta'(Y^p) = 0$$

であるから，$\theta'(\theta^{k-1}(Y^p)), \theta'(\theta^{k-2}(Y^p)), \cdots, \theta'(\theta(Y^p)), \theta'(Y^p)$ のどれかが 0 となるのでなくてはならず，これは $\theta^{k-1}(Y^p), \theta^{k-2}(Y^p), \cdots, \theta(Y^p), Y^p$ のどれかが $\theta$ の臨界点でなくてはならないということである。ところが目下のモデルでは $\theta'(Y)$ が 0 になるのは $Y = Y^*$ においてのみなのであるから，結局それは $Y^*$ に一致せざるをえないのである。

さて $Y^p \in (Y^r, Y^s) \subset M(\mathring{Y}^k)$ であるので，$M(\mathring{Y}^k)$ の定義から

$$Y^p, g(Y^p), g^2(Y^p), \cdots\cdots \to \mathring{Y}^k$$

であり，$g=\theta^k$ であるところから間を埋めて書けば，

$$\begin{aligned}&Y^p, \theta(Y^p), \theta^2(Y^p), \cdots, \theta^{k-1}(Y^p),\\ &\theta^k(Y^p), \theta^{k+1}(Y^p), \theta^{k+2}(Y^p), \cdots, \theta^{2k-1}(Y^p),\\ &\theta^{2k}(Y^p), \theta^{2k+1}(Y^p), \theta^{2k+2}(Y^p), \cdots, \theta^{3k-1}(Y^p),\\ &\cdots\cdots \to \mathring{Y}^k, \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(\mathring{Y}^k), \cdots, \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k),\end{aligned}$$

よって $Y^p \to \mathring{Y}^k$ なら，$\theta(Y^p) \to \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(Y^p) \to \theta^2(\mathring{Y}^k)$, $\cdots, \theta^{k-1}(Y^p) \to \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k)$ となる。ところが上で見たように $\theta^{k-1}(Y^p), \theta^{k-2}(Y^p), \cdots, \theta(Y^p), Y^p$ のどれかが $Y^*$ に一致しているのであるから，これは $Y^*$ を含む軌道が $(\mathring{Y}^k, \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(\mathring{Y}^k), \cdots, \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k))$ に引きつけられること，換言すれば $\mathring{Y}^k$ という安定周期解が $Y^*$ を引きつけることにほかならないのである。

**ケース 2**　この場合もケース 1 の場合と同様 $Y^M \in (Y^r, Y^M] \subset M(\mathring{Y}^k)$ となっているので，

$$Y^M, g(Y^M), g^2(Y^M), \cdots\cdots \to \mathring{Y}^k$$

となることが言え，$g=\theta^k$ として間を埋めれば，まったく同じ推論をつうじて $Y^M \to \mathring{Y}^k, \theta(Y^M) \to \theta(\mathring{Y}^k), \theta^2(Y^M) \to \theta^2(\mathring{Y}^k), \cdots\cdots$ という帰結を導くことができる。よって安定周期解 $\mathring{Y}^k$ が $Y^M$ を引きつけることになるのである。

これで $|g'(\mathring{Y}^k)| < 1$ の場合の証明は済んだので，続いて第四ステップとして $|g'(\mathring{Y}^k)| = 1$ の場合の証明に移る。ここでの仮定の $|g'(\mathring{Y}^k)| = 1$ が $g'(\mathring{Y}^k) = -1$ の形で成り立つときは $\bar{g} = \theta^{2k} = g \circ g$ とすることで

$$\bar{g}'(\mathring{Y}^k) = g'(g(\mathring{Y}^k))g'(\mathring{Y}^k) = g'(\mathring{Y}^k)g'(\mathring{Y}^k) = 1$$

となるので，以下では一般性を失うことなく絶対値記号を外し，$g'(\mathring{Y}^k) = 1$ として推論を進める。

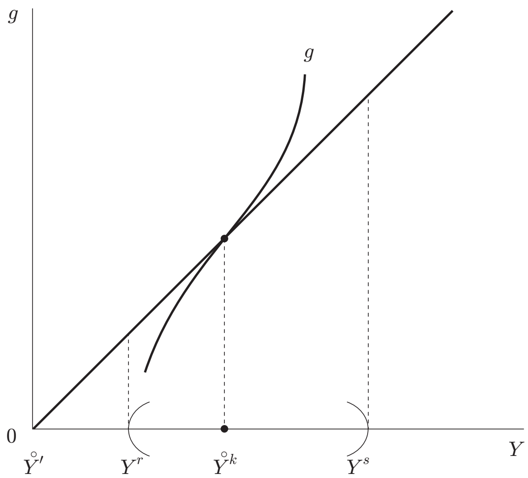
すでに第一ステップで示したように周期解は有限個しかないから，それらのあいだにはかならず隙間があり，したがって $\mathring{Y}^k \in (Y^r, Y^s)$ となるような，そしてその $(Y^r, Y^s)$ の中には $\mathring{Y}^k$ 以外の $g$ の不動点が含まれないような $(Y^r, Y^s)$ をとることができる。するとそこでの $g$ のグラフとしてはいろいろな形が考えられるが，たとえば第 12 図のような形をとることはない。なぜなら，その場合の $g'$ のグラフは第 13 図のようになり，$|g'|$ が $(\mathring{Y}^k, Y^M)$ 上で正の極小値を持つことはできないという前に示した帰結に反するからである。

よってありうる $g$ の形はつぎに掲げる第 14 図，第 15 図，第 16 図のいずれかのような場合に限られ，そこでは

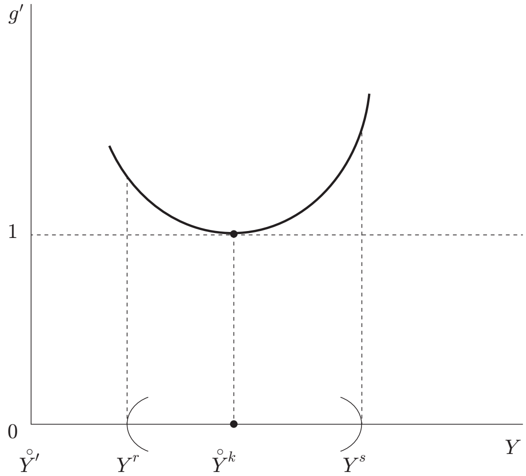
（1）　$g(Y) > Y$ for all $Y \in (Y^r, \mathring{Y}^k)$

または

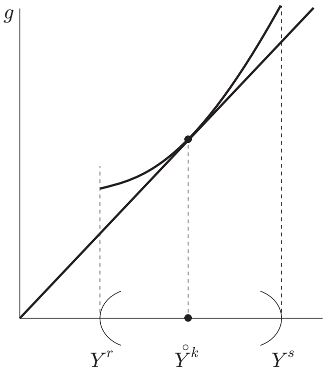
第 12 図



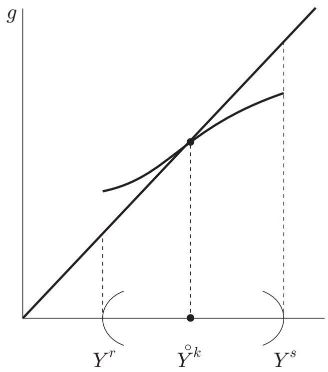

第 13 図



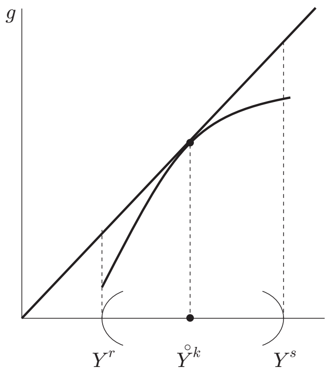

第 14 図




第 15 図




第 16 図




（2）　$g(Y) < Y \text{ for all } Y \in (\mathring{Y}^k,\, Y^s)$

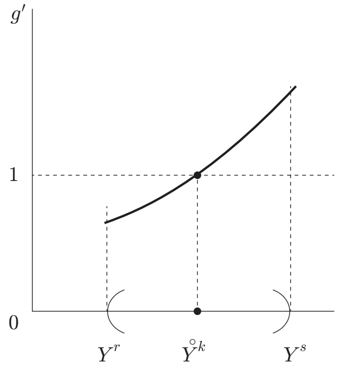
という二つの事態のいずれかが成り立っているのである。第 14 図，第 15 図，第 16 図のそれぞれに対する $g'$ のグラフを書いてみれば，第 17 図，第 18 図，第 19 図のごとくであり，いずれの場合も $|g'|$ が正の極小値をとる可能性は排除されていることが分かる。

そこでまず（1）の場合から考えていくことにし，

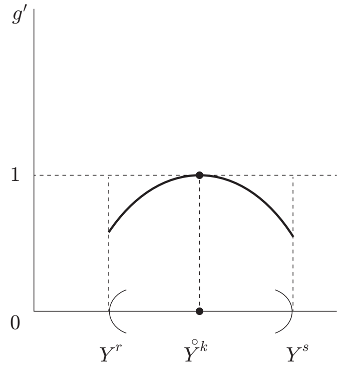
$$Y^d = \min\{Y \leq \mathring{Y}^k, g(Y) \geq Y\}$$

とおけば，$g(Y^d) = Y^d$ となる。たまたま $Y^d = \mathring{Y}'$ となる場合も，$\theta(\mathring{Y}') = \mathring{Y}'$ であるところから $g(\mathring{Y}') = \mathring{Y}'$ となるので，これに含めて考えておけばよい。するとふたたび平均値の定理から $g'(Y^w) = 1$ となるような $Y^w$ が $(Y^d, \mathring{Y}^k)$ に存在することになる。$Y^w$ と $\mathring{Y}^k$ のあいだのどこかで

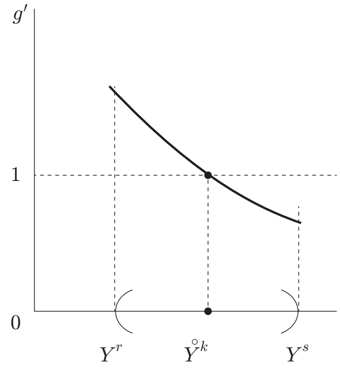
第 17 図



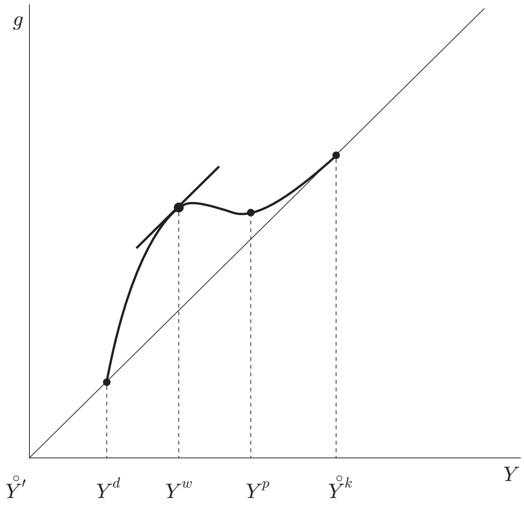

第 18 図



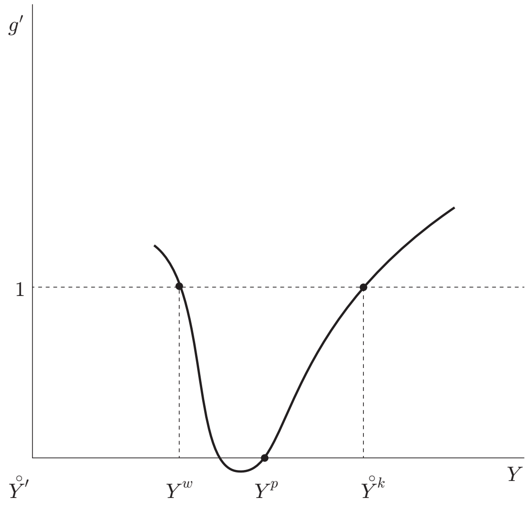

第 19 図




第 20 図




第 21 図




$g$ の勾配は 1 より小さくならねばならないが，その極小値は正にはなれないのであるから，かならず負または 0 であり，よって $Y^w$ と $\mathring{Y}^k$ のあいだには $g'(Y^p)=0$ となるような $Y^p$ がかならず存在するのでなくてはならない（第 20 図，第 21 図参照）。

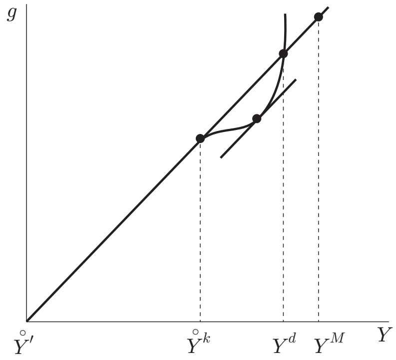
そこでそのような $Y^p$ の中でもっとも $\mathring{Y}^k$ に近いものをあらためて $Y^p$ とし，その $Y^p$ から出発してみれば，その軌道 $Y^p, g(Y^p), g^2(Y^p), \cdots\cdots$ は $\mathring{Y}^k$ に限りなく近づいていく。よって前と同様に $Y^p$ と $g(Y^p)$ すなわち $\theta^k(Y^p)$ のあいだを埋めて書けば

$$Y^p, \theta(Y^p), \theta^2(Y^p), \cdots, \theta^{k-1}(Y^p), \theta^k(Y^p)$$

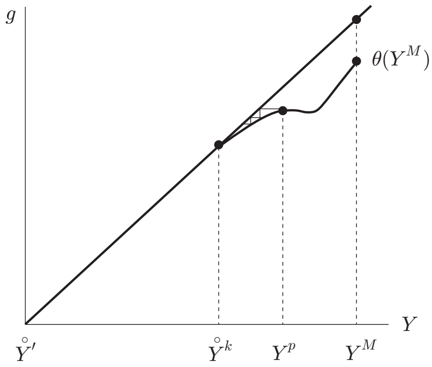
のごとくで，

$$g'(Y^p) = \theta'(\theta^{k-1}(Y^p)) \cdot \theta'(\theta^{k-2}(Y^p)) \cdot \ \cdots \ \cdot \ \theta'(Y^p)$$

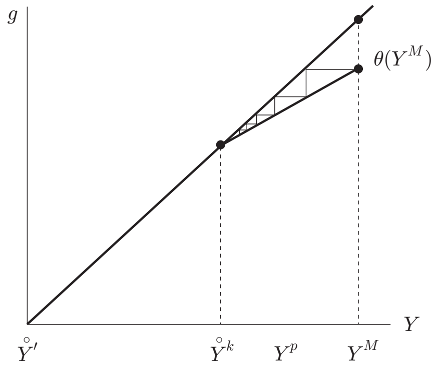
第 22 図




第 23 図




第 24 図




であるところから，$g'(Y^p) = 0$ であれば $\theta'(\theta^{k-1}(Y^p))$，$\theta'(\theta^{k-2}(Y^p)), \cdots, \theta'(Y^p)$ のいずれかが 0 とならざるをえない。これは $\theta^{k-1}(Y^p), \theta^{k-2}(Y^p), \cdots, Y^p$ のいずれかが $\theta$ の臨界点になるということであり，そのような臨界点は目下の場合 $Y^*$ しかありえないから，結局上述のところは $\mathring{Y}^k$ が $Y^*$ を引きつけることを意味するのである。

つぎは（2）の場合であるが，こんどは $Y^d$ を

$$Y^d = \max\{Y \geq \mathring{Y}^k, g(Y) < Y\}$$

と定義する。そのとき $g$ が第 22 図のような形をとる事態であれば，（1）の場合とまったく同様の推論がそっくりそのままあてはまる。また $g$ が（1）には対応する場合のない第 23 図，第 24 図のような形をとる場合であっても，第 23 図のようにもし $\mathring{Y}^k$ と $Y^M$ のあいだに $g'(Y^p) = 0$ となるような $Y^p$ があるのであれば，やはり（1）の後半でやったのと同じ推論をそのままあてはめればよい。よって以上の場合はいずれも $\mathring{Y}^k$ は $Y^*$ を引きつける。他方そのような $Y^p$ がない第 24 図のような場合は，$g'$ は $\mathring{Y}^k$ と $Y^M$ のあいだでつねに正の値をとっているから，図に示したように $Y^M$，$g(Y^M)$，$g^2(Y^M), \cdots$ は限りなく $\mathring{Y}^k$ に近づいていき，$\mathring{Y}^k$ は $Y^M$ を引きつけることになるのである。

以上のところで前記コレット＝エックマンの命題は証了となったが，ここまで議論が進めば所望の一意性を導く推論はあと一歩というところである。すでにわれわれの得た帰結は，どんな安定周期解の軌道も $\mathring{Y}', Y^*, Y^M$ の少なくともどれか一つを引きつけるということであるが，ここで仮定の含意にあらためて思いをいたせば明らかなように，そもそも $\mathring{Y}'$ を引きつける安定周期軌道なるものは存在しないのである。なぜなら $\theta(\mathring{Y}') = \mathring{Y}'$ であるところから，$\mathring{Y}'$ が引きつけられるのは $\mathring{Y}'$ そのものであり，しかも $\theta'(\mathring{Y}') > 1$ であるところから，$\mathring{Y}'$ は不安定な周期解なのである。

するとあと残るのは $Y^*$ を引きつける安定周期軌道と $Y^M$ を引きつける安定周期軌道の二つとなるが，実は $\theta(Y^*) = Y^M$ であるので，$Y^*$ を引きつける周期軌道と $Y^M$ を引きつける周期軌道は同じものなのである。ゆえにコレット＝エックマンの命題は，結局のところ安定な周期軌道は区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ に高々 1 個しかないことを含意し，これでわれわれの第一基本定理はめでたく証明を終えたことになる。

## 4

前節までの所論で，S 単峰性が満たされるかぎり安定な周期軌道は考察範囲の全域にわたって，存在するとしてもただ 1 個に限られることが明らかとされた。だが当該の軌道を構成する安定周期解は前稿の定義にもあるように局所的安定性を満たす周期解にほかならず，みずからの近傍の諸点は引きつけるかもしれないが，そうした引力の及ぶ射程いわゆる引力圏（the basin of attraction）なるものをどこまで拡大して考えうるかという論点については，まだ何事も語ることはできない。前節で示したところによれば，それはかならずしも近傍の点ではない $Y^*$ ないしは $Y^M$ をも引きつけることは分かっているが，なお一般的に $[\mathring{Y}', Y^M]$ 内の他の任意の $Y$ から出発する場合にそのような引力が働くかどうかの帰趨はいっさい不問に付されてきたのである。

これから本論の後半部で意図するところは，あらためて視点をこの問題に転じ，そこに一歩を踏み込んで鋭意事態の解明に取り組む作業である。帰結を先取りして言うならば，以下で立証に携わるのは，ほとんど蓋然性のないほんの僅かな例外を除くかぎり，$[\mathring{Y}', Y^M]$ のどんな点を出発点とする軌道も当の安定周期軌道に引きつけられるであろうという瞠目すべき主張である。言葉を換えて言えば，本節ではこの論稿の第二の基本定理としてつぎの主張すなわち

**定理 2**　前定理と同じ仮定が満たされており，かつ安定周期軌道が存在しているものとすれば，$[\mathring{Y}', Y^M]$ 全域の $Y$ の中でその軌道が当該の安定周期軌道に引きつけられない $Y$ の集合はルベーグ測度ゼロである[(12)]。

という主張の証明を目指すのである。

証明

存在が仮定されている安定周期軌道の任意の構成子を $\mathring{Y}^k$ とし，その $\mathring{Y}^k$ に軌道が引きつけられない $Y$ の集合を

$$E_\theta = \{Y \in [\mathring{Y}', Y^M] \,\Big|\, \theta^j(Y)\ ,\ j=1,2,\cdots,\ \text{が}\,\mathring{Y}^k\,\text{に引きつけられない}\ \}$$

と定義した上，$E_\theta$ のルベーグ測度を $\lambda(E_\theta)$ であらわすことにする。そのとき $\lambda(E_\theta)=0$ となることを示すのが定理の目的である。

そこでその目的に向けて，まず区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ を二つの部分 $[\mathring{Y}', \theta(Y^M)), [\theta(Y^M), Y^M]$ に分け，そのそれぞれについて

$$E^a_\theta = \{Y \in [\mathring{Y}', \theta(Y^M)) \,\Big|\, \theta^j(Y)\ ,\ j=1,2,\cdots,\ \text{が}\,\mathring{Y}^k\,\text{に引きつけられない}\ \}$$
$$E^b_\theta = \{Y \in [\theta(Y^M), Y^M] \,\Big|\, \theta^j(Y)\ ,\ j=1,2,\cdots,\ \text{が}\,\mathring{Y}^k\,\text{に引きつけられない}\ \}$$

と定義する。すると言うまでもなく $E_\theta = E^a_\theta \cup E^b_\theta$ であるから，前記の目的を果たすには,

（イ） $\lambda(E^a_\theta)=0$

（ロ） $\lambda(E^b_\theta)=0$

がともに成り立つことを示せばよいわけである。

ところがこれらの帰結のうち（ロ）が成り立つことのほうは，コレット＝エックマンが彼らの著書で命題 II.5.7 として示しているところにほかならない[(13)]。われわれもまた論旨の自足性を全（まっと）うする上から以下に彼らに負う証明の数理を概略辿ることにするが，その前にグランモンに倣い，もし（ロ）の帰結が成り立つものとすればただちに（イ）の帰結もまた成り立つということを，まず最初に示しておきたい。

そのための手段として，いま新たに $E^*_\theta$ を

$$E^*_\theta = \{Y \in [\mathring{Y}', \theta(Y^M)) | j=1,2,\cdots \text{のどの}\ j\ \text{かで}\theta^j(Y) \in E_\theta \text{となる}\ \}$$

と定義する。すると $E^*_\theta$ に含まれる $Y$ から出発する軌道 $\theta^j(Y)$ はおそかれ早かれ $E_\theta$ に含まれるどの $Y$ かの軌道と一致するわけであるから，$\theta^j(Y)$ の値はどの $j$ かで $E_\theta$ に含まれる $Y$ の一つと一致せざるをえない。そしてこのことは $E_\theta$ の定義により，$E^*_\theta$ に含まれる $Y$ から出発する軌道 $\theta^j(Y)$

（12） Grandmont, *op. cit.*, p.234 の Proposition 4 に該当する。証明については pp.234–235 参照。なおグランモンは, 安定周期解の存在証明の場合と同様, ここでも $\theta(Y^M) \leq Y^*$ ならびに $\theta(Y^M) > Y^*$ という二つのケースを分け, その双方について証明を行っているが, われわれのモデルでは $\theta(Y^M) < Y^*$ と仮定されているので，後者のケースは取り扱わない。

（13） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.119, 証明は p.120。

もまた $\mathring{Y}^k$ には引きつけられないことを意味するから，

$$E_\theta^* \subset E_\theta^a$$

ということになる。

では逆に $E_\theta^a$ に含まれて $E_\theta^*$ には含まれないような $Y$ があるかどうかを考えてみると，言うまでもなく $\mathring{Y}'$ はそのような $Y$ であるが，目下の仮定では $\mathring{Y}'$ 以外にはそのような $Y$ はありえないことがただちに分かる。なぜかと言えば，仮定から $\mathring{Y}'$ と $Y^*$ のあいだでは $\theta(Y)$ は単調増加であり，しかも $\theta(Y)$ はつねに $Y$ より上にあること，また $\theta(Y^M) < Y^*$ であることによって，$[\mathring{Y}', \theta(Y^M))$ に含まれる $Y$ については，$\mathring{Y}'$ を除くかぎり，どの $Y$ から出発してもその軌道 $\theta^j(Y)$ はすべてやがては $[\theta(Y^M), Y^M]$ に入らざるをえないからである。そこでひとたび $\theta^j(Y)$ が $[\theta(Y^M), Y^M]$ に入ることになれば，その中で $\theta^j(Y)$ が $\mathring{Y}^k$ に引きつけられない $Y$ については，その $\theta^j(Y)$ の値は $E_\theta$ の $Y$ のどれかになっているのでなければならない。よって単調増加性の仮定の下では

$$E_\theta^a \setminus \{\mathring{Y}'\} \subset E_\theta^*$$

となるのでなくてはならず，前の帰結と併せて

$$E_\theta^a = E_\theta^* \cup \{\mathring{Y}'\}$$

となることが知られた。

すると当面の仮定の下では，（ロ）$\lambda(E_\theta^b) = 0$ であれば明らかに $\lambda(E_\theta^*) = 0$ となり，また $\lambda(\{\mathring{Y}'\}) = 0$ であることは自明であるから，当然所望の帰結（イ）

$$\lambda(E_\theta^a) = 0$$

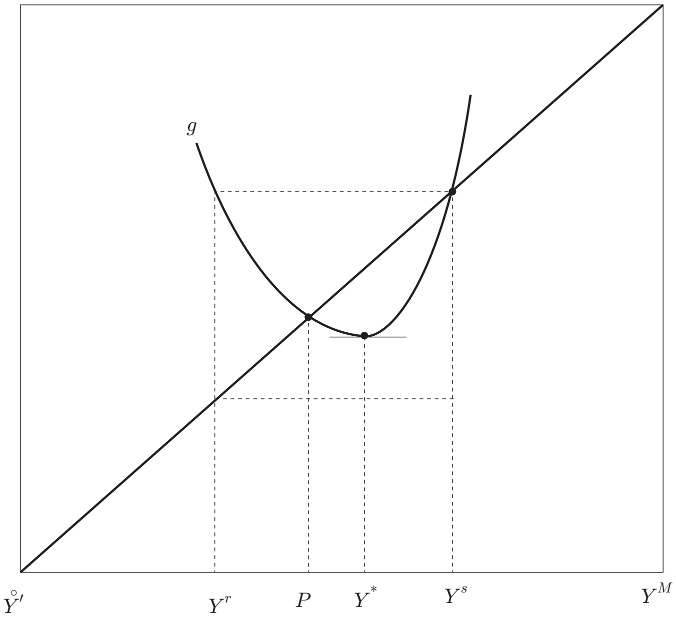
もまた導かれることになるのである。

これで続く作業としては，もっぱら（ロ）$\lambda(E_\theta^b) = 0$ という主張，すなわちコレット＝エックマンの命題 II.5.7 の証明に専念すればよいことになった。以下に記すところはすべてその目標に向けての推論にほかならないが，差し当たっては安定周期解 $\mathring{Y}^k$ の満たすべき条件 $|g'(\mathring{Y}^k)| \leq 1$ が $< 1$ の形で成り立つ場合と $= 1$ の形で成り立つ場合の二つを分け，まずは前者の場合を対象として，すでに証明ずみのつぎの命題をいま一度援用するところから始めたい。

> $\mathring{Y}^k$ の安定多様体を構成する連結成分のうち $\mathring{Y}^k$ そのものを含む連結成分の形としては $(Y^r, Y^s)$，$(Y^r, Y^M]$ の 2 通りのものがあり，$(Y^r, Y^s)$ の場合は $g'(Y^p) = 0$ となるような臨界点 $Y^p$ が $(Y^r, Y^s)$ 上に存在する。[14]

（14） 前記 p.133 参照。

第 25 図




上記のところにもとづき，まず初めに前者 $(Y^r, Y^s)$ の場合についてその状況を図示することにすれば，それは一般に上の第 25 図のような図として描かれる。

図の $P$ は当該の安定周期軌道を構成する安定周期解 $\mathring{Y}^k, \theta(\mathring{Y}^k), \cdots, \theta^{k-1}(\mathring{Y}^k)$ のいずれかを示し，$Y^*$ は $\theta$ の臨界点である。後者はまた $g$ の臨界点にもなる[(15)]。いささか説明を加えておくならば $P$ を含む連結成分 $(Y^r, Y^s)$ は前記のように $g$ の臨界点 $Y^p$ をも含むから，そこでは定義により

$$g'(Y^p) = \theta'(\theta^{k-1}(Y^p)) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta'(\theta(Y^p)) \cdot \theta'(Y^p) = 0$$

という条件が成り立っている。したがって $Y^p$ が $g$ の臨界点であれば，$\theta'(Y^p) = 0$ であるか，$\theta'(\theta(Y^p)) = 0$ であるか，$\cdots, \theta'(\theta^{k-1}(Y^p)) = 0$ であるかのいずれかが成り立つのでなくてはならず，よって $\theta'(Y) = 0$ となるのが $\theta$ の臨界点 $Y^*$ においてのみであることを考えれば，$Y^p = Y^*$ となるか，$\cdots, \theta^{k-1}(Y^p) = Y^*$ となるかのいずれかでなくてはならない。そこでまず $Y^p = Y^*$ となる場合を考えるとすれば，その $Y^p$ を含む連結成分の $P$ を $\mathring{Y}^k$ とすることによって，$\mathring{Y}^k$，$Y^p$ をともに含む形で $P$ と $Y^*$ をいずれながら含む $(Y^r, Y^s)$ 区間がとれることになる。つぎにこんどは 1 期ずれて $\theta(Y^p) = Y^*$ となる場合を考えれば，もはや $Y^p = Y^*$ となることはないが，言うまでもなく

(15) 第 25 図は一つの典型的な場合を図示したもので，言うまでもなく $g$ の形いかんによっては，その臨界点が 45° 線の左にきたり，また $g$ が上方に凸になったり，いろいろな場合がありうる。重要な点は，どの場合も安定周期解 $P$ と $\theta$ の臨界点 $Y^*$ のいずれをも含む連結成分 $(Y^r, Y^s)$ がとれるということである。

目下の場合は $\theta(Y^p)$ 自体がやはり $g$ の臨界点となっている。念のため $g'(\theta(Y^p))$ を計算してみれば

$$g'(\theta(Y^p)) = \theta'(\theta^{k-1}(\theta(Y^p))) \cdot \ \cdots \ \cdot \theta'(\theta(\theta(Y^p))) \cdot \theta'(\theta(Y^p)) = 0$$

で，ここで $\theta(Y^p) = Y^*$，したがって $\theta'(\theta(Y^p)) = 0$ であるから，$g'(\theta(Y^p)) = 0$ となることがただちに知られる。そこでその $\theta(Y^p)$ とカップルされる $P$ もまたやはり $\mathring{Y}^k$ を 1 期分ずらし改めて $\theta(\mathring{Y}^k)$ とすることにより，$\theta(Y^p) = Y^*$ の場合も $(Y^r, Y^s)$ 区間は $\theta(\mathring{Y}^k), \theta(Y^p)$ したがって $P$, $Y^*$ をともに含む形にすることができるのである。以下同様のステップを繰り返していけば，$\theta^i(Y^p) = Y^*, i = 2, \cdots, k-1$ のどの場合についても $(Y^r, Y^s)$ 区間が $P$，$Y^*$ の双方を含むようにできることは明らかであろう。

ついで後者 $(Y^r, Y^M]$ の場合に転じると，この場合は $(Y^r, Y^s)$ の場合とは異なって臨界点 $Y^p$ が $(Y^r, Y^M]$ 上に存在するとは限らない可能性がある。もしそれが当該区間上に存在するのであれば，前の $(Y^r, Y^s)$ の場合とまったく同様な議論がそのまま準用できると考えればよい。一方それが存在しない場合についてはいささか思案を要するが，この場合も，$\mathring{Y}^k, Y^M$ をこんどは $\theta$ で 1 期分逆に写し戻してみれば，$\mathring{Y}^k = \theta^k(\mathring{Y}^k), Y^M = \theta(Y^*)$ であるところから，$\mathring{Y}^k, Y^M$ はそれぞれ $\theta^{k-1}(\mathring{Y}^k), Y^*$ となる。すると $\theta^{k-1}(\mathring{Y}^k)$ はやはり安定周期解 $P$ であり，また $Y^*$ は $\theta'(Y^*) = 0$ よって $g'(Y^*) = 0$ となるところから $g$ の臨界点でもあるので，$g$ は $\theta^{k-1}(\mathring{Y}^k)$ において安定周期解 $P$ を持つとともに $Y^*$ において $\theta$ と $g$ の臨界点を持ちうることになる。これらの帰結を併せて図示すればやはり第 25 図のようになるのであって，目下の場合もまた前の $(Y^r, Y^s)$ の場合に類する事態に帰するのである。

ここで $|g'(\mathring{Y}^k)| = 1$ の場合に移ることにしよう。この場合については前にも記したように[16]，一般性を失うことなく $g'(\mathring{Y}^k) = 1$ として議論を進めていくことができる。弱安定性の定義には両側安定の事態ばかりではなく，片側安定・片側不安定の事態やまた両側不安定の事態さえ含まれるが，$(Y^r, Y^s)$ が $\mathring{Y}^k$ の近傍で $\mathring{Y}^k$ 以外の不動点を持たない開区間であるかぎりは，これまたすでに示したように，$g(Y) > Y$ for all $Y \in (Y^r, \mathring{Y}^k)$ または $g(Y) < Y$ for all $Y \in (\mathring{Y}^k,\ Y^s)$ という帰結が成り立つのでなくてはならない[17]。よって明らかに $\mathring{Y}^k$ において両側不安定という事態は不可能であり，以下ではありうべき事態として両側安定の場合と片側安定・片側不安定の場合のみを取り上げていけばよいことになる。

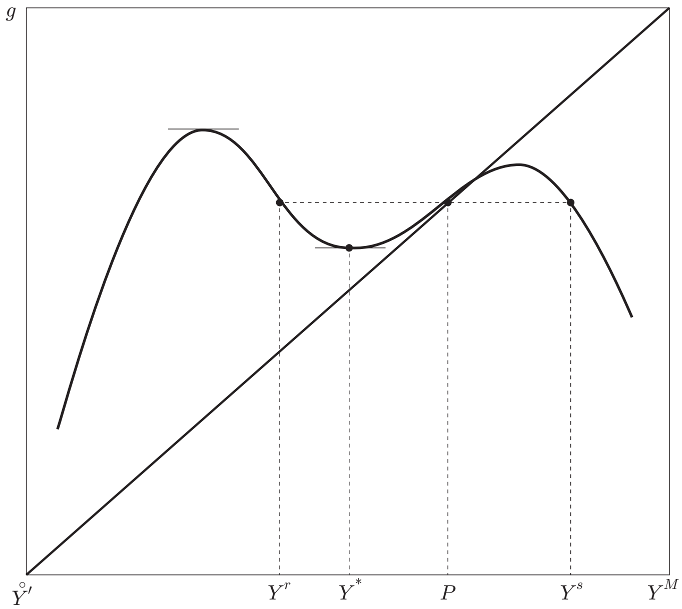
そこでまず両側安定の場合であるが，やはり前述のところから $g'$ は正の極小値を持つことができないから，$g$ のグラフは $Y^*$ に応ずる臨界点とその左の臨界点のあいだでは負の勾配を持ち，典型的には第 26 図に描かれたような形をとる。すなわちこの場合もまた $P$ と $Y^*$ をともに含むような連結成分の区間 $[Y^r, Y^s]$ をとることができるのである。

ただし目下の場合は $Y^r$ から出発する軌道も $Y^s$ から出発する軌道もともに $P$ に漸近するので，

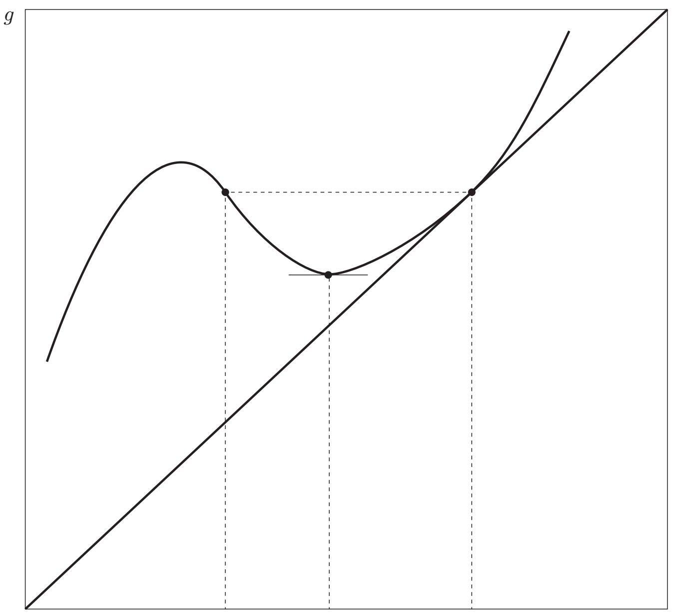
---

（16） 前記 p.134 参照。
（17） 前記 pp.134–135 参照。

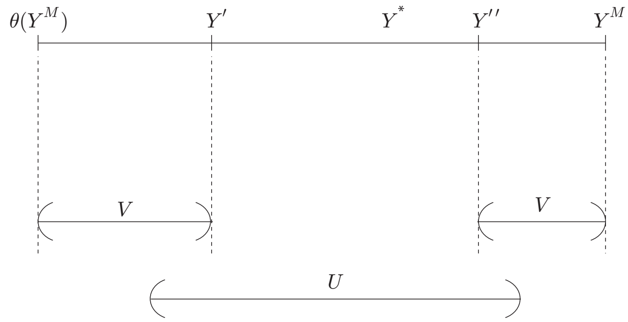
第 26 図




第 27 図



第 28 図




当該の区間は $|g'(\mathring{Y}^k)| < 1$ の場合とは異なり両端を含んだ閉区間となっていることに注意しなければならない。

転じて片側安定・片側不安定の場合を考えると，この場合もまた第 27 図に示したように $P$ と $Y^*$ の両者を含む連結成分の区間 $[Y^r, P]$ をとることができる。そして $Y^r$ から出発すればつぎの $g(Y^r)$ が $P$ となり，また $P$ から出発すれば $P$ そのものにとどまることは自明であるから，当該の連結成分はやはり両端を含む閉区間となる。

以上を要するに，前の $|g'(\mathring{Y}^k)| < 1$ のケースと目下の $|g'(\mathring{Y}^k)| = 1$ のケースは，$P, Y^*$ をいずれながら含む連結成分の区間がとれる点では軌を一にするものの，当該の区間が前者の場合は開区間であったのに対して，後者の場合は閉区間となる点に相違が見出されるのである。

目的の $\lambda(E_\theta^b) = 0$ となることの証明は，つぎの補題[(18)]に依拠して行われる（補題そのものの証明については後述第 6 節参照）。

**補題**　$\theta$ が S 単峰型であり，またある $Y', Y'', \theta(Y^M) < Y' < Y^* < Y'' < Y^M$ に対して $V = (\theta(Y^M), Y') \cup (Y'', Y^M)$ となるような $V$（第 28 図参照）を考え，なおかつ $\theta|_V$ はシンクを持たないものとする。そのとき $U$ を $U \cup V = (\theta(Y^M), Y^M)$ となる任意の開区間として，その $U$ について

$$E_n = \{Y \in [\theta(Y^M), Y^M] | \theta^j(Y) \notin U, j = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

と定義すれば，ある正数 $\eta < 1$ が存在して

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(E_n)}{\eta^n} < \infty$$

となる。

---

（18） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.109 の Theorem II.5.2 の 3。

以下では $P$ と $Y^*$ のいずれをも含む連結成分として開区間 $(Y^r, Y^s)$ がとれる場合を中心として，議論を進めていくことにしよう。いまそのような $(Y^r, Y^s)$ を上記補題の $U$ と考え，さらにその $U$ からやはり $P$，$Y^*$ を内部に含む閉区間 $U_1 \subset U$ をとって，$V=(\theta(Y^M), Y^M)\setminus U_1$ とする。そう $V$ を定義すれば明らかに $U \cup V=(\theta(Y^M), Y^M)$ となるから，われわれの $(Y^r, Y^s)$ は補題の $U$ の条件を満たしている。

一方またいま定義した $V$ について，もし $\theta|_V$ がシンクを持っているとすれば，すでに証明ずみの前稿，補題2[19]により $\bar{V}$ が安定周期解 $P$ を持つことになるから，上記の $V$ のつくり方に矛盾する。よって目下の $V$ は $\theta|_V$ がシンクを持たないという補題の仮定を満たしていることが知られる。

ゆえにわれわれは上記の $(Y^r, Y^s)$ を $U$ として補題を適用することができ，その帰結から

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n)=0 \tag{4.1}$$

となることを主張できる。

さてわれわれが証明したいのは $\lambda(E^b_\theta)=0$ という命題であるから，ここでその $E^b_\theta$ と $E_n$ との関係を問う段取りとなるが，実はそれらのあいだには

$$E^b_\theta=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \tag{4.2}$$

という関係が成り立つのである。このことを示すには

$$E^b_\theta \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,\ E^b_\theta \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

という関係が同時に成り立つことを示せばよいわけであるが，まず前者を示すために $Y \in E^b_\theta$ とすれば，$E^b_\theta$ の定義から $Y$ を起点とする軌道は $P$ に引きつけられない軌道であり，一方 $U$ は $P$ に引きつけられる点の集合であるから，当然その軌道は $U$ に入ることはない。よっていかなる $n$ についても $Y \in E_n$ ということになり，$Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ すなわち $E^b_\theta \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ という主張が証明されたことになる。つぎに後者を示すとして，こんどは $Y \notin E^b_\theta$ とすれば，$Y$ から始まる軌道は $P$ に引きつけられる軌道となるから，十分大きな $n$ についてはその軌道は $U$ に入ってくることになり，したがって $Y \notin E_n$ ということにならねばならない。よって $Y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ であり，$E^b_\theta \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ となることが示された次第である。

これで $E^b_\theta=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ という関係の成り立つことは分かったが，ここで $E_n$ の定義から $n$ を大きくしていけば条件がますます厳しくなっていく[20]ので，$E_n$ の大きさは次第に小さくなっていく結果とな

(19) 福岡・須田，前掲論文，p.12。

(20) $E_n$ の定義から $n$ が1の場合は $\theta^0(Y)$ すなわち $Y \notin U$，$n$ が2の場合は $Y \notin U$，$\theta(Y) \notin U$，$n$ が3の場合は $Y \notin U, \theta(Y) \notin U, \theta^2(Y) \notin U, \cdots$ となっていくので，$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ という結果となる。

る。ゆえに

$$\lambda(E_\theta^b)=\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n)$$

ということになり，これに補題の帰結を用いることによって $\lambda(E_\theta^b)=0$ を証明するという所望の目的は果たされたということになるのである。

なお連結成分 $U$ が $(Y^r,Y^M]$ になる場合や $[Y^r,Y^s]$ になる場合も，$U$ よりさらに小さく $U'\subset U$ を $P,Y^*$ がやはり内部に含まれるような開区間としてとれば，その $U'$ を $U$ の代わりに用いることによって，同様に $\lambda(E_\theta^b)=0$ を証明することができよう。

よって連結成分が $(Y^r,Y^s)$ および $(Y^r,Y^M]$ の場合ならびに $[Y^r,Y^s]$ の場合については，すなわち事態がいずれも両側安定となる場合については，おしなべて $\lambda(E_\theta)=0$ という帰結の成り立つことが一応明らかとなった。が，残る $[Y^r,P]$ の場合，すなわち片側安定・片側不安定の場合は，安定周期解 $P$ そのものが区間の端点にくるので，上記のやり方を用いて解決を図ることはできない。端点の $P$ に $\theta$ をもう一度作用させて別の $P$ を考えるとしても，その $P$ が $Y^*$ の最寄りの $P$ になるとは，すなわち両者がともに含まれる連結成分がとれるとは，限らないのである。そのような場合にもまた $\lambda(E_\theta)=0$ という帰結がいかにして成り立つかの証明については，グッケンハイマーの論文[(21)]をご参照あれ。

## 5

$\lambda(E_\theta)=0$ すなわち安定周期軌道に収束しない軌道の起点の集合がゼロのルベーグ測度を持つとは，重ねてパラフレーズすれば，$[\mathring{Y}',Y^M]$ 上のほとんどどの点から出発する軌道も一意の安定周期軌道に収束するということである。これは，前々稿[(22)]でも触れたように，われわれの非線形マクロ・モデルが往時のカルドアやグッドウィンを例とする非線形極限循環モデルと一脈相通ずる側面をも持つことを示唆するものである。

が一方，われわれは当該の帰結が，仮定された条件の充足を俟って初めて導かれうるものであり，所与のマクロ経済の構造がそれらの条件をつねに満たすとは限らないという事情にも思いを致すのでなくてはならない。一部の論者に見られるように，ここで得た帰結を一般化して，そこからカオス現象の生起を否定する含意を引き出すのは当を得ない。マクロ経済の特性いかんによっては，また $E_\theta$ がプラスの測度を持つことも十分にありうるところであり，そのような場合には当該の経済にカオス解が存在することもまったく可能なのである。要するに，カオス的変動と安定周期的変動

(21) John Guckenheimer, “Sensitive Dependence to Initial Conditions for one Dimensional Maps”, *Communications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1979.

(22) 福岡正夫・須田伸一「内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル」，『三田学会雑誌』2011年7月号。

の相対的頻度はマクロ経済システムの時々の構造に依存し，そのあり方によってカオスがある程度頻繁に生ずる現象になることもあるし，またきわめて稀にしか生じえない現象になることもある。前々稿から続いたわれわれの三つの論稿の意義は，上記のそれぞれの場合に対応する十分条件を明らかにした点に見出されるとも解しうるであろう。

## 6

最後に本節では，前々節で援用した補題そのものの証明を補遺として記し，前掲基本定理の数理をいっそう self-complete なものにすることに努めたい。記述の順序としては，当該の補題がさらに依拠する定理[(23)]を補題 1 として，まずはその証明を先に述べ，その上で本文に用いた補題を補題 2 としてその証明を述べることにする[(24)]。前稿に倣い，以下では $Y^M = b$, $Y^* = x^*$, $Y = x, y, z, u, v$ などと記号を簡略化することを許されたい。

**補題 1**　$\theta$ は S 単峰型であるとし，またある $x', x'', \theta(b) < x' < x^* < x'' < b$ に対して $V = (\theta(b), x') \cup (x'', b)$ となるような $V$ を考えることにする。かつまた $\theta|_V$ はシンクを持たないものと仮定する。そのとき $U$ を $U \cup V = (\theta(b), b)$ となるような任意の開区間とすれば，$\theta^j(x) \notin U, j = 0, 1, \cdots, m-1$ となるようなすべての $x$ に対して $|D\theta^m(x)| > 1$ となる $m \geq 1$ が少なくとも一つは存在する。

**証明**

背理法によるとして，まず補題の主張を否定してみる。すなわちどんな $n \geq 1$ に対しても $\theta^j(x) \notin U, j = 0, 1, \cdots, n-1$ であるのに，なお $|D\theta^n(x)| \leq 1$ を満たすような $x_n \in (\theta(b), b)$ があったと仮定してみる。

ここで $x_n \in J$ かつ $\theta^j(J) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ となる開区間 $J$ のうちで最大のものを $J_n$ とすると，当然 $x_n \in J_n$ であるので，$x_n$ は $J_n$ を左右二つの部分に分けることになる。すると前に示したように $|D\theta^n(x)|$ は $(\theta(b), b)$ 上で正の極小値を持つことはできないので，このことから $x_n$ の左と右のいずれかではつねに $|D\theta^n(x)| \leq 1$ となることが，つぎのような推論をつうじて示される。

ふたたび背理法を用いるとして，$y < x_n, y \in J_n$ で，しかも $|D\theta^n(y)| > 1$ となるような $y$ があるとともに，かつまた $z > x_n, z \in J_n$ で，しかも $|D\theta^n(z)| > 1$ となるような $z$ が存在したとする。すると，もともとの背理法の仮定から $|D\theta^n(x_n)| \leq 1$ であり，また $\theta^j(J_n) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ である

（23） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.109 の Theorem II.5.2 の 2 に該当。
（24） 前者の証明については Collet and Eckmann, *op. cit.*, pp.112–114 を，後者の証明については同 pp.114–116 を参照。

ところから，すべての $x \in J_n$，すべての $j = 0, 1, \cdots, n-1$ に対して $\theta^j(x) \in V$，よって $\theta^j(x) \neq x^*$ すなわち $\theta'(\theta^j(x)) \neq 0$ であることになり，$D\theta^n(x) = \theta'(\theta^{n-1}(x)) \cdot \theta'(\theta^{n-2}(x)) \cdot \cdots \cdot \theta'(x) \neq 0$ となるので，$y, z, x_n$ をつないだ $|D\theta^n(x)|$ のグラフを描くと，それは $y, z$ のあいだにかならず正の極小値を持つことになって，矛盾が生じざるをえない。

以上の推論から，目下の想定下では $x_n$ の左と右のいずれかでつねに $|D\theta^n(x)| \leq 1$ となることが分かったので，いまかりにそのようになるほうの区間を左として，それを $L_n$ と書くことにしよう。[25] すると，つぎの二つの命題（I），（II）が成り立つことになる。

（I）　$\theta^{k(n)}(L_n)$ が $V$ を構成する二つの開区間の一方と共通の端点を持つような $k(n) < n$ が存在する。

（II）　$\lambda(L_n) \to 0$ as $n \to \infty$

（I）の証明はつぎのごとくである。ここでも背理法を用い，主張を否定して，すべての $j = 0, 1, \cdots, n-1$ に対し $\theta^j(L_n)$ が $V$ を構成する二つの開区間の一方と共通の端点を持たないとする。すると，$V$ が開集合であるところから，$L_n$ を両側にわずか拡大して $\tilde{L}_n$ としても，やはり $\theta^j(\tilde{L}_n) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ が成り立つはずである。そこで $\tilde{J}_n = J_n \cup \tilde{L}_n$ とすれば，$J_n$ より大きい $\tilde{J}_n$ についても上記の条件が満たされることになり，これは $J_n$ が当該の条件を満たす最大区間であるという設定に矛盾する。よって（I）は証了。

（II）の証明はかなり長いものになるが，再三背理法を用いることにして，主張を否定すると，つぎの四つの条件を満たす $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots\cdots$ と $\varepsilon > 0$ の存在することがただちに分かる。

（i）　$x_{n_i} \to x_0$ as $i \to \infty$ となるような点 $x_0$ が存在する。

（ii）　$\lambda(L_{n_i}) > \varepsilon$

（iii）　$L_{n_i}$ はすべて $x_{n_i}$ の同じ側にある。

（iv）　$|x_{n_i} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ for all $i$

まず（II）の否定は，$L_n$ のある部分列に対応する添字 $n'_1 < n'_2 < n'_3 \cdots\cdots$ と，ある $\varepsilon > 0$ があって，すべての $i$ に対して $\lambda(L_{n'_i}) > \varepsilon$ とできることを意味するから，その添字の列 $\{n'_i\}$ については（ii）が満たされることは明らかである。

ここで $x_{n'_i}$ が $[\theta(b), b]$ というコンパクト区間内を動くことを考えれば，上記の添字の列 $\{n'_i\}$ の中からさらにその部分列 $\{n''_i\}$ を適当に選べば，$x_{n''_i} \to x_0$ とすることができる。よって部分列 $\{n''_i\}$ について（i）が満たされることもまた明らかである。

つぎに $L_{n''_i}$ は $x_{n''_i}$ の左右いずれの側にくることもありうるが，元来部分列 $\{n''_i\}$ の成分は無限個

---

（25）　当該の区間が右になる場合は，以下の議論をすべて対称的に考えていけばよい。

あるわけであるから，$L_{n''_i}$ が $x_{n''_i}$ の左側のみにくる成分と右側のみにくる成分を分けても，そのいずれかが無限個の成分を含むようにすることができよう。よってその無限個の成分から成るほうの部分列を $\{n''_i\}$ から抜き出し，それをあらためて $\{n'''_i\}$ とすれば，$L_{n'''_i}$ がすべて $x_{n'''_i}$ の同じ側にくるようにすることができる。ゆえに部分列 $\{n'''_i\}$ については（iii）が満たされることになる。

そこで最後に，上で見たように $x_{n''_i} \to x_0$ になるのであれば，当然 $x_{n'''_i} \to x_0$ にもなるので，いま十分大きな $N$ をとれば，任意の $i \geq N$ に対して当然 $\left|x_{n'''_i} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。すなわち $\left|x_{n'''_N} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|x_{n'''_{N+1}} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|x_{n'''_{N+2}} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \cdots\cdots$ のようにできるので，ここであらためて $n_1 = n'''_N, n_2 = n'''_{N+1}, n_3 = n'''_{N+2}, \cdots\cdots$ とすれば，その $\{n_i\}$ に対して（iv）が成立する結果となる。

そして最後につくったその部分列 $\{n_i\}$ に対しては，（iv）ばかりではなく（i）（ii）（iii）もまたすべてが成り立つことになっているので，これで（II）を否定すれば上記（i）〜（iv）の条件をすべて満たす $\{n_i\}$ と $\varepsilon > 0$ の存在することが示されたわけである。よって以下この結果を利用して矛盾を導けば，（II）の証明は成就されることになるのである。

そこでそのための手順として，つぎにすべての $j$ について $i(j)$ を $n_{i(j)} > j$ が満たされるように選ぶ。いま $j \geq 0$ を一つ固定して，$i \geq i(j)$ となる任意の $i$ を考えれば，$j < n_{i(j)} \leq n_i$ であるから，$j \leq n_i - 1$ である。そしてもともとの背理法の仮定から，どんな $n \geq 1$ に対しても $\theta^j(x_n) \notin U, j = 0, 1, \cdots, n-1$ となる場合を考えているのであるから，そこでの $n$ を目下の $n_i$ とみなせば $\theta^j(x_{n_i}) \notin U$ となり，よって上記の（i）から $x_{n_i} \to x_0$ であれば，$\theta^j(x_0) \notin U$ となる。さらにまた十分大きな $i$ を考えれば $\theta^j(x_{n_i})$ が $x^*$ に対して同じ側にくることも分かる。

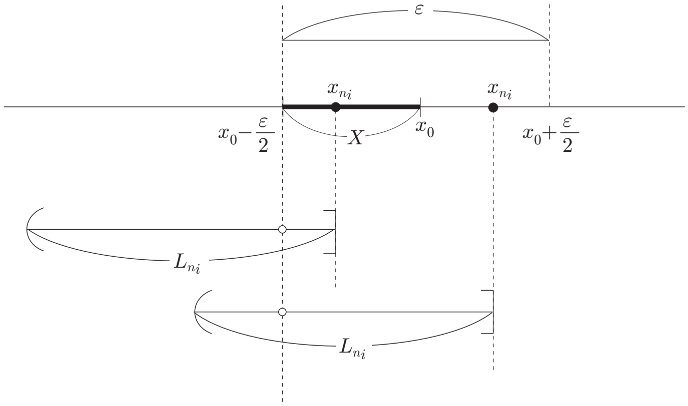
一方上記の（iii）によって $L_{n_i}$ は $x_{n_i}$ の同じ側にあることになっているので，いまそれが左側にある場合で 2 通りの $x_{n_i}$ を例にとって図を描いてみると第 29 図のごとくであり，（iv）から $x_{n_i}$ は図の黒丸のような位置にある。そして（ii）から $L_{n_i}$ の長さは $\varepsilon$ より大きいから，$x_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ に該当する白丸の点はかならず $L_{n_i}$ の中に入っている。すなわち，これで $x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \in L_{n_i}$ となるような $x_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ について $X = (x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ と定義される長さ $\frac{\varepsilon}{2}$ の開区間 $X$（図の太線）の存在することが言えたわけである。

さて $\theta^j(J_n) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ であることは前記の $J_n$ の定義から自明であり，$L_n$ はその $J_n$ を二つの部分に分けた片方の区間であるから，$\theta^j(L_n) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ となることは言うまでもない。よって $n_{i(j)} > j$ すなわち $j \leq n_{i(j)} - 1$ であるところから，上記の $n$ を $n_{i(j)}$ に置き換えれば $\theta^j(L_{n_{i(j)}}) \subset V$ ということになり，また $i \geq i(j)$ なら $j \leq n_i - 1$ でもあるので，すべての $i \geq i(j)$ について

$$\theta^j(L_{n_i}) \subset V$$

ということにもなる。

第 29 図



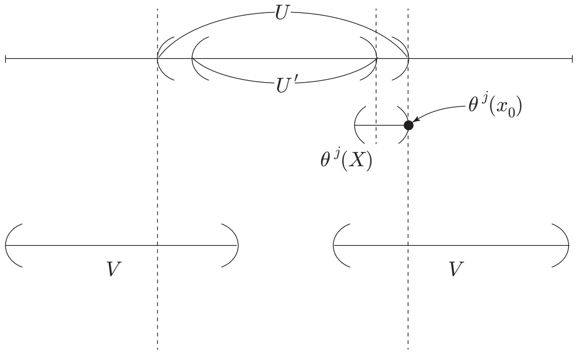

すると上記のところと，すでに示した $\theta^j(x_0) \notin U, \forall j$ ということから，上に定義した $X$ は $V$ 上の同相区間になることが知られる。ここで $X$ が $V$ 上の同相区間になるとは，$\theta^j$ を $X$ 上に制限したとき，$X \to \theta^j(X)$ がすべての $j \geq 1$ に対して同相写像すなわち 1 対 1 で両連続な写像になること，かつまた $\theta^j(X) \subset V$ がすべての $j \geq 0$ に対して成り立つこと，にほかならない。

まず前者を示すことのほうから始めよう。$\theta^j$ が注文どおり 1 対 1 の写像になるためには $\theta^j$ のグラフが単調になっていれば十分であるが，そのためにはすべての $j \geq 0$ に対して $\theta^j(X)$ が $x^*$ を含まなければよい。

まず $j=0$ のとき $\theta^0(X)$ は $X$ そのものであるから，それが $x^*$ を含まないことはただちに分かる。なぜなら，いまかりに $x^* \in X$ としてみると，$X=(x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0)$ で $x_{n_i} \to x_0$ であるところから，十分大きな $i$ については $x_{n_i}$ は $x^*$ の右側にくることになり，これは矛盾である。事実 $x_{n_i}$ が $x^*$ の右側にくれば $x^*$ は $L_{n_i}$ に入らざるをえないことになるが，一方前に見たようにすべての $i \geq i(j)$ について $\theta^j(L_{n_i}) \subset V$，そしてこれは $j=0$ のときも成り立たねばならないから，$L_{n_i} \subset V$ となる。よって $x^*$ は $L_{n_i}$ に入れば $V$ にもまた入るのでなくてはならない。しかし，もともと $V$ は $x^*$ を含まないようにつくられているのであるから，これは矛盾であるほかはない。

一般に $j \geq 1$ のとき $x^* \notin \theta^j(X)$ となることも，つぎのような推論をつうじて容易に示すことができる。ふたたび $i \geq i(j)$ については $\theta^j(L_{n_i}) \subset V$ となることを考えれば，$\theta^j(L_{n_i})$ は $x^*$ の左側か右側に含まれており，したがって $x_{n_i}$ が $L_{n_i}$ の端点であることから，当然 $\theta^j(x_{n_i})$ もまた同じ側にくる。一方 $x_0-\frac{\varepsilon}{2} \in L_{n_i}$ であることから $\theta^j(x_0-\frac{\varepsilon}{2}) \in \theta^j(L_{n_i})$ となることもやはり分かっているので，以上のことから $\theta^j(x_0-\frac{\varepsilon}{2})$ と $\theta^j(x_{n_i})$ が $x^*$ の同じ側にくることがただちに知られる。そして十分大きな $i$ については $\theta^j(x_{n_i})$ と $\theta^j(x_0)$ が $x^*$ の同じ側にくるので，$\theta^j(x_0-\frac{\varepsilon}{2})$ と $\theta^j(x_0)$ が $x^*$ に対して同じ側にあることが言える。それが $x^*$ より左側であれば $\theta$ は $X$ 上で単調増加であり，右側であれば $X$ 上で単調減少であるので，結局以上の推論から $\theta^j|_X$ がすべての $j \geq 0$ に対して 1

第 30 図




対 1 の写像となっていることが示されたのである。両連続性についても $\theta$ の連続性より満たされることは明らかである。

つづいて後者すなわちすべての $j \geq 0$ に対して $\theta^j(X) \subset V$ となることを示す段取りとなるが，これはきわめて簡単である。すでに示されているように $\theta^j(x_0) \notin U, \forall j$ であることから $\theta^j(x_0) \in V$，またすべての $i \geq i(j)$ に対して $\theta^j(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \in \theta^j(L_{n_i})$ かつ $\theta^j(L_{n_i}) \subset V$ であることから $\theta^j(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \in V$。そして上で見たように $\theta^j(x_0 - \frac{\varepsilon}{2})$ と $\theta^j(x_0)$ は $x^*$ に対して同じ側にあるので，当然 $\theta^j(X) \subset V, \forall j$ となる。

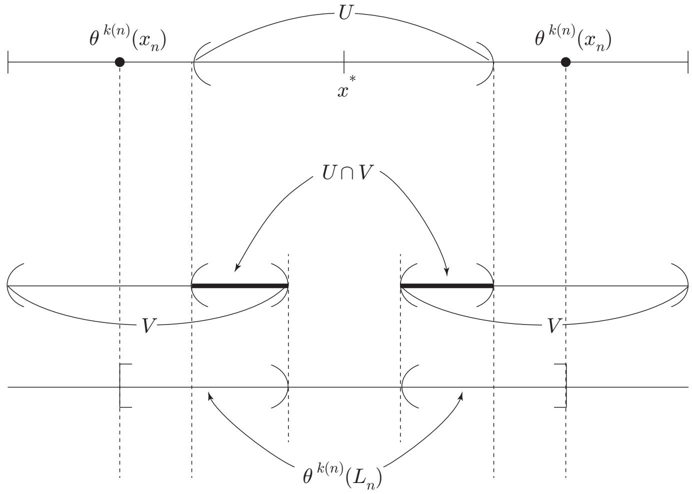
以上で $X$ が $V$ 上の同相区間になることが示されたので，その $X$ に対して前稿の補題 3[(26)] の帰結を適用し，矛盾を導いて（II）の証明を終えるというのが当面のステップである。まずは第 30 図を見られたい。そこで示されているように，$\theta^j(X)$ 全体が $U$ に含まれる可能性はありうるが，いま $U$ の両端をいささか縮めてそれを $U'$ とすれば，$U, V$ がいずれも開区間であるところから，やはり $U' \cup V = (\theta(b), b)$ という仮定を満たすように，すなわち $U'$ の両端がいずれも $V$ に含まれるように，開区間 $U'$ をとることができる。するとどの $j$ についても $\theta^j(X)$ は明らかに $U'$ をはみ出すから，$\theta^j(X) \not\subset U'$ という帰結，しかもそれがすべての $j$ について成り立つという帰結が導かれる。一方，前稿の補題 3 は $V$ 上の任意の同相区間 $J$ に対して $\theta^m(J) \subset U_0$ となるような $m > 0$ がかならずあることを主張しているから，その $J$ に目下の $X$ をあてはめ，$U_0$ に目下の $U'$ をあてはめれば，$\theta^j(X) \subset U'$ となるような $j$ があることになり，すべての $j$ に対して $\theta^j(X) \not\subset U'$ という上記の帰結は明らかにこれと矛盾する。よって（II）証了。

これで前記の命題 (I), (II) がともに成立することが明らかとなった。すると，もともとの背理法の仮定から $|D\theta^n|_{L_n} \leq 1$ であることにより $\lambda(\theta^n(L_n)) \leq \lambda(L_n)$，また命題 (II) から $\lambda(L_n) \to 0$ as $n \to \infty$ となるので，$\lambda(\theta^n(L_n)) = \lambda(\theta^{n-k(n)}(\theta^{k(n)}(L_n)))$ であることを考えれば

---

（26） 福岡・須田，前掲論文（注（1）の論文，以下同じ），p.13 の補題 3 参照。この補題はもともと Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.109 の Theorem II.5.2.1 に該当する。

第 31 図




（III） $\lambda(\theta^{n-k(n)}(\theta^{k(n)}(L_n))) \to 0$ as $n \to \infty$

ということになる。

またやはり背理法の仮定から $\theta^{k(n)}(x_n) \notin U$ であり，命題（I）から $\theta^{k(n)}(L_n)$ が $V$ の一方の端点を共有していることを考えれば，$\theta^{k(n)}(L_n)$ は $U \cap V$ という左右二つの区間のいずれかをかならず含むことになる。この点を理解するには第 31 図を見るのが早道で，ここでは $\theta^{k(n)}(x_n)$ が $x^*$ の右側にくるケースと左側に来るケースの二つが同じ図中に描かれている。

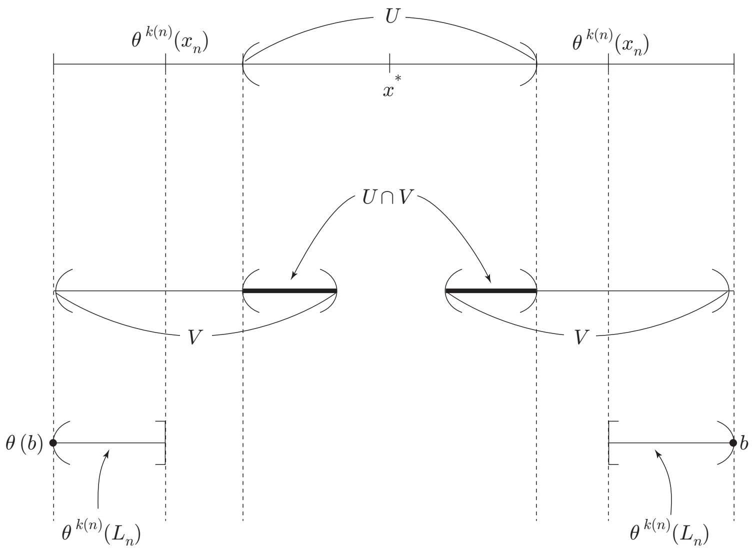
このとき $\theta^{k(n)}(x_n)$ がそれぞれ $U$ の外にあり，$\theta^{k(n)}(L_n)$ がそれを一方の端点とするとともに，他方の端点を図に描かれているように $V$ と共有しているなら，それぞれの $\theta^{k(n)}(L_n)$ が $U \cap V$（図に太線で描かれた二つの開区間）のいずれかを含むことは明らかであろう。なお可能性としては，同じ条件の下において $\theta^{k(n)}(L_n)$ が $[\theta(b), b]$ の両端でそれぞれ $V$ と端点を共有する場合，すなわち第 32 図に図示したようになる場合もないわけではなく，この場合所望の帰結は生じえないが，右側のような場合は $\theta^{k(n)}(L_n)$ が $L_n$ そのものの場合であり，これは $k(n) = 0$ のときにのみ生じうるにすぎない。他方左側の場合は $\theta^{k(n)}(L_n)$ が $\theta(L_n)$ の場合で，このような事態もまた $k(n) = 0$ ならびに $= 1$ のとき以外には生じえないであろう。そしてこれらの場合には帰結が生じえないとしても，写像を繰り返せば第 31 図のような事態に転ずることが可能であるから，主要な議論としては一応こうした特異な事態は例外視することが許されよう。[27]

ということで，$k(n) \leq 1$ の場合を除けば，$\theta^{k(n)}(L_n)$ が $U \cap V$ という二つの開区間のいずれかに

---

（27） コレット＝エックマンも $k(n) \leq 1$ の事態は “trivial variant” として無視している。Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.114, ll. 3–4。

第 32 図




かならず含まれることが明らかにされた。すると，それぞれの $n$ に対して $\theta^{k(n)}(L_n)$ が左の $U \cap V$ に含まれる場合と右の $U \cap V$ に含まれる場合がいずれもありうるわけであるが，いまかりに左に含まれるときの $n$ が偶数番の $n$，右に含まれるときの $n$ が奇数番の $n$ とすれば，両方とも無限個の $n$ がとれることになる。また片方には有限個の $n$ しかとれない場合もあるかもしれないが，いずれにしてもどちらかにはかならず無限個の $n$ がとれることになるから，ともあれ無限個の $n$ を含むほうの $U \cap V$ を $K$ と書き，$K$ を含む $n$ の番号だけを選んで部分列 $n_1 < n_2 < \cdots$ をつくれば，すべての $i$ について

$$K \subset \theta^{k(n_i)}(L_{n_i})$$

となる。すると，この帰結と前記の命題（III）とから

$$\lambda(\theta^{n_i - k(n_i)}(\theta^{k(n_i)}(L_{n_i}))) \to 0 \text{ as } i \to \infty$$

ゆえに

$$\lambda(\theta^{n_i - k(n_i)}(K)) \to 0 \text{ as } i \to \infty$$

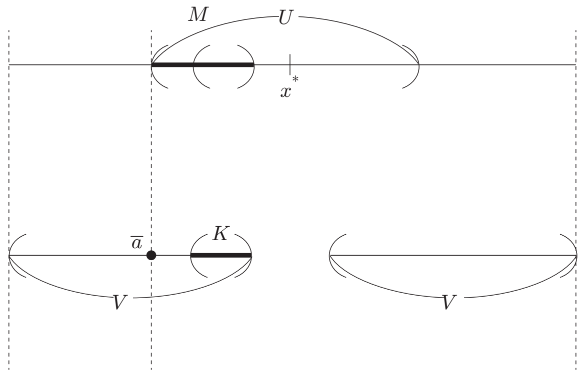
ということになり，よって

$$n_i - k(n_i) \to \infty \text{ as } i \to \infty$$

という帰結を得る。

ここで $\{\theta^{k(n_i)}(x_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ の集積点の一つを $\bar{a}$ とする。これは $i$ の部分列 $i'$ を適当に選べば $\theta^{k(n_{i'})}(x_{n_{i'}}) \to \bar{a}$ とできることを意味している。一方もともとの背理法の仮定から $\theta^j(x_n) \notin U$ for $j < n$ であるから，$\theta^{j+k(n_i)}(x_{n_i}) \notin U$ for $j + k(n_i) < n_i$ すなわち

第 33 図




（IV） $\theta^j(\theta^{k(n_i)}(x_{n_i})) \notin U$ for $j < n_i - k(n_i)$

ということが言える。よって上に示した $n_i - k(n_i) \to \infty$ as $i \to \infty$ から，

$$\theta^j(\bar{a}) \notin U \text{ for all } j$$

となることが示される。事実もし $\theta^j(\bar{a}) \subset U$ となる $j$ があったとすれば，$U$ が開集合であるところから，十分大きな $i'$ については $\theta^j(\theta^{k(n_{i'})}(x_{n_{i'}})) \in U$ となる。しかし，これは $n_{i'} - k(n_{i'}) \to \infty$ であることと（IV）に矛盾する。なぜなら $n_{i'} - k(n_{i'}) \to \infty$ であれば，いつかは $j < n_{i'} - k(n_{i'})$ となり，（IV）は $i$ について言えれば当然 $i'$ についても言えるからである。

推論のつぎのステップとしては，$M$ を $K \cup \{\bar{a}\} \subset \bar{M}$ となる最小の開区間とする。第 33 図を参照されたい。すると $M$ は $V$ 上で同相区間となることが示される。証明の要領はつぎのごとくである。

いま $\theta^j(\bar{a}) \notin U$ for all $j$ であるから，$\theta^j(\bar{a}) \in V$ for all $j$ である。また

$$K \subset \theta^{k(n_i)}(L_{n_i}) \subset \theta^{k(n_i)}(J_{n_i}) \text{ for all } i$$

であるので，両辺を $j$ 回写せば

$$\theta^j(K) \subset \theta^{j+k(n_i)}(J_{n_i}) \text{ for all } i$$

を得る。すると

$$\theta^j(K) \subset V \text{ for } j = 0, 1, \cdots, n-1$$

となることが言える。なぜなら $n_i - k(n_i)$ は $i$ を大きくすればいくらでも大きくできるから，十分大きな $i$ を選べば $n_i - k(n_i) > j$ すなわち $j + k(n_i) < n_i$。そこでこの関係を $\theta^j(J_n) \subset V$ for $j < n$ にあてはめれば，$\theta^{j+k(n_i)}(J_{n_i}) \subset V$ となるからである。ということで，このように $\theta^j(K) \subset V, \theta^j(\bar{a}) \in V$ for all $j$ であることが分かれば，$K$ と $\bar{a}$ のあいだを含めて考えても

$$\theta^j(M) \subset V \text{ for all } j$$

となることが知られ，$\theta^j(M)$ には $x^*$ が含まれないことになるので，区間 $M$ では $\theta$ は単調増加か単調減少かのいずれかであるほかはない。よって $M$ は $V$ 上で同相区間になることが示された次第である。

ここでいよいよ最後のステップとして, 本来の $U$ より少しだけ小さい開区間 $U'$ を $U' \cup V = (\theta(b), b)$ となるようにとり, その $U'$ についてふたたび前稿の補題3を適用すれば, $V$ 上の同相区間 $M$ に対して $\theta^m(M) \subset U'$ となるような $m > 0$ があることになる。そのことから当然 $\theta^m(\bar{M}) \subset \bar{U}' \subset U$ が言え, $\bar{a} \in \bar{M}$ であるから, $\theta^m(\bar{a}) \in U$ となる $m$ があることになるが, これは前に導いた $\theta^j(\bar{a}) \notin U$ for all $j$ という帰結に矛盾する。よって背理法の仮定は成立しえず，補題1の証明は完了する。

ついで以上に証明した補題1にもとづき，本文第4節で用いた補題を補題2として，以下ではその証明に専念することを最後の課題としたい。[28]

**補題2**　補題1と同一の仮定が満たされているものとする。そのとき $U$ を $U \cup V = (\theta(b), b)$ となる任意の開区間として，その $U$ について

$$E_n = \{x \in [\theta(b), b] | \theta^j(x) \notin U \text{ for } j = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

と定義すれば，ある正数 $\eta < 1$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\eta^n} < \infty$$

となる。

**証明**

まず先に証明した補題1によって，ある $m > 0$ が存在し，$\theta^j(y) \notin U$ for $j < m$ となるような任意の $y \in V$ に対して $|D\theta^m(y)| > 1$ となっている。そこで $V$ の内側の部分を $U \cup V = (\theta(b), b)$ を維持しつつわずかに縮めて考えることにより，この不等式を

$$|D\theta^m(y)| \geq \alpha > 1 \text{ となるような } \alpha \text{ がある}$$

というように，いっそう強めることにする。

一方また $U$ に含まれない $x$ についてはどこでも $\theta$ は単調増加であるか単調減少であるから，$\inf_{x \notin U} |\theta'(x)| > 0$ が成り立っている。よってある $\rho$，$0 < \rho < 1$ に対して不等式

$$\inf_{x \notin U} |\theta'(x)| \geq \rho$$

---

(28)　注（18）にも記したように，この補題はコレット＝エックマンの Theorem II.5.2. の 3 に該当する。以下に述べる証明の骨子は Collet and Eckmann, *op. cit.*, pp.114–116 に負う。

が成立する。

ここで任意の $n=1,2,\cdots$ に対して上記の $m$ を用いて

$$n=pm+q,\ 0\leq q<m,\ p\geq 0$$

とする。するとすべての $x\in E_n$ に対して

$$|D\theta^n(x)|=\left|\prod_{j=0}^{p-1}D\theta^m(\theta^{jm}(x))\prod_{l=0}^{q-1}\theta'(\theta^{l+pm}(x))\right|\geq\alpha^p\rho^q$$

という式が成り立つことになる。

まず最初の等式が成り立つことから示すことにしよう。いま $D\theta^n(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned}D\theta^n(x)=&\theta'(\theta^{n-1}(x))\ \cdot\ \theta'(\theta^{n-2}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{n-q}(x))\cdot\\&\theta'(\theta^{n-q-1}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{n-q-m}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\&\theta'(\theta^{n-q-(p-1)m-1}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{n-q-(p-1)m-m}(x))\end{aligned}$$

のごとくであり，ここで $n=pm+q$ したがって $n-q=pm$ であるから，右辺の初めの $\theta'(\theta^{n-1}(x))$ から $\theta'(\theta^{n-q}(x))$ までの部分は

$$\theta'(\theta^{pm+q-1}(x))\ \cdot\ \theta'(\theta^{pm+q-2}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{pm}(x))=\prod_{l=0}^{q-1}\theta'(\theta^{l+pm}(x))$$

となることが分かる。つぎに同じく $n=pm+q$ であるところから，$n-q-(p-1)m-1=m-1$，$n-q-(p-1)m-m=0$ であるから，右辺の終わりの $\theta'(\theta^{n-q-(p-1)m-1}(x))$ から $\theta'(\theta^{n-q-(p-1)m-m}(x))$ までの部分は

$$\theta'(\theta^{m-1}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(x)=D\theta^m(x)$$

となる。これは $\prod_{j=0}^{p-1}D\theta^m(\theta^{jm}(x))$ の $j=0$ の部分に当たる。また同様に $n-q-1=(p-1)m+m-1$，$n-q-m=(p-1)m$ であるから，右辺 2 行目の $\theta'(\theta^{n-q-1}(x))$ から $\theta'(\theta^{n-q-m}(x))$ までの部分は

$$\begin{aligned}&\theta'(\theta^{(p-1)m+m-1}(x))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{(p-1)m}(x))\\=&\theta'(\theta^{m-1}(\theta^{(p-1)m}(x)))\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \theta'(\theta^{(p-1)m}(x))\\=&D\theta^m(\theta^{(p-1)m}(x))\end{aligned}$$

となり，これは $\prod_{j=0}^{p-1}D\theta^m(\theta^{jm}(x))$ の $j=p-1$ の部分に当たる。以下省略するが，同様の要領で計算すれば，それらに挟まれる $\cdot\ \cdots\ \cdot$ の部分が $\prod_{j=0}^{p-1}D\theta^m(\theta^{jm}(x))$ の $j=1$ から $j=p-2$ の部分に当たることが容易に確かめられよう。

そこで引き続き，つぎに $|D\theta^n(x)| \geq \alpha^p\rho^q$ という不等式の部分が成り立つことを示すことにしよう。まず $x \in E_n$ であることにより $\theta^j(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, n-1$ であるので，そのことから

$$\theta^{jm}(x) \notin U \text{ for } j = 0, 1, \cdots, p-1$$

$$\theta^{l+pm}(x) \notin U \text{ for } l = 0, 1, \cdots, q-1$$

となるのでなくてはならない。なぜなら, まず $j = 0, 1, \cdots, p-1$ については $jm = 0, m, \cdots, m(p-1)$ であり，$n = pm + q$ であることから $m(p-1) = pm - m = pm + q - (q + m) = n - (q + m)$。ここで $q$ は $\geq 0$ また $m$ は $> 0$ であるから，明らかに $m(p-1)$ は $n$ よりも小さく，したがってそれに先立つ $jm$ もまた当然 $n$ より小さいはずである。よって $\theta^j(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, n-1$ なら $\theta^{jm}(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, p-1$ とならねばならない。つぎに同様に $l = 0, 1, \cdots, q-1$ については $l + pm = pm,\ pm+1, \cdots, pm + (q-1)$，したがってやはり $n = pm + q$ であることを考えれば $pm + (q-1)$ は $n-1$ にひとしく，その前にくる $l + pm$ はすべて $n-1$ より小さいことになる。よって同様に $\theta^j(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, n-1$ なら $\theta^{l+pm}(x) \notin U$ for $l = 0, 1, \cdots, q-1$ となるほかはない。

すると前に示したところから，すべての $y \in V,\ \theta^j(y) \notin U,\ j = 0, 1, \cdots, m-1$ に対して $|D\theta^m(y)| \geq \alpha$ となるので，上に示したように $\theta^{jm}(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, p-1$ となることと $\theta^{jm}(x) \in V$ であることにもとづいて $y$ を $\theta^{jm}(x)$ に入れ換えれば

$$\left|D\theta^m(\theta^{jm}(x))\right| \geq \alpha$$

という結果が導かれる。また同様に上に示したところから $\theta^{l+pm}(x) \notin U$ for $l = 0, 1, \cdots, q-1$ となることと $\inf_{x \notin U} |\theta'(x)| \geq \rho$ であることにより，$x$ を $\theta^{l+pm}(x)$ に入れ換えれば

$$\inf_{x \notin U} \left|\theta'(\theta^{l+pm}(x))\right| \geq \rho$$

という結果を得る。そして前の結果は $j$ が 0 から $p-1$ まで $p$ 個の $j$ について成り立ち，後の結果は $l$ が 0 から $q-1$ まで $q$ 個の $l$ について成り立つので，以上を併せて

$$\left|\prod_{j=0}^{p-1} D\theta^m(\theta^{jm}(x)) \prod_{l=0}^{q-1} \theta'(\theta^{l+pm}(x))\right| \geq \alpha^p\rho^q$$

となることが判明した。

ここまでの推論をつうじて，$x \in E_n$ であれば，$n = pm + q,\ 0 \leq q < m$ に対して

$$|D\theta^n(x)| \geq \alpha^p\rho^q$$

となるという帰結が得られたわけである。ここでつぎの推論へのステップとして，まず $\beta = \alpha^{\frac{1}{m}}$ とする。すると $\alpha = \beta^m$ となるから，$\alpha^p = \beta^{mp} = \beta^{n-q} > \beta^{n-m} = \beta^n\beta^{-m} = \beta^n\alpha^{-1}$ となり，また

$\rho^q > \rho^m$ となる。よって $\alpha^p\rho^q > \alpha^{-1}\beta^n\rho^m$ となるから，

$$|D\theta^n(x)| \geq \alpha^{-1}\beta^n\rho^m$$

という結果を得る。

つぎにどんな $k \leq n$ に対しても

$$\theta^k(E_n) \subset E_{n-k}$$

が成り立つことを見ておこう。事実 $x \in \theta^k(E_n)$ とすれば当然 $x = \theta^k(y)$ となるような $y \in E_n$ があるわけであるから，$0 \leq i < n-k$ の $i$ については $k+i < n$ かつ $y \in E_n$ であるところから $\theta^i(x) = \theta^{k+i}(y) \notin U$。よって

$$E_{n-k} = \{x | \theta^i(x) \notin U \text{ for } i = 0, 1, \cdots, n-k-1\}$$

であることを考えれば，$x \in E_{n-k}$ となるのである。

これで $\theta^k(E_n) \subset E_{n-k}$ となることが分かったので，任意の $k \leq n$ と $x \in \theta^k(E_n)$ に対して $x \in E_{n-k}$ が成り立つ。そこで上に証明した不等式を用い，そこでの $n$ を $n-k$ に置き換えれば

$$\left|D\theta^{n-k}(x)\right| \geq \alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m$$

が成り立つ。

つぎのステップとしては，$E_n$ のどの連結成分 $K$ に対しても

$$b - \theta(b) \geq \lambda(\theta^n(K)) \geq \alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m\lambda(\theta^k(K))$$

となることを示したい。ただし最初の不等式の成立は自明であるから，議論の眼目は二番目の不等式の成立を示すことにある。

まず当然 $K \subset E_n$ であるところから $\theta^k(K) \subset \theta^k(E_n)$，また $\theta^n(K) = \theta^{n-k}(\theta^k(K))$ である。すでに $\left|D\theta^{n-k}(x)\right| \geq \alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m$ ということが言えており，これはどんな $x \in \theta^k(E_n)$ に対しても $\theta^{n-k}(x)$ の傾きが $\alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m$ を超えることを示している。よって $\theta^k(K)$ に $\theta^{n-k}$ による写像を加えると，$\theta^n(K)$ の長さ $\lambda(\theta^n(K))$ は $\theta^k(K)$ の長さ $\lambda(\theta^k(K))$ の $\alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m$ 倍を超えることになる。すなわち $\lambda(\theta^n(K)) \geq \alpha^{-1}\beta^{n-k}\rho^m\lambda(\theta^k(K))$ となることが知られるのである。

これで上記の不等式の成立が保証されたので，最右辺の係数を最左辺に移して

$$\lambda(\theta^k(K)) \leq (b - \theta(b))\alpha\beta^{k-n}\rho^{-m} \tag{6.1}$$

という帰結を得る。

つぎのステップでは，前稿ですでに証明ずみの命題をそのまま適用する。それは，区間 $K$ が $\theta^j(K) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ を満たすならば,

$$\log \frac{\sup_{x \in K} |D\theta^n(x)|}{\inf_{x \in K} |D\theta^n(x)|} \leq \gamma \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\theta^k(K)) \tag{6.2}$$

が成り立つという命題である。[29] ここで右辺にある $\gamma$ は $\log|\theta'(x)|$ をリプシッツ関数としたときのリプシッツ定数を示す。[30] 証明は前稿に譲るが，目下の場合 $K \subset E_n$，したがって $x \in K$ については $\theta^j(x) \notin U$ for $j = 0, 1, \cdots, n-1$，したがって $\theta^j(x) \in V$ for $j = 0, 1, \cdots, n-1$ となるところから，仮定の $\theta^j(K) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ は明らかに満たされている。よって以下ではその帰結もまた成立するものとして論を進める。

まず（6.2）の右辺に前のパラグラフで導いた結果（6.1）をあてはめると

$$\begin{aligned}
\gamma \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\theta^k(K)) &\leq \gamma \sum_{k=0}^{n-1} (b - \theta(b))\alpha\beta^{k-n}\rho^{-m} \\
&= \gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k-n} \\
&\overset{(31)}{=} \gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i \\
&< \gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i \\
&\overset{(32)}{=} \gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m} \frac{1}{\beta - 1} \\
&= \frac{\gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m}}{\beta - 1}
\end{aligned}$$

となり，ここで

$$\frac{\gamma(b - \theta(b))\alpha\rho^{-m}}{\beta - 1} = \log \delta \tag{6.3}$$

とおくことにする。

ここから先は数理の運びを明快にするため，ふたたびコレット＝エックマンに倣って $\theta$ のグラフが対称となる場合を想定する。当面の議論で考察の対象となっている区間は $[\theta(b), b]$ なので，対称というのもその間(かん)で $\theta$ のグラフが $x^*$ の左右で対称であることをいい，これは $x^*$ が $\theta(b)$ と $b$ の中央

---

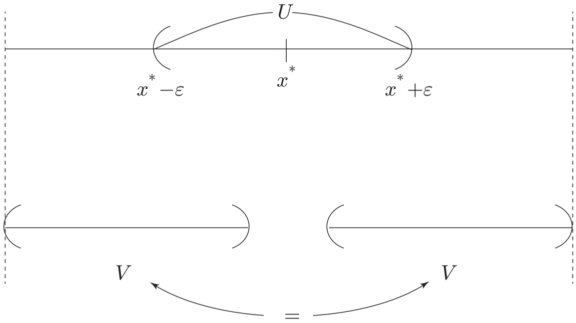
（29） 福岡・須田，前掲論文，p.22 の命題（I）。証明については同論文，pp.22–23 を参照されたい。

（30） リプシッツ関数の意味するところについては同論文，pp.21–22 を参照されたい。

（31） $\sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k-n} = \beta^{-n} + \beta^{1-n} + \cdots + \beta^{n-1-n} = \beta^{-1} + \beta^{-2} + \cdots + \beta^{-n} = \sum_{i=1}^{n} \beta^{-i}$

（32） $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{\beta})^i = \frac{1}{\beta} + (\frac{1}{\beta})^2 + \cdots = \frac{\frac{1}{\beta}}{1 - \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\beta - 1}$

第 34 図




にくること，$U$ が $x^*$ とその左右でひとしい距離にまたがること，二つの $V$ がひとしい長さを持つこと，などのすべてを意味している。第 34 図を参照されたい。

以下の推論ではケース（1）とケース（2）を分けて考える。ケース（1）は $\theta^r(x^*-\varepsilon)\in U$ となる $r$ が存在するケース，すなわち $x^*-\varepsilon$ から出発する写像の像がどこかの $r$ でかならず $U$ に入るケースであり，ケース（2）はそのような $r$ が存在しないケース，すなわち $x^*-\varepsilon$ から出発する写像の像がどんな $r$ になっても $U$ に入らないケースである。

まずケース（1）を考え，$r$ を $\theta^r(x^*-\varepsilon)\in U$ となる最小の整数とする。目下の $\theta, U, V$ 対称の想定下では $\theta^r(x^*-\varepsilon)=\theta^r(x^*+\varepsilon)$ となっていることは言うまでもない。ここでさらに

$$\mu=\min\{|x^*-\varepsilon-\theta^r(x^*-\varepsilon)|\,,|x^*+\varepsilon-\theta^r(x^*-\varepsilon)|\}$$

と，すなわち $\mu$ は右辺の二つの長さのうち小さいほう，と定義する。分かりやすくこれを図示すれば，第 35 図の太線の部分が $\mu$ である。

つぎに $E_n=\{x|\theta^j(x)\notin U \text{ for } j=0,1,\cdots,n-1\}$ の一つの連結成分 $K$ を考える。$U$ が開集合であるところから $K$ は当然閉集合となるので，$K=[u,v]$ のように書くことができよう。

さて以下では $\theta(b)<u$ かつ $v<b$ であるものとして議論を進めるが，[(33)] この場合にはある $j,k<n$ に対して

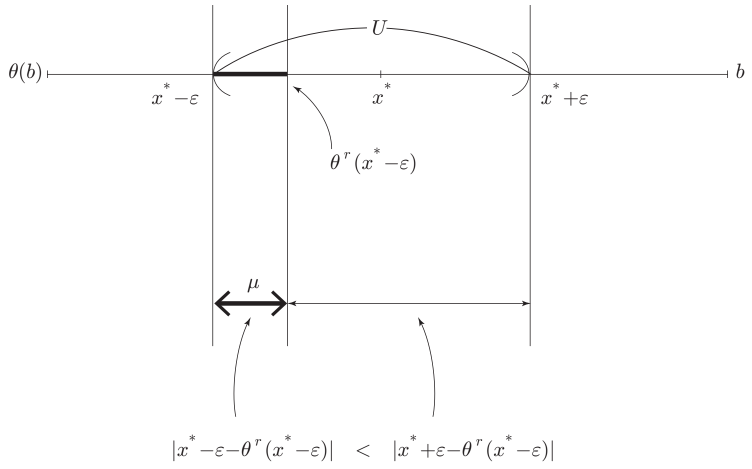
$$\theta^j(u)\in\partial U=\{x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon\}$$

$$\theta^k(v)\in\partial U=\{x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon\}$$

となることが容易に分かる。事実，$K\subset E_n$ なので $K$ の端点は $\theta(K)$ の端点に写り，$\theta(K)$ の端点は $\theta^2(K)$ の端点に写るというふうに，写像を繰り返していけば $\theta^{n-1}(K)$ の端点は $\theta^n(K)$ の端点に写る

（33） コレット＝エックマンは $\theta(b)=u$ または $v=b$ となる場合を “trivial variant” と呼んで，考えないとしているが，これはもし $\theta(b)=u$ のような事態がかりに起こったとすれば，$[\theta(b),v]$ は $\theta(b)<u$ のときの $[u,v]$ よりも当然小さくなるので，$[u,v]$ について言えたことが $[\theta(b),v]$ についても言えることになるという意味か。

第 35 図




ことになる。よって，もし上記の命題が成り立っていないとすれば，どの $j, k$ についても $\theta^j(u), \theta^k(v)$ はいずれも $\bar{U}$ には入らないことになるから，$K$ の両端 $u, v$ をわずか左右に拡げても[34]，やはりその新区間は $E_n$ に含まれることになり，$K$ が連結成分であるという設定に矛盾するのである。

いま $p$ を $\theta^p(K)$ が初めて $U$ と交わるときの数とすれば，$K \subset E_n$ であるところから $n \leq p$ でなくてはならない。そして上に示したように $\theta^j(u) = x^* - \varepsilon$ または $x^* + \varepsilon$, $\theta^k(v) = x^* - \varepsilon$ または $x^* + \varepsilon$ なので，$r$ が $\theta^r(x^* - \varepsilon) \in U$ となる最小の数であることを考慮すれば $\theta^{j+r}(u) \in U$, $\theta^{k+r}(v) \in U$。よって $j, k \leq n-1, K = [u, v]$ であることから，$p \leq r + n - 1$ となる。

ここで $\mu = \min\{|x^* - \varepsilon - \theta^r(x^* - \varepsilon)|, |x^* + \varepsilon - \theta^r(x^* - \varepsilon)|\}$ と定義されていたことを想起すれば，

$$\lambda(\theta^p(K \setminus E_{p+1})) \geq \mu \tag{6.4}$$

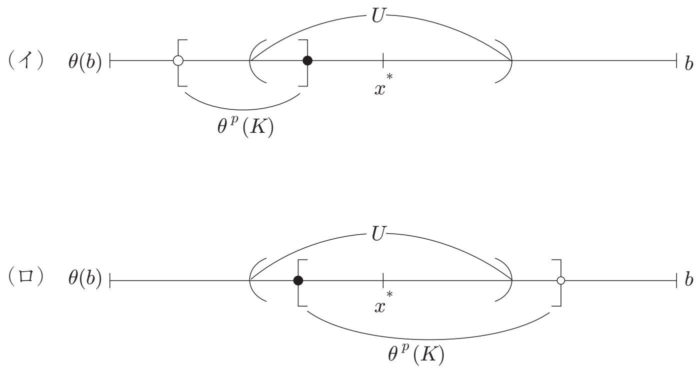
という不等式が成り立つことになる。以下しばらくはそのことの証明である。当面二つの場合，ケース（A）とケース（B）を分けて考えていくことにする。

まずケース（A）は第 36 図に描かれているように，$\theta^p(K)$ の一方の端点（黒丸）が $U$ に入り，もう一方の端点（白丸）が $U$ に入らない場合である。第 36 図では $U$ に入るほうの端点が $x^*$ の左側にくる場合を描いているが，それが $x^*$ の右側にくる場合ももちろん可能である。ここでは議論が冗長になるのを避けるため，前者の場合のみを取り上げることにする。後者の場合もそれに準じて考えれば，同様の帰結が導かれることは容易に分かる。つぎにケース（B）は第 37 図に描かれているように $\theta^p(K)$ の左右両方の端点がいずれも $U$ に入らない場合である。すなわちケース（A）が起こる前に $\theta^p(K)$ がすでに $U$ と交わってしまっているとすれば，それがケース（B）となる。

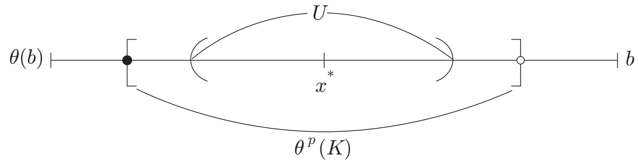
---

（34） この拡張ができるために $\theta(b) < u, v < b$ という設定が要請されるという事情がある。

第 36 図




第 37 図




ところで前に示したように

$$\theta^j(u) = x^* - \varepsilon \quad \text{または} \quad x^* + \varepsilon$$
$$\theta^k(v) = x^* - \varepsilon \quad \text{または} \quad x^* + \varepsilon$$

であるから，$j \neq k$ となっているのでなくてはならない。このことはつぎのような推理から容易に確かめられる。いまもし $j = k$ になっていたとすれば，

（i）　$\theta^j(u) = \theta^j(v) = x^* - \varepsilon$　または　$x^* + \varepsilon$

（ii）　$\theta^j(u) = x^* - \varepsilon,\ \theta^j(v) = x^* + \varepsilon$

（iii）　$\theta^j(u) = x^* + \varepsilon,\ \theta^j(v) = x^* - \varepsilon$

のいずれかが成り立たねばならないが，そうだとすると $j, k \leq n-1$ であるところから，まず（i）の場合はありえない。なぜなら $K \subset \{x|\theta^j(x) \notin U \text{ for } j = 0, 1, \cdots, n-1\}$ なので $K \to \theta(K) \to \theta^2(K) \to \cdots \to \theta^{n-1}(K)$ の写像の区間では $\theta$ はつねに単調であり，$\theta^j(u) = \theta^j(v)$ ということ，すなわち端点どうしがひとしくなるということは決してありえないからである。一方（ii），（iii）の場合は $\theta^j(K) = [\theta^j(u), \theta^j(v)]$ or $[\theta^j(v), \theta^j(u)] = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ となり，すると $\theta^j(x) = x^* \in U$ となる $x \in K$ が存在することになってしまって，これまた $K \subset \{x|\theta^j(x) \notin U \text{ for } j = 0, 1, \cdots, n-1\}$ に矛盾する。

ということで $j \neq k$ であれば $\theta^{j+r}(u)$，$\theta^{k+r}(v)$ が同時に $U$ に入ることはなく，前記ケース（A）の場合，もしかりに $j < k$ であるとすれば，$\theta^{j+r}(u) \in U$ となるときにはまだ $\theta^{j+r}(v) \notin U$ である。そして $p < j+r$ となるどんな $p$ についても $\theta^p(K) \cap U = \varnothing$ である。これに対してケース（B）の場合は，$\theta^{j+r}(u)$ が $\theta^{k+r}(v)$ より先に $U$ に入る前，すなわちいずれもがまだ $U$ に入っていなくても，すでに $p < j+r$ となるある $p$ において $\theta^p(K) \cap U \neq \varnothing$ となっている。当面考えるべき事態はそれらケース（A），ケース（B）のいずれかであって，それ以外の可能性はありえない。

そこで上記のところを踏まえ，以下ではケース（A）の場合もケース（B）の場合もいずれながら $\lambda(\theta^p(K \setminus E_{p+1})) \geq \mu$ が成り立つことを証明しよう。

まずこれらいずれの場合も

$$\lambda(\theta^p(K) \cap U) \geq \mu \tag{6.5}$$

が成り立つことを示す。以下ケース（A），ケース（B）両方の場合をつうじて $\theta^r(x^* - \varepsilon)$ が $x^*$ の左側にくる場合のみを考えることにする。右側にくる場合は向きを逆にして考えれば，推論の要領はまったく同じである。ケース（A）の図をふたたび第 38 図として掲げると，（イ）の場合は $\theta^p(K) \cap U$ は太線で描かれた部分となり，その長さは $\mu$ と一致するから，（6.5）の成立は自明である。また（ロ）の場合は $\theta^p(K) \cap U$ は同じく太線で描かれた部分となるが，その長さは $|x^* - \varepsilon - \theta^r(x^* - \varepsilon)|, |x^* + \varepsilon - \theta^r(x^* - \varepsilon)|$ のより大きいほうと一致し，一方 $\mu$ はより小さいほうと定義されているのであるから，やはり（6.5）の成立は明らかである。つぎにケース（B）の図を第 39 図として再掲すれば，今度は太線部分 $\theta^p(K) \cap U$ の中に $\mu$ が含まれることになる。よって（6.5）が満たされることはやはり自明である。

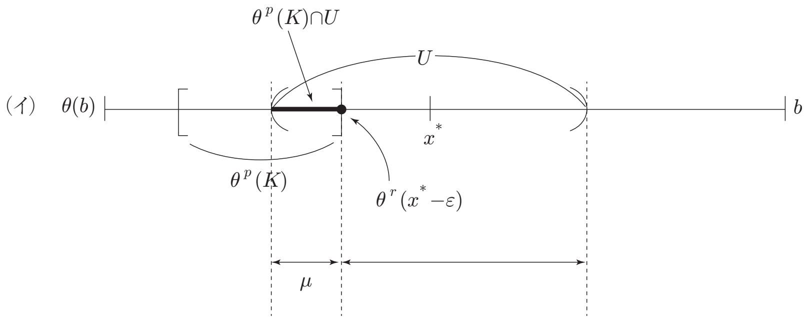
以上で（6.5）の成り立つことは確認できた。そこでつぎは

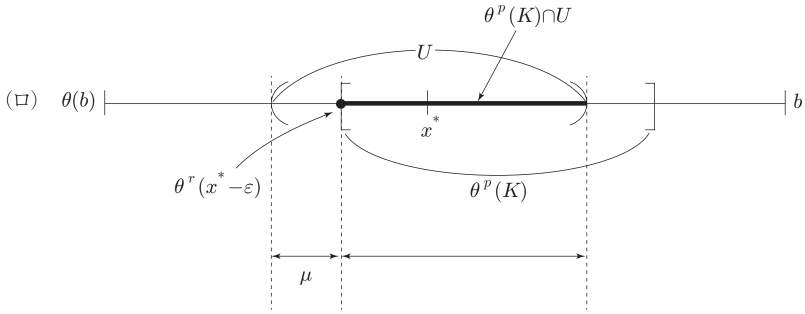
$$\lambda(\theta^p(K \setminus E_{p+1})) \geq \lambda(\theta^p(K) \cap U) \tag{6.6}$$

となることを同じく図を用いることで示したい。

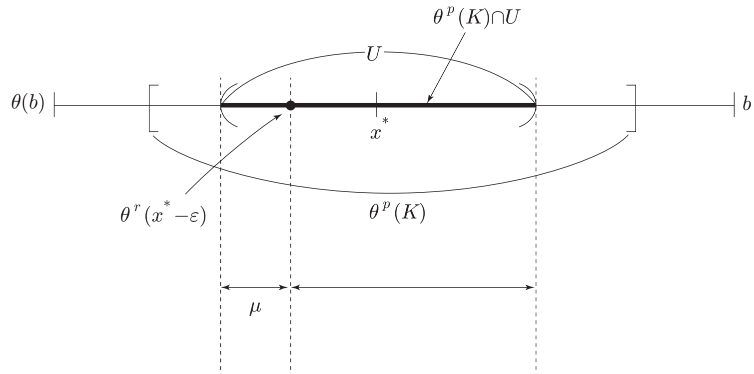
このたびもケース（A），ケース（B）を分けて見ていくが，ケース（A）についてはつぎの第 40 図が示すように，$\theta^p(K \setminus E_{p+1})$ は $\theta^p(K)$ の一部を欠いたものになるが，$E_{p+1}$ の定義から $\theta^p(E_{p+1})$ は $U$ には含まれず，$\theta^p(E_{p+1}) \cap U = \varnothing$ となっている。したがって $\theta^p(K \setminus E_{p+1})$ の長さは高々 $\theta^p(K) \cap U$ の長さにひとしく，後者が前者を超えることはない。ましてや $\theta^p(E_{p+1})$ の長さがそれより小さい場合は，$\theta^p(K \setminus E_{p+1})$ の長さのほうが $\theta^p(K) \cap U$ の長さより大きいことになり，よって（イ），（ロ）いずれの場合も（6.6）の満たされることは明らかである。つぎにケース（B）の場合は第 41 図が示すとおりであり，こんどは $\theta^p(K)$ の中で $U$ に入ってこない部分が左右に生じるが，理屈はケース（A）の場合と同様で $\theta^p(K \setminus E_{p+1})$ の長さが $\theta^p(K) \cap U$ の長さを超えるのは明らかであるから，やはり（6.6）が満たされる結果となる。

第 38 図




第 39 図

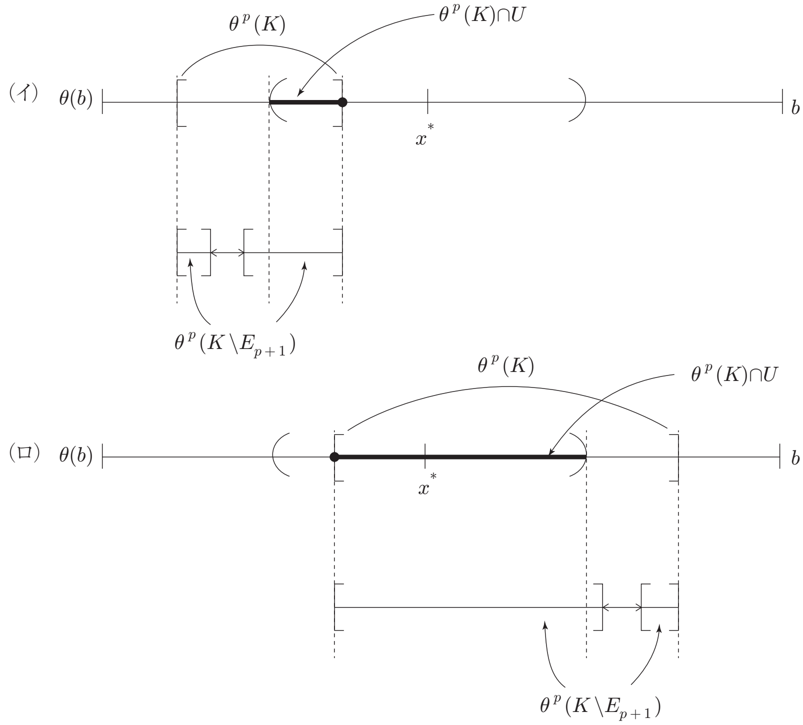



こうして（6.5）と（6.6）が成立することで $\lambda(\theta^p(K \setminus E_{p+1})) \geq \mu$ となることが示されたので，ここで

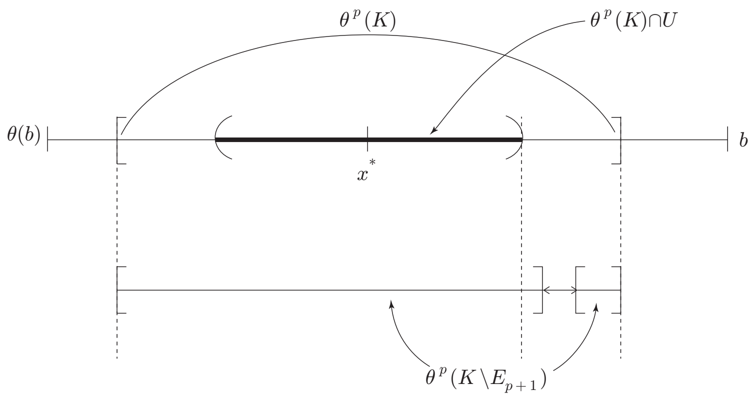
$$\sup_{x \in K} |D\theta^p(x)| \times \lambda(K \setminus E_{p+1}) \geq \lambda(\theta^p(K \setminus E_{p+1}))$$

すなわち区間 $K$ における $\theta^p$ の勾配の中でもっとも大きいものに $K \setminus E_{p+1}$ の長さを乗じた結果は $\theta^p(K \setminus E_{p+1})$ の長さ以上になるという明らかな事実を考慮に入れれば，その右辺に上記の結果を用

第 40 図




第 41 図




いることによって

$$\sup_{x\in K}|D\theta^p(x)|\times\lambda(K\setminus E_{p+1})\geq\mu$$

すなわち

$$\lambda(K \setminus E_{p+1}) \geq \frac{\mu}{\sup\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|}$$

ということになる。すると前に示した $p \leq r+n-1$ から $p+1 \leq r+n$，したがって $E_{r+n} \subset E_{p+1}$ となるので，さらに上式から

$$\lambda(K \setminus E_{r+n}) \geq \frac{\mu}{\sup\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|} \tag{6.7}$$

という帰結を得る。

一方

$$\inf_{x\in K} |D\theta^p(x)| \times \lambda(K) \leq \lambda(\theta^p(K))$$

であるところから

$$b - \theta(b) \geq \lambda(\theta^p(K)) \geq \inf_{x\in K} |D\theta^p(x)| \times \lambda(K)$$

という関係が成立するので，

$$\frac{b-\theta(b)}{\inf\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|} \geq \lambda(K) \tag{6.8}$$

である。

そこで，つぎにまず $\lambda(K \cap E_{r+n}) = \lambda(K) - \lambda(K \setminus E_{r+n})$ すなわち $K$ と $E_{r+n}$ の共通部分の長さは当然 $K$ 全体の長さから共通部分でない部分の長さを引いたものであるという事実にもとづき，そこに以上で導いた帰結（6.7）と（6.8）を適用すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda(K \cap E_{r+n})}{\lambda(K)} &= \frac{\lambda(K) - \lambda(K \setminus E_{r+n})}{\lambda(K)} \\
&= 1 - \frac{\lambda(K \setminus E_{r+n})}{\lambda(K)} \\
&\leq 1 - \frac{\mu}{\sup\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|} \frac{\inf\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|}{b-\theta(b)} \\
&= 1 - \frac{\mu}{b-\theta(b)} \frac{\inf\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|}{\sup\limits_{x\in K} |D\theta^p(x)|}
\end{aligned}$$

となるが，この最後の式に（6.2），（6.3）から導かれる

$$\log \frac{\sup\limits_{x\in K} |D\theta^n(x)|}{\inf\limits_{x\in K} |D\theta^n(x)|} < \log \delta$$

という結果を，$n$ を $p$ に置き換えて適用することにより[35]

$$\frac{\lambda(K \cap E_{r+n})}{\lambda(K)} < 1 - \frac{\mu}{b-\theta(b)} \frac{1}{\delta}$$

という不等式が成立することになる。すると

$$0 < 1 - \frac{\mu}{b-\theta(b)}\frac{1}{\delta} < 1$$

なので，ある数 $0 < \eta < 1$ に対して

$$1 - \frac{\mu}{b-\theta(b)}\frac{1}{\delta} = \eta^r$$

とすることができ，これはここまでの議論で，ある数 $0 < \eta < 1$ に対して

$$\frac{\lambda(K \cap E_{r+n})}{\lambda(K)} < \eta^r \tag{6.9}$$

という式の成立が言えたということである。言いたいことは，その $\eta$ について

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\eta^n} < \infty \tag{6.10}$$

が成り立つということであり，以下ではその目標に向けて推論を続けていく。

そこでつぎのステップとして $E_n$ が $m$ 個の連結成分 $K_1, K_2, \cdots, K_m$ から成るものとする。すると上で $K$ について言えたことはどの $K_i, i = 0, 1, \cdots, m$ についてもそれぞれあてはまることであるから，

$$\frac{\lambda(K_i \cap E_{r+n})}{\lambda(K_i)} < \eta^r,\ 0 < \eta < 1$$

すなわち

$$\lambda(K_i \cap E_{r+n}) < \lambda(K_i)\eta^r \quad \text{for } i = 0, 1, \cdots, m$$

となる。また $E_{r+n} \subset E_n$ であるところから，

$$\lambda(E_{r+n}) = \lambda(K_1 \cap E_{r+n}) + \lambda(K_2 \cap E_{r+n}) + \cdots + \lambda(K_m \cap E_{r+n})$$

となっており，$K_i \cap E_n$ は $K_i$ そのものであるから，$\lambda(E_n)$ について

$$\begin{aligned}\lambda(E_n) &= \lambda(K_1 \cap E_n) + \lambda(K_2 \cap E_n) + \cdots + \lambda(K_m \cap E_n)\\ &= \lambda(K_1) + \lambda(K_2) + \cdots + \lambda(K_m)\end{aligned}$$

となることは言うまでもない。するとこれらの関係から

$$\frac{\lambda(E_{r+n})}{\lambda(E_n)} = \frac{\lambda(K_1 \cap E_{r+n}) + \lambda(K_2 \cap E_{r+n}) + \cdots + \lambda(K_m \cap E_{r+n})}{\lambda(K_1) + \lambda(K_2) + \cdots + \lambda(K_m)}$$

---

(35) ここで利用されている $\log \sup_{x\in K} |D\theta^n(x)|/\inf_{x\in K} |D\theta^n(x)| < \log\delta$ という不等式は，もともと $K$ が $\theta^j(K) \subset V, j = 0, 1, \cdots, n-1$ を満たす区間であるという前提の下で導かれたものである。目下の場合は，$j = p$ のとき $\theta^j(K)$ が最初に $U$ に入るとされているから，$\theta^j(K) \not\subset U, j = 0, 1, \cdots, p-1$ すなわち $\theta^j(K) \subset V, j = 0, 1, \cdots, p-1$ となっており，よって $n$ を $p$ に置き換えうる条件が満たされているのである。

$$
\begin{aligned}
&< \frac{(\lambda(K_1)+\lambda(K_2)+\cdots+\lambda(K_m))\eta^r}{\lambda(K_1)+\lambda(K_2)+\cdots+\lambda(K_m)} \\
&= \eta^r
\end{aligned}
$$

という帰結が導かれることになる。

さて以上のところで

$$\frac{\lambda(E_{r+n})}{\lambda(E_n)} < \eta^r \tag{6.11}$$

という結果が得られたが，ここで $n$ は任意の数なので，$n$ の代わりに $n+r$ を入れれば

$$\frac{\lambda(E_{2r+n})}{\lambda(E_{r+n})} < \eta^r$$

となり，これら二つの式を掛け合わせることによって

$$\frac{\lambda(E_{2r+n})}{\lambda(E_n)} < \eta^{2r}$$

を得る。また同様にふたたび $n$ のところに $n+r$ を代入すれば

$$\frac{\lambda(E_{3r+n})}{\lambda(E_n)} < \eta^{3r}$$

を得，以下同じことを続けていけば，すべての $t$ に対して

$$\frac{\lambda(E_{tr+n})}{\lambda(E_n)} < \eta^{tr}$$

となるので，

$$\frac{\lambda(E_{tr+n})}{\eta^{tr}} < \lambda(E_n) \tag{6.12}$$

となることが分かる。そして右辺の $\lambda(E_n)$ は $t$ から独立であるから，明らかにこの式から

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\lambda(E_{tr+n})}{\eta^{tr}} < \infty$$

という結果が成り立つ。よって左辺分母の $\eta^{tr}$ に $\eta^n$ を掛けても

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\lambda(E_{tr+n})}{\eta^{tr+n}} < \infty \tag{6.13}$$

が成り立つのである。

これで目下の推論もいよいよ大詰めに近づいたが，所期の目的完遂のためにはさらにもう一歩のステップが加えられるのでなくてはならない。というのは（6.13）左辺の系列 $\lambda(E_{tr+n})/\eta^{tr+n}$ は $t=1,2,\cdots$ に応じて $\lambda(E_{r+n})/\eta^{r+n}$，$\lambda(E_{2r+n})/\eta^{2r+n}\cdots\cdots$ という形をとるが，それは（6.10）左辺の系列より荒い系列になっており，本来後者に含まれるいくつかの項が飛ばされているから

である。この点を平易に示すために，いま $r=3$ としてみると，$\lambda(E_{tr+n})/\eta^{tr+n}$ は $t=1$ については $\lambda(E_{3+n})/\eta^{3+n}$，$t=2$ については $\lambda(E_{6+n})/\eta^{6+n}$ となり，そのあいだでは $\lambda(E_{4+n})/\eta^{4+n}$，$\lambda(E_{5+n})/\eta^{5+n}$ という 2 項が欠けているのである。よって（6.13）にもとづき（6.10）の成立を導くためには，それら欠けている項を補完してもなお結論が成り立つこと，換言すれば補完されるべき項が $\infty$ に近づかないことが保証されるのでなくてはならない。

ところが幸いなことに，この点についてはすでに示したごとく，すべての $n$ に対して

$$\lambda(E_n) \geq \lambda(E_{n+1}) \geq \lambda(E_{n+2}) \geq \cdots$$

という大小関係が成り立つことになっている。よってそれらの項をつけ足して，あいだを詰めても (6.13) さえ成り立てば (6.10) もまた成り立ち，所望の帰結の成立が保証されることになるのである。

ついでケース（2）どんな $r$ になっても $\theta^r(x^*-\varepsilon)$ が $U$ に入らない場合すなわち $r=\infty$ の場合を考えることにしよう。証明の方針としては，区間 $U$ を少し縮めてうまく $U_1$ を作れば，事態をケース（1）$r<\infty$ の場合に帰しうることを示す。

そのことを示せばなぜ（6.10）が言えたことになるのかをまず述べておくと，いま方針どおり $U$ を $U_1$ に変えれば，$E_n=\{x|\theta^j(x)\notin U \text{ for } j=0,1,\cdots,n-1\}$ もいささか違って

$$E'_n=\{x|\theta^j(x)\notin U_1 \text{ for } j=0,1,\cdots,n-1\}$$

となる。すると事態が $r<\infty$ の場合になることが言えたとすれば，すでに証明したように

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda(E'_n)}{\eta^n}<\infty \tag{6.14}$$

となることが言える。そして $U_1$ は $U$ より小さく作っているわけであるから，$\theta^j(x)\notin U$ なら $\theta^j(x)\notin U_1$ ということになり，

$$E'_n \supset E_n$$

となることが分かる。ゆえに（6.14）が言えれば当然（6.10）もまた言えることになるのである。したがって，あとは $U_1$ をうまく作ることで目下の事態をケース（1）$r<\infty$ の事態になしうることを示せばよい。

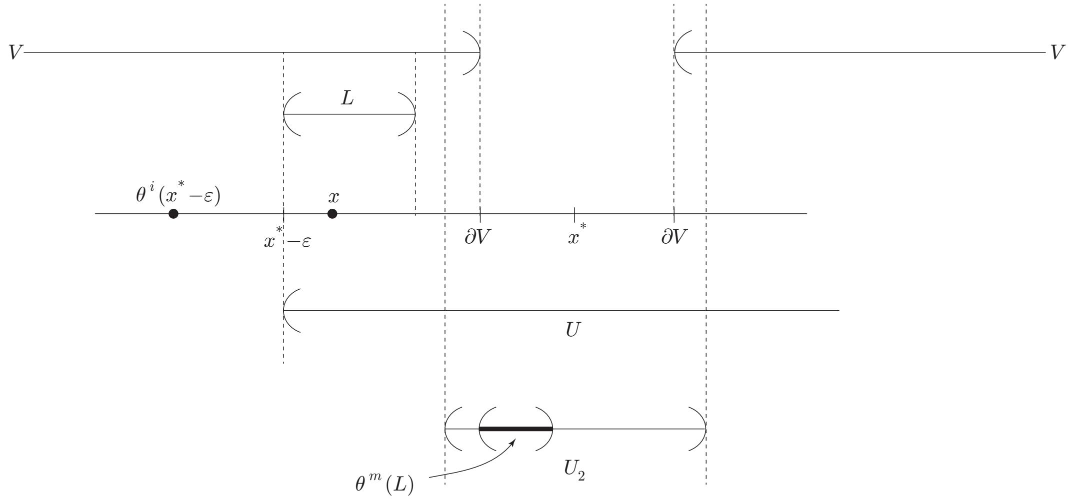
そのための推論の手始めとして，まず $L$ を，左端が $U$ の端点 $x^*-\varepsilon$ となるような，また右端が $V$ の端点 $\partial V$ から若干離れているような開区間として定義する。第 42 図を参照されたい。

その $L$ を用いて，いまかりに

$$\forall x\in L,\forall i,\left|\theta^i(x)-x^*\right|\geq|x-x^*| \tag{6.15}$$

であったとしてみる。すると $\theta^i(x)\in V,\forall x\in L,\forall i$，よって $\theta^i(L)\subset V,\forall i$ となるから，$L$ は $V$ 上の同相区間となるのでなくてはならない。そこでさらに $U_2$ という新区間を，左右両方の $V$ と共通

第 42 図




部分を持ち，かつ $L$ から離れている開区間として定義すると，$L$ を前稿の補題 3[36] の $J$ とし，$U_2$ を同補題の $U_0$ とすることによって，補題の主張から $\theta^m(L) \subset U_2$ となるような $m > 0$ がかならず存在することになる。これは $\theta^m(x) \in U_2, \forall x \in L$ ということであるから，$|\theta^m(x) - x^*| < |x - x^*|$ であることを意味し，明らかに上記（6.15）と矛盾する。よって目下の場合（6.15）が成り立つことはありえず，かならず

$$\exists\, i > 0,\ \exists\, x \in L, \left|\theta^i(x) - x^*\right| < |x - x^*| \tag{6.16}$$

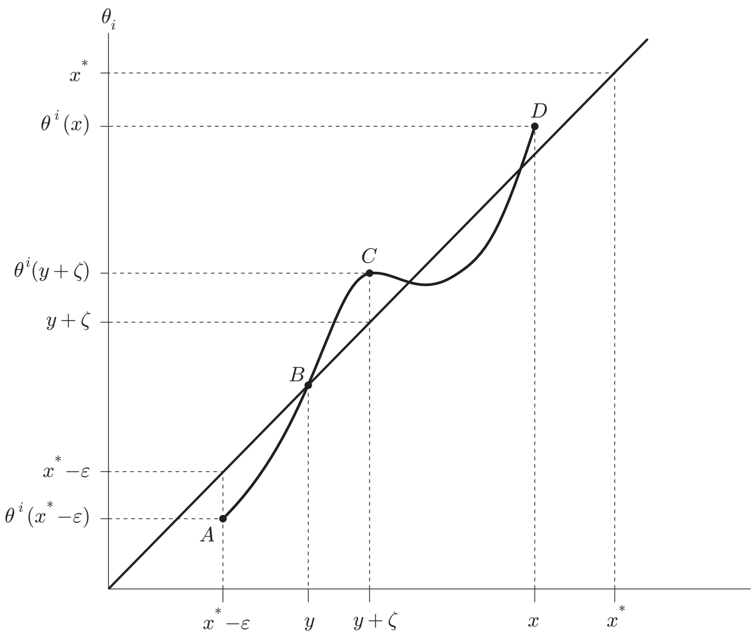
となるのでなくてはならない。以下ではそのような $i$ として（6.16）となる最小の数を選ぶことにする。

さて目下のところは $r = \infty$ の場合を考えているので，$\theta^i(x^* - \varepsilon) \notin U$ となっている。すなわち $\theta^i(x^* - \varepsilon)$ は $x^* - \varepsilon$ の左にくるか $x^* + \varepsilon$ の右にくるかのいずれかでなくてはならない。いま一般性を失うことなく $\theta^i(x^* - \varepsilon)$ が $x^* - \varepsilon$ の左にくる場合すなわち $\theta^i(x^* - \varepsilon) < x^* - \varepsilon$ となる場合を考えると，この場合は $\theta^i(x) > x$ となるほかはない。なぜなら，もし $\theta^i(x) \leq x$ になっていたとすれば，$\theta^i(x)$ は $x$ の左側にあり，$\theta^i(x)$ と $x^*$ の距離が $x$ と $x^*$ の距離以上になるので，矛盾が生じざるをえないからである。

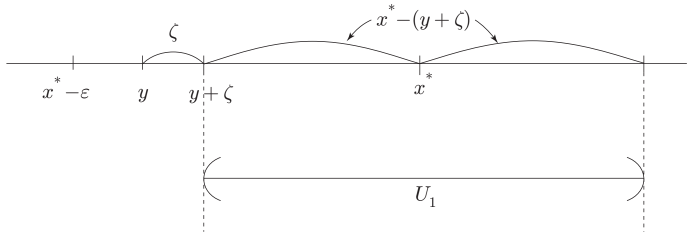
そこでいまこれら $\theta^i(x^* - \varepsilon) < x^* - \varepsilon, \theta^i(x) > x$ の 2 条件を満たすような $\theta^i$ のグラフを図に描いてみるとすれば，それは第 43 図のごとくになる。$\theta^i$ は 45° 線の下にある $A$ 点から出発して，上にある $D$ 点にいたるわけであるから，それはかならず 45° 線を下から上に切る点すなわち不安定な不動点 $B$ を持つ。よって $\zeta > 0$ を十分小さくとれば，$x^* > \theta^i(y + \zeta) > y + \zeta$ で，しかも $y + \zeta \in V \cap U$

（36） 福岡・須田，前掲論文，p.13 参照。この補題は Collet and Eckmann, *op. cit.*, p.109 の Theorem II.5.2 の 1 に相当する。

第 43 図




第 44 図




となるようにすることができる。そこでそのような $\zeta$ を用いることにより

$$U_1 = (y+\zeta, x^* + (x^* - (y+\zeta)))$$

と $U_1$ を定義する。これは図示すれば，第 44 図の $x^*$ の両脇の長さ $|x^* - (y+\zeta)|$ がひとしくなるように $U_1$ を定めることを意味している。

このように $U_1$ を定めれば，$y+\zeta < \theta^i(y+\zeta) < x^*$ であることから，かならず $\theta^i(y+\zeta) \in U_1$ となることが保証され，ここで $y+\zeta$ は $U_1$ の端点であるから，それが，$r<\infty$ の場合には $x^*-\varepsilon$ が $U$ の端点であったことに相当するわけである。よってこの $U_1$ が所望の $U_1$ にほかならず，それを $U$ の代わりに用いることで，$r=\infty$ の場合も事態を $r<\infty$ の場合に還元できることが知られたのである。証了。

なお前述したように，上記の所論はケース（1），ケース（2）のいずれの場合も，議論を簡単化するため $\theta$ のグラフが左右対称という想定の下で行われている。その場合には，繰り返すまでもなく $x^*$ の左側で成立する事態はそっくりそのままが右側でも成立する。当該のグラフが非対称の場合には，もちろんそういうわけにはいかないが，それでも定性的にはやはり一方の側に類する事態が他方の側にもあてはまると言ってよいであろう。この点の詳細について興味ある読者にはミジューレヴィチの論文[(37)]を参照していただくことにして，ひとまず本稿を閉じることにしたい。

**要旨**: 本稿は非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の問題を考察対象とするが，内容としては二つの目的を持つ。まず第一に，いわゆる S 単峰性の仮定の下で，安定周期解の軌道は考察範囲の全域をつうじて高々 1 個しか存在しないことを証明する。ついで第二に，さらに加えて安定周期解が存在するものと仮定すれば，きわめて例外的な場合を除き考察範囲のどの点から出発してもその軌道は当該の安定周期軌道に限りなく接近することを証明する。証明の数理は基本的にコレット＝エックマンの 1980 年の著書に負うが，論旨の補強や図の添加をも含めてその脈絡が自己完結的に，より平易に辿れるように心がけた。

**キーワード**: 安定周期解の一意性, S 単峰性, 安定多様体, 臨界点, 引力圏（the basin of attraction）

（37） Michał Misiurewicz, “Maps of an Interval”, in G. Iooss, R. H. G. Helleman and R. Stora eds., *Chaotic Behaviour of Deterministic Systems*, North-Holland, 1983, pp.578–583.