Title	フィリップス型安定化政策の比較静学と動学的安定条件
Sub Title	Comparative statics and a dynamic stability condition on a Phillips-type stabilization policy
Author	景山, 悟(Kageyama, Satoru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2015
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.108, No.3 (2015. 10) ,p.559(83)- 580(104)
JaLC DOI	10.14991/001.20151001-0083
Abstract	本稿ではフィリップスが提示した安定化政策を含む乗数· 加速度モデルにラプラス変換による基礎付けを与え, 比較静学の観点から安定化政策の効果を明らかにするとともにその動学的安定条件を導出した。ラプラス変換により乗数· 加速度経済を表す微分方程式を複素領域の代数方程式に変換し, 経済変数間の伝達関数を定義した。独立需要の外生的ショックとフィリップス型安定化政策の実施による総産出量の均衡水準の影響について比較静学的に考察し, 動学的安定のための必要十分条件をフルヴィッツの定理に基づき示した。 This paper mathematically justifies Phillips's multiplier-accelerator model with a stabilization policy in terms of the Laplace transform, specifying the necessary assumptions. Applying the Laplace transform, differential equations of the economy are transformed into algebraic ones on a complex variable. The transfer functions of economic variables are defined by these algebraic equations. With this representation, we examine the effects of a Phillips-type policy on the equilibrium level and derive the necessary and sufficient condition for asymptotic stability.
Notes	特集 : 経済の数理解析 : 数理経済学の新展開
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20151001-0083

「三田学会雑誌」108 巻 3 号（2015 年 10 月）

フィリップス型安定化政策の比較静学と動学的安定条件

景山　悟*

（初稿受付 2015 年 11 月 20 日，査読を経て掲載決定 2015 年 12 月 25 日）

Comparative Statics and a Dynamic Stability Condition on a Phillips-type Stabilization Policy

Satoru Kageyama*

Abstract: This paper mathematically justifies Phillips's multiplier-accelerator model with a stabilization policy in terms of the Laplace transform, specifying the necessary assumptions. Applying the Laplace transform, differential equations of the economy are transformed into algebraic ones on a complex variable. The transfer functions of economic variables are defined by these algebraic equations. With this representation, we examine the effects of a Phillips-type policy on the equilibrium level and derive the necessary and sufficient condition for asymptotic stability.

1　序論

本稿では，フィリップスが提示した安定化政策を含む乗数 · 加速度モデルの数学的基礎付けを与え，政策の有効性とその適用限界を明らかにすることを目的として，その比較静学と安定条件についての考察を行う。総需要管理政策による景気循環の安定化はケインズの『一般理論』［Keynes, 1936］における主題の一つであったが，その分析の大部分は静学的な視点に負うものであった。そのため

本稿の執筆にあたり，匿名の査読者から示唆に富むご指摘を多く頂き，草稿段階では尾崎裕之教授から有益なご助言を頂いた。浦井憲教授からは終始ご指導ご鞭撻を頂いた。ここに深謝申し上げる。

*　大阪大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Osaka University (qge803ks@student.econ.osaka-u.ac.jp)

マクロ経済学の黎明期においては，ケインズ経済学の動学化へ向けた経済変動の数学的分析が重要な課題であった。サミュエルソンは乗数原理と加速度原理を組み合わせることで景気循環が発生することを差分方程式において説明し［Samuelson, 1939］，さらにはヒックスが与えた均衡価格の安定条件への批判を契機として経済の動学的安定性に関する研究の基礎を築いた［Samuelson, 1944, Samuelson, 1947］。しかしながら，サミュエルソンの体系において政府支出は外生変数と想定されるにとどまるため，外生的に独立需要のショックが生じた場合に，いかなる政策ルールを実行すれば景気循環の発生を抑制しながら望ましい均衡水準に回復できるかを分析することはできない。

これに対し，フィリップスは政府支出を総産出量の関数として内生化することで安定化政策のルールを与え，その有効性について分析した［Phillips, 1954］。考察されたのは独立需要の外生的ショックとそれに対する安定化政策自体による，総産出量の均衡水準の変化と動学的経路の安定性である。分析にあたって生産ラグと投資ラグのみならず，政府支出自体が総需要に変化を及ぼすまでの政策ラグが乗数・加速度モデルへ導入された。政策ラグが経済の不安定化の一因となり得ることはフリードマンも指摘するところではあったが［Friedman, 1948］，この分析により，政策ラグが生じてもその政策関数によって望ましい均衡水準へ安定的に回復することが可能であることが示された。このフィリップスの成果は後のテイラールールなど金融政策の研究にも発展し［Taylor, 1993］，制御理論を応用した政策研究におけるベンチマークとして今なお意義あるものである(1)。また最近では，フィリップスの成果と直接は関係しないが，ハンセンとサージェントらにより制御理論の新展開の知見を応用する政策研究が開拓されている［Hansen and Sargent, 2003］。このような動向に鑑みれば，フィリップスのモデルを制御理論の観点から再考することには大きな意義がある。ところがその原モデルには数学的に不完全なところも多いために以下の問題がある。まず，(1) 制御理論の新展開に適用できるよう数学的仮定を明確にする必要がある。また，フィリップスは安定性の定義を明示的に与えず政策が均衡水準へ与える影響を十分には示さなかった。そこで，(2) あらためて比較静学の観点から政策の効果を検証せねばならない。さらに，フィリップスの分析ではいくつかの数値的な具体例によって安定化政策の効果が示されるのみであったため，(3) 政策パラメータが満たすべき一般的な条件，すなわち安定条件が与えられる必要がある。

フィリップスは微分演算子 D と微分方程式の時定数を用いてラグを表す演算子を定義したが，微分演算子の適用範囲が明示されないままに用いられているために，これは形式的な定義に過ぎない。この微分演算子による記法は，物理学者ヘヴィサイドが微分方程式の解法において開発したものであるが，これ自体は発見的な方法としての形式的記法にとどまるものであり，ヘヴィサイド自身この演算子法に数学的な正当化を与えなかった。しかしながら後に多くの数学者によりヘヴィサイドの演算子法の数学的基礎付けが試みられ，その適用範囲が明確になった。その試みの一つはミクシ

---

(1)　フィリップスモデルに関する研究動向は［Turnovsky, 2011］に詳しい。

ンスキーによる演算子法である［Mikusiński, 1959］。ヘヴィサイドの記法のほとんどはミクシンスキーの演算子法とみなすことで数学的に正当化できる。もう一つは，ミクシンスキーの演算子法より適用範囲は狭まるものの，ブロムウィッチ［Bromwich, 1917］，カーソン［Carson, 1926］，シュヴァルツ［Schwartz, 1952］らにより基礎付けられたラプラス変換による方法である。ラプラス変換が線形常微分方程式や二変数偏微分方程式の代数的解法のために応用されることはよく知られており，特に制御理論における安定判別への応用が豊富である。したがって本稿ではフィリップスモデルの基礎付けにラプラス変換による方法を採用する。

第 2 章ではラプラス変換を導入して経済変数に関する伝達関数を定義する。第 3 章ではフィリップスの問題設定を概観した後，フィリップスの微分方程式体系にラプラス変換による基礎付けを与える。これにより微分方程式体系が複素領域の代数方程式に変換される。さらに漸近安定性の定義を与えたうえで，独立需要の外生的変化と安定化政策の実施が均衡水準へ与える影響について考察し，安定化政策の効果を比較静学的に検証する。第 4 章では，独立需要と総産出量の間の伝達関数を利用して，政策を実施する場合とそうでない場合の動学的安定条件を導出する。

2　ラプラス変換と伝達関数

本章では経済変数の伝達関数を定義する準備としてラプラス変換について述べる(2)。i を虚数単位として用いる。本稿ではリーマン積分の意味でのラプラス変換を扱う。実数上で定義された 1 変数実数値関数 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について次の広義積分

$$\hat{f}(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ b\to\infty}}\int_{-\varepsilon}^{b} f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

が収束するとき，これをラプラス変換と呼ぶ。下限は原点の左極限を表す。s は複素数であり，例えば実数 σ と ω を用いて $s=\sigma+i\omega$ と表される。s の実部を $\Re s$ と表す。ラプラス変換は定義より，$\mathcal{L}\left[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\right]=a_1\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]+a_2\mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$ のように線形性を持つ。

ラプラス変換が存在するための十分条件について述べる。$f(t)$ が任意の有限区間で区分的に連続であり(3)，すべての t に対して

$$|f(t)|\le Me^{\gamma t} \tag{2}$$

---

(2)　ラプラス変換については［Kreyszig, 2011］などを参照されたい。伝達関数の概念は制御理論特有のものであるが，これを経済学に導入した初期のものとして［Simon, 1952］がある。

(3)　関数 $f(t)$ が区間 $[a,b]$ について区分的に連続とは，$f(t)$ が区間 $[a,b]$ の有限個の点を除いて連続であり，不連続点 t_0 において左極限 $\lim_{t\to t_0-0}=f(t_0-0)$ と右極限 $\lim_{t\to t_0+0}=f(t_0+0)$ が存在することである。

を満たす定数 $M>0$ と γ が存在するとき（このとき $f(t)$ は指数位数の関数と呼ばれる），ラプラス変換はすべての $\Re s>\gamma$ に対して存在する。すなわち

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}[f(t)]| &= \left|\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt = \int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}\right|dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty}|f(t)|\,e^{-\sigma t}dt \leq \int_{0^-}^{\infty} Me^{\gamma t}e^{-\sigma t}dt = \frac{M}{\sigma-\gamma}\end{aligned}$$

となる。有限時間で発散する関数や e^{t^2} のような指数位数でない関数を扱うことはできないが，本稿で扱う問題について実用上の問題はないであろう。

微分法則について述べる[(4)]。$f(t)$ が $t\in(0,\ \infty)$ で連続であり微分可能で原点の左極限 $f(0^-)$ が存在し，指数位数の関数であるとする。1 階導関数 $f'(t)$ が $t\in[0,\ \infty)$ で区分的に連続であり指数位数の関数であるなら

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ b\to\infty}}\int_{-\varepsilon}^{b} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ b\to\infty}}\left(\left[f(t)e^{-st}\right]_{-\varepsilon}^{b} + s\int_{-\varepsilon}^{b} f(t)e^{-st}dt\right) \\ &= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。$f'(t)$ に不連続点がある場合は，区分的に連続な区間ごとに部分積分を求めればよい。これを n 階微分 $f^{(n)}(t)$ に対して繰り返し適用すれば，$f(t),\ f'(t),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(t)$ が $t\in(0,\ \infty)$ で連続で指数位数でありそれぞれの原点での左極限が存在し，$f^{(n)}(t)$ が $t\in[0,\ \infty)$ で区分的に連続で指数位数であるとすると

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-) \tag{4}$$

を得る。ここで初期条件として $f(0^-)=f'(0^-)=\cdots=f^{(n-1)}(0^-)=0$ を与えると，$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)]$ となる。

また，$f(t)$ が $t\to\infty$ で収束するならば，$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-)$ の $s\to 0$ の極限をとると，左辺は

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f'(t)dt = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)dt = \lim_{b\to\infty}\left[f(b)-f(0^-)\right]$$

したがって，$f(0^-)=0$ とすると

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{5}$$

を得る。この関係は最終値の定理と呼ばれる。

（4） 原点における不連続性の扱いについては［Tizard, 1956］を参照されたい。

微分の場合と同様に，積分に関するラプラス変換を得ることができる。$f(t)$ が $[0,\infty)$ で区分的に連続で指数位数であれば，$g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ は $(0,\infty)$ で連続で

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau \leq \frac{M}{\gamma}e^{\gamma t} \qquad (\gamma > 0)$$

と指数位数である。$g(0^-)=0$ であり $f(t)$ の不連続点を除いて $f(t)=g'(t)$ であるから $g'(t)$ は $[0,\infty)$ で区分的に連続であり，

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \mathcal{L}\left[g'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[g(t)\right] - g(0^-) = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] \tag{6}$$

を得る。

他にも容易に以下のラプラス変換が得られる。定数 A のラプラス変換は，収束域 $\Re s > 0$ において

$$\mathcal{L}\left[A\right] = \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-st}dt = \left[-\frac{A}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} = \frac{A}{s} \tag{7}$$

である。α を任意の実数とすると，$\Re s > \alpha$ において指数関数のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \tag{8}$$

である。また一般に

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{(s-\alpha)^n} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{9}$$

を得る。三角関数については例えば $\Re s > 0$ において

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{10}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{11}$$

を得る。

$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \hat{f}(s)$ のとき，$f(t)$ を $\hat{f}(s)$ の逆ラプラス変換といい，$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{f}(s)\right]$ と表す。ラプラス変換の一意性は自明であるが，逆ラプラス変換の一意性は必ずしも自明ではない。しかしながら逆ラプラス変換が本質的に一意であることはレルヒの定理として知られている。すべての $t>0$ に対して $\int_0^t \mathcal{N}(\tau)d\tau = 0$ となる関数 $\mathcal{N}(\tau)$ を考える。$\hat{f}(s)$ の一つの逆ラプラス変換を $f(t)$ とすると $f(t)+\mathcal{N}(\tau)$ もその逆ラプラス変換となることがわかる。よって二つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ のラプラス変換が存在してそれが一致する場合には $f(t)$ と $g(t)$ は連続点において一致する。したがって連続関数のみを考える場合には逆ラプラス変換は一意に定まる。逆ラプラス変換は，ブロムウィッチ積分

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \hat{f}(s)e^{st}ds \tag{12}$$

を用いて求めることができるが，この複素積分を直接求めずとも，逆ラプラス変換の一意性よりラプラス変換の結果と部分分数展開を用いると容易に導出できる場合が多い。

以下に経済変数間の伝達関数を定義する。二つの経済変数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ は指数位数であり $f_1(t)$, $f_1'(t)$, $\cdots$, $f_1^{(n-1)}(t)$ と $f_2(t)$, $f_2'(t)$, $\cdots$, $f_2^{(m-1)}(t)$ が存在して $t \in (0,\ \infty)$ で連続で指数位数とする。これらが以下の実定数係数線形常微分方程式

$$\begin{aligned} & a_n f_1^{(n)}(t) + a_{n-1} f_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 f_1(t) \\ & = b_m f_2^{(m)}(t) + b_{m-1} f_2^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 f_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

で表されるとする。それぞれのラプラス変換が $\hat{f}_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ と $\hat{f}_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$ とで表されるとし，その比 $\hat{f}_1(s)/\hat{f}_2(s)$ を伝達関数と呼ぶ。初期条件を $f_1(0^-) = \cdots = f_1^{(n-1)}(0^-) = 0$ と $f_2(0^-) = \cdots = f_2^{(m-1)}(0^-) = 0$ とすると式（4）よりその伝達関数は

$$\frac{\hat{f}_1(s)}{\hat{f}_2(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{14}$$

となる。次章以降，扱われる経済変数は指数位数であり，初期条件と連続性の仮定は伝達関数が式（14）の形で表されるように設けるとする。$f_1(t)$ と $f_2(t)$ はそれぞれ制御理論における術語の出力と入力に相当する。

3　フィリップスモデルの基礎付けと比較静学

3.1　安定化問題

本節では［Phillips, 1954］の問題設定について説明する。ここでは独立需要へ外生的なショックが与えられたときに総産出量が均衡を回復するかどうかが問題となる。均衡が安定であるということは，均衡からの乖離が生じたときに再び元の均衡へ回復するということであり，一時的な回復ではなく無限期にわたる回復を意味する。今 $t = 0$ の時点以前まで均衡が保たれているとしよう。$t = 0$ 以降に独立需要 $A(t)$ へ外生的ショックが生じたとき，総産出量 $Y(t)$ の動学的経路は振動を伴いながら別の均衡水準へ移動する。したがって均衡水準を元に戻すために政府支出による経済調整を行う。総産出量水準の経路を常に観測しながら経済調整を行うことで均衡が回復することが期待できるが，長期的にどこまで元の均衡水準を回復できるか自明ではない。また，政策の実施自体により生じ得る過剰な景気循環は避けねばならない。これをいかに解決するかということが取り組まれる安定化問題である。

フィリップスは論文中で安定性についての定義を明示していないが，ある総産出量の均衡水準 Y^* が存在して $\lim_{t \to \infty} Y(t) = Y^*$ となるという意味での漸近安定性が考察されている。これはサミュ

エルソンが定義した第 1 種の安定性に相当する［Samuelson, 1941］。厳密には第 1 種の安定性は初期値が均衡から任意量だけ乖離していても長期的には均衡へ漸近するというものであり，一方でフィリップスは初期条件自体を固定して考えている。とはいえ，独立需要の外生的なショックにより均衡から任意に乖離した後に，元の均衡を目標水準としてそこへ漸近的に回復することを考えている点では同じ問題である。

フィリップスは，「望ましい均衡水準 Y_d」への安定化政策を考えた。すなわち安定化政策の最終目標として $\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y_d$ を達成すべきというものである。フィリップスは世代概念と効用概念を導入していないが，総産出量は国民所得水準でありこれに比例した消費が行われるため，この安定化問題は各世代の効用に直接寄与するものと考えてよいであろう。フィリップスは $t = 0$ で経済が定常状態として均衡していることを前提として，この水準を望ましい均衡水準とした。問題とするのは均衡からの乖離量であるから，$t = 0$ の値を基準として $Y(0) = 0$ とする。安定化政策の目標は漸近安定 $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ を達成しながら同時に景気振動をも抑制することである。ここで $Y(t)$ はその乖離量を表し，$Y_d = 0$ である。すなわち分析された状況は，一時的に何らかの望ましい均衡に到達したが独立需要への外生的ショックによって均衡が移動したときに，元の均衡水準へ安定的に回復しようとしている状況である。政策計画の決定は経済の構造や外生的ショックに関する情報に基づく必要はなく，総産出量の均衡からの乖離量のみに基づいて政府支出量が決定される。目標とする総産出量の均衡水準はすでに到達した均衡水準とするため，その値は既知とする。その均衡からの乖離を常に観測しながら政府支出を実行し続ける設定である。もちろんリアプノフ安定性などに安定性概念を緩め，望ましい水準よりわずかに低い水準での均衡を許容する立場もあろう。しかしながら，功利主義の立場から各世代の効用の総和に基づき動学的経路の優劣を評価しようとした場合には，短期的にはその評価値の違いはわずかであっても長期的に総和をとれば大きな差となることに注意せねばならない。

ある定常水準を目標水準としてそこへの漸近安定を政策目標とすることの意義については議論する余地があるが，例えば失業率を極力減らすために総産出量を可能な限り完全雇用水準に近づけるというのは，政策目標として広く受け入れられている考え方であろう。また，一時的に到達した望ましい水準を与件として，そこからの乖離量を観測しながら安定化を図るという問題設定は，経済の構造パラメータを与件とする最適政策問題よりは現実味があるといえよう。例えば「望ましい均衡水準」が完全雇用水準に相当する場合には，この乖離量 $Y(t)$ は GDP ギャップに基づいた政策決定ルールであると解釈できる。したがって本稿ではフィリップスの考察に忠実な立場をとり，元の定常値への漸近安定に焦点を置く。フィリップスは示さなかったが[5]，この独立需要のショックに振

(5)　［Allen, 1967］においてフィリップスの研究が紹介されてはいるが，振動が含まれる場合については分析されていない。

動が含まれる場合にも分析を拡張できることを次節以降に示す。本稿の範囲を越えるが，もちろん目標水準が時間とともに成長する経路を考えてもよい。実際，フリードマンの k% ルールなどは一定の成長を前提とした金融政策ルールである［Friedman, 1960］。その場合には独立需要 $A(t)$ が成長経路をたどる場合を前提することになろう。

フィリップスは均衡への到達のみならず，景気変動を極力抑制することをも政策目標の一つとしたが，このことも必ずしも恣意的なものではなかろう。景気変動の発生は，それがあまりに大きい場合や頻繁である場合には，経済構造の変化や世代間公平性の観点から問題を生じ得る。例えば独立需要が外生的ショックにより大幅に減少したときには，短期的に素早い回復が求められよう。一方であまりに性急に政府支出を増加させれば，一時的には目標水準を越えた好景気に達するが，その後不況と好景気を頻繁に繰り返す場合も考えられる。短期的に素早い回復が必ずしも長期的にも素早い回復をもたらすとは限らず，結果的に均衡への漸近が遅れる恐れもある。また極端な場合には振動が増幅し続けて発散し，経済自体が破綻する。逆に独立需要が過剰となった場合に性急に政府支出を減少させた場合には，長期的には均衡への到達が素早くとも，短期的には急速に不況に転じて非常に低い総産出量水準に甘んぜねばならない状況も生じる。そのような短期と長期の，あるいは均衡への収束速度と景気変動の頻度・大きさのトレードオフも課題であるが，そうした問題の基礎としてもまず，定常均衡への短期的な素早い回復，目標水準への長期的な一致，循環の抑制という 3 つの視点を政策目標として考察することは分析上の観点からも規範的な面からも意義があるといえよう。このフィリップスのモデルは連続時間上で定義された線形微分方程式であり景気循環モデルとしては比較的単純なものであるが，より複雑な景気循環を表す非線形微分方程式体系の区分的な線形近似とみなして当面これを分析することも有用であろうし，線形問題を考察することは非線形問題を扱ううえでの基礎ともなる。(6)

3.2 乗数・加速度モデル

本節ではフィリップスの乗数・加速度モデルのラプラス変換による基礎付けを与えるとともにその伝達関数を求める。安定化政策についての詳細は次節で扱う。

以下にフィリップスのモデルを示す。(7) 本モデルの外生変数は独立需要 $A(t)$ であり，内生変数は総産出量 $Y(t)$，総需要 $Z(t)$，消費 $C(t)$，投資 $I(t)$，政府支出 $G(t)$ である。上述のとおりこれら経済変数の値は $t=0$ の均衡からの乖離を表すため，$t>0$ で負の値もとり得る。総需要 $Z(t)$ は

$$Z(t)=C(t)+I(t)+G(t)+A(t) \tag{15}$$

(6)　連続分析ではなく期間分析のほうが望ましいとする見方もあろう。その場合には差分方程式に対してラプラス変換の代わりに z 変換と呼ばれる関数変換を適用すれば同様の考察ができる。

(7)　本稿において経済変数を表す記号は原論文［Phillips, 1954］のものではなく，現在の慣用に近い［Allen, 1967］に従った。

で定義される。総産出量 $Y(t)$ は，次の不均衡関係

$$Y'(t) = \frac{1}{\tau_Y}(Z(t) - Y(t)) \tag{16}$$

により定義される。τ_Y は非負定数である。$Y(t)$ の値は基準となる $t = 0$ における均衡値からの乖離値であり，その時点以前は同じ水準で均衡が保たれていたと考えて，

$$Y(t) = 0 \quad (t \leq 0) \tag{17}$$

とする。

フィリップスは外生的に生じる需要ショックについて厳密な定義を与えておらず，特にショックが生じる瞬間についての取り扱いに問題があるので，本稿では以下の定義を与える。

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = a) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{18}$$

を考える。これにより $t = 0$ に発生する定数 A だけの需要ショックとして，$A(t) = Au_0(t)$ を与えることができる。これのラプラス変換として，

$$\hat{A}(s) = \mathcal{L}\left[Au_0(t)\right] = A\int_{0^-}^{\infty} u_0(t)e^{-st}dt = A/s \tag{19}$$

を得る。$Y(0^-) = A(0^-) = 0$ である。

ところで，$Au_0(t)$ は原点において通常の意味で微分可能ではないので，そのままではラプラス変換が定義できない。したがって，$Au_0(t)$ について超関数の意味での微分を定義する。今，

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t > \frac{\varepsilon}{2}) \\ \frac{1}{\varepsilon} & (-\frac{\varepsilon}{2} \leq t \ \leq \frac{\varepsilon}{2}) \\ 0 & (t < -\frac{\varepsilon}{2}) \end{cases} \tag{20}$$

を考える。ここで $\varepsilon \to 0$ の極限をとって得られる超関数

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t > 0) \\ \infty & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{21}$$

を導入する。ただし $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ である。これはデルタ関数と呼ばれる。ここで

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(u_{-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right)$$

を考える。これより

$$\int_{-\infty}^{t} h_\varepsilon(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & (t > \frac{\varepsilon}{2}) \\ \frac{t}{\varepsilon} + \frac{1}{2} & (-\frac{\varepsilon}{2} \leq t \ \leq \frac{\varepsilon}{2}) \\ 0 & (t < -\frac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$$

を得る。ここで

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{t} h_\varepsilon(\tau)d\tau = u_0(t)$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

であることを考慮すると，

$$u_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

を得る。この両辺を微分することで

$$u_0'(t) = \delta(t) \tag{22}$$

が得られる。この意味での微分のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[Au_0'(t)\right] = A\int_{0^-}^{\infty} u_0'(t)e^{-st}dt = A\left[\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt\right] = A \tag{23}$$

で与えられる。ここで現れているデルタ関数のラプラス変換の結果はよく知られている。第 2 項は 0 である。

式（14）と同様の条件で式（16）両辺をラプラス変換すると

$$s\hat{Y}(s) = \frac{1}{\tau_Y}(\hat{Z}(s) - \hat{Y}(s)) \tag{24}$$

であり，伝達関数

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{Z}(s)} = \frac{1}{\tau_Y s + 1} \tag{25}$$

を得る。式（16）の関係は［Phillips, 1954］において微分演算子 D を用いて形式的に

$$Y(t) = \frac{1}{\tau_Y D + 1} Z(t) \tag{26}$$

と表現された。生産ラグを表すフィリップスの演算子 $1/(\tau_Y D + 1)$ は伝達関数（25）に対応している。以上のようにしてフィリップスの微分演算子を用いた表記がラプラス変換により正当化されることが確認できる。以下に述べる投資ラグと政策ラグについても同様にして正当化される。

さらに $Z(t)$ を定数 Z とすると式（24）は式（7）より

$$\hat{Y}(s) = \frac{1}{\tau_Y s + 1}\frac{Z}{s} \tag{27}$$

でありこれを部分分数に展開すると，

$$\hat{Y}(s) = Z\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau_Y}{\tau_Y s + 1}\right) \tag{28}$$

である。式（7）と式（8）を利用して両辺の逆ラプラス変換を求めると特殊解として

$$Y(t) = Z\left(1 - e^{-t/\tau_Y}\right) \tag{29}$$

を得る。フィリップスにより τ_Y は時定数（time constant）と呼ばれているが，この呼び方は物理学などにおける過渡現象を表す微分方程式においてしばしば見られる呼び方である。この解を一瞥してわかるように，時定数 τ_Y は総需要の変化に対する総産出量の応答速度を表す非負定数である。フィリップスも指摘したように，この解を具体的に計算すれば，一定の総需要 Z が与えられたとき時間 $t = \tau_Y$ の時点で総産出量はその 63.2%に到達することがわかる。

乗数モデルに相当する消費 $C(t)$ は

$$C(t) = (1 - l)Y(t) \tag{30}$$

と定義される。l は漏れを表す非負定数であり $0 < l < 1$ とする。需要の上昇に寄与しない貯蓄，税，輸入品への支出等がこれに該当すると解釈できる。これをラプラス変換するとその線形性から，消費に関する伝達関数

$$\frac{\hat{C}(s)}{\hat{Y}(s)} = (1 - l) \tag{31}$$

を得る。

加速度原理は投資計画量が総産出量の増加率に比例するというものであり，加速度定数を表す非負定数を v とすると

$$vY'(t)$$

と表される。フィリップスはさらに式（16）と同様の 1 階線形微分方程式で表される投資ラグ

$$I'(t) = \frac{1}{\tau_I}(vY'(t) - I(t)) \tag{32}$$

を考えた。τ_I は非負定数であり産出量の変化に対する投資需要の応答速度を表す時定数である。時間の単位は任意にとれるから，投資ラグを基準にとり $\tau_I = 1$ となるよう適当に設定しているとする。よってこれをラプラス変換すると，投資に関する伝達関数

$$\frac{\hat{I}(s)}{\hat{Y}(s)} = \frac{vs}{s + 1} \tag{33}$$

を得る。

式（15），（16），（30），（32）より，総需要，生産の不均衡関係，乗数原理と加速度原理からなる経済を表す微分方程式は

$$\tau_Y Y''(t) - (v - l - \tau_Y)Y'(t) + lY(t) = A'(t) + A(t) \tag{34}$$

となる。これをラプラス変換すると伝達関数

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{A}(s)} = \frac{s+1}{\tau_Y s^2 - (v - l - \tau_Y)s + l} \tag{35}$$

を得る。初期条件についてはすでに述べたとおりである。

3.3　安定化政策

前節で確認したように，乗数 · 加速度モデルにおいてもし独立需要が一定量 A の変化に晒されると，たとえ均衡が得られるとしても元の均衡水準ではなく別の A/l に漸近する。したがって独立需要に変化が生じた瞬間から常に政府支出による経済調整を行い，総産出量を可能な限り元の均衡水準へ回復させねばならず，理想的には，元の均衡水準と完全に一致する $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ という漸近安定性を政策により達成すべきである，というのがフィリップスの問題であった。そのための安定化政策としてフィリップスは，潜在政策需要 $P(t)$ が以下を満たすような以下の関数を考えた。

$$P(t) = -\mu_1 Y(t) - \mu_2 \int_0^t Y(\tau)d\tau - \mu_3 Y'(t) \tag{36}$$

μ_1，μ_2，μ_3 は非負定数であり，総産出量の安定化を図るために調整される政策パラメータである。これは与件としての $t = 0$ の均衡水準からの乖離量の経路 $Y(t)$ を常に観測しながら，その結果を政府支出に反映させるフィードバックルールによる政策である。政府は政策計画の際に $A(t)$ の情報も経済構造も知る必要はない。

比例政策 $-\mu_1 Y(t)$ は現時点における均衡の乖離量に比例した政府支出を実施するものであり，μ_1 の調整により素早く均衡を回復することを目的とする。積分政策 $-\mu_2 \int_0^t Y(\tau)d\tau$ は均衡の乖離が始まった時点から現時点までの乖離量の累積値をとり，これに比例した政府支出を実施する政策である。乖離が生じた直後ではその累積値が少ないためこの政策による効果は短期的にはわずかである。しかしながら比例政策のみでは均衡水準が完全には元の均衡に一致しないため，その定常的な偏差を消去するために積分政策が設けられている。この効果については次節で確認する。2 階以上の微分方程式になると振動が発生し得るため，総産出量経路の振動を軽減する目的で微分政策 $-\mu_3 Y'(t)$ が設けられている。その定義から明らかなように，総産出量の時間変化が急峻であるほどそれに比例した政府支出を行う政策である。

政策パラメータ μ_1，μ_2，μ_3 の値によって，総産出量と政府支出の動学的経路が異なることは一瞥して明らかであろう。これらの動学的経路に関する最適性の基準が置かれない限りは，パラメータの最適値を考えることはできず，一意的にパラメータを決定できない。このことを欠点とみなして，総産出量と政府支出に関する 2 次費用関数を定義し，その最小化問題としてフィリップス型の政策関数とは異なる最適政策関数を分析した例もある［Turnovsky, 1973］。一方で，このように決定される最適政策関数は経済モデルの構造パラメータに依存するものである。したがって経済の構造が精確にわからない場合にはむしろ，経験的に 3 つのパラメータを柔軟に調整しながら総産出量経路のみで政策決定を行うフィリップス型安定化政策のほうが適しているであろう。また，安定化政策として有効な政策パラメータは一意ではなく，広い範囲で有効である。しかしながらこのことについてフィリップスは分析を与えなかった。その条件については次章に考察する。

フィリップスが考察したように，政策実行自体のラグにより経済が不安定になり得るため，政策ラグを明示的にモデルに導入することは重要な視点である。潜在政府需要が式（15）における $G(t)$ として総需要に効力を発揮するまでの政策ラグを想定し，

$$G'(t) = \frac{1}{\tau_G}(P(t) - G(t)) \tag{37}$$

とする。τ_G は非負定数であり，潜在政府支出の変化に対する実際の政府需要の応答速度を表す時定数である。これをラプラス変換すると，政策ラグに関する伝達関数

$$\frac{\hat{G}(s)}{\hat{P}(s)} = \frac{1}{\tau_G s + 1} \tag{38}$$

を得る。

政策ラグを伴う比例政策 $-\mu_1 Y(t)$ と微分政策 $-\mu_3 Y'(t)$ を実施した場合の経済を表す微分方程式を求める $(\mu_1 > 0,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 > 0)$。式（36）において積分政策の項を無視し，式（15），（16），（30），（32），（37）を考慮すると，

$$\begin{aligned} &\tau_G\tau_Y Y'''(t) + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)Y''(t) \\ &\qquad + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)Y'(t) + (l + \mu_1)Y(t) \\ &= \tau_G A''(t) + (1 + \tau_G)A'(t) + A(t) \end{aligned} \tag{39}$$

である。政策を含めない場合（式（34））にモデルは $Y(t)$ についての 2 階微分方程式であったが，政策ラグの影響で 3 階微分方程式となる。

式（39）をラプラス変換すると独立需要と総産出量の間の伝達関数

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{A}(s)} = \frac{(s+1)(\tau_G s + 1)}{\tau_G\tau_Y s^3 + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)s^2 + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)s + l + \mu_1} \tag{40}$$

を得る。初期条件は前章のとおりである。

政策ラグを伴う比例，積分，微分政策のすべてを実施した場合 ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$)，その経済全体の微分方程式は

$$\begin{aligned}
&\tau_G\tau_Y Y^{(4)}(t) + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)Y'''(t) \\
&\qquad + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)Y''(t) + (l + \mu_1 + \mu_2)Y'(t) + \mu_2 Y(t) \\
&= \tau_G A'''(t) + (1 + \tau_G)A''(t) + A'(t) \qquad (41)
\end{aligned}$$

となる。積分政策があるために $Y(t)$ について 4 階微分方程式となっている。

式（41）をラプラス変換すると，すべての政策を含む場合の独立需要と総産出量の間の伝達関数

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{A}(s)} = \frac{s(s+1)(\tau_G s+1)}{\tau_G\tau_Y s^4 + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)s^3 + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)s^2 + (l + \mu_1 + \mu_2)s + \mu_2} \qquad (42)$$

を得る。

3.4　均衡水準の移動

本節では，独立需要が外生的に変化した場合の総産出量の均衡水準について比較静学的に考察しよう。まず安定化政策を実施しない場合の，独立需要の外生的ショックによる経済への影響について述べる。最終値の定理を応用するが，この定理は最終値が存在する場合にのみ意味を持つことに留意されたい。

定理 1：　独立需要が $Au_0(t)$ の変化を受けると，乗数 · 加速度経済の均衡水準は，もし均衡が存在するなら 0 から A/l へ移動する。

証明：　式（35）を考慮して最終値の定理を適用する。

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{Y}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1)}{\tau_Y s^2 - (v - l - \tau_Y)s + l}\frac{A}{s} = \frac{A}{l} \qquad (43)$$

となる。 □

簡単のためにフィリップスの分析と同様，独立需要の変化が定数の場合を考察したが，もちろん $A(t) = Au_0(t) + \cos(\omega t)$ などと振動項を加えてもよい。このときには式（10）より $\hat{A}(s) = A/s + s/(s^2 + \omega^2)$ となり，この振動項は均衡値に影響しないことがわかる。

次に比例政策と微分政策が均衡水準へ与える影響を調べる。

定理 2：　独立需要の変化 $A(t) = Au_0(t)$ に対して，比例政策と微分政策を実施したとき ($\mu_1 > 0,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 > 0$)，乗数・加速度経済の均衡水準は，もし均衡が存在するなら $A/(l+\mu_1)$ に回復する。

証明：　式（40）を考慮して最終値の定理を適用する。$\hat{A}(s) = \mathcal{L}\left[Au_0(t)\right] = A/s$ である。その均衡水準は

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} Y(t)\\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1)(\tau_G s+1)}{\tau_G\tau_Y s^3 + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)s^2 + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)s + l + \mu_1}\frac{A}{s}\\
&= \frac{A}{l+\mu_1} \qquad (44)
\end{aligned}
$$

となる。 □

式（43）で示したように政策を実施しない場合に均衡水準は A/l であったが，比例政策を施すことで均衡水準はより元の水準に近い $A/(l+\mu_1)$ に移動する。また，微分政策の存在により新たに生じる項は $\mu_3 s^2 + \mu_3 s$ であり，最終値の定理を適用すると $s \to 0$ によりこれらの項は 0 となるため，微分政策は振動を抑制するのみで均衡水準には影響を与えない。

積分政策 $-\mu_2 \int_0^t Y(\tau)d\tau$ の効果を検証する。比例政策によって均衡水準は $A/(l+\mu_1)$ に改善するが，完全には 0 と一致しない。そこで，積分政策を加えることによってこれを 0 と一致させる。以下にその効果を確認する。

定理 3：　独立需要の変化 $A(t) = Au_0(t)$ に対して，比例政策，積分政策，微分政策のすべてを実施したとき ($\mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0,\ \mu_3 > 0$)，乗数・加速度経済の均衡水準は，もし均衡が存在するなら元の均衡水準 0 に回復する。

証明：　式（42）を考慮すると，最終値の定理より

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} Y(t)\\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s^2(s+1)(\tau_G s+1)}{\tau_G\tau_Y s^4 + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)s^3 + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)s^2 + (l + \mu_1 + \mu_2)s + \mu_2}\frac{A}{s}\\
&= 0 \qquad (45)
\end{aligned}
$$

を得る。 □

4　安定条件

本章では総産出量経路が漸近安定であるための必要十分条件を示す。前章では比例政策と積分政策により均衡水準を元の水準へ回復できることを比較静学的に明らかにしたが，この分析は経済がある均衡へ漸近することを前提とした分析である。経済の構造パラメータと政策パラメータ μ_1，μ_2，μ_3 の範囲によっては，総産出量の振動が減衰せず不安定な状態を保持する場合がある。したがって，総産出量が漸近安定であるための条件を明らかにする必要がある。フィリップスは経済の構造パラメータと政策パラメータの具体的な数値を微分方程式の解に代入して，いくつかの政策パラメータにより経済が元の均衡を回復することを示した。実際，総産出量が 0 へ漸近安定する政策パラメータの範囲は広いものであり，様々な収束経路を支持する政策パラメータが存在するが，フィリップスはその範囲を与えていない。したがって政府支出が安定化政策として有効であるための条件を明らかにする必要がある。以下では政策を実施しない場合の漸近安定性の必要十分条件を明らかにした後に，政策を含む経済全体におけるその必要十分条件を示す。

定理 4：　式（34）で表される政策を含まない乗数･加速度経済が安定であるための必要十分条件は，

$$\lambda_1,\,\lambda_2 = \frac{v-l-\tau_Y \pm \sqrt{(v-l-\tau_Y)^2-4l\tau_Y}}{2\tau_Y} \tag{46}$$

の実部が負であることである。

証明：　実際に微分方程式を解く。式（35）の分母は

$$\tau_Y s^2-(v-l-\tau_Y)s+l$$

である。その二つの根を λ_1，λ_2 とすると部分分数展開により，

$$\begin{aligned}\hat{Y}(s) &= \left(\frac{s+1}{\tau_Y(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\right)\frac{A}{s}\\ &= \frac{A}{\tau_Y}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{1}{s}+\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{1}{s-\lambda_1}+\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\frac{1}{s-\lambda_2}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

を得る。これを式（8）も用いて逆ラプラス変換すると

$$Y(t) = \frac{A}{\tau_Y}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 t}+\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}e^{\lambda_2 t}\right) \tag{48}$$

である。$\lambda_1=\sigma_1+i\omega_1$，$\lambda_2=\sigma_2+i\omega_2$ とすると，二つの根が振動を表す二つの指数関数の積 $e^{\sigma_1 t}e^{i\omega_1 t}$，$e^{\sigma_2 t}e^{i\omega_2 t}$ を形成することがわかる。$e^{i\omega_1 t}$，$e^{i\omega_2 t}$ はオイラーの公式 $e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+$

$i \sin(\omega t)$ より微分方程式の解の振動部分を表している。一方で $e^{\sigma_1 t}$，$e^{\sigma_2 t}$ は振動の増幅または減衰を表している。したがって，いずれの根の実部も負であれば，二つの項いずれの振動も減衰して漸近安定となる。また，漸近安定であるならばいずれの実部も負でなければならない。定理 1 と同様に定数項が A/l であることは容易に確かめられる。 □

伝達関数の分母多項式が 2 次の場合において，その漸近安定の必要十分条件はそのすべての根の実部が負であることを確認した。分母が n 次多項式の場合でも同様の部分分数展開が可能であるため，n 階微分方程式の場合にも，伝達関数の分母多項式の根（伝達関数の極）のすべての実部が負であることが漸近安定の必要十分条件となる。重根を含む場合には逆ラプラス変換の際に式（9）を適用すればよい。漸近安定の必要十分条件は伝達関数のすべての極が複素平面の左半面 ($\Re s < 0$) にあると言い換えることもできる。

最後に，安定化政策も含む 4 階微分方程式，式（41）の漸近安定のため必要十分条件を与えるが，その伝達関数の分母の意味は必ずしも明白ではないであろう。そこでこの微分方程式を連立 1 階微分方程式に変形してその意味を確認する。簡単のため，まず式（42）の分母と分子を $\tau_G \tau_Y$ で割って

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{A}(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{49}$$

と表す。まず以下を満たす変数 $U(t)$ を導入する。

$$\frac{\hat{U}(s)}{\hat{A}(s)} = \frac{1}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{50}$$

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)} = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \tag{51}$$

ここで $\mathcal{L}[U(t)] = \hat{U}(s)$ である。式（50）を逆ラプラス変換すると，

$$U^{(4)}(t) + a_3 U'''(t) + a_2 U''(t) + a_1 U'(t) + a_0 U(t) = A(t) \tag{52}$$

を得る。ここで，$X_1(t) = U(t)$，$X_2(t) = U'(t)$，$X_3(t) = U''(t)$，$X_4(t) = U'''(t)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ X_3'(t) \\ X_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A(t) \tag{53}$$

と書ける。また，式（51）を逆ラプラス変換すると

$$Y(t) = b_0U(t) + b_1U'(t) + b_2U''(t) + b_3U'''(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} \tag{54}$$

を得る。これら二つの式を

$$X'(t) = HX(t) + bA(t) \tag{55}$$

$$Y(t) = c^T X(t) \tag{56}$$

と書く。微分記号は要素ごとの微分を表す。$X(t)$ は $X_n(t)$ を要素とする 4 次元列ベクトルである。H は上記の 4×4 行列である。b は 0 と 1 を要素とする 4 次元列ベクトルである。c は b_n を要素とする 4 次元列ベクトルであり T によってその転置行列をとる[(8)]。式（55）を要素ごとにラプラス変換すると

$$s\hat{X}(s) = H\hat{X}(s) + b\hat{A}(s)$$

であり，これを式（56）に代入すれば

$$\hat{Y}(s) = c^T(sI - H)^{-1}b\hat{A}(s)$$

を得る。したがって，式（42）は

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{A}(s)} = c^T(sI - H)^{-1}b = c^T\frac{\mathrm{adj}(sI - H)}{\det(sI - H)}b \tag{57}$$

と表すことができる。ただし I は 4 次単位行列であり，adj は余因子行列を，det は行列式を表す。$\det(sI - H) = 0$ は式（55）において $A(t) = 0$ としたときに得られる微分方程式の特性方程式である。したがって式（57）より，伝達関数の分母多項式はその特性方程式であり，伝達関数の極は特性根であることが確認できた。

（8）　これは現代制御理論において可制御正準形と呼ばれる表示に相当する。非斉次の連立微分方程式 $X'(t) = HX(t) + bA(t)$ を解けば $X(t)$ の解から直ちに $Y(t)$ の解が求まることが明らかであろう。実際，正方行列 H に対して Ht の行列指数関数を

$$e^{Ht} = I + Ht + \frac{H^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{H^kt^k}{k!} + \cdots$$

と定義すると，連立微分方程式は 1 変数における積分因子の方法と同様に解けて

$$X(t) = e^{Ht}X(0) + \int_0^t e^{H(t-\tau)}bA(\tau)d\tau$$

となる。また $e^{Ht} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - H)^{-1}\right]$ という関係と，重畳積分のラプラス変換がラプラス変換の積で表される性質を利用すれば，ラプラス変換により解を得ることもできる。

ところで一般均衡体系の価格調整に関する動学的安定性の研究においては，多数財の連立 1 階微分方程式の特性根の実部の符号により安定条件の説明が与えられる。［Samuelson, 1947］と［安井, 1948］において，すべての特性根の実部が負になるための必要十分条件はフルヴィッツの定理を用いて導出された(9)。本稿の安定性の問題は数学的にはこれと類似の問題であることがわかるであろう。これと同様の方法を式（42）に適用する。

定理 5：　式（41）で表されるフィリップス型安定化政策を含む乗数･加速度経済が安定であるための必要十分条件は,

$$
\begin{gathered}
\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3 > 0 \\
\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3 > 0
\end{gathered}
\tag{58}
$$

であり，かつ

$$
\begin{pmatrix}
\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3 & l + \mu_1 + \mu_2 & 0 & 0 \\
\tau_G\tau_Y & \tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3 & \mu_2 & 0 \\
0 & \tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3 & l + \mu_1 + \mu_2 & 0 \\
0 & \tau_G\tau_Y & \tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3 & \mu_2
\end{pmatrix}
\tag{59}
$$

の主小行列式がすべて正であることである。

証明：　フルヴィッツの定理［Hurwitz, 1895］を適用してすべての根の実部が負になる条件を求める。フルヴィッツの定理は s についての多項式が

$$
a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{60}
$$

と表されるとき，そのすべての根が負の実部を持つための必要十分条件を与えるものである。a_0，a_1，$\cdots$，a_n がすべて存在して同符号であり，さらにフルヴィッツ行列

（9）　ラウス･フルヴィッツの定理とも呼ばれる。［Samuelson, 1947］の数学付録 B においてこの定理の解説があるが，［安井，1948］では差分方程式の安定条件をも統一的に導出できるようベズーの 2 次形式によって説明されており，安井の解説のほうが一般的である。

$$
\begin{pmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_0
\end{pmatrix} \tag{61}
$$

の主小行列式がすべて正であることが漸近安定の必要十分条件である。主小行列式がすべて正であるとはすなわち，n 次までの以下の行列式について

$$
a_{n-1} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \tag{62}
$$

である。

この定理を適用すれば伝達関数（42）の分母多項式

$$
\tau_G\tau_Y s^4 + (\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3)s^3 + (\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3)s^2 + (l + \mu_1 + \mu_2)s + \mu_2
$$

のすべての根の実部が負であるための必要十分条件が求まる。定義より $\tau_G\tau_Y > 0$, $l + \mu_1 + \mu_2 > 0$, $\mu_2 > 0$ である。残りの係数もこれらと同符号でなければならない。すなわち $\tau_Y + l\tau_G + \tau_G\tau_Y - v\tau_G + \mu_3 > 0$ と $\tau_Y + l\tau_G + l - v + \mu_1 + \mu_3 > 0$ を満たさねばならない。さらに，この分母多項式についてのフルヴィッツ行列のすべての主小行列式が正であることが漸近安定の必要十分条件である。式（59）はそのフルヴィッツ行列である。このようにして，与えられた経済構造のパラメータに対して政策パラメータの範囲が求まる。 □

5　結論

本稿では，マクロ動学モデルとしてフィリップスが提示した微分演算子による微分方程式体系に，必要な数学的仮定を与えながらラプラス変換による数学的な正当性を与えた。最終値の定理を用いて，政策を実施する場合としない場合それぞれの経済の収束先について明らかにした。フィリップスの原論文では比例政策による収束先について述べられるのみで他は数値例が示されるのみであったが，本稿で与えた方法によって，すべての場合について統一的な理解を得ることができ，政策ラグをも考慮したうえでの政策の有効性を明瞭に示すことができた。最後に，経済の漸近安定性が保証されるための必要十分条件を与えた。

特にフルヴィッツの定理を適用して得られた定理5を一瞥すれば，政策ラグは不安定要因にはなり得るが，経済構造のパラメータと政策パラメータによりそれを相殺し得ることがわかる。政策実行自体の経済の不安定化の可能性はフィリップスも数値例として検討していたが，政策ラグがパラメータの制約条件としてどのように安定性に関与するかについては明らかにされておらず，フリードマン［Friedman, 1948］も政策ラグによる経済の不安定化を直観的な推論に基づいて強調するのみであった。この定理は，政策ラグが安定性へ及ぼす影響を明瞭に示しており，政策実行それ自体の正当性という根本問題についての特に重要な結果であると考える。

また，いわゆるルーカス批判［Lucas, 1976］を契機としてマクロ動学理論のミクロ的基礎付けが叫ばれるようになったのであるが，その批判の要点は政策ルールの変更自体が経済構造パラメータを変化させ得るというものであった。ところが，フィリップスのモデルはミクロ的基礎付けこそ与えられていないが，そもそもその政策判断は構造パラメータに依存しないため，ルール変更により仮に構造パラメータが変化したとしても，安定条件の範囲内であれば政策は依然として安定化政策として有効である。

参 考 文 献

Allen, R. G. D. (1967): *Macroeconomic Theory: A Mathematical Treatment.* Macmillan.

Bromwich, T. I. (1917): “Normal coordinates in dynamical systems,” *Proceedings of the London Mathematical Society 2*(1), 401–448.

Carson, J. (1926): “The Heaviside operational calculus,” *Bulletin of the American Mathematical Society 32*(1), 43–68.

Friedman, M. (1948): “A monetary and fiscal framework for economic stability,” *The American Economic Review 38*(3), 245–264.

Friedman, M. (1960): *A Program for Monetary Stability.* Fordham University Press.

Hansen, L. P. and Sargent, T. J. (2003): “Robust control of forward-looking models,” *Journal of Monetary Economics 50*(3), 581–604.

Hurwitz, A. (1895): “Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt,” *Mathematische Annalen 46*(2), 273–284.

Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest and Money.* Macmillan Press LTD/ Royal Economic Society.

Kreyszig, E. (2011): *Advanced Engineering Mathematics.* Wiley.

Lucas, R. E. (1976): “Econometric policy evaluation: A critique,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1*, 19–46.

Mikusiński, J. (1959): *Operational Calculus.* Pergamon Press.

Phillips, A. W. (1954): “Stabilisation policy in a closed economy,” *The Economic Journal 64*(254), 290–323.

Samuelson, P. A. (1939): “Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration,” *The Review of Economics and Statistics 21*(2), 75–78.

Samuelson, P. A. (1941): “The stability of equilibrium: Comparative statics and dynamics,” *Econometrica 9*(2), 97–120.

Samuelson, P. A. (1944): "The relation between Hicksian stability and true dynamic stability," *Econometrica 12*(3, 4), 256–257.

Samuelson, P. A. (1947): *Foundations of Economic Analysis.* Harvard University Press.

Schwartz, L. (1952): "Transformation de Laplace des distributions," *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* (Tome Supplementaire), 196–206.

Simon, H. A. (1952): "On the application of servomechanism theory in the study of production control," *Econometrica 20*(2), 247–268.

Taylor, J. B. (1993): "Discretion versus policy rules in practice," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 39*, 195–214.

Tizard, R. (1956): "Note on initial conditions in the solution of linear differential equations with constant coefficients," *Econometrica 24*(2), 192–197.

Turnovsky, S. J. (1973): "Optimal stabilization policies for deterministic and stochastic linear economic systems," *The Review of Economic Studies 40*(1), 79–95.

Turnovsky, S. J. (2011): "Stabilization theory and policy: 50 years after the Phillips curve," *Economica 78*(309), 67–88.

安井 琢磨（1948）:「経済的均衡の動学的安定条件」『季刊経済思潮』（9），1–30。

要旨: 本稿ではフィリップスが提示した安定化政策を含む乗数 · 加速度モデルにラプラス変換による基礎付けを与え，比較静学の観点から安定化政策の効果を明らかにするとともにその動学的安定条件を導出した。ラプラス変換により乗数 · 加速度経済を表す微分方程式を複素領域の代数方程式に変換し，経済変数間の伝達関数を定義した。独立需要の外生的ショックとフィリップス型安定化政策の実施による総産出量の均衡水準の影響について比較静学的に考察し，動学的安定のための必要十分条件をフルヴィッツの定理に基づき示した。

キーワード: 安定化政策，乗数 · 加速度モデル，伝達関数，ラプラス変換