

Title	投資関数の変化とマクロ経済変動：非線形マクロ経済モデルによる分析
Sub Title	Variations in investment function and macroeconomic fluctuations
Author	須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2014
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.107, No.2 (2014. 7) ,p.271(133)- 279(141)
JaLC DOI	10.14991/001.20140701-0133
Abstract	本稿は, 東日本大震災からの復旧・復興の過程で生じたような設備投資需要の増加が, 経済変数の動学的経路に与える影響について考察したものである。標準的なケインズ流マクロモデルに非線形要因を取り込み, 一次元非線形動学の数学的結果を応用することにより, 設備投資の増加が国内総生産の動学経路に不規則な影響を及ぼす可能性があることが示される。 This study examines the impact on dynamic path of economic variables by the increase in demand for capital investment, such as one created in the process of recovery and reconstruction from the Great East Japan Earthquake. Incorporating non-linear factors into a standard Keynesian macro model and applying the results of one-dimensional non-linear dynamics, we show that an increase in capital investment may irregularly affect the dynamic path of GDP.
Notes	特集：大震災から三年：経済と世相
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20140701-0133

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

投資関数の変化とマクロ経済変動—非線形マクロ経済モデルによる分析—

Variations in Investment Function and Macroeconomic Fluctuations

須田 伸一(Shinichi Suda)

本稿は、東日本大震災からの復旧・復興の過程で生じたような設備投資需要の増加が、経済変数の動学的経路に与える影響について考察したものである。標準的なケインズ流マクロモデルに非線形要因を取り込み、一次元非線形動学の数学的結果を応用することにより、設備投資の増加が国内総生産の動学経路に不規則な影響を及ぼす可能性があることが示される。

Abstract

This study examines the impact on dynamic path of economic variables by the increase in demand for capital investment, such as one created in the process of recovery and reconstruction from the Great East Japan Earthquake. Incorporating non-linear factors into a standard Keynesian macro model and applying the results of one-dimensional non-linear dynamics, we show that an increase in capital investment may irregularly affect the dynamic path of GDP.

投資関数の変化とマクロ経済変動

——非線形マクロ経済モデルによる分析——

須 田 伸 一

要 旨

本稿は、東日本大震災からの復旧・復興の過程で生じたような設備投資需要の増加が、経済変数の動学的経路に与える影響について考察したものである。標準的なケインズ流マクロモデルに非線形要因を取り込み、一次元非線形動学の数学的結果を応用することにより、設備投資の増加が国内総生産の動学経路に不規則な影響を及ぼす可能性があることが示される。

キーワード

設備投資、非線形マクロ経済モデル、周期解、カオス

1.

2011 年 3 月の東日本大震災からすでに 3 年以上が経過した。被災地では復旧・復興に向けて様々な取り組みがなされており、その進む方向について多くの国民が注目している。民間の建物・設備といった資本ストックについてみても、震災により多くの被害を受け、その再建のための設備投資がこの 3 年間でかなり行われてきた。震災によって毀損した資本ストックを回復することは一つの目標であるが、実際には、資金制約や、資材、人材の制約によって、そのレベルにまで設備投資を増やせない場合も多い。また、長期的な企業収益の予想や日本経済の動向によって、設備投資の水準は当然影響を受ける。国内から海外への設備投資の移転もあるだろうし、地域間、業種間での差異も少なからず存在するだろう。しかし、復旧、復興需要を受けて事業活動を活性化させている企業もあり、全体としてみれば、震災後に設備投資需要が増大したことはまちがいない。

本稿ではこのような問題意識の下で、投資関数の変化が国内総生産の動学経路に及ぼす影響について考察する。すなわち、ケインズ流の非線形マクロ経済モデル（標準的な IS-LM モデルを動学化したモデル）に一次元非線形動学の数学的結果を応用することで、投資需要の増加が国内総生産の動学経路に不規則な影響を及ぼす可能性があることを示したい。本稿の分析は、抽象的なマクロモデルによる分析ではあるが、経済の構造変化によって予測不可能な動きが経済変数に生じる一つの可能

性を示している。

以下、第2節でモデルの基本的な説明を行う⁽¹⁾。第3節では、投資需要が低い場合と高い場合での比較を行い、前者では国民総生産が単調な動きしか示さないのに対し、後者ではそれが周期的な変動を示す可能性のあることが示される。つづく第4節では、「カオス解」の可能性について述べ、最後の第5節では、周期解やカオス解が生じる可能性がどれだけ高いかという問題について考える。

2.

本稿で用いるモデルは、標準的な IS-LM モデル

$$Y_t = C_t + I_t \quad (1)$$

$$L_t = M \quad (2)$$

である。ここで、 M は所与のマネーストック、 Y_t , C_t , I_t , L_t はそれぞれ t 期の国内総生産、消費、投資、貨幣需要をあらわし、(1) が財市場の均衡条件を意味する IS 曲線、(2) が貨幣市場の需給均衡条件を意味する LM 曲線となる。議論の単純化のため、政府の経済活動と国際経済関係は捨象し、物価は $P = 1$ で所与とする。さらにモデルを動学化するため、 r_t を t 期の実質利子率、 $\bar{C}$, $\bar{I}$ をそれぞれ自発消費、自発投資とし、消費関数と投資関数を

$$C_t = \bar{C} + cY_{t-1} \quad (3)$$

$$I_t = \bar{I} + I(r_{t-1}, Y_{t-1}) \quad (4)$$

のように、1 期の支出ラグをもつ形で定式化する。ここで $I(r_{t-1}, Y_{t-1})$ は誘発投資関数で、 $\partial I / \partial r_{t-1} < 0$, $\partial I / \partial Y_{t-1} > 0$ と仮定する。また、貨幣需要関数については

$$L_t = kY_t + L(r_t) \quad (5)$$

の形と $L'(r_t) < 0$ を仮定する。

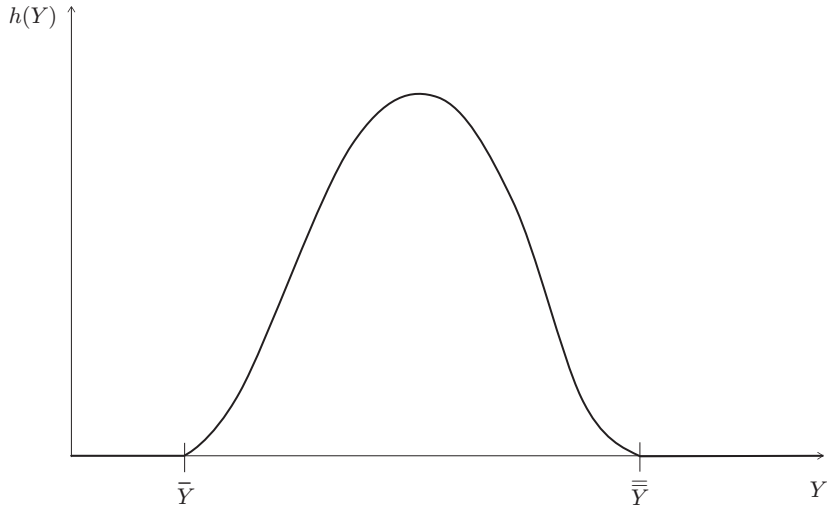
(3), (4), (5) を (1), (2) に代入すると

$$Y_t = \bar{C} + \bar{I} + cY_{t-1} + I(r_{t-1}, Y_{t-1}) \quad (6)$$

$$kY_t + L(r_t) = M \quad (7)$$

(1) 本稿の分析は、福岡正夫・須田伸一（2011）「内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル」『三田学会雑誌』（104 巻 2 号）および福岡正夫・須田伸一（2012）「非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の存在」『三田学会雑誌』（105 巻 2 号）に基づく。その他の参考文献およびモデルについての詳しい説明は、これらの論文を参照していただきたい。

第 1 図



を得るが、ここで $L'(r_t) < 0$ より (7) を $r_t = f(Y_t)$ という形に解き、それを (6) に代入することで、モデルを Y_t についての一階の非線形差分方程式

$$Y_t = \bar{C} + \bar{I} + cY_{t-1} + I(f(Y_{t-1}), Y_{t-1}) \quad (8)$$

に帰着させることができる。この式の $h(Y_{t-1}) \equiv I(f(Y_{t-1}), Y_{t-1})$ が誘発投資の項で、第 1 図のような形状を仮定する。

この形についてはつぎのように説明できる。⁽²⁾ まず Y が小さいときは誘発投資への影響は無視する程度に小さく、 Y が $\bar{Y}$ を超えるときから、 Y は誘発投資に正の影響を及ぼし始める。しかし Y がある程度増加すると $f(Y)$ の項を通じて実質利子率が上昇し、それが誘発投資に負の影響を及ぼすことで、徐々に Y の増加による正の影響を打ち消すようになる。そしてあるところから実質利子率の上昇による負の影響が、 Y の増加による正の影響を上回るようになり、最終的に $\bar{Y}$ の水準で誘発投資の水準が再びゼロに戻ってしまう。

これらの仮定の下、我々が興味をもつのは (8) の解、すなわち

$$Y_t = \theta(Y_{t-1}) \equiv \bar{C} + \bar{I} + cY_{t-1} + h(Y_{t-1}) \quad (9)$$

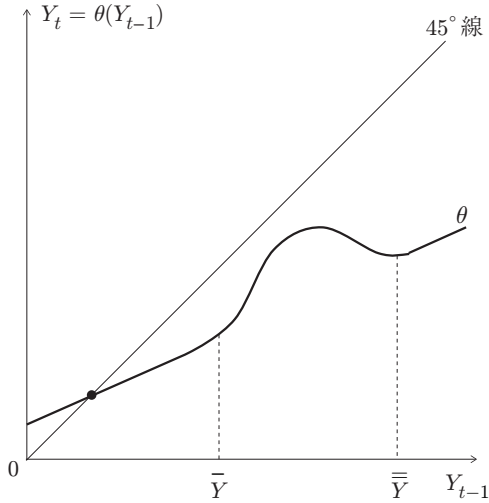
と書いたときに

$$Y_1 = \theta(Y_0)$$

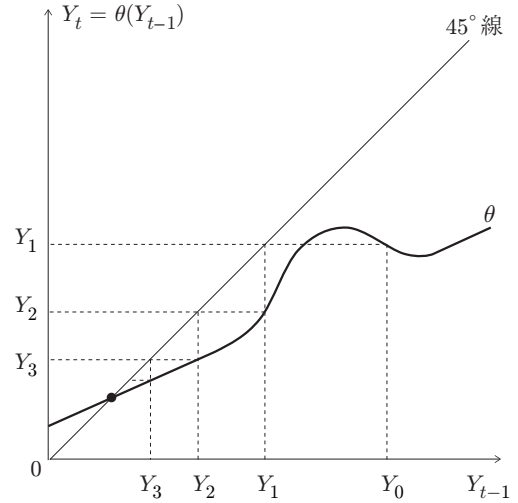
$$Y_2 = \theta(Y_1)$$

(2) 詳しくは福岡・須田 (2011) を参照のこと。

第2図



第3図



$$Y_3 = \theta(Y_2)$$

...

を順に計算して得られる $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ の経路（国内総生産の動学経路）である。

3.

まずは簡単なケースとして、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ のグラフが第2図のように描かれる場合を考えてみよう。ここで黒丸で示されているのは $\theta(Y_{t-1})$ と 45 度線との交点で、そこにおいて $Y = \theta(Y)$ が成り立つことからこの点は θ の不動点と呼ばれる。この場合は、第3図で示したように、 Y_0 から Y_1 、 Y_1 から Y_2 、 Y_2 から Y_3 というように順にグラフをたどっていくことで、

$$Y_1 = \theta(Y_0)$$

$$Y_2 = \theta(Y_1)$$

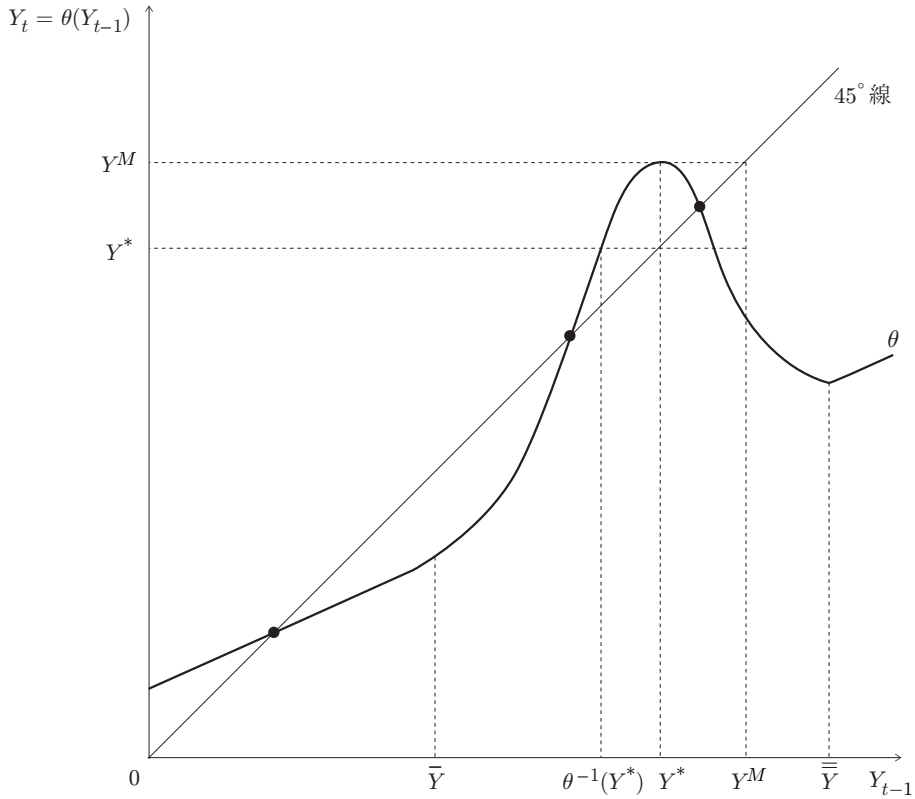
$$Y_3 = \theta(Y_2)$$

...

の値を横軸上に書き入れることができ、どのような Y_0 の値から始めても Y_t が最終的に θ の不動点での Y の値に収束することを確認できる。

つぎに、設備投資への需要が高まり、誘発投資関数 $h(Y_{t-1})$ が上にシフトするケースを考える。シフトの程度によって様々な可能性が考えられるが、ここでは $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ のグラフが第4図のよう

第 4 図



になる場合をとりあげる。 Y^M は $\theta(Y_{t-1})$ の最大値、 Y^* は $Y_t = Y^M$ を達成するときの Y_{t-1} の値、また $\theta^{-1}(Y^*)$ は $Y^* = \theta(Y)$ となる Y のうち、小さいほうの値を指す記号として使っている。この図では $\theta(Y_{t-1})$ と 45 度線との交点（黒丸で示されている）、すなわち θ の不動点が 3 つ存在する。

このケースにおける $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ の経路を考えるのに先立ち、まず周期解という言葉 را定義しておこう。周期 k の周期解とは、 k 期ごとに同じ値を繰り返す $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解のことであり、たとえば $k = 3$ なら、

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 = Y_0, Y_4 = Y_1, Y_5 = Y_2, Y_6 = Y_0, \dots$$

というように、 Y_0, Y_1, Y_2 の値を限りなく繰り返していくような経路を指す。より正確に述べれば、 Y_0 が $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の周期 k の周期解であるとは、

$$Y_0 = \theta^k(Y_0)$$

$$Y_0 \neq \theta^i(Y_0), i = 1, 2, \dots, k-1$$

が成り立つことと定義できる。ここで、 $\theta^i(Y)$ は Y に $\theta(\cdot)$ を i 回作用させたものをあらわす記号で、

$$\theta^i(Y) = \theta(\theta^{i-1}(Y)), \quad \theta^0(Y) = Y$$

により定義される。

第 3 図のようにして第 4 図でも動学経路 ($Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$) を求めてみると、今度はかなり複雑な動きをすることに気付くはずである。実際、第 4 図の状況では、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ を順に計算して得られる $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ の経路が第 2 図の場合と大きく異なることが知られている。定理 1 は、それを具体的に述べたものである。

定理 1 第 4 図であらわされる差分方程式 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ においては、どんな自然数 $k = 1, 2, \dots$ についても、周期 k の周期解が存在する。

この定理について詳しくは福岡・須田 (2011) の定理 1 を見ていただきたいが、ここでの鍵は第 4 図において

$$\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$$

が成り立っていることである。それによってこの差分方程式に周期 3 の周期解が存在し、定理の結論が導かれる⁽³⁾。

この定理により、 Y_0 を適当に選ぶことによって、どんな周期の周期解も、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解として実現する、すなわち $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解には、様々な周期解の可能性が含まれることが分かる。

4.

ここまでの議論では、経済モデルの動学的経路として、ある値に単調に収束する解、あるいは周期的に同じ値を繰り返してとる解を考えてきたが、(9) の解はこれらのものに限られる必要はない。収束もせず周期的でもない解のうち、数学的にはとくに、いかなる周期解にも近づかない「カオス解」について多くの研究がなされてきた。この「カオス解」にかかわる命題として、第 4 図の差分方程式 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ に関しては以下の主張が成り立つことを証明できる⁽⁵⁾。

(3) これはリー＝ヨークの定理として知られる結果である。

(4) カオス解についての正確な定義は、福岡・須田 (2011) およびそこに載せた文献を参照のこと。

(5) 福岡・須田 (2011) 定理 2。

定理 2 つぎの二つの性質を満たす Y_0 の集合 S が存在する。

- (i) S は無限個の要素からなる集合で、 S からどんな Y_0 を選んでも、それを初期点とする $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の経路はいかなる周期解にも近づかない。
- (ii) S から異なる二つの Y_0, Y_0' を選んでくると、それら二つの初期点から出発する $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の経路は、互いに限りなく近づいていくことも、離れつつけることもない。⁽⁶⁾

この定理よりつぎのことが分かる。(i) より S が無限の要素を含むことが分かっているので、(ii) で選ぶ Y_0, Y_0' の距離はいくらでも小さくすることができる。それでも (ii) によって、 Y_0 と Y_0' から出発する経路は、互いに限りなく近づくことはない。すなわち、初期点のごく小さな違いが、将来の大きな違いとなってあらわれ、いわば、現在のちょっとした計測誤差が将来予測を大きく異なったものにしてしまう。これは、バタフライ効果と呼ばれる現象で、カオス解を含むモデルに特徴的な性質として知られている。

ここまでの内容をまとめると、つぎのようになる。

標準的な IS-LM モデルを動学化し、(9) であらわされる一階の非線形差分方程式 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ を得た。もしそのグラフが 45 度線と一度しか交わらないのであれば、第 3 図で示したように、どんな Y_0 から出発しても、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解はその不動点で決まる Y の値に単調に収束する。しかし設備投資に対する需要が増大し、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ のグラフが第 4 図のような形状になると、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解としてあらゆる周期の周期解の可能性が生じるだけでなく、「カオス的」な解の可能性も生じる。その意味で、国内総生産の動学経路はまったく予測不可能な動きを示す可能性がある。

5.

最後に、「不規則性の中の規則性」の可能性について考えてみたい。そこでは「周期解の安定性」という概念が重要な役割を果たすので、まずはそれについて説明する。

Y_0 を $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の周期 k の周期解とする。このとき、 Y_0 が安定であるとは、 Y_0 のごく近くから Y_0' を任意にとってきたとき、

(6) 数学的には

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \theta^n(Y_0) - \theta^n(Y_0') \right| > 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \theta^n(Y_0) - \theta^n(Y_0') \right| = 0$$

と書ける。

(i) Y_0' から始まる経路 $Y_t = \theta^t(Y_0')$, $t = 1, 2, \dots$ は, Y_0 によって定義される周期軌道

$$\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}\}$$

の近くにとどまり続ける。

(ii) t を限りなく大きくしたとき, $Y_t = \theta^t(Y_0')$ と周期軌道 $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}\}$ との距離が 0 に収束する。

の二条件を満たすことをいう。 $\theta(Y)$ が連続微分可能な関数の場合には,

$$(\theta^k)'(Y_0) < 0$$

が Y_0 が安定であるための十分条件となるが, ここではそれを少し弱めた条件

$$(\theta^k)'(Y_0) \leq 0$$

を考え, Y_0 がこれを満たすとき, 周期 k の周期解 Y_0 は弱安定であるということにする。また, 弱安定な周期解 Y_0 から作られる周期軌道 $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}\}$ を, 弱安定な周期軌道と呼ぶ。

以下では引き続き, $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ が第 4 図であらわされる形状をしているものと仮定する。そして第 4 図の中央に位置する不動点を Y' と名付け, $\theta(Y)$ を $[Y', Y^M]$ 上に制限し, その上で $\theta(Y)$ が何度でも微分可能な関数であると仮定する。さらに $\theta(Y)$ に関して

$$\theta'(Y) \neq 0 \quad \text{となる任意の } Y \text{ に対して} \quad \frac{\theta'''(Y)}{\theta'(Y)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\theta''(Y)}{\theta'(Y)} \right)^2 < 0 \quad \text{が成り立つ}$$

を仮定することで, 以下の定理を証明することができる。⁽⁷⁾

定理 3 $\theta: [Y', Y^M] \rightarrow [Y', Y^M]$ について以下の命題が成り立つ。

- (i) θ は, 高々一つの弱安定な周期軌道をもつ。
- (ii) θ が弱安定な周期軌道をもち, かつ $\theta''(Y^*) < 0$ であるならば, その弱安定な周期軌道は区間 $[Y', Y^M]$ におけるルベーグ測度 0 の集合を除いた任意の点を引き付ける。ここで, ある点 x が弱安定な周期軌道に引き付けられるというのは, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\theta^n(x)$ の極限点集合がその周期軌道に一致することを意味している。

この定理については少し説明が必要であろう。まず「ルベーグ測度 0 の集合を除いた任意の点」という限定であるが, これは「確率 1 で」という意味にとることができる。区間 $[Y', Y^M]$ からラ

(7) J-M・グランモン (2013)『非線型経済動学』知泉書館, 76 ページ, 定理 4.1.4。

ンダムに点を選ぶことを考えると、ルベグ測度 0 の集合から点が選ばれる確率は 0 になるからである。この意味で、(ii) の結論は、区間 $[Y', Y^M]$ に属するほとんどすべての点が（ただ一つ存在する）弱安定な周期軌道に引き付けられる、と言い換えられる。

またここでは、 $\theta(Y)$ が第 4 図であらわされる形状をしているものと仮定しているので、定理 1、定理 2 の結論も成り立っている。すなわち、任意の周期の周期解と、カオス的な解が存在する。定理 3 は、この無限個ある周期解のうち、弱安定なものは高々一つしかないことを主張する。そしてそのような弱安定な周期解が存在するときには、区間 $[Y', Y^M]$ から出発する動学経路が、ほとんどの場合にその周期解に近づいていくのである。

つまり、定理 1、定理 2 によって、 $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の解としてあらゆる周期の周期解の可能性と「カオス的」な解の可能性が生じることをみたが、その解を生み出す初期点の集合は、もし弱安定な周期解が存在するときには、ルベグ測度 0 の集合に含まれてしまうのである。これが上で「不規則性の中の規則性」と述べた理由である。不規則な動きが、ルベグ測度 0 の集合に閉じ込められてしまうのであれば、それが現実に観察されることはないであろう。

すると最後に気にすべきは、どのようなときに弱安定な周期解が存在するのか、という問題となろう。これに関する十分条件は、 Y^M から出発する $Y_t = \theta(Y_{t-1})$ の動学経路を用いて定義できるが、ここでその詳細を述べることはできない。興味をもたれた方は、福岡・須田（2012）の定理 1（8 ページ）を参照していただきたい。

6.

本稿の結論をまとめてみる。震災からの復興過程で設備投資に対する需要が増大することは、日本経済を活性化するうえでも重要なことであるが、経済変動という視点でみると、その変動幅を大きくする可能性がある。すなわち、誘発投資関数が上にシフトすることで、定理 1、定理 2 の前提が満たされやすくなり、その結果、不規則な動学経路が生じる可能性が生まれる。それでも、もし弱安定な周期解が存在するのであれば、その不規則性は現実に観察されることはない（定理 3）。設備投資の増大が、経済変動の不規則性をもたらす可能性のあることが、以上の簡単なモデル分析を通じて明らかにされたといえる。

（経済学部教授）