Title	行列の固有値と経済動学
Sub Title	The eigenvalues of matrices and economic dynamics
Author	尾崎, 裕之(Ozaki, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2015
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.108, No.1 (2015. 4) ,p.201- 233
JaLC DOI	10.14991/001.20150401-0201
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20150401-0201

「三田学会雑誌」108 巻 1 号（2015 年 4 月）

解　説

行列の固有値と経済動学

尾崎裕之*

1　はじめに

数学の一分野に「線形代数」というものがあり，そこで中心的な役割を果たすのが「行列」である。正方行列という特別な行列には，「固有値」と呼ばれるものが存在する。以下で見るように，固有値の定義は直観的には非常に分かりにくいものである。ところが，経済モデルを行列を用いて表現したとき，その経済モデルの長期的な趨勢（経済成長，景気循環，定常状態の安定性，など）を決定するのが行列の固有値なのである。本稿の目的は，行列の知識を全く持たない読者を想定し，行列の定義から話を始め，なぜ固有値が経済動学と呼ばれるマクロ経済学の分野で重要な役割を果たしているのかを，行列の対角化や支配固有値の概念を用いて自己完結的に解説することにある。また，第 2 節は，「線形代数入門」としても読めるように書いた。

なお，証明については，簡単で，かつ理解を助けると判断した場合に限ってそれを与えることにした。その他の証明は，第 5 節で挙げた文献などを参照してほしい。定訳が定まっていないものや，単に筆者がそれを知らない場合については，英語表記を付した。

匿名のチェッカーの方には，非常に丁寧に本稿をお読みいただき，また，貴重なコメントをお寄せいただいた。ここに記して感謝する。本稿が誤りを含んでいるとは到底思えないが，万に一つそうであった場合，責任のすべてが筆者に帰すことは言うまでもない。

*　慶應義塾大学経済学部

2　線形代数の基礎[1]

線形代数は「線形性」と呼ばれる代数構造を持つ数学的対象の分析を行う数学の一分野である。線形性のもとでは話が非常に簡単になることが多く，経済学でもそれを仮定することが多い。本節では，線形代数の基礎を概観する。

2.1　ベクトルと行列

$a_{11}, a_{12}, \ldots$ 等を実数とするとき

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

というように，実数を長方形，あるいは，正方形に配置したものを「行列」と呼ぶ。横に並んだ実数列を「行」といい，縦に並んだ実数列を「列」という。したがって上の行列は「2 行 3 列の行列」となる。簡単に「2×3 行列」と言ったりもする。このように，行列は大文字で表すことが多い。また，a_{ij} を「(i, j) 要素」と呼ぶが，i は a_{ij} が所属する行の番号を，j は a_{ij} が所属する列の番号をそれぞれ示している。行列 A を $[a_{ij}]$ と書くこともある。特に，行の数と列の数が同じであるような

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

の形の行列を「(2×2) 正方行列」，さらに，正方行列で，(i, i) 要素（「対角要素」）以外の要素が 0 であるような行列を「対角行列」と呼ぶ。対角要素がすべて 1 であるような対角行列を「単位行列」といい，I で表す。行の数（同時に，列の数）が n であるときに I_n と書くこともある。例えば

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

また，1 つの行，または，列だけからなる行列を「ベクトル」という。例えば

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

（1）　線形代数についての基礎知識を持つ読者は，本節を読み飛ばしてしまっても全く構わない。

は「行ベクトル」の例であり，

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

は「列ベクトル」の例である。このように，ベクトルはボールドフェイス（太字）で書くことにする。実数すべてからなる集合を $\mathbb{R}$ で表す。ベクトルは，その形（行ベクトルか，列ベクトルか）を無視すると $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ （$\mathbb{R}$ を n 回かけた直積空間[(2)]。「n 次元ユークリッド空間」と呼ばれる）の要素とみなすことができるが，その場合「n 次元ベクトル」といい，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ と書いたりする。

2.2　行列の演算

（以下のことは，行列の特別な場合であるベクトルについても同様に当てはまる。）2 つの行列 $[a_{ij}]$ と $[b_{ij}]$ は，（1）かたち（行の数，および，列の数）が等しい，（2）$(\forall i, j)$ $a_{ij} = b_{ij}$ の 2 つの条件を共に満たすときに「等しい」と定義する[(3)]。$m \times n$ 行列 A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

が与えられたとき，(i, j) 要素として a_{ji} を持つ $n \times m$ 行列を A の「転置行列」と呼び，A' と書く。すなわち

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

（転置行列のことを ${}^{T}A$，${}^{t}A$ などと書く場合もある。）明らかに，行（列）ベクトルの転置行列は，列（行）ベクトルになり，一般の行列について，$(A')' = A$ が成立する。

（2）　直積空間とは，例えば，$\mathbb{R}^3 = \{(c_1, c_2, c_3) \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ のように定義される。なお，ここで用いた “×” は，直積を表す特別な記号である。

（3）　記号 $\forall$ は，「すべての i と j について以下が成立する」を意味する。

行列 A と実数 c が与えられたとき，実数による行列の「スカラー倍」を cA と書き，次で定義する。

$$cA = Ac = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

同型の 2 つの行列 A と B が与えられたとき，A と B の「和」を $A+B$ と書き，次で定義する。

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

行列の和については，（それが定義できるときには）明らかに次が成り立つ。

定理 1. 行列 A と B は同型であるとする。すると次が成立する。

(1) $A+B=B+A$ （交換法則）

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ （結合法則）

次に行列の積を定義するが，これには少し注意が必要である。$l\times m$ 行列 C と $m\times n$ 行列 A が与えられたとき，行列 C と 行列 A の「積」（順番にも意味がある）を CA と書き，次で定義する。[4]

$$CA = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(4) 以下の定義で，例えば，$\sum_{k=1}^{m} c_{1k}a_{k1}$ は $c_{11}a_{11}+c_{12}a_{21}+\cdots+c_{1m}a_{m1}$ を表している。

$$
= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} c_{1k}a_{k1} & \sum_{k=1}^{m} c_{1k}a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^{m} c_{2k}a_{k1} & \sum_{k=1}^{m} c_{2k}a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{2k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} c_{lk}a_{k1} & \sum_{k=1}^{m} c_{lk}a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{lk}a_{kn} \end{bmatrix}
$$

すなわち，行列 C の列の数 (m) と行列 A の行の数 (m) が等しいときにだけ積 CA を定義することができて，積は $l \times n$ 行列になる。

次に, ベクトルを使った行列の積の表現を考える。今, 行列 C の第 i 行ベクトル $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$ を $\boldsymbol{c}_i'$ と書くことにする。（ここでは，$\boldsymbol{c}_i$ は列ベクトルであることにして，それを転置したものが第 i 行ベクトルに等しくなっている，といった書き方をしている。このように，以下では特に断らない限り，すべてのベクトルは，列ベクトルとする。）このようにすると，$C' = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l]$ となる。他方で，$\boldsymbol{a}_j$ を A の第 j 列ベクトルとすると，$A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ と書け，さらに

$$
CA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c}_l'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{c}_l'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_l'\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}
$$

となる。この行列の (i,j) 要素は $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{a}_j$ であるが，これは $1 \times m$ 行列と $m \times 1$ 行列の積であるから定義できて，しかも実数となる。この実数のことを，ベクトル $\boldsymbol{c}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ の「内積」と呼ぶ。つまり，行列の積の (i,j) 要素は，前の行列の第 i 行と後の行列の第 j 列の内積となる。（内積については，$\langle \boldsymbol{c}_i , \boldsymbol{a}_j \rangle$，$\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$，等と書く場合も多い。）行列の積については，次が成立する。（これは直接計算で簡単に確認できる。）

定理 2. （右辺か左辺，いずれかの）行列の積が定義できるときには，次が成立する。

（1） $(AB)' = B'A'$

（2） $(AB)C = A(BC)$ （結合法則）

（3） $A(B+C) = AB + AC$ および
$(A+B)C = AC + BC$ （分配法則）

しかし，行列の積については，交換法則は成立しない。つまり，一般的には $AB \neq BA$ である。左辺が定義できたとしても右辺が定義できる保証はなく，仮に両辺とも定義できたとしてもそれが

等しくなる保証は全くない。

2.3　部分空間と 1 次独立

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が次の 2 つの条件を満たすとき，W を $\mathbb{R}^n$ の「(線形）部分空間」という。

$$(1)\quad (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W) \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$$
$$(2)\quad (\forall c \in \mathbb{R})(\forall \boldsymbol{x} \in W) \quad c\boldsymbol{x} \in W$$

つまり，n 次元ベクトルの集合で，和とスカラー倍について「閉じている」もののことを部分空間と呼ぶ。（例えば，集合 $\{\,(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0 \;\text{ かつ }\; x_2 \geq 0\,\}$ は，$\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない。）k をある自然数とする。$(\forall i = 1, \ldots, k)$ $c_i \in \mathbb{R}$，$\boldsymbol{x}^i \in \mathbb{R}^n$ のとき（すなわち，k 個のスカラー（実数）と k 個の n 次元ベクトルが与えられたとき）

$$c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k = \sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{x}^i \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

を k 個のベクトルからなる集合 $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ の「線形結合」という。また，$\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ から係数を変えて作ることのできるすべての線形結合の集合，すなわち

$$\left\{\, c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k \,\middle|\, (\forall k) \;\; c_k \in \mathbb{R} \,\right\}$$

を $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ によって「生成された空間」または「張られた空間」という。n 次元ベクトルからなる任意の集合によって張られた空間は，$\mathbb{R}^n$ の部分空間になることが簡単に確認できる。

k 個の n 次元ベクトルからなる集合 $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ は，次の条件を満たすときに「一次独立」であるという[5]。

$$c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{0} \;\;\Rightarrow\;\; c_1 = \cdots = c_k = 0$$

ここで，$\boldsymbol{0}$ は $(0, 0, \ldots, 0)'$ で定義されるベクトルで「ゼロ・ベクトル」と呼ばれる。すなわち，その集合で線形結合を作ってゼロ・ベクトルにできるのはすべての係数をゼロにしたときだけであるならば，その集合は一次独立である。k 個の n 次元ベクトルからなる集合 $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ は，一次独立でないときに「一次従属」であるという。

例 1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}$ 一次従属；$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 一次独立；$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ 一次独立；$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ 一次独立；$\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$ 一次従属。

---

(5)　記号 $\Rightarrow$ は，「左が正しければ，常に右も正しい」を意味する。

ただひとつのベクトルからなる集合が一次従属となるのは，それがゼロ・ベクトルのときであり，かつ，そのときに限ることが簡単に確認できる。次の 2 つの定理は直観的で分かり易い。

定理 3. $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ が一次従属であるための必要十分条件は，その内のひとつのベクトルが他のベクトルの線形結合として表現できることである。

証明： 今，$\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ が一次従属であると仮定すると，

$$c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{0}$$

と書いたときに，少なくともある i について $c_i \neq 0$ とすることができる。一般性を欠くことなく $c_1 \neq 0$ とすると，

$$\boldsymbol{x}^1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{x}^2 - \cdots - \frac{c_k}{c_1}\boldsymbol{x}^k$$

これより必要性が従う。十分性は自明。 ■

定理 4. $\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ のとき，$\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ が一次独立ならば $k \leq n$ である。

この定理において，逆は成立しない（例 1 を参照）。

W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。n 次元ベクトルからなる集合は，一次独立で，かつ，W を生成する（張る）ときに W の「基底」と呼ばれる。後者の条件から，W の任意の要素は基底の線形結合で表せることが分かるが，実はこの表し方は一通りしかない。

定理 5. 任意のベクトルを基底の線形結合で表す仕方には一通りしかない。（つまり，そのような線形結合の係数の組み合わせは一意に定まる。）

証明： 今，$\{\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k\}$ を部分空間 W の基底とし，W のベクトル $\boldsymbol{x}$ が次の 2 通りの線形結合で表現されているとする。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k = d_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + d_k\boldsymbol{x}^k$$

ここで，$(\forall i)\ \ c_i, d_i \in \mathbb{R}$ である。（ある係数がゼロであっても構わない。）式変形によって

$$(c_1 - d_1)\boldsymbol{x}^1 + \cdots + (c_k - d_k)\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{0}$$

となるが，基底の一次独立性より，$(\forall i)\ \ c_i - d_i = 0$ となる。 ■

定理 6.　もし $\{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^k\}$ と $\{\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^l\}$ が共に部分空間 W の基底であるならば，$k=l$ である。

一般に部分空間の基底は無数に存在するが，基底を構成する要素の数は部分空間によって決まっていることがこの定理より分かる。この基底の要素の数をその部分空間の「次元」と呼び，$\dim W=k$（次元が例えば k のとき）と書いたりする。

例 2.　$\mathbb{R}^n$ は（自分自身の）部分空間になっているが，この空間の要素（すなわち，n 次元ベクトル）$\boldsymbol{e}^i$ を

$$(\forall i=1,2,\ldots,n)\quad \boldsymbol{e}^i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'$$

（ここで，1 はこのベクトルの i 番目の構成要素とする。）によって定義すると，$\{\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となっていることが簡単に確認できる。したがって，$\dim\mathbb{R}^n=n$ である。（$\mathbb{R}^n$ を「n 次元」ユークリッド空間と呼ぶのもこのためである。）

2.4　行列のランク

行列 A が与えられたとき，この行列を構成する行ベクトルの幾つか，あるいは，すべてからなる集合をすべて考え，その中で，一次独立であり，かつ，要素の数が最大であるものを見つけたとする。（集合の数が有限なので，そのような集合は，複数存在するかもしれないが，必ず見つかる。）このとき，この集合の要素の数を，行列 A の「行のランク（階数)」という。また，同様のことを列ベクトルについて行ったときに求まる数を，行列 A の「列のランク（階数)」という。

定理 7.　どのような行列についても，行のランクと列のランクは等しい。

行列 A が与えられたとき，行のランク（同時に列のランクでもある）を行列 A の「ランク（階数)」といい，$\mathrm{rank}(A)$ と書く。ランクの定義より，$m\times n$ 行列 A に対して $\mathrm{rank}(A)\le m,n$ であることが直ちに分かる。行列のランクは以下の分析で重要な役割を果たすが，この小節の残りでは，行列のランクを実際に計算する方法を解説する。先ず，次のような形をした行列を考える。

$$\begin{bmatrix} d_{11} & * & * \\ 0 & d_{22} & * \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} d_{11} & * & * & * \\ 0 & 0 & d_{23} & * \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} d_{11} & * & * & * \\ 0 & 0 & d_{23} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで，$*$ は任意の実数であり（ゼロでも構わない），$d_{ij}\neq 0$ とする。このようなかたちをした行列を「階段行列」と呼ぶ。（つまり，第 i 行ベクトルにおいて最初に登場するゼロではないエントリー（上の例での d_{ij}）に対応する列番号を j_i と書くことにすると，$i<i'\Rightarrow j_i<j_{i'}$ となっているような行列。

ただし，第 i' 行のエントリーがゼロのみである場合はこの限りではない。）例えば,

$$\begin{bmatrix} d_{11} & * & * & * \\ 0 & 0 & d_{23} & * \\ 0 & 0 & d_{33} & * \end{bmatrix}$$

は，$d_{33}=0$ でない限り，階段行列ではない。階段行列のランクはゼロ・ベクトルではない行ベクトルの数に等しくなることが定理 3 から直ぐに分かる。したがって，一般的な行列のランクを計算するには，ランクを変えない方法で行列を変換していき階段行列に到達すればよい。そこで，次の 3 つの変換を考える。(1) 2 つの行を交換する。(2) ある行をスカラー倍する。(3) ある行をスカラー倍したものを他の行に加える。このとき，次の定理を証明できる。

定理 8.　上の 3 つの変換のいずれを施しても，行列のランクは変化しない。

このように，上の 3 つの変換を施して階段行列に持ちこみランクを計算する方法（正確には，同様の方法で連立線形方程式を解く方法）を「ガウスの消去法（掃き出し法）」という。

例 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（最初のステップ）(2 行目) $-$ (1 行目) $\times 2$; (3 行目) $-$ (1 行目) $\times 3$
（次のステップ）(3 行目) $+$ (2 行目)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（最初のステップ）(2 行目) $+$ (1 行目) $\times 3$; (3 行目) $+$ (1 行目) $\times 2$
（次のステップ）(3 行目) $-$ (2 行目) $\times 4$

2.5　行列式

この小節で考える行列はすべて正方行列とする。任意の正方行列 A に対して，ひとつの実数を割り当てるルール（関数）について，このルールが満たすべき幾つかの条件（「公理」と呼ばれる）を考える。適当な幾つかの公理を設定すると，これらのすべての公理を満たすルールが存在し，しか

も，そのルールは一意に定まることが知られている。ここでは公理をひとつひとつ書くことはしないが，この公理系のもとで定まるルールのことを，行列 A の「行列式」といい，$|A|$ と書く。（具体的に $|A|$ を書き下すこともできるが，煩雑なので省略する。）2×2 行列の場合は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

であり，3×3 行列の場合は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

である。より高次の正方行列については次に述べる余因子展開を用いて行列式を簡単に計算することができる。先ず，$n \times n$ 行列 A が与えられたとき，A から第 i 行と第 j 列を除いてできる $(n-1) \times (n-1)$ 行列を M_{ij} と書くことにする。すなわち

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

となる。次に，

$$(\forall i, j) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

によって実数を定義する。（実数であるから小文字で書く方が良いかもしれないが，これは大文字を使って表現することが慣例になっている。）実数 A_{ij} を行列 A の「(i,j) 余因子」と呼ぶ。すると，次が成立する。

定理 9（余因子展開）.

$$(\forall i = 1, \ldots, m) \qquad |A| = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{（第 } i \text{ 行に関する展開）}$$

$$(\forall j = 1, \ldots, n) \qquad |A| = \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{（第 } j \text{ 列に関する展開）}$$

余因子展開定理によって 4×4 以上の行列式も次のように簡単に計算できる。

例 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 3\cdot 4 = 6$$

行列式の性質を次の定理 10 でまとめておく。主張は，行に関するかたちで述べられているが，定理 10 の（1）によって列に関しても全く同様に成り立つことが分かる。また，幾つかの主張に関しては，簡単化のために 2×2 の場合について示しているが，$n\times n$ の場合にも全く同様に成り立つ。定理 10 において，a，a'，b，b'，c，d および λ はすべて実数とする[(6)]。

定理 10.　行列式について，次が成り立つ。

（1）　$|A'| = |A|$

（2）　行列式は，各行について「線形」である：

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

（3）　2 つの行を入れ替えると，行列式の符号のみ変わる：

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

（4）　行列 A の 2 つの行が等しいならば，$|A| = 0$

（5）　ある行のスカラー倍を他の行に加えても，行列式は変化しない：

$$\begin{vmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

（6）　行ベクトルからなる集合が一次従属ならば，$|A| = 0$

（7）　行列 A と B がともに $n\times n$ ならば，$|AB| = |A||B| = |BA|$

（6）　ここでは，定理として述べているが，実は（2）や（3）が先に触れた公理の幾つかに対応している。

2.6 逆行列

前小節に引き続き，この小節で考える行列もすべて正方行列とする。$n \times n$ 行列 A について，次の条件を満たす $n \times n$ 行列 X を行列 A の「逆行列」といい，$X = A^{-1}$ と書く。

$$AX = XA = I_n$$

ここで，I_n は $n \times n$ の単位行列を表している。（以後，文脈から明らかなときは，サブスクリプト $(_n)$ を省略する。）逆行列は必ずしも存在するとは限らない。（例えば，すべての要素が 0 であるような行列（「ゼロ行列」と呼ばれる）を考えればよい。）また，もし逆行列が存在するならば，それは一意に決まる。（**証明**： $XA = I$ かつ $AY = I$ であるならば $Y = IY = (XA)Y = X(AY) = XI = X$）逆行列が存在するときにそれを求める公式があるが，それは後回しにして，最初に，逆行列が簡単に計算できる 2 つの特別な場合を考える。

例 5.　行列式が 0 でないような 2×2 行列：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ここで，$|A| = ad - bc \neq 0$ と仮定する。すると簡単な計算によって次が確認できる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例 6.　対角行列：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

余因子展開によって，$|\Lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ となることが直ぐに分かる。ここで，$|\Lambda| \neq 0$ を，すなわち，$(\forall i)\ \lambda_i \neq 0$ を仮定する。すると簡単な計算によって次が確認できる。

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

一般の正方行列 A に関しては，次のように A^{-1} を求めることができる。先ず，「余因子行列」$adj\ A$ を次のように定義する（転置に注意）。

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}'$$

すると，ここまでに述べてきたことから，次の定理が従う。

定理 11.　正方行列 A について $|A| \neq 0$ であるならば，A^{-1} が存在し，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\ A$$

逆行列には次の性質がある。

定理 12.　$n \times n$ 行列 A と B が逆行列を持つならば，次が成り立つ。

（1）　A^{-1} は逆行列を持ち，　$(A^{-1})^{-1} = A$

（2）　A' は逆行列を持ち，　$(A')^{-1} = (A^{-1})'$

（3）　AB は逆行列を持ち，　$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

証明： 定義より直ぐに従う。（3）のみ証明する。$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. 同様に，$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. したがって，定義により，$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.　■

正方行列に関するこれまでの結果をまとめると，次の重要な定理を得る。

定理 13.　$n \times n$ 行列 A について，次の 4 つの条件はすべて同値である（どの主張も，他の主張の必要十分条件になっている）。

（1）　A のすべての行（または，列）ベクトルからなる集合は一次独立である

（2）　$\mathrm{rank}(A) = n$

（3）　$|A| \neq 0$

（4）　A^{-1} が存在する

証明：（1）$\Leftrightarrow$（2）はランクの定義から直ぐに従う。（3）$\Rightarrow$（2）は，定理 10 の（6）の対偶であるから，これも直ぐに従う。（2）$\Rightarrow$（3）．行列 A のランクが n であることから，小節 2.4 で考えた

3 つの基本変換を施すことで A を次のかたちの階段行列に変換することができる。

$$\begin{bmatrix} d_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

ただし，$(\forall i)\ d_{ii} \neq 0$ である。余因子展開により，この階段行列の行列式は $d_{11}d_{22}\cdots d_{nn} \neq 0$ である。ところが，もし $|A| = 0$ であったとするならば，上の 3 つの変換を施しても行列式は 0 のままである。（定理 10 の（2）（3）（5）を参照。）これは矛盾であるから，$|A| \neq 0$ となる。（3）$\Rightarrow$（4）は定理 11 から直ぐに従う。（4）$\Rightarrow$（3）．A^{-1} が存在すると仮定すると，定理 10 の（7）から $1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$ となるので，$|A| = 0$ とはなりえない。 ■

上の定理のいずれかの（したがって，すべての）条件を満足する正方行列を「正則行列」という。また，この定理から直ちに次が従う。

定理 14. $n \times n$ 行列 A について，次の 4 つの条件はすべて同値である。

（1） A のすべての行（または，列）ベクトルからなる集合は一次従属である

（2） $\mathrm{rank}(A) < n$

（3） $|A| = 0$

（4） A^{-1} は存在しない

2.7 連立線形方程式

すべての $i = 1, \ldots, m$ と $j = 1, \ldots, n$ について，a_{ij} と b_i は与件の定数とする。n 個の未知数 $(x_1, \ldots, x_n)$ と，m 本の方程式からなる「連立線形方程式」とは

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1}$$

で表現される線型方程式のシステムを指す。今，行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{b}$ を次のように定義すると

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

式 (1) は，次のようにコンパクトに表現できる。

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

また，A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ と書くことにすると，式 (1) は次のようにも書くことができる。

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b} \tag{3}$$

以上 3 つの表現，式 (1)，(2)，(3) はすべて同じシステムを表している。特に，式 (3) は，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を n 個の m 次元ベクトルによる線形結合として表現している。以下では，連立線形方程式が与えられたときに，それを完全に「解く」ことを考える。（特に，「方程式の数 = 未知数の数，ならば解ける」というのが迷信に過ぎないことを示す。）

連立線形方程式の解には 3 通りのケースがあるが，先ずはそれを簡単な例 $(m=n=2)$ で見てみる。

例 7.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

解は $(x_1,x_2)'=(3/2,1/2)'$ と一意に定まる。また，$\mathrm{rank}(A)=2$ となっている。

例 8.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = \frac{1}{2} \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

$(x_1,x_2)'=(2x_2+1/2,x_2)'$ $(x_2\in\mathbb{R})$ という関係を満たすいかなる $(x_1,x_2)'$ も解となる。つまり，解は無数に存在する。また，$\mathrm{rank}(A)=1$ となっている。

例 9.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

解は存在しない。また，$\mathrm{rank}(A)=1$ となっている。

以上の観察を一般化する。連立線形方程式 (1)（あるいは，(2) または (3)）は，条件：

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$$

を満たすときに「整合的」であるという。ここで，$m \times (n+1)$ 行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ は次のように定義される：

$$[A, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

式 (3) より，連立線形方程式 (1) が解を持つのは，ベクトル $\boldsymbol{b}$ が行列 A の列ベクトルの線形結合として表現できるとき，あるいは，同じことであるが，ベクトル $\boldsymbol{b}$ が行列 A の列ベクトルで張られる空間に属するとき，であることが分かる。このことと，行列のランクの定義から（厳密な証明は省略するが）次の定理が従う。

定理 15.　連立線形方程式 (1) が解を持つのは，それが整合的であるときであり，かつ，そのときに限る。

この定理より，$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ のとき，連立線形方程式 (1) は解を持たないことが分かる。（$\mathrm{rank}(A) > \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ とはなりえない。）連立線形方程式 (1) が整合的であるときには，さらに次の 2 つのケースが考えられる。

定理 16.　連立線形方程式 (1) が整合的であったとする。このとき，

（1）　$\mathrm{rank}(A) = n$ であるならば，連立線形方程式 (1) の解は一意である。

（2）　$\mathrm{rank}(A) < n$ であるならば，連立線形方程式 (1) は無数の解を持つ。

証明：（1）のみ証明する。$\mathrm{rank}(A) = n$ であることから，A の列ベクトルからなる集合は，この集合で張られた空間の基底となっている。定理 5 より，基底による表現は一通りであるから，これより結果が従う。 ■

連立線形方程式の解の表現において，自由に設定できる定数のことを「任意定数」と呼ぶ。上の定理の（2）のケースでは，$n - \mathrm{rank}(A) =$ 任意定数の数，となる。

例 10.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 15x_3 = 10 \end{cases}$$

$n = 3 = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ であり，解は一意に定まる。$(x_1, x_2, x_3)' = (57, -11, -10)'$

例 11.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$n = 4 > 2 = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ であり，解は無数に存在する。また，任意定数の数は $4-2=2$ となる。

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 5x_3 + 8x_4 \\ x_2 = -1 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ここでは，x_3 と x_4 を任意定数としている。

例 12.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$n = 4 > 1 = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ であり，解は無数に存在する。また，任意定数の数は $4-1=3$ となる。

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 + 7 \\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ここでは，x_2，x_3，x_4 を任意定数としている。

例 13.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$$

$\mathrm{rank}(A) = 2 < 3 = \mathrm{rank}([A, \boldsymbol{b}])$ であり，解は存在しない。

連立線形方程式 (2) について，A が正方行列となる場合を考える。このとき，$|A| \neq 0$ ならば，$\mathrm{rank}(A) = n$ であり（定理 13），定理 16 の（1）より，解が一意に存在して

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる。$\boldsymbol{x}$ を求めるには A^{-1} を計算しなくてはならないが，次の定理によって直接 $\boldsymbol{x}$ を求めることが可能である。[7]

定理 17（クレイマー・ルール）．連立線形方程式 (2) について，A が正方行列であり $|A| \neq 0$ であるならば

$$(\forall j = 1, \ldots, n) \quad x_j = |A^j_{\boldsymbol{b}}| \,/\, |A|$$

となる。ただしここで，$A^j_{\boldsymbol{b}}$ は A の第 j 列をベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えてできる行列である。

3　固有値と固有ベクトル

以下，本稿で考える行列はすべて正方行列とする。正方行列 A と自然数 m が与えられたとする。経済学では，m が非常に大きくなったときに $A^m = AA \cdots A$（A を m 個掛けたもの）がどのような振る舞いを示すかを調べることがある。それは，後に述べるように，経済モデルを正方行列 A を用いて表現することが多く，経済の長期的な趨勢が A^m を調べることで分かることが多いからである。この分析のために必要なのが，行列の固有値とそれを用いた行列の対角化である。本節では，これらの概念を詳述する。

3.1　固有値とは何か

$n \times n$ 行列 A が与えられたとき，次の条件を満たすスカラー[8] λを行列 A の「固有値」と呼ぶ。[9]

$$(\exists \boldsymbol{x}) \quad A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \;\; \text{かつ} \;\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{4}$$

またこのとき，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を λ に対応する「固有ベクトル」と呼ぶ。$\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルであるならば，0 でないすべてのスカラー c について $c\boldsymbol{x}$ も固有ベクトルとなることが直ぐに分かる。

(7)　「定理」と呼んではいるものの，これは逆行列の計算を愚直に行っていく過程で，項のキャンセルなどが起こり，結果がシンプルな形で表現できることを示しているに過ぎない。

(8)　「スカラー」という用語については後述する。ここでは，「数字」と思って構わない。

(9)　記号 ∃ は，「以下が成立するような $\boldsymbol{x}$ が存在する」を意味する。

式 (4) を変形すると

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

となるが，これは既に見たとおり $\boldsymbol{x}$ を未知数とする連立線形方程式になっている。これが $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{6}$$

である。（**証明**：(6) が成立していないとする。すると，定理 17 の直ぐ上で述べたことから，(5) の解は一意となり，$\mathbf{0}$ 以外にはありえない。逆に，(6) が成立しているならば，(5) は明らかに整合的であるから，定理 14 と定理 16 の（2）より，解は無数に存在する。）式 (6) の左辺は（厳密な説明は省くが，行列式の定義から）λ についての n 次の多項式となり，因数分解によって式 (6) を

$$(\lambda_1 - \lambda)^{n_1}(\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_k} = 0 \tag{7}$$

と書き直すことができる。ただしここで，$i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ で，かつ $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ である。つまり，式 (7) は，式 (6) を λ についての方程式と見た場合に，$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ がその k 個の異なる解となっていることを表している。もちろん λ_i は必ずしも実数であるとは限らず，虚数[(10)]であるかもしれない。式 (6) を行列 A の「固有方程式」と呼ぶが，以上のように，スカラー λ が 正方行列 A の固有値であるための必要十分条件は，それが A の固有方程式の解となっていることである。また，A の固有値は，固有方程式を式 (7) のかたちに書き直したときの λ_i のいずれかと等しくなっているが，n_i をその固有値の「代数的多重度（algebraic multiplicity）」と呼ぶ。$n \times n$ 行列の固有値の数は当然 n を超えないが，ある固有値の代数的多重度が 2 以上のときには n を下回る。

スカラーに関する注意： 固有値は，数の範囲を複素数にまで拡張することによって初めてその存在を保証できる。「複素数」とは，$a + bi$（ただし，a, b は実数，i は $i^2 = -1$ となるような「想像上の」数で，「虚数単位」と呼ばれる）のかたちで書かれる数であり，$b \neq 0$ のとき，特に「虚数」という。固有値が複素数になる場合も許すことになるので，当然，固有ベクトルの要素も複素数になりうる。以後，「スカラー」という言葉で複素数（つまり，実数であるかまたは虚数であるもの）を表すことにする。

例 14.　行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

（10） 後述。

と定義すると，固有方程式を解くことによって $\lambda = 1, 4$ となることが分かる（それぞれの固有値の代数的多重度は 1）。$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを求めるには，

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

を解いて x_1 と x_2 を計算すればよい。すると，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{ただし} \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

となる[11]。同様に $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ただし} \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

となる。

正方行列で，特に $A' = A$ となる行列を「対称行列」と呼ぶ。対称行列の固有値については次の定理がある[12]。

定理 18. 実対称行列の固有値はすべて実数である。

さらに，便利な結果として次の定理がある。

定理 19. A を n 次正方行列とし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を（ダブりも許した）A の固有値とする。このとき次が成立する。

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

行列 A とその任意の固有値 λ が与えられたとき

$$W(\lambda) = \{\, \boldsymbol{x} \in C^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \,\}$$

---

(11) 一般に，集合 A, B が与えられたとき，A には含まれるが B には含まれないものからなる集合を $A\backslash B$ と書く。

(12) スカラーとして複素数を許すことにしたため，行列の要素が複素数である場合も当然起こりうる。したがって，要素がすべて実数であるような行列は，例えば，<u>実</u>対称行列と書くべきであろう。実際，次の定理は実対称行列にしか適用されない。しかし本稿に登場する行列はすべてその要素が実数であるものだけであるので，いちいち「実」をつけず，定理の主張が実行列について成立する場合にのみ，「実」を明記することにする。

を固有値 λ の「固有空間」と呼ぶ。ここで，C^n は n 次元複素空間（あるいは，n 次元スカラー空間）を表している。固有空間は，λ に対応するすべての固有ベクトルとゼロベクトルからなる集合であるが，部分空間になっていることを簡単に確認することができる。 部分空間であるから次元を定義することができて，この次元のことを固有値 λ の「幾何的多重度（geometric multiplicity）」という。また，そのすべての固有値について代数的多重度と幾何的多重度が等しくなっているような行列を「完全な行列（non-defective matrix）」と呼ぶ。完全な行列については，次の定理が重要である。

定理 20.　$n \times n$ 行列 A が与えられたとする。このとき，A が完全な行列であるための必要十分条件は，C^n に A の固有ベクトルだけからなる基底が存在することである。さらに，A が完全であるとき，$\{\boldsymbol{x}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_{n_i}}\}$ を $W(\lambda_i)$ の基底とすると（ただし，$n_i = \dim W(\lambda_i)$ ），

$$\{\boldsymbol{x}_{1_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1_{n_1}}; \boldsymbol{x}_{2_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{2_{n_2}}; \cdots\cdots\cdots; \boldsymbol{x}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k_{n_k}}\}$$

は C^n の基底となる（k は A の異なる固有値の数）。

さらに次の定理を証明できる。

定理 21.　k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が，それぞれ行列 A の異なる固有値に対応している固有ベクトルであったとするならば，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ は一次独立である。

この定理より，n 個の異なる固有値を持つ $n \times n$ 行列は，C^n の基底となる固有ベクトルを持つため，定理 20 によって完全な行列であることが分かる[(13)]。完全な行列はこのような行列以外にも数多く存在する。実際，完全な行列はすべての行列からなる集合の中で「稠密[(14)]」であることを証明できる。

例 15.　行列 B を

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

によって定義する。すると，B の固有値は $\lambda = 3$ である（この固有値の代数的多重度は 2）。一方，$\dim W(3) = 1$ となることが分かるので，この行列は完全ではない。

（13） 当然，一次独立などの概念を複素空間へ拡張して議論する必要があるが，ここではそれが可能であることを指摘するに止め，詳細には立ち入らない。

（14） 直観的に言うと，どのような完全ではない行列でも，その任意の要素をほんのわずかだけ変化させることによって，完全な行列にすることができる，という意味。

例 16.　行列 C を

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

によって定義する。すると，C の固有値は $\lambda = 3$ である（この固有値の代数的多重度は 2)。一方，$\dim W(3) = 2$ となることが分かるので，この行列は完全である。

3.2　行列の対角化

$n \times n$ 正方行列で，しかも完全な行列 A が与えられたとする。このとき，定理 20 から，A の固有ベクトルだけからなる C^n の基底が存在し，しかもそれは次のように表現できることが分かる。すなわち，

$$\{\boldsymbol{x}_{1_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1_{n_1}}; \boldsymbol{x}_{2_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{2_{n_2}}; \cdots\cdots\cdots; \boldsymbol{x}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k_{n_k}}\}$$

ただしここで，A は異なる k 個の固有値を持ち，固有値 λ_i の多重度（= 代数的多重度 = 幾何的多重度）は n_i であり，$\{\boldsymbol{x}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{n_i}}\}$ が $W(\lambda_i)$ の基底を構成していると仮定している。今，この基底を使って次のように $n \times n$ 正方行列 Q を定義する。

$$Q = \left[\boldsymbol{x}_{1_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{1_{n_1}}, \boldsymbol{x}_{2_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{2_{n_2}}, \cdots\cdots\cdots, \boldsymbol{x}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{k_{n_k}}\right]$$

つまり，Q は A の各固有ベクトルをその各列とする行列である。次に，A の各固有値を対角要素に持つ $n \times n$ 対角行列 $\varLambda$ を定義する。

$$\varLambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

行列 Q と行列 Λ は，対応する固有ベクトルと固有値が同じ列に配置されるように構成されている。この 2 つの行列の作り方から

$$\begin{aligned} Q\Lambda &= \left[\lambda_1 \boldsymbol{x}_{1_1}, \cdots, \lambda_1 \boldsymbol{x}_{1_{n_1}}, \lambda_2 \boldsymbol{x}_{2_1}, \cdots, \lambda_2 \boldsymbol{x}_{2_{n_2}}, \cdots\cdots\cdots, \lambda_k \boldsymbol{x}_{k_1}, \cdots, \lambda_k \boldsymbol{x}_{k_{n_k}}\right] \\ &= \left[A\boldsymbol{x}_{1_1}, \cdots, A\boldsymbol{x}_{1_{n_1}}, A\boldsymbol{x}_{2_1}, \cdots, A\boldsymbol{x}_{2_{n_2}}, \cdots\cdots\cdots, A\boldsymbol{x}_{k_1}, \cdots, A\boldsymbol{x}_{k_{n_k}}\right] \\ &= AQ \end{aligned}$$

となる。1 行目と 3 行目は行列の積の定義から，2 行目は固有値の定義から，それぞれ従う。行列 Q に逆行列が存在することは明らかなので

$$Q^{-1}AQ = \Lambda$$

となることが分かる。つまり，前後から 2 つの行列（今の場合は，固有ベクトルで作った行列とその逆行列）を掛けることによって，行列 A をその固有値を対角要素に持つ対角行列に変換したわけである。このことを，行列 A を「対角化する」という。以上のことは，行列が完全であるならば必ず対角化できるということを示している。実は，逆も言える。

定理 22. 行列が対角化できるための必要十分条件は，その行列が完全であることである。

対称行列の対角化については次の定理がある。

定理 23. A を $n \times n$ の実対称行列とする。このとき，$P^{-1} = P'$ を満たす $n \times n$ の正則行列 P を適当に選んで

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とするようにできる。ただし，λ_i は行列 A の（ダブりも許した）すべての固有値である。

定理 18 から，定理 23 における固有値はすべて実数である。また，定理 23 にあるような $P^{-1} = P'$ となる行列を「直交行列」と呼ぶ。

例 17.　行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

によって定義すると，これは完全な行列である。（例 14 と，定理 21 の直後の 2 行にわたる注意を参照。）また，これを対角化する行列，つまり，上で構成した行列 Q（のひとつ）は

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。（再び，例 14 を参照。）このとき，実際に $Q^{-1}AQ = \Lambda$ となることが容易に確認できる。

$n \times n$ 行列 A が完全な行列であったとする。すると，これまでに述べてきたことから，正則行列 Q と固有値を対角要素に持つ対角行列 Λ が存在して $A = Q\Lambda Q^{-1}$ とできる。したがって

$$\begin{aligned} A^m &= (Q\Lambda Q^{-1})^m = (Q\Lambda Q^{-1})\cdots(Q\Lambda Q^{-1}) \quad (Q\Lambda Q^{-1} \text{ を } m \text{ 個掛けたもの}) \\ &= Q\Lambda^m Q^{-1} \\ &= Q \begin{bmatrix} (\lambda_{1_1})^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_{1_2})^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_{k_{n_k}})^m \end{bmatrix} Q^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

が成立する。ただしここで，2 行目は行列の積の結合法則（定理 2 の（2））と逆行列の定義から，3 行目は対角行列に行列の積の定義を素直に適用することにより従う。

「スカラーに関する注意」の項で述べたことを念頭に，複素数であるかもしれない任意の固有値 λ を $\lambda = a + bi$ と書くとき，λ の「絶対値」を $|\lambda|$ と記し，$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ によって定義する。複素数 λ を，a を x 軸で測り，b を y 軸で測った座標平面上の点としてイメージすると，$|\lambda|$ は，原点とその点との間の距離を示していることになる。したがって，数の範囲を複素数に拡張したとしても，絶対値が小さくなるにつれ，その数自身も小さくなると解釈でき，絶対値がゼロになると，その数もゼロとなる。

今述べたことと，（ここでは証明はしないが）複素数の絶対値の公式：$|\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1||\lambda_2|$ を使う[15]と，式（8）が主張していることは，

（15）　当然，複素数の「積」を定義しなくてはならないが，ここでは省略する。

$$(\forall i)\ \ |\lambda_i| < 1 \quad \Rightarrow \quad A^m \to 0 \ \ (m \to \infty)$$

であることが分かる。ただし，ここで，0 はゼロ行列であり，⇒ の右側は，m が無限大に発散するにつれて，A^m が限りなくゼロ行列に近づいていくことを意味している。つまり，m が増大するときの行列 A^m の振る舞いは，A の固有値の大きさに依存して決まる。

3.3　非負行列と支配固有値

ベクトル $\boldsymbol{x}$ の要素がすべて非負（ゼロ以上）であるときに $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$，また，行列 A の要素がすべて非負であるときに $A \geq 0$ と書くことにする。行列 A は，$A \geq 0$ を満たすときに「非負行列」と呼ばれる。また，行列 A に逆行列が存在し，かつ，$A^{-1} \geq 0$ であるときに，行列 A は「非負逆転可能」であるという。

定理 24（フロベニウスの定理）. A を非負行列とする。このとき，A の非負[16]の固有値（$\lambda(A)$ と書く）で，任意の他の固有値 μ に対して，$|\mu| \leq \lambda(A)$ を満たすものが存在する。また，$\lambda(A)$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ で，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ となるものが存在する。さらに，ρ を実数とするとき，行列 $\rho I - A$ が非負逆転可能であるための必要十分条件は，$\rho > \lambda(A)$ である。

明らかに，$|\lambda(A)| = \lambda(A)$ であり，前小節で述べた複素数の絶対値の定義より，$\lambda(A)$ は，もっとも "大きい" 固有値と見做すことができる。固有値 $\lambda(A)$ を非負行列 A の「支配固有値（dominant eigenvalue)」あるいは「フロベニウス根」と呼ぶ。支配固有値は，以下で見るように，経済動学を分析する上で欠かせない概念であり，その存在を保証するフロベニウスの定理は非常に重要である。

4　経済学への応用

4.1　投入産出モデル à la レオンティエフ

今，n 個の産業からなる経済を考える。第 i 産業 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は，第 i 財を生産するものとするが，第 i 財の生産にあたっては他の産業で生産された第 j 財 $(j \neq i)$，および，第 i 財を生産要素として投入する。そこで次のように定義する。a_{ij}：第 j 財 1 単位を生産するのに必要とされる第 i 財の単位数。（固定されていると仮定する。）x_i：第 i 財の総産出量。d_i：第 i 財に対する家計による消費需要，あるいは，最終需要（生産に用いられるため以外の需要）。この経済にとって，a_{ij} と d_i は与えられているものとする。つまり，これらは「外生変数[17]」である。するとこの経済の「均衡産出量」x_i は次の連立線形方程式を満たしていなければならない：

(16) 複素数に正負の概念はないので，「非負」と言った段階で，それが実数であることを意味する。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

ここで，左辺のベクトルの第 i 要素は第 i 財の総供給量，右辺の（まとめて得られる）ベクトルの第 i 要素は第 i 財の総需要量になっている。これをコンパクトに表現すると

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \tag{9}$$

となる。各 a_{ij} のことを「投入係数」，行列 A を「投入係数行列」と呼ぶ。その定義に沿うように，$A \geq 0$ と仮定する。上の方程式をさらに書き直すと

$$(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \tag{10}$$

となる。したがって，この経済に均衡産出量が存在し，かつ，それが一意に決まるためには，言い換えると，方程式（10）に一意に解が存在するためには，第 2.7 節で述べたことから $|I - A| \neq 0$ でなければならないが，実は今の文脈では，それだけでは十分ではない。というのも，産出量はその経済的意味から言って明らかに非負でなければならないからである。もし，$|I - A| \neq 0$ が成立し，しかも，その逆行列が $(I - A)^{-1} \geq 0$ を満たせば（$\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$ と仮定しても構わないから）

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$$

となり，どのような最終需要 $\boldsymbol{d}$ に対しても，一意に決まる均衡産出量の存在が保証できる。このように，$I - A$ が非負逆転可能となるような投入係数行列 A を持つ経済を「生産的な」経済と呼ぶ。つまり，生産的な経済では，どのような最終需要に対してもそれを充足する均衡産出量が一意に決まる。以下では，経済が生産的となるための十分条件を探ることにする。

任意の自然数 m について，次が成立する。

$$\begin{aligned} &(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^m) \\ &= I + A + A^2 + \cdots + A^m - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{m+1}) \\ &= I - A^{m+1} \end{aligned}$$

これから，もし m を限りなく大きくしていったときに $A^m \to 0$ となるならば，

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots \geq 0$$

（17）「外生変数」とは，当該モデルの外側で決められ，他の変数（今の場合は x_i）から一切の影響を受けない変数を指す。他方，外生変数が与えられたときに，モデルの内側で決定される変数（今の場合は x_i）を「内生変数」と呼ぶ。

となることが分かる。（それが非負となることは，$A \geq 0$ から従う。）さらに，第 3.2 節の最後で調べたことから，$A^m \to 0$ となるための十分条件は A のすべての固有値の絶対値が 1 よりも厳密に小さくなっていることである[18]。まとめると，固有値の絶対値がすべて 1 よりも小さいような投入係数行列を持つ経済は必ず生産的であることが分かった！

例 18.　投入係数行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

で与えられている 3 部門からなる経済を考える。すると，A は 3 つの異なる固有値を持ち，それぞれ $\lambda = 1/4, 1/2, 3/4$ となる。よって，この経済は生産的である。

4.2　斉一成長モデル à la フォン・ノイマン[19]

前小節では，生産と消費のタイミングについては無視していた。一方，時間の概念をモデルに導入し，今期生産された財は，来期の生産のための投入物と来期の消費に使われるといったタイムラグを考えることは自然であろう。すると，前小節のモデル（9）は次のように書き替えられる。

$$\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t+1) + \boldsymbol{d}(t+1) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

ただしここで，例えば $\boldsymbol{x}(t)$ は，時間 t に依存して決まる産出量ベクトルを表している。

今，すべての産業で，同一の成長率 γ で成長が実現することを考えてみよう。すなわち，次が成立している状況である。

$$(\forall i = 1, 2, \ldots, n)(\forall t = 0, 1, 2, \ldots) \quad x_i(t+1) = \gamma x_i(t) \quad \text{かつ} \quad d_i(t+1) = \gamma d_i(t) \tag{12}$$

ここでは，プラス成長を考えたいので，$\gamma > 1$ を仮定する。このとき，経済は「斉一成長」を実現している，という。では，いったいどのような条件のもとで，経済は斉一成長を実現することができるのだろうか。$\rho = 1/\gamma$ と定義して，式（11）と式（12）をまとめると，

$$(\rho I - A)\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{d}(t) \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

となり，さらに，式（12）を見ると，この式は

$$(\rho I - A)\,\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{d}(0)$$

（18）フロベニウスの定理（定理 24）を援用すると，このことは A の支配固有値（その存在は $A \geq 0$ であることから同定理によって保障されている）が 1 よりも厳密に小さいことと同値である。

（19）本小節は，二階堂（1984），pp.128–129 を参考にしている。

が成立していると，常に成立することが直ぐに分かる。フロベニウスの定理（定理 24）によれば，行列 $\rho I - A$ が非負逆転可能であるための必要十分条件は，$\rho > \lambda(A)$ であるから，この条件が満たされるならば，任意の $\boldsymbol{d}(0) \geq 0$ に対して，$\boldsymbol{x}(0) \geq 0$ となる解が一意に存在する。すなわち，

$$\gamma\lambda(A) < 1$$

であるならば，行列 A で表現される経済は，任意の $\boldsymbol{d}(0)$ から始まり，成長率が γ であるような斉一成長を実現できることが分かった！

4.3　連立線形微分方程式による経済モデル[20]

現在の理論経済学（特にマクロ経済学）では，前小節で見たような，時間の入った経済モデルを分析することが当たり前になっている。フォン・ノイマンのモデルでは，時間は離散的であったが（第 0 期，第 1 期，第 2 期，というように），時間を（現実がそうであるように）連続なものとして扱うことも非常に多い。その場合，経済諸変数の時間にともなう動きを連立微分方程式と呼ばれるもので表し，その方程式の解の軌跡が，我々が日々実際に観察している経済諸変数の動きを説明していると解釈する。行列の固有値は，ここでも非常に重要な役割を果たしている。

経済諸変数は時間に依存して変化するものとし，これを時間の関数からなるベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))'$ $(t \in [0, +\infty))$ で表す。今，$i = 1, 2, \ldots, n$ とし，$\dot{x}_i(t)$ を，時刻 t において時間が少しだけ経過したときの x の変化率で，「少しだけ」が限りなく 0 に近づいていったときのその極限と定義する。これを時刻 t における関数 x_i の「時間微分」という。（正確な定義は敢えて書かない。）時間微分からなるベクトルを $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t))'$ $(t \in [0, +\infty))$ と書く。ある任意の $n \times n$ 正方行列 A と，ある任意のベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{13}$$

を初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ の連立線形微分方程式と呼び，これを満たす（値として n 次元ベクトルをとる，時間 t の）関数 $\boldsymbol{x}$ をその解と呼ぶ。

行列 A は，経済諸変数が，お互いに干渉しあいながらどのように変化していくかを記述しており，ここでは経済モデルそのものと考えることができる。以下では，簡単化のため，A は 2×2 正方行列とし，実際にこの問題を解いてみる。まず，時間 t の関数 $a_0(t)$ と $a_1(t)$ を次のように求める。行列 At（A のすべての要素を t 倍したもの，スカラー倍）の固有値を λ_1，λ_2 とし，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ と仮定する。（すなわち，それぞれの固有値の代数的多重度を 1 と仮定する。固有値の代数的多重度が 2 の場合には，少し異なることをしなければならないが，ここでは説明しない。）その上で，次の連立方程式を a_0 と a_1 に

（20）本小節は，Brock and Malliaris（1989, Chapter 2, Section 4）を参考にしている。

ついて解く。(λ_1, λ_2 は t に依存するので，a_0, a_1 は t の関数となる。)

$$e^{\lambda_1} = a_0 + a_1\lambda_1 \quad \text{かつ} \quad e^{\lambda_2} = a_0 + a_1\lambda_2$$

ただしここで，$e = 2.718\ldots$ はネピア数と呼ばれるある無理数（循環しない無限小数）である。

定理 25. 連立線形微分方程式 (13) の解は次で与えられる。

$$\boldsymbol{x}(t) = (a_0(t)I + a_1(t)At)\,\boldsymbol{x}_0$$

例 19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ として, (13) を解く。行列 At の固有値は, 明らかに $2t$ と $-3t$ で, 2 つは異なっている。上の定理に従って, 愚直に計算すると, $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$ となる。指数関数の微分と，合成関数の微分の公式（チェイン・ルール）を知っていると，実際にこれが (13) の解となっていることが簡単に確認できる。(実はこの問題は，実質的には完全に独立な 2 つの簡単な微分方程式を解く問題になっており，少しの積分の知識を持っていると，定理に訴えることなく，解は簡単に求まる。)

上の例では，$x_1(t)$ は無限に発散していき，$x_2(t)$ は 0 に収束していく。しかし，固有値によっては解の様相は一変する。

例 20. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ として，(13) を解く。行列 At の固有値は，it と $-it$ であり，2 つは異なっている。ただしここで，i は既に説明した虚数単位である。再び上の定理に従って，愚直に計算すると（と言っても，今回は複素数の計算が必要になるが，ここでは説明しない。特に,「オイラーの公式」と呼ばれる，世にも美しい公式を用いる。)，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$ となる。

この例では，解は三角関数のグラフを想起すれば分かるように，発散したり，ある値に収束することはなく，循環を繰り返す。関数 $\boldsymbol{x}(t)$ が（例えば，GDP のような）経済変数を表しているのならば，この例にあるような行列 A で表現される経済では，景気循環が起こることが示された！

4.4　不確実性と経済成長

筆者の専門は不確実性をめぐる経済分析であるが，ここでも固有値は重要な役割を演じる。今，不確実性を表現するひとつのアプローチとして，以下のようなモデルを考える。起こりうるすべての状態を集めてきて，それを集合 $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ と書くことにする。整数 n は状態の数であり，$s_1, s_2, s_3, \ldots$ は，例えば，それぞれ，「晴れ」，「雨」，「雪」，などを表している。今期の状態が i であったとき，来期の状態が j となる確率を p_{ij} と書く $(i, j=1, 2, \ldots, n)$。このとき，$n\times n$ 行列 P を次で定義する。

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

確率の定義から，当然，$(\forall i)\ \ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$ である。行列 P を「マルコフ・チェイン」と呼ぶ。行列 P の支配固有値は $\lambda(P)=1$ となる。（ここでは，その理由は説明しない。）

第 4.2 節では，各部門の生産物の成長率を一定と仮定したが，ここでは，各部門の生産物を，「各状態における生産物」と読み替え，しかも，その生産物の成長率が状態により異なると仮定する。これは，経済の状態が異なれば，当然生産物の成長率も異なると考えるのが自然だからである。そこで，状態 s_i $(i=1, \ldots, n)$ における成長率を γ_i と書くことにし，第 t 期 $(t=0, 1, 2, \ldots)$ の，状態 s_i における消費を $c_i(t)$ で，生産物を $x_i(t)$ で，それぞれ表すことにする。すると，実現可能な消費と生産物は，すべての $t=0, 1, 2, \ldots$ について，次の関係式を満たさなければならない。

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} \tag{14}$$

この式の意味するところは，次のようなものである。今期（第 t 期）期首の状態が s_i であり，生産物が $x_i(t)$ であったとき，生産活動により，今期利用可能な生産物は瞬時に $\gamma_s x_s(t)$ となる。これから，来期期首の生産物（投資）$x_i(t+1)$ を除いたものが，今期，消費のために利用できる。今期の消費を 1 単位諦めることにより，来期期首の生産物が 1 単位増加するという 1 対 1 関係がつねに成立している経済を「1 セクター・モデル」と呼ぶ。[(21)]

（21）ここでは詳細には全く触れないが，宇沢弘文東大名誉教授の代表的貢献のひとつは，2 セクター成長モデルの開発である。

代表的な消費者がひとりいるとし，彼女は次のような効用関数を持っているとする。

$$E\left[u(c(0))+\beta u(c(1))+\beta^2 u(c(2))+\cdots\right] \tag{15}$$

ここで，u は $[0,+\infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数で，ある期（例えば，第 t 期）に消費を行ったとき，その消費 $c(t)$ からその期に得られる一時的な効用 $u(c(t))$ を示す関数（フェリシティー関数と呼ばれる）であり，$\beta \in (0,1)$ は，将来の一時的な効用を現在の効用に割り引いて評価するために消費者が用いる「割引因子」である。つまり，消費者は，第 0 期に消費の無限の流列から得られる総効用を計算していると考える。ここでは簡単化のため，θ を $\theta \in (0,1)$ を満たす定数とし，u は $u(c)=c^{1-\theta}/(1-\theta)$ と書けると仮定する。定数 θ は「アロー・プラットの相対的危険回避度」と呼ばれ，これが大きければ大きいほど，消費者が危険（消費の変動）を避けようとする度合いが強まる。一般に，$u(c(t))$ はその期の状態（正確には，その期に至るまでの状態の履歴）によって変化するため，総効用を実数として表現するためには，不確実性を何らかの方法で「集計」し，実数に変換しなければならない。このための方法のひとつが「期待値」をとることであり，これは，それぞれの状態における $u(c(t))$ の値に，その状態が実現する確率を掛け，それらすべてを合計することによって求まる。この演算を行っていることを示しているのが，式 (15) 冒頭の E である。この計算は P を用いて行われるが，ここでは詳細は述べない。

第 0 期の状態と $\boldsymbol{x}(0)$ が与えられたとしよう。このとき，消費者が，制約式 (14) に従いつつ，消費と投資を巧みに選び，式 (15) を最大化することによって実現する消費及び生産量の経路を「最適成長経路」と呼び，これが日々，我々が観察している消費や生産量の成長や変動と一致しているとみなすのが「最適成長理論」である。ここで当然問題となるのは，実際に (14) を満たし，(15) を最大化する（ただし，無限大は認めない）経路（すなわち，最適成長経路）が存在するか否かであろう。

次のように行列 $\Gamma^{1-\theta}$ を定義する。

$$\Gamma^{1-\theta}=\begin{bmatrix}\gamma_1^{1-\theta} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \gamma_2^{1-\theta} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n^{1-\theta}\end{bmatrix}$$

次の定理は今述べた問題に解答を与える。

定理 26. 次の不等式が成立していると仮定する：

$$\beta\lambda(\Gamma^{1-\theta}P)<1$$

このとき，最適成長経路が存在する。

この定理に登場する支配固有値は「平均成長率」と考えることができ，不等式そのものは，仮に経済が成長していたとしても，消費者はそれを上回るほど十分に大きく将来を割り引くことを意味している。つまりこの定理は，遠い将来の影響が，消費者の主観的な効用も考慮に入れたうえで見ると，無視できるほど小さいときには最適成長経路が存在することを主張している。

5　まとめと文献案内

日本語で書かれた線形代数の教科書は枚挙にいとまがないので，ひとつひとつ列挙することはしない。筆者が数学の勉強を始めたのは米国の大学院に留学してからであるが，線形代数についてそのとき参考にしたのは，次の本の第 2 版である。

- Strang, G. (2005): *Linear Algebra and Its Applications* (4th Edition), Cengage Learning.

大変分かりやすい本であり，しかも無料で全文ダウンロードができる。本稿で紹介した定理の証明の幾つかは本書に書かれている。本来であれば，紹介した定理のすべての証明について，その出所を明らかにすべきであるが，多くの定理は，色々な機会に筆者が書きためてきたノートなどに基づくものであり，証明の出所を完全にトレースすることが叶わない。この点，読者のご寛恕を請いたい。

経済学者によって書かれた，経済学の研究者を対象にした数学の教科書の古典が次の 2 冊である。ともに，支配固有値の丁寧な説明を含んでいる。本稿もこれらを参考にしている。

- 二階堂副包（1982）『経済のための線型数学』（初版第 20 刷），培風館。
- 二階堂副包（1984）『現代経済学の数学的方法』（初版第 16 刷），岩波書店。

英語で書かれた経済数学の教科書としては，次の 2 冊が定評がある。いずれも，線形代数についての詳しい説明がある。

- Takayama, A. (1985): *Mathematical Economics* (2nd Edition), Cambridge.
- Sydsaeter, K., P. Hammond and A. Strom (2012): *Essential Mathematics for Economic Analysis* (4th Edition), Prentice Hall.

第 4.3 節で分析した連立線形微分方程式については，解の挙動に加えて，経済変数が一旦そこに到達すると，そこにとどまり続けるような状態（「定常状態」と呼ばれる）の安定性が重要となる。経済が定常状態にあるとしよう。今何らかの外的ショックにより，経済が定常状態から乖離したとする。このとき，経済が再び定常状態に復帰する動きを見せるとき，定常状態は「安定的」であるという。定常状態が安定的であるかどうかを決めるのは，実は経済システムを記述している行列の固有値である。経済システムが行列で表現されていないような非線形モデルにおいても，システムが

「滑らか」ならば（ここでは説明しないが，微分によるテイラー展開を用いて）定常状態の周りで線形近似を行い，その結果得られた行列の固有値を調べることで，定常状態の安定性を分析することができる。このような，微分方程式を用いた経済モデルの分析には，次の本が非常に有益である。

- Brock, W. A. and A. G. Malliaris (1989): *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, North-Holland.

経済システムの長期的動向を調べるためには，システムを表現している行列 A の対角化が重要であり，対角化された行列の対角成分が行列 A の固有値となることは既に述べた。システムの長期的動向は対角行列の積で表現されるため，対角行列の性質から，それは固有値そのものの積で表現される。支配固有値の重要性はそこにある。しかも，経済システムは，当然その初期値に依存するが，実は経済の長期的動向は初期値と無関係な支配固有値によって決まる。この，初期値に依存しない，という性質のことを「エルゴード性」と呼び[(22)]，このエルゴード性を保障しているのがフロベニウスの定理であると解釈することもできる。このような経済動学と支配固有値の関係については，次の文献を参照してほしい。特に，定理 26 は後者で分析されているモデルの非常に特殊な場合である。

- Luenberger, D. G. (1979): *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley.
- Ozaki, H. and P. A. Streufert (2001): "Solutions for some dynamic problems with uncertainty aversion," *The Japanese Economic Review* 52, pp.251-283.

第 4.4 節では，状態空間は有限集合であると仮定していたが，これを無限集合に拡張し，さらに行列では表現できない非線形性をも考慮に入れた支配固有値の一般化など，さらに研究するべき課題は多い。そのような研究の一例としては，次の拙稿をご笑覧いただきたい。

- Ozaki, H. and P. A. Streufert (1996): "Dynamic programming for non-additive stochastic objectives," *Journal of Mathematical Economics* 25, pp.391-442.

（22） より正確には，第 t 期までの加重平均を計算し，この加重平均の（t を無限大に飛ばしたときの）長期的な振る舞いが初期値に依存しない，という性質のことを「エルゴード性」と呼ぶ。