「三田学会雑誌」107 巻 1 号（2014 年 4 月）

研究ノート

Brouwer の不動点定理の証明

西　岡　久美子

Brouwer の不動点定理や，それを使って証明される角谷の不動点定理は数理経済学において重要な役割を演じる。Brouwer の不動点定理の証明はいくつか知られているが，数学的道具を使わない初等的証明は Kraster, Kuratowski und Mazurkiewics [1] で与えられた。この証明では本論文の定理 3 は自明なこととして証明せずに使われている。一方，二階堂 [2] ではこの定理 3 の証明を与えている。しかし，2 次元や 3 次元の場合の幾何的イメージに頼っていると思われる部分がある。これは本論文の定理 1，補題 1〜3 に相当する部分である（注意（1)，(2）参照)。例えば 2 次元のイメージの下では直感的で分かりやすいと思うかもしれないが，数学では 2 次元と 3 次元あるいはそれ以上の次元では状況が違うということが起こり得るので，初等的証明といえども幾何的イメージに頼っていたのでは証明とは言えない。幾何的イメージを数学化する必要がある。経済学を学ぶ学生の中には数学的に厳密に学びたいと思っている学生もいる。そのような学生の助けになればと願って本論文を発表することにした。

$x^0, \ldots, x^k \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\alpha_0 x^0 + \cdots + \alpha_k x^k = 0,\ \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 0 \Longrightarrow \alpha_0 = \cdots = \alpha_k = 0$$

が成り立つとき，$x^0, \ldots, x^k$ は独立であるという。$x^0, \ldots, x^k \in \mathbf{R}^n$ が独立であることと $\begin{pmatrix} x^0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x^k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$ が 1 次独立であることは同値である。従って $x^0, \ldots, x^k \in \mathbf{R}^n$ が独立なら $k \leq n$ である。$x^0, \ldots, x^k$ は独立であるとする。$x \in \mathbf{R}^n$ が

$$x = \alpha_0 x^0 + \cdots + \alpha_k x^k, \quad \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 1$$

と表せるとき，このような表し方は一意的であることが上のことから分かる。

$X \subset \mathbf{R}^n$ に対して，X の独立な点の組の構成メンバーの個数の最大値が $k+1$ であるとき，k を X の次元といい，$\dim X = k$ と表す。

$x^0, \ldots, x^k \in \mathbf{R}^n$ が独立な点であるとき

$$S = \{\alpha_0 x^0 + \cdots + \alpha_k x^k \mid \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 1\}$$

を $x^0, \ldots, x^k$ が張る k 次元単体といい，$S = \overline{x^0 \ldots x^k}$ と表す。$\dim S = k$ である。$\phi \neq \{i_0, \ldots, i_m\} \subset \{0, \ldots, k\}$ に対して $\overline{x^{i_0} \ldots x^{i_m}}$ を S の m 次元辺単体という。S の異なる 2 つの $k-1$ 次元辺単体の共通部分は $k-2$ 次元辺単体であることを注意しておく。

$\phi \neq I = \{i_0, \ldots, i_m\} \subset \{0, \ldots, k\}$ に対して

$$y_I = \frac{1}{m+1} \sum_{i \in I} x^i = \frac{1}{m+1}(x^{i_0} + \cdots + x^{i_m})$$

とおく。集合の列

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_k = \{0, 1, \ldots, k\}, \ |I_i| = i+1$$

に対して $y_{I_0}, \ldots, y_{I_k}$ は独立である。ここで $|A|$ は集合 A の元の個数を表す。$\overline{y_{I_0} \cdots y_{I_k}}$ を S の重心分割単体という。$\overline{y_{I_0} \cdots y_{I_k}} \subset S$ である。S は重心分割単体の和集合になることが容易に示されるが，以降では必要としないので証明はしない。

定理 1

$$I_0 \subset \cdots \subset I_m \subset \{0, \ldots, k\},$$
$$J_0 \subset \cdots \subset J_m \subset \{0, \ldots, k\},$$
$$|I_i| = |J_i| = i+1$$

とする。

$$\{I_0, \ldots, I_m\} \cap \{J_0, \ldots, J_m\} = \{K_0, \ldots, K_\ell\}, \quad K_0 \subset \cdots \subset K_\ell$$

とおくとき，$\overline{y_{I_0} \cdots y_{I_m}} \bigcap \overline{y_{J_0} \cdots y_{J_m}} = \overline{y_{K_0} \cdots y_{K_\ell}}$ である。

証明　右辺が左辺に含まれることは明らかだから, 左辺が右辺に含まれることを m に関する帰納法で示す。$m=0$ のとき成り立つ。$m-1$ のとき成り立つと仮定する。個数を比較すると $i \in I_m$, $i \notin J_{m-1}$, $j \in J_m$, $j \notin I_{m-1}$ となる i, j がある。$x \in \overline{y_{I_0} \cdots y_{I_m}} \bigcap \overline{y_{J_0} \cdots y_{J_m}}$ とすると

$$(*) \quad x = \lambda_0 y_{I_0} + \cdots + \lambda_{m-1} y_{I_{m-1}} + \lambda_m y_{I_m} = \mu_0 y_{J_0} + \cdots + \mu_{m-1} y_{J_{m-1}} + \mu_m y_{J_m}$$

と表せる。x_i の係数をみると左辺では $\lambda_m/(m+1)$ 以上, 右辺では $\mu_m/(m+1)$ 以下となるから $\lambda_m \leq \mu_m$ をうる。x_j の係数をみると同様に $\lambda_m \geq \mu_m$ をうるから $\lambda_m = \mu_m$ である。

$I_m = J_m$ のときには $K_\ell = I_m = J_m$ で，$\lambda_m \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-\lambda_m}(\lambda_0 y_{I_0} + \cdots + \lambda_{m-1} y_{I_{m-1}}) \\ &= \frac{1}{1-\mu_m}(\mu_0 y_{J_0} + \cdots + \mu_{m-1} y_{J_{m-1}}) \\ &\in \overline{y_{I_0} \cdots y_{I_{m-1}}} \cap \overline{y_{J_0} \cdots y_{J_{m-1}}} \\ &= \overline{y_{K_0} \cdots y_{K_{\ell-1}}} \end{aligned}$$

である（帰納法の仮定より)。従って,

$x \in \overline{y_{K_0} \dots y_{K_{\ell-1}} y_{K_\ell}}$ となる。$\lambda_m = 1$ のときには $x = y_{I_m} = y_{J_m}$ だから成り立つ。

$I_m \neq J_m$ のとき $i \in I_m$, $i \notin J_m$ となる i がある。$(*)$ の両辺の x^i の係数を比較して $\lambda_m = \mu_m = 0$ をうる。帰納法の仮定より

$$\overline{y_{I_0} \dots y_{I_{m-1}}} \cap \overline{y_{J_0} \dots y_{J_{m-1}}} = \overline{y_{K_0} \dots y_{K_\ell}}$$

だから

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 y_{I_0} + \dots + \lambda_{m-1} y_{I_{m-1}} \\ &= \mu_0 y_{J_0} + \dots + \mu_{m-1} y_{J_{m-1}} \in \overline{y_{K_0} \dots y_{K_\ell}} \end{aligned}$$

となる。 □

以後，k 次元単体 S の $k-1$ 次元辺単体 T を単に S の辺単体ということにする。S の重心分割単体を $S^{(1)}$, その辺単体を $T^{(1)}$ と表す。$S^{(1)}$ の重心分割単体を $S^{(2)}$, その辺単体を $T^{(2)}$ と表す。これを続けて $S^{(\nu)}, T^{(\nu)}$ $(\nu \geq 1)$ をうるが，これを S の ν 次重心分割単体，ν 次重心分割辺単体という。$S^{(\nu)}$ が $S^{(\nu-1)}$ の重心分割単体であることを $S^{(\nu)} < S^{(\nu-1)}$ と表す。

$$S^{(\nu)} < S^{(\nu-1)} < \dots < S^{(\nu-i)}, \quad i \geq 1$$

のとき $S^{(\nu)} < S^{(\nu-i)}$ と表す。

系　$S_1^{(1)} \neq S_2^{(1)}$ なら $\dim S_1^{(1)} \cap S_2^{(1)} \leq k-1$ である。$\dim S_1^{(1)} \cap S_2^{(1)} = k-1$ のとき $S_1^{(1)} \cap S_2^{(1)}$ は $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ の辺単体である。

定理 2　$T^{(1)}$ が S のある辺単体 T に含まれるとき，$T^{(1)}$ を辺単体にもつ $S^{(1)}$ が丁度 1 つある。$T^{(1)}$ が S のどの辺単体にも含まれないとき，$T^{(1)}$ を辺単体にもつ $S^{(1)}$ が丁度 2 つある。

証明　$T^{(1)} \subset T = \overline{x^0 \dots x^{k-1}}$ として一般性を失わない。$T^{(1)} = \overline{y_{I_0} \dots y_{I_{k-1}}}$ とするとき $I_{k-1} = \{0, \dots k-1\}$ である。従って $T^{(1)}$ を辺単体にもつ S の重心分割単体は $S^{(1)} = \overline{y_{I_0} \dots y_{I_{k-1}} y_{\{0,\dots,k\}}}$ だけである。$T^{(1)}$ が S の辺単体には含まれないとき $T^{(1)} = \overline{y_{I_0} \dots y_{I_{k-1}}}$, $I_{k-1} = \{0, \dots, k\}$ である。従って $|I_{i-1}| = i, |I_i| = i+2$ となる $i \geq 0$ がある。$I_i \setminus I_{i-1} = \{j, j'\}$ とおくとき，

$$S_1^{(1)} = \overline{y_{I_0} \dots y_{I_{i-1}} y_{I_{i-1} \cup \{j\}} y_{I_i} \dots y_{I_{k-1}}},$$

$$S_2^{(1)} = \overline{y_{I_0} \dots y_{I_{i-1}} y_{I_{i-1} \cup \{j'\}} y_{I_i} \dots y_{I_{k-1}}}$$

が $T^{(1)}$ を辺単体にもつ丁度 2 つの S の重心分割単体である。 □

注意（1）　定理 2 は二階堂 [2], 296 ページ，上から 5 行目にある「S の $k-1$ 次元小単体は，S の境界上に完全にのっていれば，ちょうど一個の k 次元小単体の辺単体になり，S の境界上にのっていなければ，ちょうど二個の k 次元小単体の辺単体になる。」に相当する。二階堂の「証明」は幾何的イメージに頼っており，分かりづらい。本論文のように重心分割単体を数式で定義することにより，証明は短くかつ明快になっていると思う。

定理 3　$T^{(\nu)}$ が S のある辺単体 T に含まれるとき，$T^{(\nu)}$ を辺単体にもつ $S^{(\nu)}$ が丁度 1 つある。$T^{(\nu)}$ が S のどの辺単体にも含まれないとき，$T^{(\nu)}$ を辺単体にもつ $S^{(\nu)}$ が丁度 2 つある。

注意 (2)　定理 3 は二階堂 [2], 297 ページにある「定理 1」に相当する。二階堂の「証明」の主な問題点は イ）において $T^{(\nu+1)}$ がある $T^{(\nu)}$ の重心分割によって得られるとき，このような $T^{(\nu)}$ が $T^{(\nu+1)}$ に対して唯一つであることを暗黙のうちに使っていることと，ロ）においても，（ イ）が成立しない場合）$T^{(\nu+1)}$ がある $S^{(\nu)}$ の重心分割によって得られる辺単体のとき，このような $S^{(\nu)}$ が $T^{(\nu+1)}$ に対して唯一つであることを暗黙のうちに使っていることである。これらは 2 次元や 3 次元の幾何的イメージでは自明にみえるからであろう。

定理 3 は次の 3 つの補題を用意してから証明される。

補題 1　$S^{(1)} < S$, T を S の辺単体とする。$\dim S^{(1)} \cap T = k-1$ なら　$S^{(1)} \cap T$ は $S^{(1)}$ の辺単体 $T^{(1)}$ で，$T^{(1)} < T$ である。また $T^{(\nu)} \subset T$ なら $T^{(\nu)} < T$ である。

証明　$T = \overline{x^0 \ldots x^{k-1}}$ としてよい。$S^{(1)} = \overline{y_{I_0} \ldots y_{I_k}}$ とすると $S^{(1)} \cap T = \overline{y_{J_0} \ldots y_{J_\ell}}$, ここで $J_0, \ldots, J_\ell$ は $I_0, \ldots, I_k$ のうち k を含まないものである。$\dim S^{(1)} \cap T = k-1$ だから $\ell = k-1$ である。従って $J_\ell = J_{k-1} = \{0, \ldots, k-1\}$ でなければならない。従って $S^{(1)} \cap T$ は $S^{(1)}$ の辺単体 $T^{(1)}$ で $T^{(1)} < T$ である。

後半は ν に関する帰納法で示す。$\nu = 1$ のとき，$T^{(1)}$ を $S^{(1)}$ の辺単体とすると $T^{(1)} \subset S^{(1)} \cap T$ より $\dim S^{(1)} \cap T = k-1$ だから，前半より $T^{(1)} = S^{(1)} \cap T < T$ である。$\nu - 1$ に対して成り立つと仮定する。$T^{(\nu)}$ は $S^{(\nu)}$ の辺単体で，$S^{(\nu)} < S^{(1)}$ とする。$T^{(\nu)} \subset S^{(1)} \cap T$ だから前半より $S^{(1)} \cap T$ は $S^{(1)}$ の辺単体 $T^{(1)}$ で $T^{(\nu)} \subset T^{(1)} \subset T$ である。帰納法の仮定より $T^{(\nu)} < T^{(1)}$, $T^{(1)} < T$ だから $T^{(\nu)} < T$ である。 □

補題 2　$S_1^{(\nu)} \neq S_2^{(\nu)}$ なら $\dim S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} \leq k-1$ である。$\dim S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} = k-1$ なら $S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)}$ は $S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}$ の辺単体である。

証明　ν に関する帰納法。$\nu = 1$ のときは定理 1 の系である。$\nu - 1$ に対して成り立つとする。$S_1^{(\nu)} < S_1^{(\nu-1)}$, $S_2^{(\nu)} < S_2^{(\nu-1)}$ とする。$S_1^{(\nu-1)} = S_2^{(\nu-1)}$ なら $\nu = 1$ のとき成り立つことから分かる。$S_1^{(\nu-1)} \neq S_2^{(\nu-1)}$ とする。$S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} \subset S_1^{(\nu-1)} \cap S_2^{(\nu-1)}$ だから帰納法の仮定より $\dim S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} \leq k-1$ が分かる。$\dim S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} = k-1$ のとき，$\dim S_1^{(\nu-1)} \cap S_2^{(\nu-1)} = k-1$ だから帰納法の仮定より $S_1^{(\nu-1)} \cap S_2^{(\nu-1)}$ は $S_1^{(\nu-1)}$, $S_2^{(\nu-1)}$ の辺単体 $T^{(\nu-1)}$ である。このとき

$$S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)}) \cap (S_2^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)})$$

だから $\dim(S_1^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)}) = \dim(S_2^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)}) = k-1$ である。補題 1 より $S_1^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)} = T_1^{(\nu)}$, $S_2^{(\nu)} \cap T^{(\nu-1)} = T_2^{(\nu)}$, ここで $T_1^{(\nu)}$ は $S_1^{(\nu)}$ の $T_2^{(\nu)}$ は $S_2^{(\nu)}$ の辺単体で，$T_1^{(\nu)}$, $T_2^{(\nu)} < T^{(\nu-1)}$ である。$T_1^{(\nu)} \neq T_2^{(\nu)}$ なら定理 1 の系より $\dim T_1^{(\nu)} \cap T_2^{(\nu)} \leq k-2$ となるから仮定に反する。従って $T_1^{(\nu)} = T_2^{(\nu)} = S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)}$ をうる。 □

この補題より $S^{(\nu)}$ に対して，

$S^{(\nu)} \subset S^{(\nu-i)}$ $(i \geq 1)$ となる $S^{(\nu-i)}$ は唯一つであることが分かる。次のように辺単体 $T^{(\nu)}$ に対しても同様のことが成り立つ。

補題 3　$T^{(\nu)} \subset T_1^{(\nu-i)} \cap T_2^{(\nu-i)}$ $(i \geq 1)$ なら $T_1^{(\nu-i)} = T_2^{(\nu-i)}$ である。

証明　$T_1^{(\nu-i)}$ は $S_1^{(\nu-i)}$ の $T_2^{(\nu-i)}$ は $S_2^{(\nu-i)}$ の辺単体とする。$S_1^{(\nu-i)} = S_2^{(\nu-i)}$ のとき，$\dim T_1^{(\nu-i)} \cap T_2^{(\nu-i)} = k-1$ だから $T_1^{(\nu-i)} = T_2^{(\nu-i)}$ でなければならない。$S_1^{(\nu-i)} \neq S_2^{(\nu-i)}$ のとき，$T^{(\nu)} \subset S_1^{(\nu-i)} \cap S_2^{(\nu-i)}$ となり，補題 2 より $S_1^{(\nu-i)} \cap S_2^{(\nu-i)}$ は $S_1^{(\nu-i)}$，$S_2^{(\nu-i)}$ の辺単体 $T^{(\nu-i)}$ である。$T^{(\nu)} \subset T^{(\nu-i)} \cap T_1^{(\nu-i)}$ より $\dim T^{(\nu-i)} \cap T_1^{(\nu-i)} = k-1$ だから $T^{(\nu-i)} = T_1^{(\nu-i)}$ でなければならない。同様に $T^{(\nu-i)} = T_2^{(\nu-i)}$ であるから $T_1^{(\nu-i)} = T_2^{(\nu-i)}$ をうる。 □

定理 3 の証明　ν に関する帰納法。$\nu = 1$ のときは定理 2 である。$\nu - 1$ に対して成り立つとする。まず $T^{(\nu)}$ が S の辺単体 T に含まれる場合。$T^{(\nu)}$ が $S_1^{(\nu)}$，$S_2^{(\nu)}$ の辺単体であるとする。$S_1^{(\nu)} < S_1^{(1)}$，$S_2^{(\nu)} < S_2^{(1)}$ とすると $T^{(\nu)} \subset S_1^{(\nu)} \cap T \subset S_1^{(1)} \cap T$ より $\dim S_1^{(1)} \cap T = k-1$ である。補題 1 より $S_1^{(1)} \cap T$ は $S_1^{(1)}$ の辺単体 $T_1^{(1)}$ である。同様に $S_2^{(1)} \cap T$ は $S_2^{(1)}$ の辺単体 $T_2^{(1)}$ である。$T^{(\nu)} \subset T_1^{(1)} \cap T_2^{(1)}$ だから，補題 3 より $T_1^{(1)} = T_2^{(1)} \subset T$ である。定理 2 より $S_1^{(1)} = S_2^{(1)}$ でなければならない。$S_1^{(1)} = S_2^{(1)}$ に帰納法の仮定を使うと $S_1^{(\nu)} = S_2^{(\nu)}$ をうる。

$T^{(\nu)}$ が S の辺単体に含まれない場合には次の 2 つの場合に分けて考える。

1）$T^{(\nu)}$ がどんな $T^{(\nu-1)}$ にも含まれない場合。$T^{(\nu)}$ を辺単体にもつ $S_1^{(\nu)}, S_2^{(\nu)}$ があるとする。$S_1^{(\nu)} < S_1^{(\nu-1)}$，$S_2^{(\nu)} < S_2^{(\nu-1)}$ とする。$S_1^{(\nu-1)} \neq S_2^{(\nu-1)}$ のとき，$T^{(\nu)} \subset S_1^{(\nu)} \cap S_2^{(\nu)} \subset S_1^{(\nu-1)} \cap S_2^{(\nu-1)}$ と補題 2 より $S_1^{(\nu-1)} \cap S_2^{(\nu-1)}$ は $S_1^{(\nu-1)}, S_2^{(\nu-1)}$ の辺単体 $T^{(\nu-1)}$ だから $T^{(\nu)} \subset T^{(\nu-1)}$ となり矛盾。従って $S_1^{(\nu-1)} = S_2^{(\nu-1)}$ である。定理 2 より $T^{(\nu)}$ を辺単体にもつ $S_1^{(\nu-1)}$ の重心分割単体は丁度 2 つある。

2）$T^{(\nu)}$ がある $T^{(\nu-1)}$ に含まれる場合。補題 3 よりこのような $T^{(\nu-1)}$ は唯一つである。$T^{(\nu-1)}$ は S の辺単体に含まれないから，帰納法の仮定より $T^{(\nu-1)}$ は丁度 2 つの単体 $S_1^{(\nu-1)}$，$S_2^{(\nu-1)}$ の辺単体である。$T^{(\nu)}$ が $S^{(\nu)}$ の辺単体で $S^{(\nu)} < S^{(\nu-1)}$ なら $S^{(\nu-1)} = S_1^{(\nu-1)}$ または $S_2^{(\nu-1)}$ であることを示す。$S^{(\nu-1)} \neq S_1^{(\nu-1)}$ とする。補題 2，補題 3 より

$$\begin{aligned} T^{(\nu)} &\subset S^{(\nu)} \cap S_1^{(\nu-1)} \subset S^{(\nu-1)} \cap S_1^{(\nu-1)} \\ &= T^{(\nu-1)} \end{aligned}$$

で，$T^{(\nu-1)}$ は $S^{(\nu-1)}$ の辺単体でなければならない。従って $S^{(\nu-1)} = S_2^{(\nu-1)}$ である。以上により $S^{(\nu)} < S_1^{(\nu-1)}$ または $S^{(\nu)} < S_2^{(\nu-1)}$ である。定理 2 よりこのような $S^{(\nu)}$ はそれぞれ 1 つずつ存在するから合わせて丁度 2 つ存在する。 □

以下の証明は二階堂 [2] におけるものとほ

ぼ同様であるが，少し簡潔にしている。

定理 4（Sperner の補題） $S=\overline{x^0\dots x^k}$ とし，σ は S から $\{0,\dots,k\}$ への写像で

$$y=\alpha_0x^0+\cdots+\alpha_kx^k,\ \alpha_i\ge 0,$$
$$\alpha_0+\cdots+\alpha_k=1$$

のとき $\alpha_{\sigma(y)}>0$ をみたすものとする。このとき $\nu\ge 1$ に対して，S の ν 次重心分割単体 $S^{(\nu)}=\overline{y^0\dots y^k}$ で $\{\sigma(y^0),\dots,\sigma(y^k)\}=\{0,\dots,k\}$ となるようなものが奇数個存在する。

証明 k に関する帰納法。$k=0$ のとき成り立つ。$k-1$ のとき成り立つと仮定する。$S^{(\nu)}=\overline{y^0\dots y^k}$ に対して $\{\sigma(y^0),\dots,\sigma(y^k)\}=\{0,\dots,k\}$ となるとき $S^{(\nu)}$ は正則であるという。$T^{(\nu)}=\overline{z^0\dots z^{k-1}}$ に対して $\{\sigma(z^0),\dots,\sigma(z^{k-1})\}=\{0,\dots,k-1\}$ となるとき $T^{(\nu)}$ は正則であるという。

$\lambda=$ 正則な $S^{(\nu)}$ の個数

$\mu=S$ の辺単体に含まれる正則な $T^{(\nu)}$ の個数

$\mu(S^{(\nu)})=S^{(\nu)}$ の辺単体である正則な $T^{(\nu)}$ の個数

とおくとき λ が奇数であることを示せばよい。

$S^{(\nu)}$ が正則であるとき $\mu(S^{(\nu)})=1$ である。

$S^{(\nu)}=\overline{y^0\dots y^k}$ が正則でないとき $|\{\sigma(y^0),\dots,\sigma(y^k)\}|\le k-1$ である。$\{\sigma(y^0),\dots,\sigma(y^k)\}\ne\{0,\dots,k-1\}$ となる $S^{(\nu)}$ に対しては $\mu(S^{(\nu)})=0$ である。$\{\sigma(y^0),\dots,\sigma(y^k)\}=\{0,\dots,k-1\}$ となる $S^{(\nu)}$ に対しては，ある i に対して $\sigma(y^j)=i$ となる y^j が丁度 2 つある。これを y^j, $y^{j'}$ とすると

$$\overline{y^0\dots y^{j-1}y^{j+1}\dots y^k},\ \overline{y^0\dots y^{j'-1}y^{j'+1}\dots y^k}$$

が $S^{(\nu)}$ の正則辺単体であるから $\mu(S^{(\nu)})=2$ である。従って

$$\lambda\equiv\sum\mu(S^{(\nu)})\mod 2$$

である。ここで和はすべての $S^{(\nu)}$ にわたる。定理 3 より S の辺単体に含まれる正則な $T^{(\nu)}$ は丁度 1 つの $S^{(\nu)}$ の辺単体になるから右辺の和の中で丁度 1 回カウントされ，S の辺単体に含まれない正則な $T^{(\nu)}$ は丁度 2 つの $S^{(\nu)}$ の辺単体になるから右辺の和の中で丁度 2 回カウントされるので

$$\mu\equiv\sum\mu(S^{(\nu)})\mod 2$$

である。従って $\lambda\equiv\mu\bmod 2$ である。S の辺単体に含まれる $T^{(\nu)}$ が正則になるためには $T^{(\nu)}\subset T=\overline{x^0\dots x^{k-1}}$ でなければならない。補題 1 より $T^{(\nu)}<T$ である。従って

$\mu=T$ の正則な ν 次重心分割単体の個数

である。$\dim T=k-1$ だから帰納法の仮定より μ は奇数となり，λ も奇数である。□

$S=\overline{x^0\dots x^k}$ に対して

$$\delta(S)=\max_{0\le i,j\le k}\|x^i-x^j\|$$

と定義する。ここで $\|x\|$ はベクトル x のノルムを表す。

定理 5　$\delta(S^{(\nu)}) \leq (\frac{k}{k+1})^{\nu}\delta(S)$

証明　$\delta(S^{(1)}) \leq (\frac{k}{k+1})\delta(S)$ となることを示せば ν に関する帰納法で定理をうる。

$$S^{(1)} = \overline{y_{I_0} \cdots y_{I_k}}, \quad I_0 = \{0\},$$
$$I_1 = \{0,1\}, \ldots, I_k = \{0, \ldots, k\}$$

として一般性を失わない。$0 \leq i < j \leq k$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|y_{I_i} - y_{I_j}\| \\
&= \left\| \frac{1}{i+1}\sum_{h=0}^{i} x^h - \frac{1}{j+1}\sum_{h=0}^{j} x^h \right\| \\
&= \frac{1}{i+1}\frac{1}{j+1}\left\| \sum_{h=0}^{i}(j+1)x^h - \sum_{h=0}^{j}(i+1)x^h \right\| \\
&\leq \frac{1}{i+1}\frac{1}{j+1}\left((i+1)(j+1) - (i+1)^2\right)\delta(S) \\
&\leq \frac{j-i}{j+1}\delta(S) \\
&\leq \frac{j}{j+1}\delta(S) \\
&\leq \frac{k}{k+1}\delta(S)
\end{aligned}$$

となるから示された。□

定理 6（不動点定理）　$e^0, \ldots, e^k$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とし，

$$S = \overline{e^0 \ldots e^k} = \{p = p_0 e^0 + \cdots + p_k e^k \mid p_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} p_i = 1\}$$

とする。f が S から S への連続写像なら $f(p) = p$ となる $p \in S$ がある。

証明　$f(p) = f_0(p)e^0 + \cdots + f_k(p)e^k$ とし，

$$F_i = \{p \in S \mid p_i \geq f_i(p)\}, \quad i = 0, \ldots, k$$

とおくとき F_i は閉集合である。このとき

$$p = p_0 e^0 + \cdots + p_k e^k \in S,$$
$$\{i \mid p_i > 0\} = \{i_0, \ldots, i_m\}$$

とおけば $p \in F_{i_0} \cup \cdots \cup F_{i_m}$ となる。なぜなら $p \notin F_{i_h}$ $(h = 0, \ldots, m)$ なら $p_{i_h} < f_{i_h}(p)$ $(h = 0, \ldots, m)$ だから

$$1 = \sum_{h=0}^{m} p_{i_h} < \sum_{h=0}^{m} f_{i_h}(p) \leq \sum_{i=0}^{k} f_i(p) = 1$$

となり矛盾だからである。$p \in S$ に対して $\sigma(p)$ は $p \in F_{i_h}$ となる番号 i_h の 1 つとする。このとき σ は S から $\{0, \ldots, k\}$ への写像で定理 4 の仮定をみたすから，正則な $S^{(\nu)}$ が存在する。

$$S^{(\nu)} = \overline{y^0_{(\nu)} \cdots y^k_{(\nu)}}, \quad \sigma(y^i_{(\nu)}) = i$$

と表すことができる。$y^i_{(\nu)} \in F_i$ である。S はコンパクトだから点列 $\{y^i_{(\nu)}\}_{\nu \geq 1}$ $(i = 0, \ldots, k)$ の部分列 $\{y^i_{(\nu_\ell)}\}_{\ell \geq 1}$ $(i = 0, \ldots, k)$ で，ある p^i に収束するものがある。ここで $\{\nu_\ell\}_{\ell \geq 1}$ はすべての i に共通な自然数列である。定理 5 より $\|y^i_{(\nu)} - y^j_{(\nu)}\| \longrightarrow 0$ $(\nu \longrightarrow \infty)$ だから $\|p^i - p^j\| = 0$ となり，

$$p^0 = \cdots = p^k = p \in F_0 \cap \cdots \cap F_k$$

である。$f(p) = p$ であることを示す。$p \in F_i$ より $p_i \geq f_i(p)$ $(i = 0, \ldots, k)$ であるから

$$1 = \sum_{i=0}^{k} p_i \geq \sum_{i=0}^{k} f_i(p) = 1$$

となり，$p_i = f_i(p)$ $(i = 0, \dots, k)$ をうる。

$\square$

（経済学部教授）

参 考 文 献

1. Kraster, B., C. Kuratowski und S. Mazurkiewics, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fundamenta Mathematicae, 132–137 (1929).
2. 二階堂副包，現代経済学の数学的方法，岩波書店，1959.