慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	AR(1)モデルの係数の推定量の小標本における偏りの比較
Sub Title	Simulation comparison of finite sample biases of several estimators for AR(1)coefficient
Author	長倉, 大輔(Nagakura, Daisuke)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2014
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.107, No.1 (2014. 4) ,p.25- 43
JaLC DOI	10.14991/001.20140401-0025
Abstract	
Notes	研究ノート 挿図
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20140401-0025

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」107 巻 1 号（2014 年 4 月）

研究ノート

AR (1) モデルの係数の推定量の小標本における偏りの比較

長　倉　大　輔

1　はじめに

時系列分析において最も基本的なモデルの 1 つに以下の 1 次の自己回帰（autoregressive; AR）モデル（以後 AR（1）モデル）があげられる。

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \quad (1)$$

ここで y_t は対象となる時系列変数の t 時点における値，ε_t は t 時点において発生する観測されない独立同分布に従う平均 0，分散 σ^2 の誤差項とする。このモデルにおいて ρ は未知の係数である。実際の分析では，このモデルに定数項やトレンドを加えたり，AR の次数を任意の次数としたり，もしくは誤差項 ε_t に対する仮定を緩めるなどにより拡張し，より複雑な動きを表現できるように発展させたモデルが使用される事が多い。にもかかわらず上記の AR（1）モデルはそれらのモデルを分析する際の基礎となるべきモデルであるため，より複雑なモデルについての推定法や検定法を分析する際にまず上記のモデルについて分析されることが多い。

(1) 式の AR (1) モデルは係数 ρ の値によってその統計的性質が大きく異なる事が知られている。係数が $|\rho| < 1$ であれば，AR (1) モデルは定常性を満たす事が知られており，定常 AR (1) モデルと呼ばれる。また $\rho = 1$ である場合には，非定常過程の特別な場合である単位根過程と呼ばれる過程に従い，単位根 AR (1) 過程，もしくは非定常 AR (1) 過程などと呼ばれる。さらに $\rho > 1$ の場合には，y_t はものすごい勢いで発散していき，実際のデータにおいてそのような動きをするものが観測される事はほとんどないので，通常の分析においては $-1 < \rho \leq 1$ が仮定される。[(1)]

AR (1) 係数の最も代表的な推定量は最小二

乗（Ordinary Least Square; OLS）推定量（以下 OLS 推定量）であろう。OLS 推定量は計算が簡単で，いくつか望ましい性質を持っているため, 実際の分析において非常によく用いられる。しかしながら AR (1) 係数の OLS 推定量は不偏推定量ではなく, 小標本においては偏りが生じる事が知られている。この偏りは真の係数の値が 1 に近づくほど大きくなる。このような問題を解決するために（もしくは和らげるために），OLS 推定量以外にも様々な推定量が提案されている。本稿ではそれらのうち，Cauchy 推定量（Cauchy (1836)，So and Shin (1999)），1 階階差（First Differenced; FD）推定量（以下 FD 推定量）（Chowdhury (1987)，Phillips and Han (2008)），修正 1 階階差（Modified FD; MDF）推定量（以下 MDF 推定量）（Hayakawa (2006)），および Hurwicz 推定量（Hurwicz (1950)，Zieliński (1999)）の 4 つをとりあげ，これらの推定量の小標本における特性をシュミレーションによって比較する。

次章ではまずこれら 4 つの推定量の定義，およびその特徴について述べる。3 章ではこれら 4 つの推定量をシュミレーションによって比較した結果の報告，考察をし，4 章で本稿の結果を踏まえ，今後の課題を述べる。

2　推定量の定義

この章では前章で述べた 4 つの推定量を正式に定義し，それらの特徴について述べる。以下では（1）式で定義された AR（1）モデルより $t = 1, \cdots, n$ 時点の n 個の観測値が得られたとして推定量を定義する。

2.1　Cauchy 推定量

Cauchy 推定量，$\hat{\rho}_C$，は

$$\hat{\rho}_C = \frac{\sum_{t=2}^{n} \mathrm{sign}(y_{t-1}) y_t}{\sum_{t=2}^{n} |y_{t-1}|}$$

と定義される。ここで $\mathrm{sign}(y_{t-1})$ は $y_{t-1} \geq 0$ の時 $\mathrm{sign}(y_{t-1}) = 1$ であり，$y_{t-1} < 0$ の時 $\mathrm{sign}(y_{t-1}) = -1$ であるとする。So and Shin（1999）によると，推定量 $\hat{\rho}_C$ は Cauchy（1836）が最初に提案したものであり，よって彼らは $\hat{\rho}_C$ を Cauchy 推定量と呼んでいる。So and Shin（1999）は $\hat{\rho}_C$ が操作変数として $x_t = \mathrm{sign}(y_{t-1})$ を用いた操作変数推定量，$\sum_{t=2}^{n} x_t y_t / \sum_{t=2}^{n} x_t y_{t-1}$ として解釈できる事を指摘している。この操作変数推定量としての解釈をより一般化したものとして Phillips, Park and Chang（2004）や Shin and Kang（2006）などがある。

So and Shin（1999）は（1）式の AR（1）モデルに対して $|\rho| < 1$, $|\rho| = 1$, $|\rho| > 1$ の場合について $\hat{\rho}_C$ の漸近分布を導出し，それらが異なっている事を示した。また

$$Z_C = \frac{\hat{\rho}_C - \rho}{\mathrm{se}(\hat{\rho}_C)}, \quad \mathrm{se}(\hat{\rho}_C) = \frac{n^{1/2}\hat{\sigma}}{\sum_{t=2}^{n} |y_{t-1}|}$$

という OLS 推定量の t 統計量に相当するものを定義し，Z_C が ρ の値に関わらず漸近的に標準正規分布に従う事を示した。さらに，So

(1)　また $\rho < -1$ や $\rho = -1$ の場合も特徴のある動き方をし，そのような動きは通常のデータで観測される事はまずないため，実際の分析において想定する必要はまずないといえる。

and Shin（1999）は $\hat{\rho}_C$ の望ましい性質として $\hat{\rho}_C$ が小標本において，ρ の真の値に関わらず，近似的に**中央値不偏性**を持つ事をシュミレーションによって示している。ある推定量 $\hat{\rho}$ が中央値不偏性を持つとは $\Pr[\hat{\rho} \leq \rho] = 0.5$ が成り立つ事である。OLS 推定量はこのような性質は持っていない。この性質は $\hat{\rho}_C$ が真の値 ρ より大きくなる確率と小さくなる確率がほぼ 0.5 である事を意味しており，望ましい性質の一つである。ただし中央値不偏性は必ずしも通常の意味での偏り，すなわち**平均不偏性**を意味していない事には注意が必要である。しかしながら，実は次章のシュミレーションの結果では $\hat{\rho}_C$ の通常の意味での偏りも OLS 推定量より小さい事が示唆されている。$\hat{\rho}_C$ についてより詳しい性質は So and Shin（1999）を参照されたい。

2.2 1 階階差推定量および修正 1 階階差推定量

Chowdhury（1987），Hayakwa（2006），および Phillips and Han（2008）は AR（1）モデルの係数 ρ の推定量として以下の推定量を考察した。(2)

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{FD} &= \frac{\sum_{t=3}^{n} \Delta y_{t-1}(2\Delta y_t + \Delta y_{t-1})}{\sum_{t=3}^{n} (\Delta y_{t-1})^2} \\ &= 2\hat{\rho}_{FDOLS} + 1.\end{aligned}$$

ここで $\hat{\rho}_{FDOLS}$ は（1）式のモデルの 1 階の階差を取ったモデル：

$$\Delta y_t = \rho \Delta y_{t-1} + \Delta \varepsilon_t \tag{2}$$

の ρ の OLS 推定量を表す。$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ および $\Delta \varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ である。本稿では Hayakawa（2006）に従い $\hat{\rho}_{FD}$ を 1 階階差（First Differenced; FD）推定量と呼ぶ。Chowdhury（1987）はこの推定量を $\hat{\rho}_{FDOLS}$ の偏りを修正する事によって求めたのに対し，Phillips and Han（2008）は（1）式のモデルを

$$\begin{aligned}2\Delta y_t + \Delta y_{t-1} &= \rho \Delta y_{t-1} + \eta_t, \\ \eta_t &= 2\Delta y_t + (1-\rho)\Delta y_{t-1}\end{aligned} \tag{3}$$

と変形させた時に $E[\Delta y_{t-1}\eta_t] = 0$ となる事より，（3）式の第 1 式の ρ の OLS 推定量として $\hat{\rho}_{FD}$ を導出している。Phillips and Han（2008）は $\hat{\rho}_{FD}$ の漸近分布が ρ の値に関わらず正規分布に従う事を示し，さらにシュミレーションによって $\hat{\rho}_{FD}$ の小標本における偏りが非常に小さい事を示した。Hayakawa（2006）は ε_t に正規分布を仮定し $\hat{\rho}_{FD}$ の小標本における偏りを $O(n^{-1})$ のオーダーの項まで求め $\hat{\rho}_{FD}$ の小標本における偏りは ρ が 1 に近づくほど小さくなる事を証明した。さらに Hayakawa（2006）は $\hat{\rho}_{FD}$ の $O(n^{-1})$ のオーダーの偏りを修正した推定量として修正 1 階階差（Modified First Differenced; MDF）推定量：

$$\hat{\rho}_{MFD} = \frac{(n-2)\hat{\rho}_{FD} - 1}{n-3}$$

を提案している。(3) この推定量は正規分布の仮

（2） 実際には彼らは（1）式の AR（1）モデルではなく，定数項のある AR（1）モデルにおける ρ の推定を考察している。

（3） Hayakawa（2006）では $t = 0, \cdots, n$ の $n+1$ 個の観測値を基に推定量を定義しているのに対して，本稿では $t = 1, \cdots, n$ の n 個の観測値に基づいて推定量を定義しているのでこのようになる。

定の下で導かれている事に注意が必要である。

2.3 Hurwicz 推定量

ここでは（1）式における ε_t は独立ではあるけれども必ずしも同一の分布には従っていないとしよう。また ε_t は $\Pr[\varepsilon_t \leq 0] = \Pr[\varepsilon_t \geq 0] = 0.5$ を満たす，すなわち中央値が 0 であり，$\Pr[y_t = 0] = 0$ であるとしよう。この時，（1）式の ρ の推定量として Hurwicz（1950）は以下の推定量を提案した。

$$\hat{\rho}_H = \text{median}\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n-1}}\right).$$

ここで $\text{median}(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ の標本中央値とする。この推定量は Hurwicz（1950）が最初に提案したとされる。Hurwicz（1950）は上式に含まれる全ての比 $y_t/y_{t-1}, t = 2, \cdots, n$ が ρ について中央値不偏推定量である事を指摘し，それらの標本中央値である $\hat{\rho}_H$ もまた中央値不偏推定量であると予想したが，実際に証明はしなかった。$\hat{\rho}_H$ が上記の条件の下で実際に中央値不偏推定量である事は Zieliński（1999）によって証明された。その後 Luger（2005）によって $\hat{\rho}_H$ の中央値不偏性は ε_t が独立でなくとも，その条件付き中央値が 0 であれば成立する事が示された。これは ε_t が ARCH や GARCH モデルのような条件付き不均一分散モデルに従う事を許容しており，ファイナンス変数への応用において重要な結果である。またここでは ε_t のモーメントについて何の条件も課していない事に注意しよう。これは ε_t が Cauchy 分布のような期待値や分散が存在せず，正規分布よりも裾の厚い分布であってもよい事を意味する。Luger（2005）はシュミレーションによって小標本において，正規分布や様々な正規分布より裾の厚い分布に対して，実際に $\hat{\rho}_H$ の中央値が ρ になる事を確認している。$\hat{\rho}_H$ の漸近分布については $|\rho| < 1$ の場合には So and Shin（2001）で示されているが，$\rho = 1$，すなわち，単位根 AR（1）モデルの場合の $\hat{\rho}_H$ の分布を示した文献は見当たらない。

3 シュミレーションによる比較

この章では，前章で定義した 4 つの推定量 $\hat{\rho}_C, \hat{\rho}_{FD}, \hat{\rho}_{MFD}, \hat{\rho}_H$ について小標本における性質を比較していく。ρ の真の値として様々な値を検証する[(4)]。誤差項 ε_t に関しては標準正規分布 (N(0,1))，自由度 3 の t 分布 (t(3))，自由度 2 の t 分布 (t(2))，自由度 1 の t 分布 (t(1))[(5)] の4 つを考える。t 分布は正規分布よりも裾が厚い分布である事，自由度 2 の t 分布には分散が，自由度 1 の t 分布には期待値と分散の両方が存在しない事に注意しよう。標本数 n は $n = 10$ および $n = 20$ の 2 つの場合を考える。100,001 回[(6)]のシュミレーションより，小標本における，それぞれの推定量の ⓐ期待値の真の値からの偏り（以下では Mean

(4) ρ の値としては -0.3 から 0.95 まで 0.05 ずつ増やしたものと 0.99, 1 の計 28 個の値についてシュミレーションを行った。

(5) 自由度 1 の t 分布は Cauchy 分布である。

(6) これは標本中央値を計算しやすくするためこのようにしている。

Bias)，ⓑ中央値の真の値からの偏り（以下では Median Bias)，ⓒ平方根平均平方誤差（Root Mean Squared Erorr；以下では RMSE）を推定した。(7)

表 1 と表 2 は誤差項が標準正規分布の時の結果をまとめたものである。表 1 は $n = 10$ の，表 2 は $n = 20$ の時の結果である。また図 1 と図 2 はそれぞれ $n = 10$ と $n = 20$ の場合の上記の値の ρ の値とのプロットである。これらの表よりまず Mean Bias をみてみると，OLS, Cauchy, Hurwicz 推定量は全体として下方への偏りがある事，FD 推定量は上方への偏りがある事，MFD は（特に $\rho > 0.5$ の時に）偏りが小さい事がわかる。また Cauchy, Hurwicz 推定量の偏りは同程度であり，ともに OLS 推定量の偏りより小さい。次に Median Bias をみてみると，既存の文献で指摘されている通り Cauchy, Hurwicz 推定量はほとんど中央値不偏である事がわかる。また FD 推定量には上方への，MFD 推定量は下方への偏りがあるが，ρ が 1 に近づくにつれてどんどん小さくなっており，$\rho > 0.5$ の時は OLS 推定量よりも偏りが小さい。RMSE の観点からは OLS 推定量が一番良く，次に Cauchy, Hurwicz 推定量と続く。しかしながら ρ が 1 に非常に近い場合は，RMSE に関して OLS 推定量と Cauchy, Hurwicz 推定量の間にほとんど違いはみられなくなる。これら 3 つの推定量の RMSE は ρ が 1 に近づくほど小さくなっていく。対照的に FD, MFD 推定量の RMSE は ρ が 1 に近づくほど大きくなっている。n の値が大きくなると全体的にそれぞれの偏り，RMSE はともに小さくなるが，上記の傾向自体は同様に観察される。これらの結果より，$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ の場合は，Mean Bias を重視するのであれば MFD 推定量を，Median Bias を重視するのであれば Cauchy もしくは Hurwicz 推定量を，RMSE を重視するのであれば OLS 推定量を使用するのがよいという事になる。またこれら 3 つを総合して選ぶのであれば，FD および MFD 推定量は RMSE が他と比べてかなり大きいので除外され，実際的には Cauchy もしくは OLS 推定量がよいと思われる。

次に $\varepsilon_t \sim t(3)$ の場合の結果をみてみよう。これは表 3 と表 4 および図 3 と図 4 にまとめられている。やはり $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ の時と同じような傾向がみられる。よって結論も同じようなものとなるが，Hurwicz 推定量の ρ が 1 に近い時の RMSE および Mean Bias は OLS, Cauchy 推定量より小さくなっているため ρ が 1 に近い場合により興味がある場合は，Hurwicz 推定量がよいであろう。

次に $\varepsilon_t \sim t(2)$ の場合の結果をみてみよう（表 5 と表 6 および図 5 と図 6）。これは誤差項に分散が存在しないようなケースである。この場合は上記 2 つの場合と異なり，FD と MFD 推定量は Mean Bias および Median Bias の

(7)　これらはそれぞれシュミレーションによって発生させた 100,001 個の推定量の標本のⓐ標本平均から真の値を引く，ⓑ標本中央値から真の値を引く，ⓒ標本から真の値を引いたものの 2 乗の標本平均の平方根を取る，事によって推定する。ただし ε_t の分布によっては，実際にはそれぞれの推定量に期待値や RMSE が存在しない可能性もあるが，ここではその事について立ち入らない。

どちらの観点からみても他の推定量と比較するとかなり低いパフォーマンスになり, RMSE の値もかなり大きい。よってこの 2 つの推定量は基本的には実際の使用からは除外される。残りの 3 つについては $\varepsilon_t \sim t(3)$ の場合とほぼ同じ傾向が観察されるが，Hurwicz 推定量のパフォーマンスは n が大きくなると Mean Bias, Median Bias, RMSE の全てにおいて Cauchy 推定量を上回っている。よって ρ の範囲全体を考慮するのであれば OLS もしくは Hurwicz 推定量，ρ が 1 に近い場合を特に考慮するのであれば Hurwicz 推定量という事になろう。

最後に $\varepsilon_t \sim t(1)$ の場合を考察する（表 7 と表 8 および図 7 と図 8）。これは誤差項に期待値も分散も存在しないような場合である。この場合は実際の使用に耐えうるのは Hurwicz 推定量だけとなる。他の 4 つはどの観点からみても Hurwicz 推定量よりパフォーマンスが悪くなっている。

全体としてみてみると FD および MFD 推定量は RMSE のパフォーマンスが低く，実用度は低い。OLS は RMSE が小さいが，偏りが大きい。また Cauchy, Hurwicz は偏りは小さいが RMSE は OLS より大きい。Cauchy と Hurwicz 推定量の間には基本的にそれほど差はないが，誤差項の分布によっては Hurwicz 推定量が他の推定量よりもかなりよいパフォーマンスを示す。総じて Hurwicz 推定量の実用性は高いと思われる。

4　結論と今後の課題

本稿では, 定数項のない AR (1) モデルの係数の推定に関して, OLS, Cauchy, FD, MFD, Hurwicz 推定量という 4 つの推定量をシュミレーションによって比較した。シュミレーションの結果, OLS, Cauchy, Hurwicz 推定量が小標本でのパフォーマンスという観点からは実用的であろうという結論に至った。特に Hurwicz 推定量は誤差項のモーメントの条件に関する条件が緩く，シュミレーションでもモーメントの条件に関して非常に頑強な推定量である事が確認できた。しかしながら Hurwicz 推定量の実証分析での使用は非常に限定的である。この 1 つの理由は Hurwicz 推定量は他の 3 つの推定量に比べて，定数項やトレンド項が存在する，もしくは AR の次数が大きくなった場合への応用が困難であるためである。よって将来的には，そのような場合でも Hurwicz 推定量のよい特性を失わないような新たな推定量の開発が期待される。またその場合の推定量のパフォーマンスの比較も今後の課題として重要であろう。

（経済学部准教授）

参　考　文　献

Cauchy, A. (1836) On a new formula for solving the problem of interpolation in a manner applicable to physical investigations. *Philosophical Magazine*, Vol.8, pp.459–468.

Chowdhury, G. (1987) A note on correcting biases in dynamic panel models. *Applied Economics*, Vol.19, pp.31–37.

Hayakawa, K. (2006) A note on bias in first - differenced AR(1) models. *Economics Bulletin*, Vol.3, No.27, pp.1–10.

Hurwicz, L. (1950) Least-squares bias in time series. In *Statistical Inference in Dynamic Economic Models* (ed. T. C. Koopmans). New York: Wiley.

Luger, R. (2005) Median-unbiased estimation and exact inference methods for first-order autoregressive models with conditional heteroscedasticity of unknown form. *Journal of Time Series Analysis,* Vol.27, pp.119–128.

Phillips, P.C.B. and C. Han (2008) Gaussian inference in AR(1) time series with or without a unit root. *Econometric Theory*, Vol.24, pp.631–650.

Phillips, P.C.B., J.-Y. Park and Y. Chang (2004) Nonlinear instrumental variable estimation of an autoregression. *Journal of Econometrics*, Vol.118, pp.219–246.

Shin, D.-W. and S. Kang (2006) An instrumental variable approach for panel unit root tests under cross-sectional dependence. *Journal of Econometrics*, Vol.134, pp.215–234.

So, B.-S. and D.-W. Shin (1999) Cauchy estimators for autoregressive processes with applications to unit root tests and confidence intervals. *Econometric Theory*, Vol.15, No.2, pp.165–176.

So, B.-S. and D.-W. Shin (2001) An invariant sign test for random walks based on recursive median adjustment. *Journal of Econometrics*, Vol.102, pp.197–229.

Zieliński, R. (1999) A median-unbiased estimator of the AR(1) coefficient. *Journal of Time Series Analysis*, Vol.20, pp.477–481.

表 1　$\varepsilon_t \sim N(0,1)$ および $n = 10$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−80.056	−48.778	49.229	−15.167	−40.544
0.80	−111.255	−69.293	27.215	2.532	−60.921
0.95	−96.438	−62.554	12.476	7.115	−58.185
0.99	−57.296	−36.119	2.400	1.315	−33.950
1.00	−21.596	−13.526	−0.109	−0.125	−12.428

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−46.148	−3.403	28.589	−38.756	−2.022
0.80	−60.291	0.012	22.550	−2.800	2.037
0.95	−45.675	−0.144	9.964	4.244	−0.168
0.99	−15.671	0.304	3.130	2.149	0.315
1.00	−2.6993	−0.135	−1.974	−2.256	−0.084

(c) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	302.936	382.631	589.599	671.646	479.854
0.80	278.154	318.475	627.686	716.685	392.744
0.95	227.842	242.805	652.942	746.117	292.913
0.99	164.477	169.538	657.108	750.976	203.255
1.00	95.171	97.965	661.205	755.662	116.868

表 2　$\varepsilon_t \sim N(0,1)$ および $n = 20$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−44.646	−25.524	25.555	−2.354	−24.100
0.80	−65.760	−38.841	10.118	−1.052	−37.703
0.95	−62.282	−39.243	4.086	1.385	−38.518
0.99	−40.567	−25.689	3.187	2.786	−25.310
1.00	−15.982	−9.983	−2.042	−2.163	−9.902

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−24.321	−1.931	15.289	−13.224	−0.786
0.80	−33.944	0.800	7.132	−4.213	0.676
0.95	−29.998	0.349	2.102	−0.716	0.369
0.99	−13.722	0.305	3.189	2.788	0.283
1.00	−2.404	−0.085	−1.210	−1.282	−0.077

(c) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	204.554	255.714	394.299	416.622	318.623
0.80	175.635	201.169	426.358	451.312	250.452
0.95	139.377	145.918	444.160	470.269	176.328
0.99	101.761	102.665	448.616	475.001	122.427
1.00	59.784	60.010	449.394	475.829	71.942

図 1　$\varepsilon_t \sim N(0,1)$ および $n = 10$ の時の ρ の値との関係

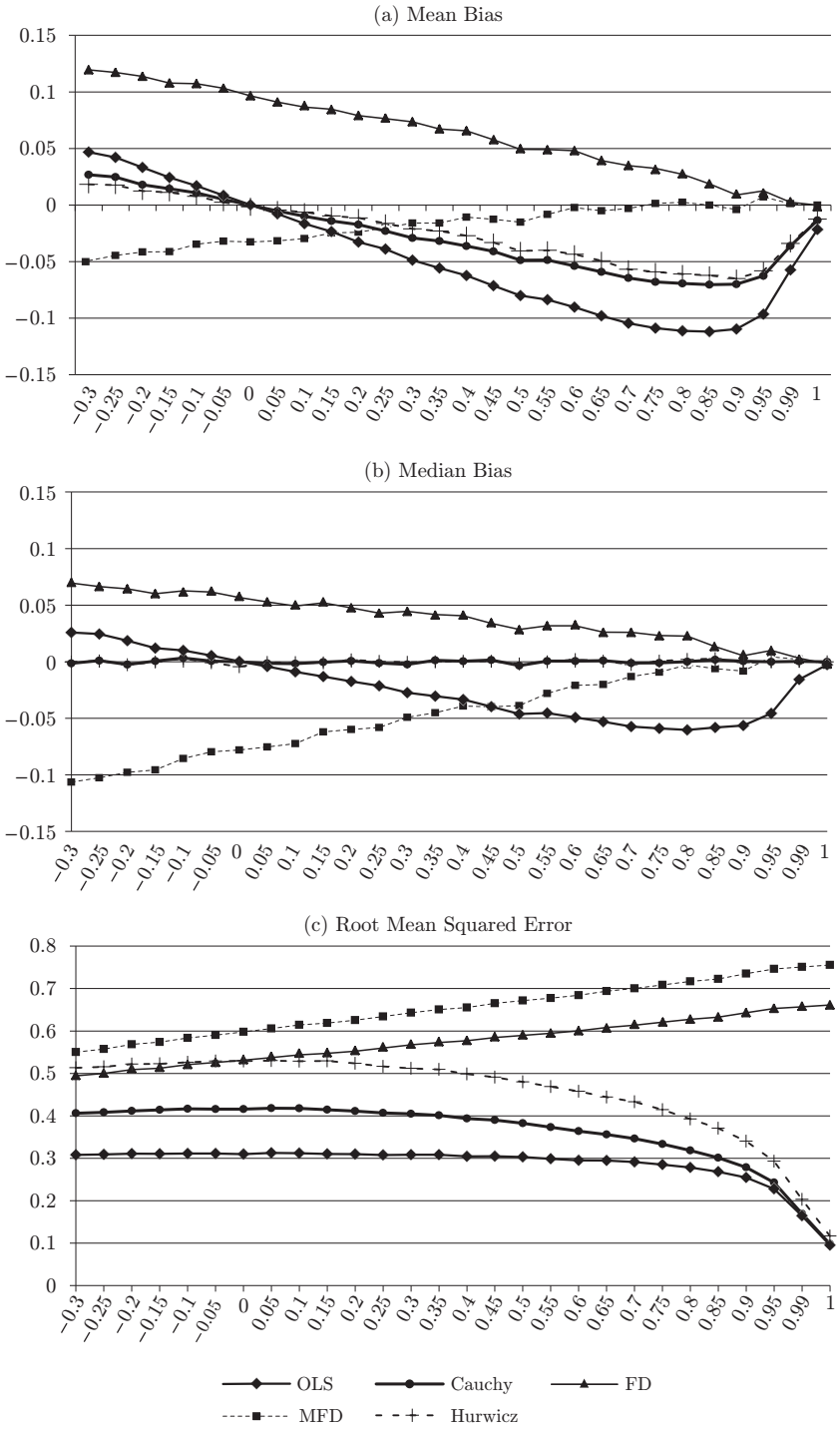

図 2　$\varepsilon_t \sim N(0,1)$ および $n = 20$ の時の ρ の値との関係

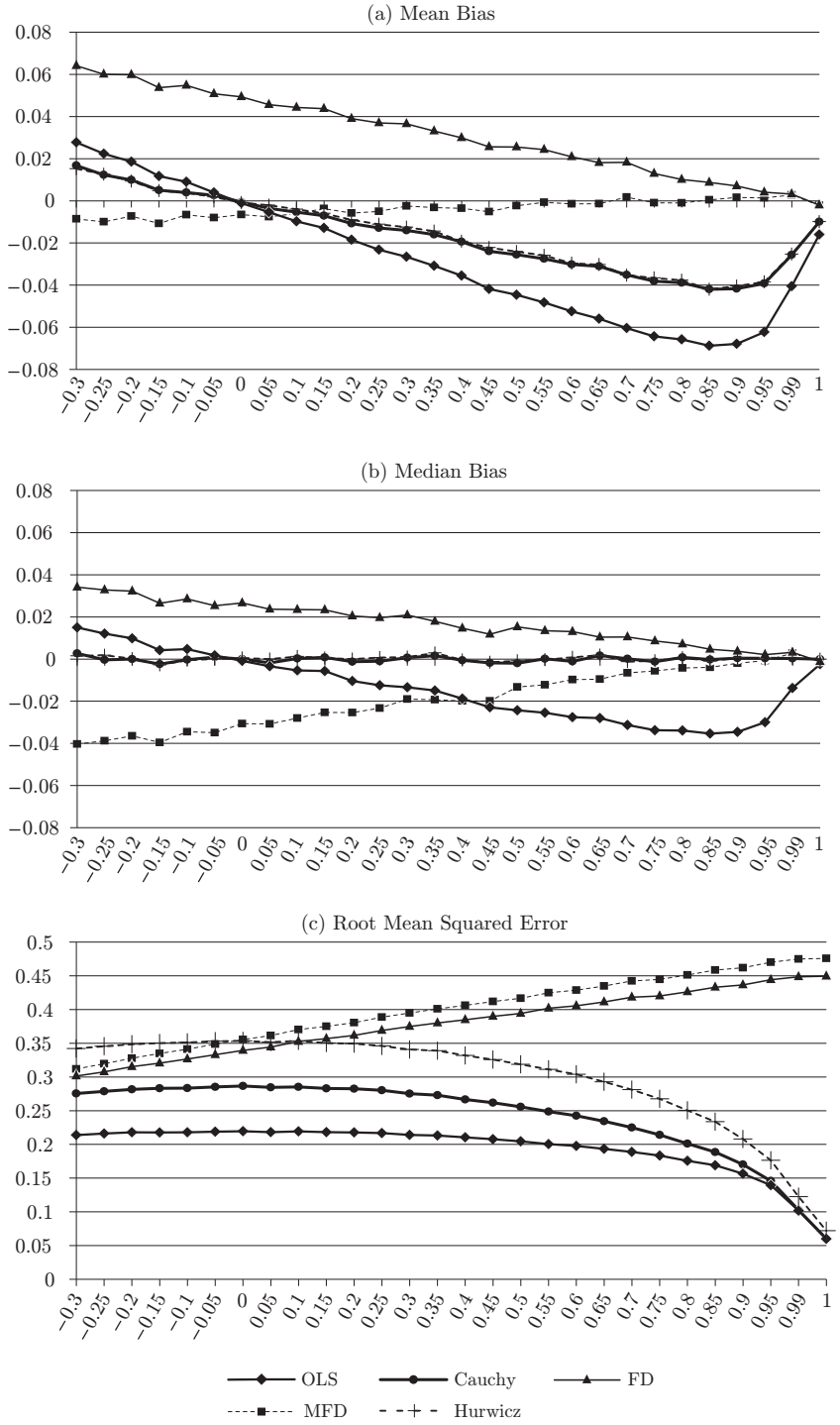

表 3　$\varepsilon_t \sim t(3)$ および $n = 10$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−67.878	−42.887	59.831	−3.051	−34.748
0.80	−98.128	−63.371	45.863	23.843	−51.321
0.95	−85.595	−54.976	21.004	16.862	−44.923
0.99	−50.874	−32.692	6.351	5.829	−26.165
1.00	−18.563	−11.159	3.967	4.534	−8.344

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−33.899	−0.221	33.649	−32.972	−0.944
0.80	−47.811	0.388	30.877	6.716	0.031
0.95	−36.191	0.043	14.576	9.515	−0.580
0.99	−11.171	0.145	4.963	4.243	0.094
1.00	−1.609	0.106	4.101	4.687	0.054

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	301.261	411.051	612.721	696.912	432.168
0.80	281.377	326.101	660.171	753.036	335.237
0.95	221.372	236.858	693.387	792.259	241.313
0.99	158.928	165.565	690.182	788.768	168.424
1.00	90.900	91.090	681.800	779.200	91.559

表 4　$\varepsilon_t \sim t(3)$ および $n = 20$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−39.400	−24.175	27.459	−0.338	−21.031
0.80	−59.346	−36.397	18.563	7.890	−29.601
0.95	−56.864	−36.198	14.339	12.241	−27.769
0.99	−36.486	−22.751	5.477	5.211	−16.768
1.00	−14.354	−8.837	0.513	0.543	−6.237

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−17.471	−0.201	13.994	−14.594	−0.340
0.80	−28.205	−0.710	10.423	−0.729	0.659
0.95	−26.439	−0.386	10.783	8.477	−0.087
0.99	−10.934	0.228	4.900	4.600	−0.020
1.00	−1.821	−0.015	1.006	1.065	0.018

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	196.266	276.783	386.780	408.499	272.156
0.80	167.156	203.106	412.255	436.134	201.796
0.95	132.910	141.357	428.212	453.312	138.177
0.99	97.014	97.550	429.874	455.154	92.715
1.00	57.574	57.055	429.001	454.236	53.851

図 3　$\varepsilon_t \sim t(3)$ および $n = 10$ の時の ρ の値との関係

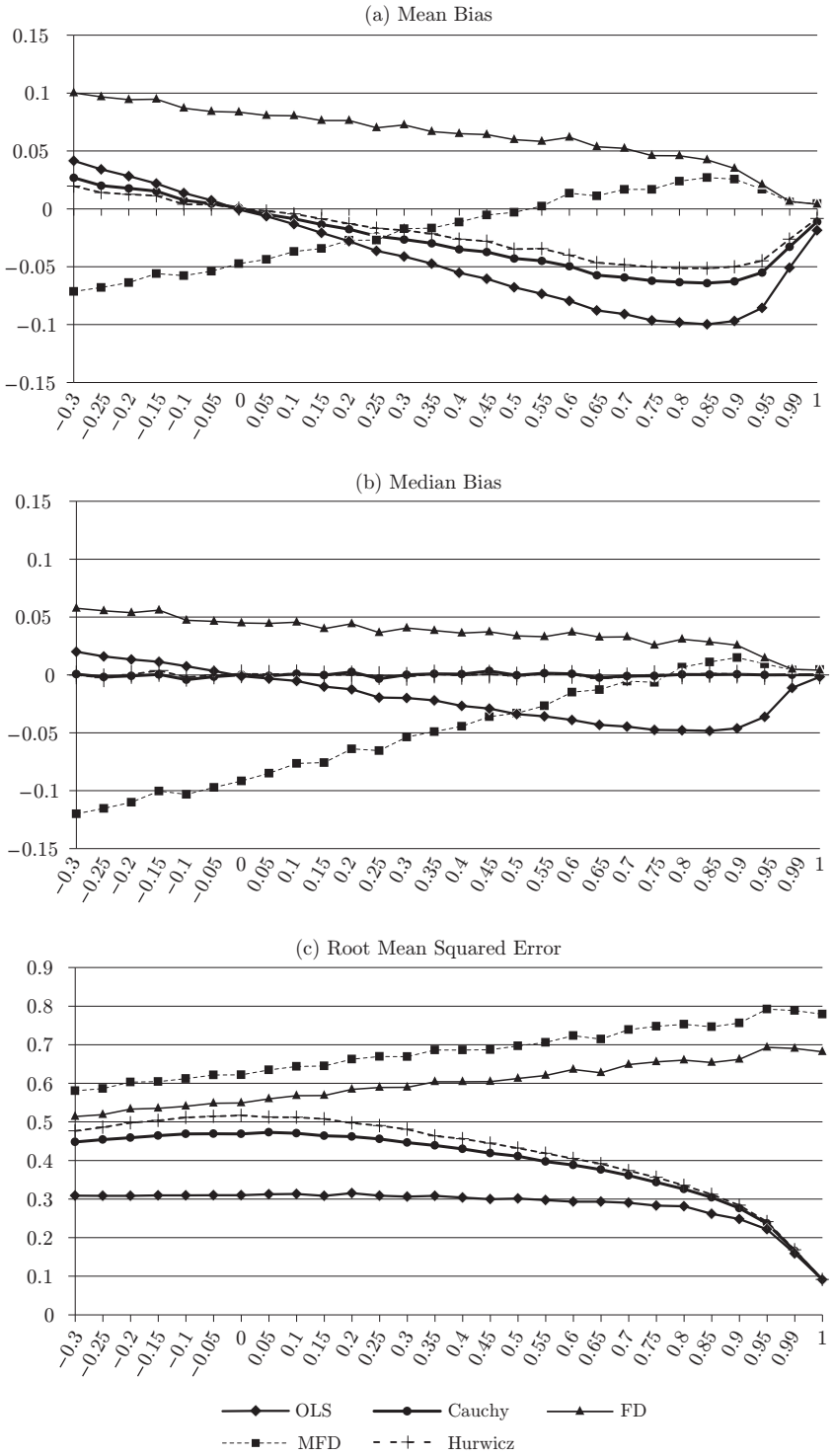

図 4　$\varepsilon_t \sim t(3)$ および $n = 20$ の時の ρ の値との関係

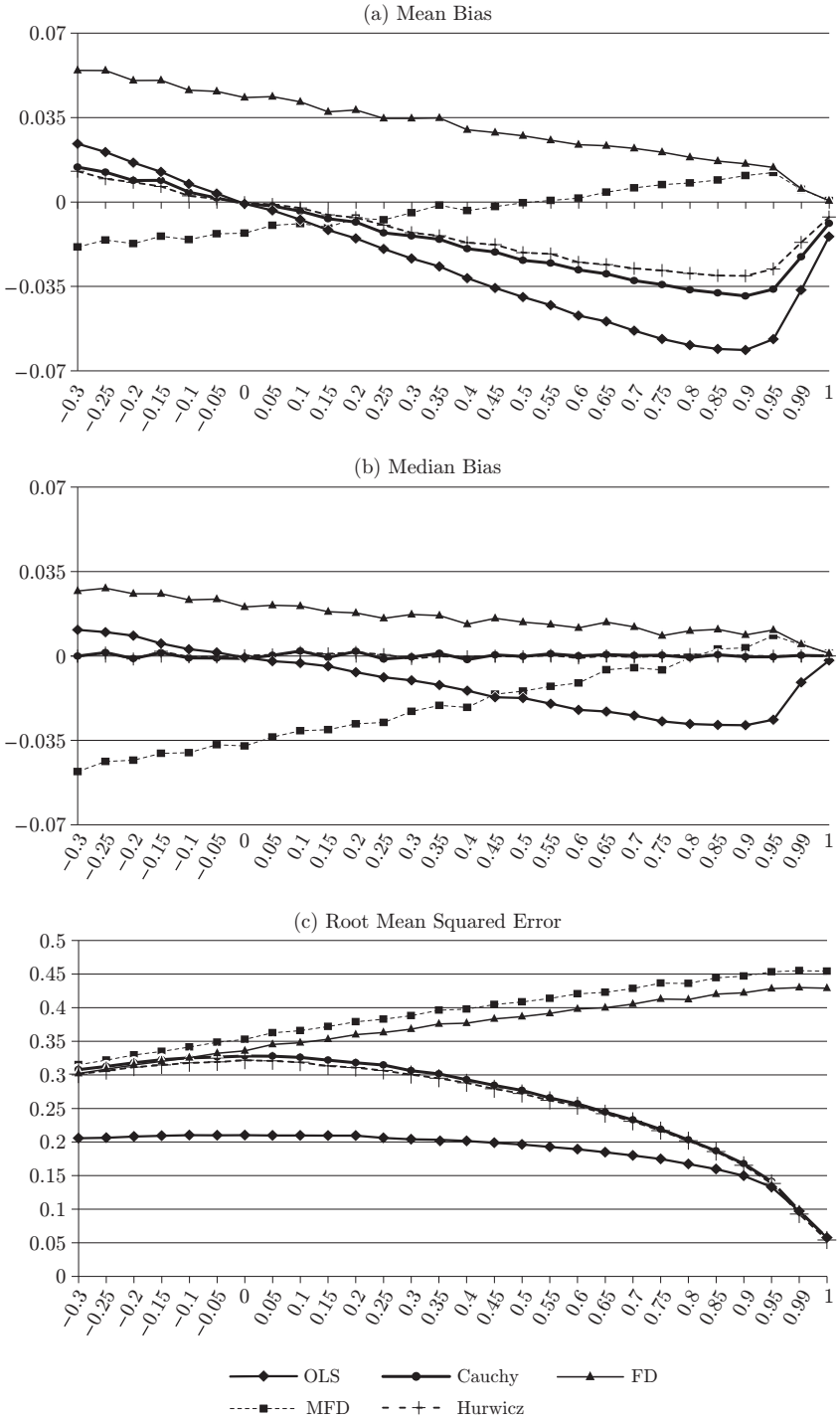

表 5　$\varepsilon_t \sim t(2)$ および $n = 10$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−61.882	−39.326	69.551	8.058	−29.720
0.80	−87.989	−58.116	70.726	52.258	−45.877
0.95	−74.826	−48.398	63.343	65.249	−35.937
0.99	−41.705	−26.523	3.347	2.396	−17.908
1.00	−14.694	−8.587	−2.994	−3.421	−5.630

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−24.529	2.925	32.976	−33.742	0.695
0.80	−38.206	1.293	40.752	18.002	−0.409
0.95	−26.139	0.443	38.893	37.307	−0.085
0.99	−6.661	0.230	10.885	11.012	0.129
1.00	−0.843	0.029	−1.664	−1.902	0.057

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	335.078	475.808	722.311	821.702	402.874
0.80	346.744	436.695	836.733	954.276	305.056
0.95	229.055	246.957	782.348	893.562	209.166
0.99	160.762	169.919	5447.246	6225.424	133.062
1.00	83.563	84.060	820.233	937.409	72.140

表 6　$\varepsilon_t \sim t(2)$ および $n = 20$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−35.560	−22.064	31.532	3.975	−18.498
0.80	−54.006	−34.986	30.965	21.022	−25.314
0.95	−51.125	−33.190	32.860	31.851	−21.591
0.99	−31.202	−19.528	18.144	18.623	−11.018
1.00	−12.039	−7.383	1.333	1.411	−3.804

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−14.661	−0.191	12.462	−16.216	0.385
0.80	−22.453	−1.187	14.039	3.101	0.041
0.95	−20.997	−0.139	18.450	16.594	−0.122
0.99	−7.494	−0.002	12.619	12.773	0.013
1.00	−1.0165	−0.0114	0.5936	0.6286	0.0165

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	194.485	305.105	401.956	424.308	243.005
0.80	178.296	220.676	447.773	473.444	174.374
0.95	137.777	144.305	472.022	499.592	114.612
0.99	91.660	94.277	460.758	487.839	71.237
1.00	52.745	51.555	443.636	469.732	39.232

図 5　$\varepsilon_t \sim t(2)$ および $n = 10$ の時の ρ の値との関係

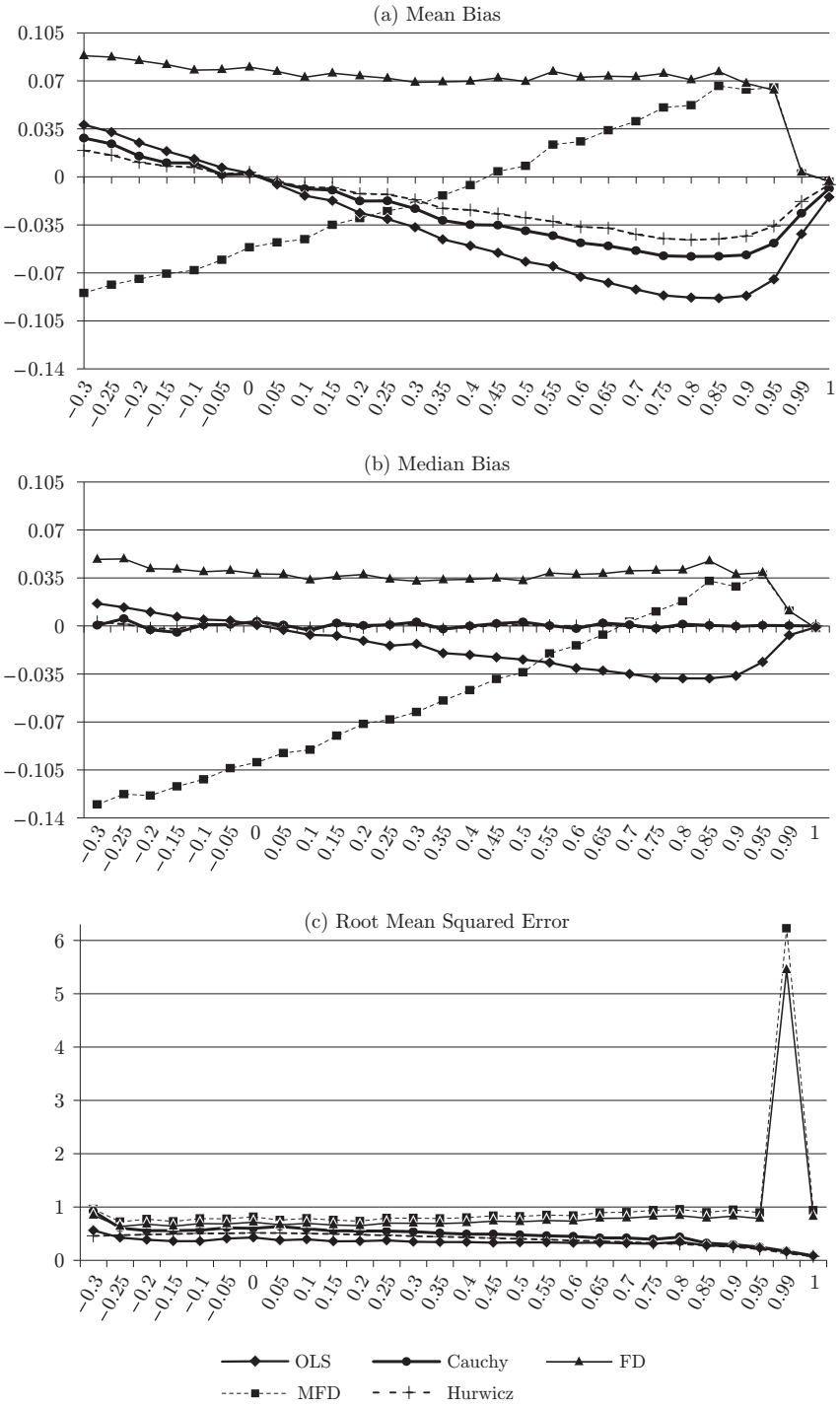

図 6　$\varepsilon_t \sim t(2)$ および $n = 20$ の時の ρ の値との関係

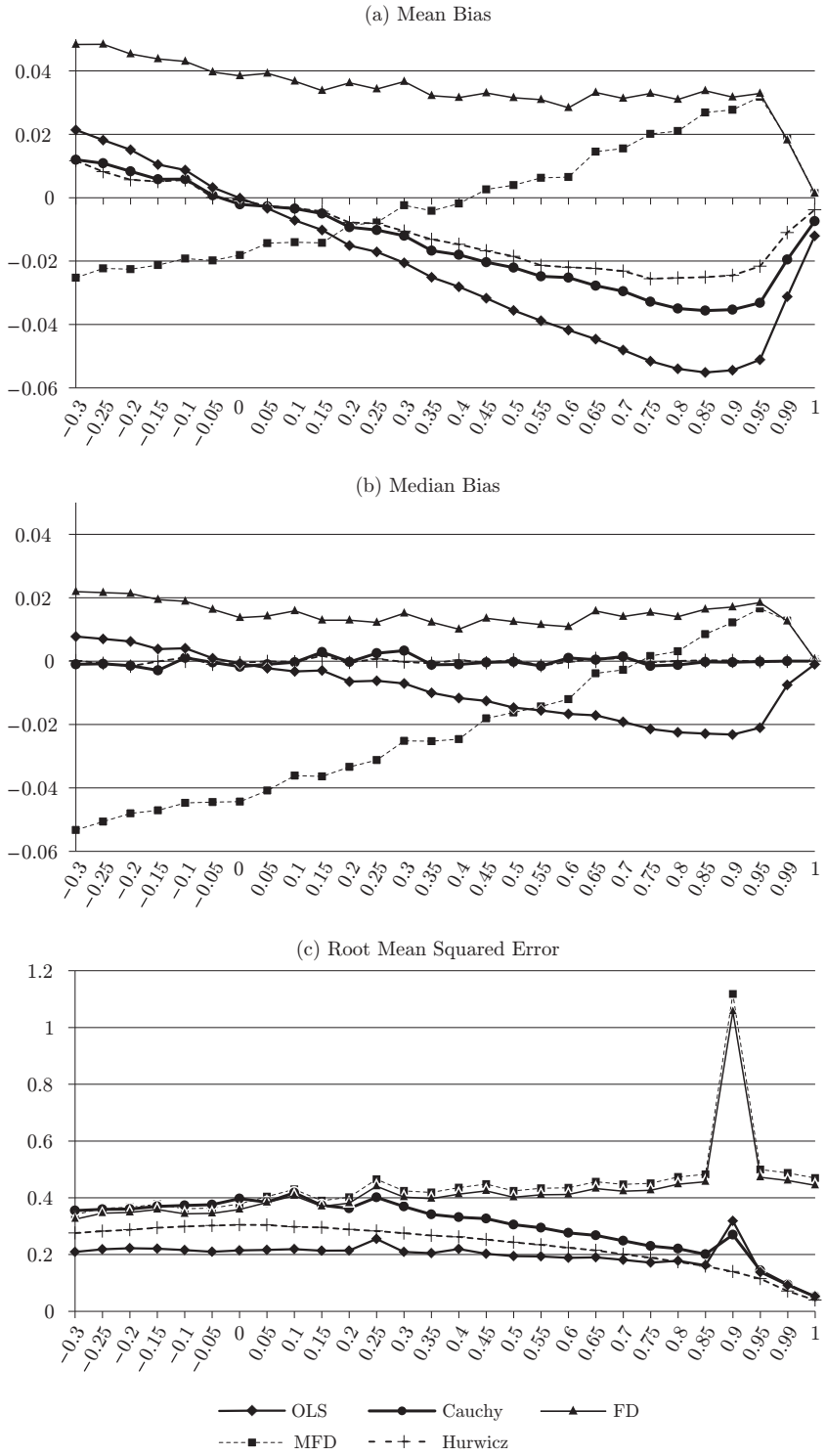

表 7　$\varepsilon_t \sim t(1)$ および $n = 10$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−9.865	−18.228	−7.126	−15.287	−2.221
0.80	−16.021	−22.541	29.181	30.492	−2.688
0.95	−4.204	−3.796	−14.129	−16.861	−1.351
0.99	−1.996	−1.171	23.960	27.240	−0.347
1.00	−0.610	−0.407	−58.664	−67.045	−0.079

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−0.730	0.224	3.016	−3.695	0.027
0.80	−1.176	−0.030	7.492	5.705	−0.002
0.95	−0.382	0.004	16.468	18.106	0.002
0.99	−0.025	0.0004	21.323	24.226	−0.0001
1.00	−0.001	0.000004	−0.026	−0.029	0.0001

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	1620.982	2489.656	4159.021	4753.185	31.095
0.80	2977.718	5847.210	1931.974	2207.929	20.550
0.95	387.042	903.563	14377.433	16431.353	11.489
0.99	188.324	155.122	4339.153	4959.032	5.082
1.00	27.217	27.959	17067.782	19506.036	2.439

表 8　$\varepsilon_t \sim t(1)$ および $n = 20$ の時の結果

(a) Mean Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−17.822	−13.483	79.328	54.583	−12.739
0.80	−37.117	−28.111	123.243	118.727	−12.644
0.95	−32.715	−21.630	487.737	513.486	−6.648
0.99	−14.344	−7.507	411.093	434.686	−1.978
1.00	−5.341	−3.194	−10.264	−10.867	−0.432

(b) Median Bias ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	−3.195	−0.967	5.841	−23.227	−0.128
0.80	−6.123	−0.601	19.857	9.260	−0.069
0.95	−5.111	−0.015	57.554	57.999	−0.008
0.99	−0.477	0.003	97.704	102.863	0.002
1.00	−0.026	−0.001	−0.350	−0.370	0.0005

(a) Root Mean Squared Error ×1000

ρ	OLS	Cauchy	FD	MFD	Hurwicz
0.50	3161.790	4475.802	9948.276	10533.275	163.925
0.80	655.506	1344.688	2423.484	2565.471	101.818
0.95	1085.715	2023.114	69786.129	73891.175	52.545
0.99	822.711	898.031	35395.564	37477.649	24.719
1.00	146.577	143.762	7409.572	7845.429	10.055

図 7　$\varepsilon_t \sim t(1)$ および $n = 10$ の時の ρ の値との関係

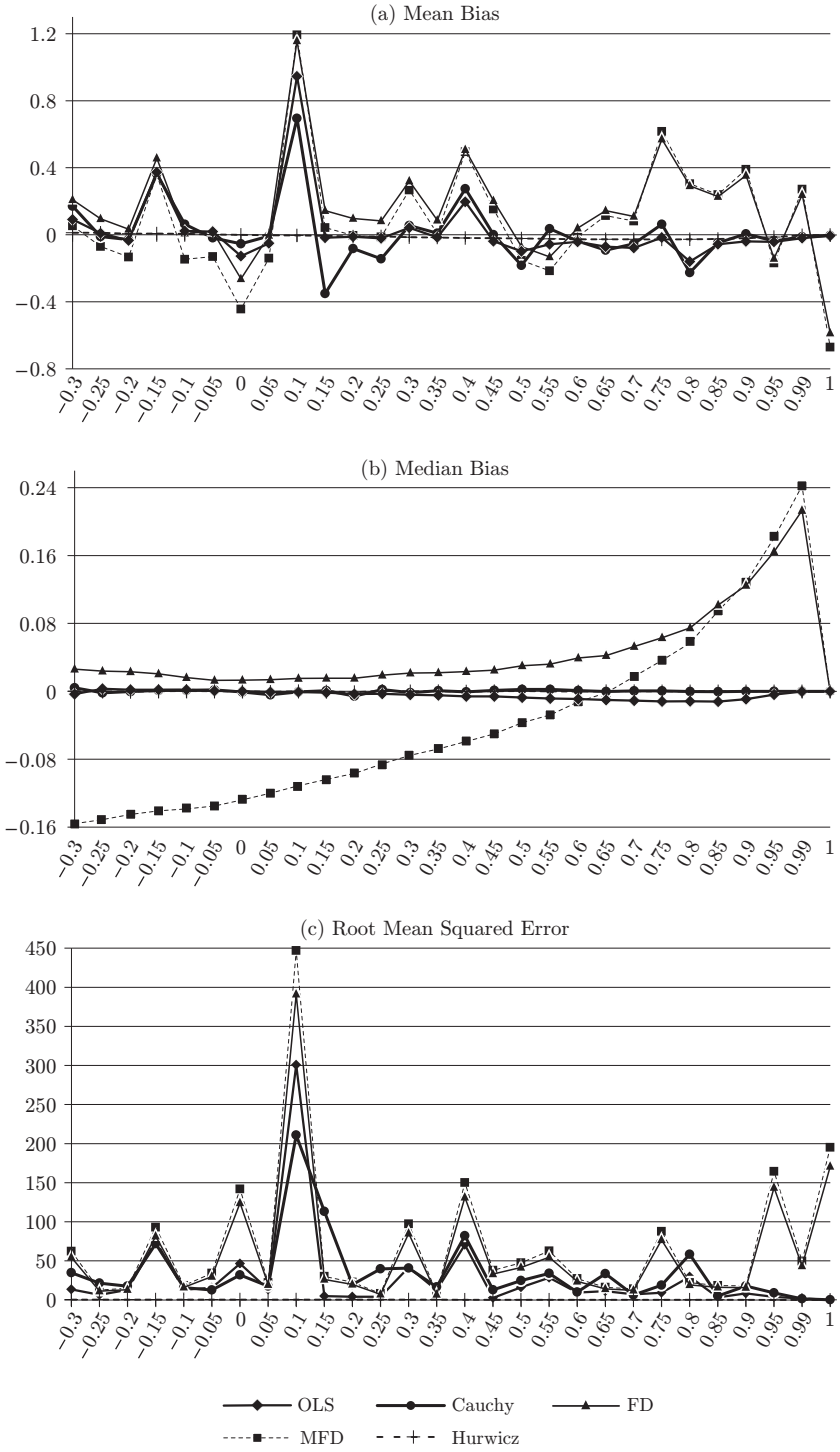
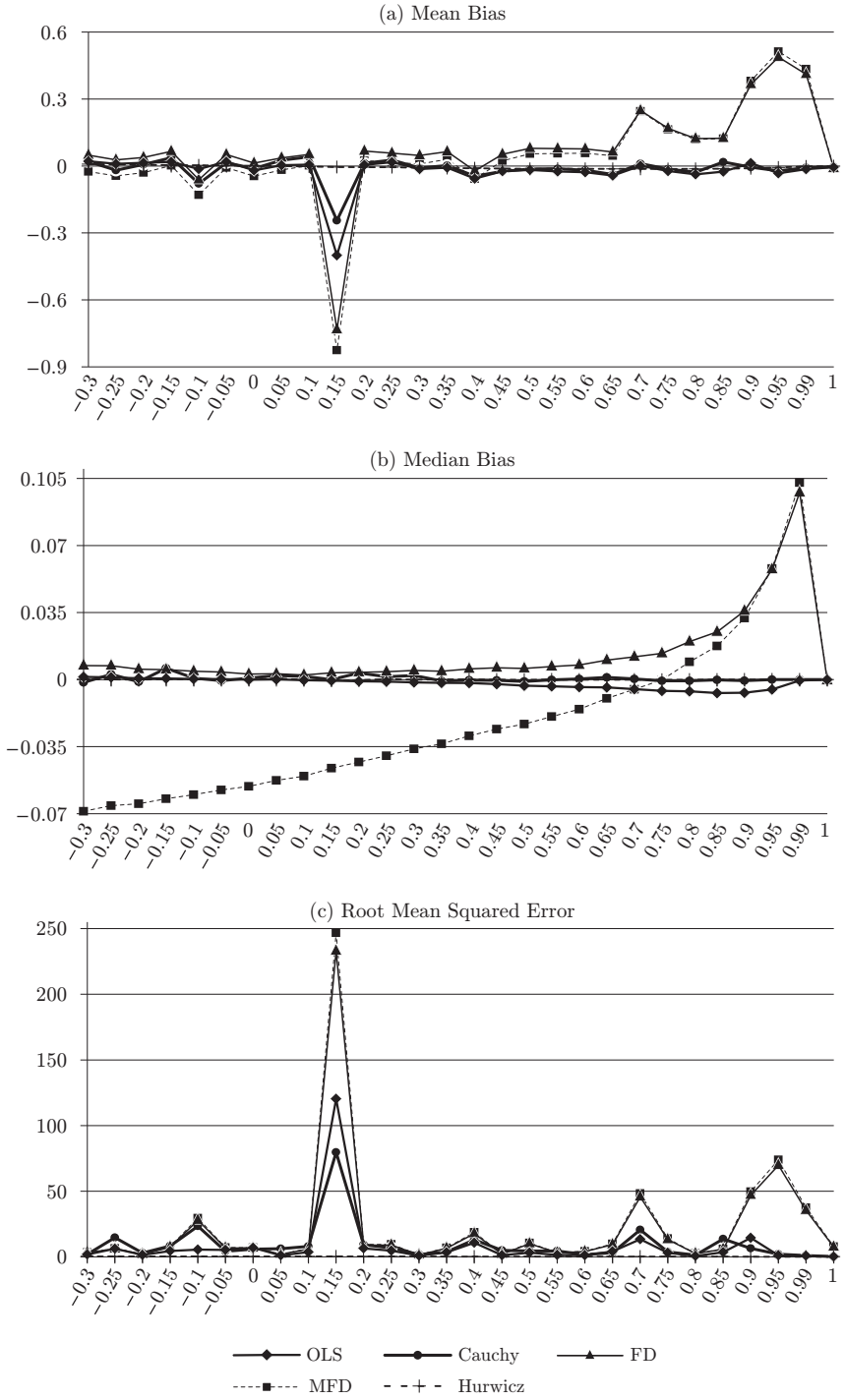
図 8　$\varepsilon_t \sim t(1)$ および $n = 20$ の時の ρ の値との関係