

Title	戦間期の数理経済学
Sub Title	Mathematical economics during the interwar period
Author	丸山, 徹(Maruyama, Toru)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2013
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.106, No.3 (2013. 10) ,p.323(1)- 348(26)
JaLC DOI	10.14991/001.20131001-0001
Abstract	<p>1920-30年代は第一次大戦の戦後処理, 大恐慌, そして第二次大戦へと雪崩をうって世界が崩れていく時代であった。そのなかにあつて経済分析と数学の間に深い実質的交渉が生まれ, 双方向の協力関係が育まれたのは偶然であろうか。イタリアのローザンヌ学派経済学, 景気変動の数理, ウィーンの数学・哲学の状況-これら三つの場面をデッサンしてみたい。</p> <p>The period between the 1920s and 1930s was a time when the world began to crumble as it dealt with the aftermath of the battle following World War I and proceeded to tumble head first into the Great Depression and World War II.</p> <p>Was it an accident that, under these conditions, a substantial negotiation between economic analysis and mathematics was borne and a two-way cooperative relationship was fostered?</p> <p>This study tries to outline three attractive scenes in the development of mathematical economics in the interwar period: the Lausanne School in Italy, the mathematical analyses of economic fluctuations, and the circumstances in Vienna.</p>
Notes	会長講演
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20131001-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

戦間期の数理経済学

Mathematical Economics during the Interwar Period

丸山 徹(Toru Maruyama)

1920-30年代は第一次大戦の戦後処理、大恐慌、そして第二次大戦へと雪崩をうって世界が崩れていく時代であった。そのなかにあって経済分析と数学の間に深い実質的交渉が生まれ、双方向の協力関係が育まれたのは偶然であろうか。イタリアのローザンヌ学派経済学、景気変動の数理、ウィーンの数学・哲学の状況-これら三つの場面をデッサンしてみたい。

Abstract

The period between the 1920s and 1930s was a time when the world began to crumble as it dealt with the aftermath of the battle following World War I and proceeded to tumble head first into the Great Depression and World War II. Was it an accident that, under these conditions, a substantial negotiation between economic analysis and mathematics was borne and a two-way cooperative relationship was fostered? This study tries to outline three attractive scenes in the development of mathematical economics in the interwar period: the Lausanne School in Italy, the mathematical analyses of economic fluctuations, and the circumstances in Vienna.

会長講演

戦間期の数理経済学

丸 山 徹

要 旨

1920-30 年代は第一次大戦の戦後処理、大恐慌、そして第二次大戦へと雪崩をうって世界が崩れていく時代であった。そのなかにあつて経済分析と数学の間に深い実質的交渉が生まれ、双方向の協力関係が育まれたのは偶然であろうか。イタリアのローザンヌ学派経済学、景気変動の数理、ウィーンの数学・哲学の状況——これら三つの場面をデッサンしてみたい。

キーワード

イタリアのローザンヌ学派、景気変動、遅れを伴う微分方程式、非線形振動、スルーツキー効果、フーリエ解析、ヒルベルトの数学観、論理実証主義哲学

はじめに

経済学会の会長講演は年末恒例の行事だそうでございます。会長の役職は年齢順に回ってくるもので、ハッと気がつきましたら、今年は私の当番ということになりました。私は昭和 52 年に三田の山へ帰ってきました、それからもときどき外国へ出かけて留守がちでありましたけれども、それも含めると、およそ 35 年ほど塾の講壇に立ってきたことになります。その間、日吉の基礎講義と申すべき経済原論を除きますと、三田では数理経済学の系統の講義と、それから、必ずしも専門家ではないのですが、経済学史の系統の講義と、このふたつを担当してまいりました。二足の草鞋をはいた私の経歴を顧ますとき、今日は数理経済学と経済学史と、その両方にまたがるようなお話しをするのもよからう、そう思いたちまして「戦間期の数理経済学」という演題を掲げました。戦間期というのはもちろん第一次および第二次世界大戦の間の時期を指す言葉でありまして、大体 1920 年代、30 年代、そのあたりの話しをさせていただきたいと存じます。

第一次大戦——もちろん私はそのとき生きておりませんでした、この戦争に取材した小説や映画をつうじて、虚実とりまぜてのドラマは私たちに親しいものとなっております。たとえばヘミングウェイ (E. Hemingway) の小説『武器よさらば』は何度か映画化の機会がありましたが、私が観

ましたのはゲーリー・クーパーとヘレン・ヘイズのあの映画だけでございます。ゲーリー・クーパーもいい男ですが、とくにヘレン・ヘイズ——舞台女優さんだそうですね。なんともいえず可愛らしく清純で、その後につくられた映画もスチール写真だけは見ましたが、清純さ、可憐さということにかけてはヘレン・ヘイズに及ばないと私は思います。いい映画でした。それから、レマルク (E. M. Remarque) の『西部戦線異常なし』——これもまず小説を読み、映画も観ました。皆さんのなかにもご覧になった方が多かろうと存じます。

トーマス・マン (P. T. Mann) の『魔の山』も忘れられません。ハンス・カストルブが病を養うオーストリア山中の療養所——この山上の小世界は、いわば思想の実験室でした。世紀末ヨーロッパの混迷した思想の衝突が、きわめて純粹かつ象徴的な形で無知な青年の精神に働きかけ、深い刻印を残したのでした。やがて 1914 年夏を迎えます。なんとか病の癒えた主人公は第一次大戦の戦場におもむき、「菩提樹」を歌いながら進軍、そして雨と薄闇と砲煙のなかに消えていくのです。トーマス・マンは人間を消す操作が上手な作家で、主人公を消す手際も見事です。映画もでございます。

また、第一次大戦が終わりましたとき、ケインズ (J. M. Keynes) は英国大蔵省首席代表としてパリの講和会議に参加しました。しかし会議の流れはケインズの思うとおりになりません。ついに彼は、席を蹴って帰りまして、『平和の経済的帰結』という、彼の文筆家としての名作を残しました。これはリットン・ストレイチー (G. L. Strachey) 流の皮肉な人物描写にすぐれた、特異な文学作品と呼びうるものと思います。戦争というものは文学を生むのですね。

今日は、ふたつの戦争の間の時期に生まれた経済学、といっても経済学一般というよりは、「数理経済学」の分野に焦点を絞って、いくつかのエピソードを物語りたいと思います。そしてこの時代の数理経済学に貢献した人々もみな、こうした文学作品や映画のヒーロー、ヒロインと同じ「時代の空気」を呼吸しながら研究に携わったのであります。

I. パレートとヴォルテツラ

1. ワルラスの一般均衡理論

経済学の歴史のなかで大きな曲り角、大事な区分点になるような時期がいくつかありました。ここでそれを洗いざらい申し上げるわけにはいきませんが、1870 年前後——これはたしかに大きな曲り角だったと思います。そこでいわゆる「限界革命」と称せられる思想の転換が起こりまして、経済学は新しい時代の幕を開けたのでした。より具体的に、この 1870 年前後というところで何が起こったか。私は「一般均衡」という考え方が、誰れにも誤解の余地のない、正確な科学の言葉で描き上げられたということが、1870 年前後の時期における経済学上の最も大切な収穫であったと思います。経済には相互依存的にいろいろな力が働いており、それがちょうど釣り合うところでわれわれが日々観察する経済現象が決まっていく。本当にそうなっているかどうかはともかく、そういう

ふうを考えてみようという経済現象の見方——それを一般均衡の考え方と称します。ただし経済学の歴史のなかにこの一般均衡の考え方が姿を現わすのは、もちろん1870年まで待つ必要はなく、たとえばアダム・スミス (A. Smith) の『国富論』を読めば、そこには明快に経済均衡の思想が説かれておりますし、スミス以前でさえ、たとえば、ジョン・ロック (J. Locke) の『利子・貨幣論』あるいは、ダッドレー・ノース (D. North) の『貿易論』を読めば、均衡の観念はかなり明確になってきている。ましてやスミスにもっと近づいた、ガリアーニ (F. Galiani) の『貨幣論』になると、これはもっとはっきりしてくる。このように経済均衡の観念、考え方は決して1870年に初めて始まったわけではなく、もっとずっと古い歴史をもつものでしょう。しかし、誰れが読んでも誤解の余地のない、科学の作法に則った科学の言葉でそれを描き上げるという仕事は、やはり1870年を俟って初めて完成したと申してよろしいかと思えます。

では、その仕事を完成したのは誰れであるかということになりますと、もちろんひとりの名前をあげるのは冒険です。だが、あえてひとりの名前をあげるとすれば、それはジェヴォンズ (W. S. Jevons) ではない、メンガー (C. Menger) でもない、マーシャル (A. Marshall) でもない。断然レオン・ワルラス (L. Walras) という人物の名をあげなければなりません。ワルラスの書物は率直に言って退屈な書物でありまして、当時それを何人が読みましたか、これはきわめて疑問でありましょう。したがって、ワルラスの考え方が学界全体の基盤として普及するまでには、随分と長い時間がかかりました。しかし一般均衡の最も根本的な骨格が組み上げられたのは、ワルラスの『純粹経済学要論』という書物においてである、そういつて間違いないと思えます。それは1874年と77年の二回にわたって、上下二巻本の形で出版されましたけれども、これを得たことが1870年代の経済学の進展のなかで、最も重要な収穫でありました。

いま申しましたように、ワルラスの一般均衡理論は、現代のわれわれにとりましては誰れもが知っている、経済学を考えるうえでの基礎的枠組を提供しているのですが、ワルラスの本が出てすみやかにそれが学界に定着し、学界の共有財産になったかと問うてみれば、そうではなかったのであります。殆どの人がそれを読まなかった、著者であるワルラスだけがそれを読んでいたというのが事実に近いのであります。

ところが時間の恩恵というものは有難いもので、時の経過とともに、少しずつ本当に少しずつつてありましたけれども、それに共感する人、それを理解しようとする人を、ワルラスは見出すようになりました。まず第一にヴィルフレド・パレート (V. Pareto) という人物の名前をあげるべきでございましょう。

本日の演題は「戦間期の数理経済学」ということではありますが、まず初めにパレートとその学派について、申したいと思えます。

2. パレートとその学派

パレートの父親はジェノアの公爵であります。マッケーニ派の急進的自由主義者で、パリへの亡命を余儀なくされておりました。ヴィルフレドは二月革命の年の夏、亡命先のパリで生まれたのです。やがて彼は故国へもどり、トリノの工科大学で十分な教養を身につけて世に出ました。ワルラスとは全く生まれも育ちも違う人物だったわけであり。当初は実業界で活躍しましたが、パンタレオーニ (M. Pantaleoni) という経済学者の紹介でワルラスに近づきまして、やがてワルラスの後継者としてローザンヌ大学の教授になった人です。

ワルラスとパレートの人間関係ははじめのうちは良好だったのですが、次第にすきま風が忍びこんできます。毎日会っていたのが一週間に一遍になり、そのうちその交流が手紙になり、封書が葉書になり、そしてついに何もなくなってふたりの間には橋も渡しもご法度という状態になってしまった。山崎豊子さんのひと頃話題になった作品に『白い巨塔』という小説がありますが、パレートとワルラスの反発のドラマは、まずローザンヌ版の『白い巨塔』といったところでしょうか。その話には立ち入りませんが、しかしながら、パレートがワルラスの一般均衡理論の最大の理解者であったということ、これは間違いのないところであろうと思います。

ここにパレートの主著を持参致しました。[供覧しながら] こんな小さな本です。これが1906年版のパレートの主著『経済学提要』です。この本が出まして、名実ともにパレートはワルラスの後継者として次第に、ローザンヌでの地歩を築いていったわけであり。

第一次大戦の勃発は1914年。ワルラスは1910年に歿しましたので、第一次大戦の不幸を見ずにこの世を去りました。一方、パレートが亡くなりましたのは1923年ですから、パレートは第一次大戦をわが目で見ました。純粹経済学の講義に専心していたパレートが、本格的に社会学の講義を始めるようになったのは1898年のことです。この年に裕福な親戚が亡くなりまして、パレートはその莫大な遺産を相続します。これが機縁かどうか知りませんが、ちょうどこの年に社会学の研究と講義を始めます。社会学はパレートなりにワルラスを超えようとする試みだったのかもしれない。この年は彼に富をもたらしましたが、不幸をももたらしました。彼の愛妻であったロシアの公爵令嬢アレクサンドリーナ・バクニン (A. Bakunin) を失ったのです。この夫人が30個のスーツケースを携え、パレート家の若い料理人を連れて出奔してしまった。要するに料理人と恋の逃避行を遂げるという事件が起こりまして、パレートは最愛の夫人を失うことになるわけであり。それとともに彼の社会学は始まったわけで、彼の社会学のなかには私生活が若干暗い影を落としているのかもしれない。1907年以降、彼はジュー・ルジス (J. Regis) というフランス人の婦人と、20匹のアンゴラ猫とともにセリーニュに隠棲し、そこで1923年に亡くなりました。

パレートは、ワルラスの一般均衡理論を継承し、それを緻密化し、広く拡張することに貢献致しました。しかしパレートの仕事として最も有意義であったものは何であったかといえば、イタリアにワルラスを受け入れる素地・土壌をつくったこと、これであろうと私は思います。もちろん学問

の実質的内容も大きな貢献でしたが、それと同じぐらい、あるいはそれ以上に、イタリアにワルラスの学派の育つ土壌をつくったということを、私は強調したいのです。

具体的な人名をあげますと、最も著名なのはエンリコ・バローネ (E. Barone)、それからウンベルト・リッチ (U. Ricci)、デ・ピエトリートネッリ (A. de Pietri-Tonelli)、ルイジ・アモローゾ (L. Amoroso)、こういった人々です。アモローゾは元来数学者でありまして、ローマ大学やバリ大学で教えた人です。第一種の積分方程式でありますとか、時間の遅れのはいった微分方程式でありますとか、そういう数学の仕事をたくさんした人です。この人が経済学に関心をもち、ワルラスの理論の理解者になりました。それから、デ・ピエトリートネッリ、この人はヴェネチア大学出身の経済学者でありまして、母校で経済学者として長く教鞭を執った人です。ワルラス理論の理解に努め、大きな書物をいくつか残しました。リッチはどちらかというともーシャルの学風に近い人であったというべきかもしれませんが、ワルラスの理解者であったことも確かなところでもあります。

このような人々が、さまざまな形でワルラス理論を理解し、それを少しずつ改良し、一般化し、そしてそれを材料にして決定的なレベルではなかったかもしれませんが、たくさんの結果をこのイタリアの地に堆積していきました。イタリアに、比較的若い多くの学者がワルラスの経済学をテーマにしていろいろな細かい結果を積み上げていった、その蓄積が大切であったと申したいのです。そしてこのグループのリーダーはパレートであった。この蓄積の上に1915年という年がくるのです。

3. スルーツキーの消費者均衡理論

1915年——第一次世界大戦開戦の翌年ではありますが、ロシアの数理統計学者オイゲン・スルーツキー (E. Slutsky) の論文が発表されます。「消費者予算の理論について」という、いまでは有名な論文がイタリアで、しかもイタリア語で発表されました。スルーツキーは本来数理統計学者であるにもかかわらず、いろいろな機会に経済学にも関心を示しまして、自分としても自信作だったのでしょう、この論文をイタリアの『ジオルナーレ・デリ・エコノミスティ』という雑誌に寄稿しました。なぜイタリアの雑誌に、しかもイタリア語で発表したのか——この点は興味をそそられるところです。常識で考えまして、この論文を発表するのに最適な理解者を得られる土地はイタリアだと思ったからではないでしょうか。スルーツキーの論文の内容は皆さんご承知のとおりでありまして、消費者の需要関数の導出と、価格や所得の変化に対して、最適な需要量が如何に変化するかの分析、つまりただいまの言葉でいう比較静学であります。このテーマを正確に数学的に分析したものでありまして、今日われわれがヒックス (J. R. Hicks) の『価値と資本』やサミュエルソン (P. A. Samuelson) の『経済分析の基礎』で学びます消費者行動の理論の本質がスルーツキーの論文のなかで既に仕上げられているのであります。

そしてその原形を求めれば、先ほどご覧に供しましたパレートの小さな本に辿りつくわけでありまして。スルーツキーはパレートに倣い、パレートについて研究を進めながら、1915年の論文を書い

た。自らの仕事の最高の理解者を得られるのは、ワルラスとパレートの理論が実質的に蓄積されているイタリアの学界においてほかにない、もしスルーツキーがそう考えたとしても、これは全く無理のないところだと思います。

それと同時に、スルーツキーの論文がイタリアに送られて、それが『ジオルナーレ』誌に載ったということは、『ジオルナーレ』の編集者たちがこの長い論文の内容を認め、これに掲載するに適格であると判断した、判断することができたという、受け入れ側の能力も考えておかねばなりませんね。ワルラス-パレートの経済学の最高の理解者がイタリアに揃い、それを育てる雰囲気はイタリアの地に醸成されていたということ認めなければならない。だからこそスルーツキーはイタリア語で、そしてイタリアの雑誌にこの論文を投稿したのでしょう。ここではその中身について立ち入ることはできませんが、しかしながらこの論文がなければ、ヒックスやサミュエルソンの消費者均衡理論をはじめとする経済学の進歩は相当に遅れたであろうと思われる。

ところで、ヒックスが『価値と資本』およびその材料となる論文を書きますときに、数学者アレン (R. G. D. Allen) と共同で研究を進めましたけれども、アレンとヒックスははじめはスルーツキーを知らずに仕事をしていたらしい。このへんは学説史研究のなかでも少し揺れのあるところだと聞いております。アレンとヒックスはスルーツキーとは独立に彼らの消費者均衡理論を開発しつつあった。その途中でスルーツキーの論文に出会って、それを援軍としてさらに仕事を進めたというのが真相のようであります。ですからスルーツキーがいなくても、アレンとヒックスは独力でその仕事を完成したかもしれませんが、途中でスルーツキーの研究に出会ったことによって、大きな援軍を得た。彼らの仕事はより豊かなものになり、違った視点から自分たちの仕事を見直す機会を得て、その後の発展の基盤を一層大きくすることができたのでしょう。スルーツキーの論文は、イタリア語で書かれたこともあってあまり人に読まれませんでした。その後の経済学の発展にとっては不可欠の一石を投ずる論文でした。それが1915年です。

そして、やはり戦間期であります。二十数年の星霜をへだてて1939年にヒックスの『価値と資本』の初版が出ます。第二版が出たのが46年です。さらにその翌年にサミュエルソンの『経済分析の基礎』が出るわけであり。一般均衡理論の最高の古典と申すべき、ヒックス-サミュエルソンの研究が形を成すにあたっては、スルーツキーの仕事が決定的な道標になったことは間違いのないところと存じます。

繰り返して申しますが、あまり人の知らなかったワルラスの学問を何とか理解してそれを広め、少しずつ育成しようとする土壌がイタリアにはあった。イタリアはワルラスの理論を育てる「苗床」であったという表現を、私は別のところで使ったことがあります。この「苗床」をまず先頭に立って耕した農夫が、主としてひとりで耕した農夫がパレートであった——こう申したいのであります。

パレートやスルーツキーの成し遂げたことも、今日目で見れば、ただ初等的な微・積分を使って計算しただけといわれるかもしれませんが、数学的に厳密な古典的一般均衡理論の最も基礎的な

部分は、こうして長い歳月の経過のなかで少しずつ成熟してきたのです。そしてそれを可能にする力がイタリアの地に蓄えられていたのであります。

4. イタリアの科学界とヴォルテッラ

イタリアについてももうひとつ申し上げておきたいことは、この時代のイタリアにおける科学界のはつらつたる空気、これであります。経済学を若干離れますけれども……。戦間期におけるイタリアの科学新興に最もリーダーシップを発揮し、数理科学全般に顕著な影響力を及ぼした人物としてヴィトー・ヴォルテッラ (V. Volterra) の名を忘れることができません。ヴォルテッラ以前のリーダーはトリノ大学の数学者セルラ (Q. Sella) であります。1871年のイタリア統一以降、イタリアの科学界をまとめ、ローマ大学を中心に物理学・数学あるいは科学一般を振興させようと新時代の文部行政に絶大な努力を払ったのがセルラという人物でありまして、今日も残っておりますリンチェイ学士院の基盤をつくったのもこのセルラであります。

そして20世紀へのかわり目、ローマ大学の数理物理学の教授としてヴォルテッラが就任します。セルラはまだ40歳のこの若い教授に自分のバトンを託しまして、その後はヴォルテッラがイタリアの科学界全般の、ひとり数学だけではなく、科学界全般のリーダーとして絶大な努力を払う時代を迎えたわけであります。ヴォルテッラはポジションとしては物理学の教授でありましたけれども、数理科学全般にわたって永く伝えられる大きな業績を残しました。今日でも数学科の函数解析学の教室では必ず教えられる積分方程式の理論でありますとか、あるいは、生物界における栄枯盛衰を記述する微分方程式など、こういった有名な理論はみなヴォルテッラがつくったものであります。彼はイタリア人だけではなくて、世界中の優れた科学者、とくに数学者をローマに呼び集め、ローマで若い人材を育てようと真剣に考えた人でありまして、そのときにヴォルテッラに招かれてローマで研究生生活をした人は外国人に限りまして、もう綺羅星の如き名前があがってまいります。数学の分野ではヴェイユ (A. Weil)、ザリスキ (O. Zariski)、マンデルブロー (S. Mandelbrojt)、それからエヴァンス (G. C. Evans) 等々。ヴォルテッラの努力によってローマ大学は、国際的な広がりをもった、質の高い数理科学の研究センターになっていたと申すべきでしょう。

またヴォルテッラとともにこの時期のイタリアの数理科学を支えた学者としてエンリク (F. Enriques)、レヴィーチヴィタ (T. Levi-Civita)、カステルヌオーヴォ (G. Castelnuovo) らの名前が輝いています。そして、ヴォルテッラを含み、これらの人々はみなユダヤ人でした。

1901年、ヴォルテッラの教授就任講演がローマ大学で行なわれました。そのときの演題は「生物学・社会科学への数学の応用の試みについて」。この講義録はまず『ローマ大学年報』に発表され、やがてフランス語に訳されて『ラ・ルヴュー・デュ・モア』誌にも出たのです。これを読んだ読者のひとりにはワルラスがいた。まだワルラスは生きておりました。ワルラスはこれを読んで非常に感激した。ヴォルテッラこそ自らの学問に王冠を授ける審判者と映じたようであります。何が彼をそ

んなに感激させたのか。たしかにヴォルテッラの講演には、ワルラス-パレートによる数理経済学の方法を、その根本において是認する思想が鮮明に語られております。具体的には以下のような内容です。

第一。経済学においては、現実には必ずしも満たされていない、いろいろな条件や概念が使われている。たとえば、最も合理的に自分の欲望を満たそうとする「経済人」の概念。あるいは完全競争という概念。そういう現実には満たされない前提や概念に依拠する経済学という学問は非現実的で信をおくことができない——こういう批判が昔からあったのであります。これに対してヴォルテッラは強い調子で反論します。ひとつの理論を構成するためには、第一次的な近似として、現実には満たされていない理想的な状態を考え、そこから結論を引き出す。それに逐次条件を加えて、もっと詳しい分析に達する。それは経済学でも物理学でも同じであって、どの科学においてもその方法に変わりはない。正当に行なわれるかぎり、これは全く妥当な科学の方法なのである。ヴォルテッラはこういいました。ワルラスにせよパレートにせよ、この言葉に天上からさす光明を感じたことは無理からぬことでしょう。

第二に、均衡という分析上の概念についてであります。現象の研究をするためにはまずさまざまな力が働き、それがちょうど釣り合うところ、つまり均衡状態を想定してそれを調べる。均衡状態を外れると運動が生ずる。その運動を均衡に近づける力と、逆に離反させる力が働く。この相互作用から運動のありさまを研究すること、これは物理学も経済学も同じであって、全く正しい学問の作法であることを、ヴォルテッラは力をこめて語りました。

そういう科学の作法に関するヴォルテッラの弁護が、ワルラスとパレートを大いに感激させたと伝えられています。

ところが、もうひとつつけ加えて申し上げておきたいのですが、ヴォルテッラはこうもいっています。彼は極端なまでの経験主義者でした。経済学でも物理学でも、用いられる量の概念はあくまでも可測的な量に限られるべきこと——実際に測定できる量以外のものは使ってはならないことを、明確に論じているのです。これがヴォルテッラの第三の論点であります。では「効用」はどうでしょうか。実は効用概念をめぐるのはワルラスに対して非常に多くの批判が浴びせられ、ワルラス自身も大分迷った証拠があります。自分の使っている効用概念の可否をめぐる思い悩み、その疑問に勝てませんで、当時第一の——といってよいのでしょうか——数学者に相談します。アンリ・ポアンカレ (H. Poincaré) がその人であります。ポアンカレはワルラスよりもずっと年下の学者であります。パリのポアンカレに丁重なる手紙を出しまして、意見をただしたのであります。

ポアンカレからワルラスへの返信は、1901年9月30日付であります。優れた内容の手紙であります。そのなかでポアンカレは、今日いわゆる「序数的効用理論」の立場を実にゆき届いた完全な筆致で説明したのでした。まず選択の対象となるさまざまな消費計画の間には選好の序列が定まっていると考えます。その序列を実数の大小で表現する関数が存在するとき、これを効用函数と呼ぶ。

これは測定の単位（目盛り）の存在を前提とするものではなく、ただ選好の序列を表現するにすぎない函数であります。したがって、もしそういう効用函数が存在するとしても、同じ選好の序列を表現する効用函数はいくらでもある。ひとつあればいくらでもあるわけです。しかしながら、そこから導かれる結論、たとえば、効用函数を極大化して需要函数を導出したとき、引き出されてくる需要函数は効用函数の選び方、恣意性からは独立でなくてはならない。どの効用函数を使っても、共通に得られる結果のみが有効なのであって、その作法を踏襲する限りにおいて、ワルラスの方法は全く正しい。このようにワルラスの効用分析に対する方法論的正当性を是認・承認する長い手紙を、ポアンカレはワルラスに書き送るのであります。ワルラスは読んでそれを理解し、大いに安心した。そしてポアンカレの手紙を、自分の最後の仕事になりました「経済学と力学」という論文の付録として、これを公にしたのです。それほどポアンカレの手紙にワルラスは感謝したのでしょう。

このワルラスとポアンカレの主張は、まさに今日われわれが「序数的効用理論」の立場と呼んでいる考え方で、効用の厳密な意味での量としての可測性を前提とする理論ではありません。しかしヴォルテッラは、数学の使用する量は厳密に可測的な量に限られることを要求したのです。経済学にせよ物理学にせよ、そのなかで使われる量は、実際に厳密な量として測定可能なものしか使ってはならないのだと述べました。ヴォルテッラはいわば基数的な測定を要求する立場に立っているのです。ワルラスはヴォルテッラの言葉に感激したあまり、そこをどうも読み落としてしまったらしい。これをもし慎重に読んだとすれば、自分の立場とヴォルテッラの立場は、もちろん真つ向から衝突するはずでありました。ここで論争が起こってしかるべきだと思いますけれども、不思議なことにワルラスはこの点については一言も述べておりません。おそらく彼も年をとってまいりましたし、ヴォルテッラの第一、第二の論点に感激してしまったあまり、第三の論点はサッと読んで通り過ぎたのではないかとも思われます。でもここで両大家の間にもし議論が起こっていたらちょっとおもしろかったと思うのですが……。

一方、経験主義者のヴォルテッラは、パレートの『提要』を読んで喜んだ。非常に強い賛同を示しました。というのは、この本のなかには効用函数を除去しようとする鮮明な姿勢が示されているからです。つまり効用函数は不用で、無差別曲線だけですべての需要の理論を構築することができます、というのがパレートの立場でありました。むしろ原理的には観察可能な需要函数あるいは逆需要函数が与えられたものとして、極大化をつうじてそれを生成するような効用函数を逆算して求めることができるかもしれない。もし求めることができるのなら、無差別曲線から出発するパレートのような、つまり客観主義の立場と、目に見えない効用函数から出発するワルラスの主観主義的な立場とが、そこで結びつくわけです。観察される需要函数が与えられたとき、極大化をつうじてそれを生成する効用函数の存在が論理的に確認されるならば、——本当の人間はそんなことをしているかどうかわかりませんが——人はあたかもその効用函数を極大化するかのよう^かに行動する、そう考えて人間の需要行動を説明することが許されるでしょう。パレート流の客観主義の立場

とワルラス流の主観主義の立場が、一応矛盾なくそこで手を結ぶことができるのです。そういう方法をパレートはあまり丁寧にはいいませんが、『提要』のなかで提案しているわけです。

このようなパレートの哲学的・方法論的洞察に対して、ヴォルテッラは「パレートの稀有な努力」と賞賛し、分析の改善と「真理と知識に対する気高くも無私の愛情」から生まれた成果と評価しました。『提要』の書評を書いたのもヴォルテッラです。自分は物理学者であり数学者なのに、経済学にも親切的な理解を示しまして、わざわざこのパレートの本の書評を書いているのであります。このようなヴォルテッラの数理科学振興のための努力は、他人ごとではありません。われわれの努めて見習わなくてはならない清々しい心意気だと、常日頃心に銘じているのであります。

ついでにもう一言だけ申し上げますが、私は先刻、需要函数からそれを引き出す効用函数を「逆算」して求めるといいましたが、これは通常「積分可能性の問題」と呼ばれるものです。これについてのいちはやい業績も実はイタリアに現われました。1886年に元来はエンジニアであったジョヴァンニ・パティスタ・アントネッリ (G. B. Antonelli) という人が『数理経済学の理論について』と題する長い論稿を書きまして、そのなかで積分可能性の問題をめぐる非常に興味深い結果を出しているのであります。それがパレートやそのお弟子さんたちにも受け継がれ、そして今日までその問題が残ってきているのです。

以上、イタリアのことについて長々と申し上げました。パレートという人物を媒介にして、ワルラスの学問がイタリアに継承され、そしてほかのどこでもない、イタリアの地にワルラスの学問を育て、やがて豊かに実を結ぶ土壌が培われていった。そして土壌の灌漑・耕作に第一に力を尽くした人物はパレートでありました。戦間期におけるイタリアのローザンヌ学派の静かなる生産力とヴォルテッラの率いた科学界の努力を、とくに申し上げたかった次第です。これが私の話しの第一のテーマであります。

II. 経済動学への途

1. 動学的方法

次に、第二の問題に移りたいと思います。先ほど、スルーツキーの研究について述べましたが、この人はロシア人、正確にいうとウクライナ人です。存じませんでしたが、ウクライナとロシアでは、言葉も違うのだそうですね。そして1917年の革命が起こったあとも、ロシアとウクライナとの間の政治的な関係は非常に微妙なものがあつたらしいのです。ですからウクライナ人であつたスルーツキーの人生にも政治が影を落としておりました。しばらくはウクライナのキエフで仕事をしていたのですが、そこに居難くなる事情が生じます。ウクライナ語で講義をすることを強制されるといったことがあつたらしいのです。彼はウクライナ人ですから言葉はできるのですが、そういう強制に非常に反発を感ずる人物であつたらしい。そして緩やかな意味で社会主義者であつた。こ

んなことが重なってウクライナのなかで受け入れられ難かったのでしょう、やがて彼はモスクワに居を移します。それが1920年代にはいつてからのことでもあります。

スルーツキーが1915年に「消費者予算の理論について」という重大な論文を書いたことは先ほど申し上げたとおりですが、スルーツキーは実はそれ以外にもいろいろ経済学の研究をしている。彼の経済学の最初の仕事は「ウィリアム・ペティについて」と題されたものです。これは高橋誠一郎先生のような学史研究をしたわけではなくて、おそらく統計学者としてのペティに関心があったのであろうと思います。それから「ボエーム-バヴェルクの効用理論について」など、私は今度調べてみて初めてわかったのですが、随分いろいろなものを書いています。しかし、いずれも習作のようなレベルにとどまりまして、決定的な影響力をもつものではありませんでした。ところが、ひとつ決定的な影響力をもつ仕事が生み出されたのです。それは1927年に彼がロシア語で書いた論文で、それが10年後に翻訳されて1937年『エコノメトリカ』誌に掲載されました。これが現代の景気変動論や時系列解析に深い影響を与えました。たとえば現在の学生たちにもよく読まれている、サージェント (T. J. Sargent) の教科書『マクロ経済理論』や、ハミルトン (J. D. Hamilton) の書きまじった大作『時系列解析』には、それぞれ一章を割いてスルーツキー理論の説明が含まれております。その仕事をスルーツキーは1927年に発表しました。今日は次の話題として、スルーツキーのこの方面の研究を、その他の景気変動理論やそれを支えた数学上の発展とからめて申し上げたいと思います。いわば「経済動学への歩み」がこのふたつの大戦の間の時期に大きく進展したありさまを大雑把に辿ってみたいのです。

この期間に上梓された本を思い浮かべてみましょう。大きな本としましては、1920年にピグー (A. C. Pigou) の『厚生経済学』が出ました。それから、1936年にケインズの『一般理論』もこの戦間期の産物です。それから、持参致しましたこの本はハイエク (F. von Hayek) の『資本の純粹理論』の初版で、1939年に出ました。[供覧] いろいろな本や論文が出たなかで、この話しのテーマとしてどうしても見落としたくないものがダイナミックスの発展という側面なのであります。

「経済動学」とは何か。経済学の歴史のなかでも、「ダイナミックス」とか「キネマティクス」という言葉はいろいろな場面で使われておりまして、決して言葉として新しいものではありません。パレートもこの言葉を使いました。ただし、パレートが動学という言葉で意味するのは、われわれの理解する意味とは違うようです。彼は経済やその他諸々の人間生活を包み込む社会的体制の大きな転換を扱う理論を動学と呼んでいる。つまりパレートにとっての動学的理論とは、社会学でいう社会変動理論のような研究を意味するものであります。

今日経済学に限らず科学の世界で動学という言葉を使うときには、関心の対象になっているいろいろな変数の、時間の流れをつうじての動きを説明する法則を含んだ理論を指すのでございます。昭和20年からただいままでのGDPを年代順に並べただけでは動学にはなりません。そうではなく

て、昭和 20 年と昭和 21 年の GDP がわかると、そこから昭和 22 年の GDP が計算でき、昭和 22 年の GDP が計算できると、その次がわかるといった具合に、つまり時間をつうじての変数の動き、運動を説明する原理を含んでいる理論のことを動学と呼ぶのであります。

2. R. フリッシュ

この言葉の意味を初めて経済学の世界で明確にしたのはラグナー・フリッシュ (R. Frisch) であったと思います。1933 年、グスタフ・カッセル (G. Cassel) を記念する論文集にフリッシュが投稿した長い論文のなかに、この概念の明確な説明が出てまいります。そして今日行なわれております多様な景気変動理論の原形となる理論をフリッシュはつくりあげました。フリッシュ理論にはいくつか不自然な点もありますが、その後のサミュエルソンであれ、ヒックスであれ、カルドア (N. Kaldor) であれ、あるいはより現代の理論家であれ、みなフリッシュ理論を基礎として学びながら、景気変動の理論をつくっていったのではないかと思います。

百聞は一見にしかず——まずフリッシュのやりましたことをざっと眺めてみることにしましょう。[以下、黒板を使いながら] $Y(t)$ を第 t 期の GDP とし、その水準は第 t 期の消費需要 $C(t)$ と投資需要 $I(t)$ の和とかみ合うところで決まると考えてみます。

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (1)$$

あたりまえの式ですが、実はこの式はフリッシュ論文にはありません。彼の研究はケインズ革命以前のもので、(1) 式で表現された GDP の決定原理が欠けているのです。そのかわりに、少々不自然な式が書かれているのですが、ここでは常識的に上の式を使っていきたいと思います。

(1) 式右辺に現われる消費需要は、消費性向 c を $Y(t)$ にかけて水準に定まる。

$$C(t) = cY(t). \quad (2)$$

それから投資 $I(t)$ はどう決まるかといいますと、

$$I(t) = v\dot{Y}(t). \quad (3)$$

これは資本ストックの変化率が $Y(t)$ の変化率 $\dot{Y}(t)$ ——これは時間についての導関数です——、これにある定数 v を乗じた大きさに決まるといふ加速度原理にはかなりません。加速度原理をフリッシュは既に知っておりました。加速度原理を誰れがつくったか、これも学説史上のひとつの謎ですが、私は 1913 年のアフタリオン (A. Aftalion) の著作あたりが、この原理の源流ではないかと推測しております。フリッシュは、おそらくアフタリオンに学んだこの加速度原理を投資の決定原理として採用しているわけです。

この (2), (3) 式を (1) 式に代入しますと,

$$Y(t) = cY(t) + v\dot{Y}(t). \quad (4)$$

これをまとめてしまいますと,

$$(1 - c)Y(t) - v\dot{Y}(t) = 0 \quad (5)$$

——こういう方程式になりますね。これはごく簡単な一階の常微分方程式であります。これでは振動は出ません。この方程式の解は時間とともに増大するか減少するかのどちらかでありまして、これから振動する解を導くことはできません。ですから、こういう常微分方程式を使って、景気の上下運動、つまり振動を説明することはできないわけで、このような設定は適切な枠組ではないということになります。振動を導くためにはこのままではだめなわけですから、ではどうしたらよいか。景気の振動を説明するための代替案としてどんなものがありうるのでしょうか。

いろいろな方法があるわけですが、たとえばそのひとつは、投資函数を非線形化するという着想です。カルドアとカレツキ (M. Kalecki) が選んだ道はこれでありました。他方フリッシュは異なったルートを選びまして、時間の遅れを伴った微分方程式を導入したのです。まず投資の決まり方ですが、第 t 期に望まれる投資の水準を $A(t)$ としたとき、それを彼はこんなふう計算しました。いま第 t 期の GDP $Y(t)$ に適当な係数 v をかけた水準に適正な資本ストックの水準が決まると考えてみましょう。そして現実に存在する資本ストックの水準を $K(t)$ とするとき、 $vY(t)$ と $K(t)$ との差あるいはその差の一部を埋めるように投資が計画される——こう仮定しますと、

$$A(t) = \lambda(vY(t) - K(t)) \quad (6)$$

——こんなふう望ましい投資水準が決まることになるわけですから。 λ は正の定数です。

ただしこの望ましい資本ストックの増加が即座に実現されるわけではなくて、資本財の建設には θ だけの生産期間を要し、この期間内に一様の率で建設が遂行されるものとしてみます。たとえば 10 年かかって毎年 10 分の 1 ずつ資本形成が実現していく——フリッシュはそう想定しました。そうしますと、第 t 期において建設途上の資本財の総計はどれだけになるか。つくりかけの古いものもあるし、つくり始めたばかりの新しいものもある。それを全部加えますとその総計はこんな計算になります。

$$J(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t A(\tau) d\tau. \quad (7)$$

いまが第 t 期ですから、いちばん古く計画された投資は $A(t-\theta)$ 。いちばん新しいのは始まったばかりの資本形成 $A(t)$ です。それを新・旧全部加え併せます。ただし、每期一定の割合ずつが実現していきますので、これを θ で割った大きさ、つまり (7) 式の値が第 t 期における資本形成の総計です。これが各年度、第 t 期において現実につくられつつあるさまざまな段階の資本財の大きさです。

実際にこれが生産に参加するのはいつか、つまり資本ストックの増加分として働きはじめるのはいつかといえば、第 t 期から数えて θ 期以前につくり始められた資本ストックが、やっと θ 期たった今日、生産に参加する段階に達するわけであります。ですから次のような関係が成立します。

$$\dot{K}(t) = A(t - \theta). \quad (8)$$

(7) 式と (8) 式とからはこういう計算ができます。

$$J(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t \dot{K}(\tau + \theta) d\tau = \frac{1}{\theta} [K(t + \theta) - K(t)]. \quad (9)$$

これが第 t 期において進行中の資本形成の総額であります。

したがって、マクロの需給の均衡式というのは、先ほどは $Y = C + I$ と書きましたけれども、ただいまの場合には、

$$Y(t) = C(t) + J(t) \quad (10)$$

と書かれることになる。

ここでもう計算はやめますけれども、こういう基本的な考え方に基づいて、フリッシュは資本ストックおよび GDP の変化率を表わす微分方程式を導きました。⁽¹⁾

$$\dot{K}(t) = \alpha K(t) - \beta K(t - \theta), \quad (11)$$

$$\dot{Y}(t) = \alpha Y(t) - \beta Y(t - \theta). \quad (12)$$

これは簡単な一階の線形微分方程式です。ところが右辺の第二項に時間の遅れがはいっているとところが仕掛けです。たったこれだけのことですが、この微分方程式を解析しますと、これで振動が出るのです。

一階の線形微分方程式でもそれに時間の遅れを入れると振動解が出る。遅れを伴う微分方程式の理論は、昨今では数学の大きな学会に参りますと、この問題だけでひとつのセッションができるぐらいの規模をもつ分野に成長しまして、詳しい研究が積み重ねられています。フリッシュの時代

(1) (8), (9)を(10)に代入し, $s = 1 - c$ とおけば

$$Y(t) = \frac{1}{s\theta} [K(t + \theta) - K(t)]. \quad (\dagger)$$

また

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &\stackrel{(8)}{=} A(t - \theta) \stackrel{(6)}{=} \lambda v Y(t - \theta) - \lambda K(t - \theta) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \lambda \frac{v}{s\theta} [K(t) - K(t - \theta)] - \lambda K(t - \theta) \\ &= \lambda \frac{v}{s\theta} K(t) - \lambda \left(\frac{v}{s\theta} + 1 \right) K(t - \theta) \end{aligned}$$

であるから, $\alpha = \lambda v / s\theta$, $\beta = \lambda(v/s\theta + 1)$ とおいて (11), (12) が導かれる。

には、まだそういう数学上の進歩は殆どございませんでしたので、彼は整った原理に従ってこの方程式を解くことができなかつた。仕方がないからいろいろな特殊ケースに限って解を試算しました。しかも手計算です。いろいろなパラメータの値に応じて、解の形状を試算し、どんな波形が出るのか実験したわけですね。その結果経済学的に有意義なパラメータを用いた解はたしかに振動を呈するのですが、時間の経過とともに減衰傾向をもつことが確かめられたのです。しかし実際の景気変動は減衰的ではありませんから、フリッシュのモデルもこのままでは適切な分析の枠組を与えるものとはいえないのです。

その困難を克服するために、ふた筋の道が切り開かれました。第一は投資函数を非線形化するルート、第二は確率的衝撃の導入を図るルートであります。

遅れを伴う微分方程式を現代の水準で扱おうとすれば、もちろんはるかに厳密な解析が可能です。この問題を提示したパイオニアのひとりが経済学者フリッシュその人であったことは記憶にとどめてよいことと存じます。そしてこの問題を数学の側から基礎づける重要な知見を提供した人として、ここで再びヴォルテッラの名も忘れることができません。

3. 非線形振動

ほかにもこの時代にはいろいろな景気変動論が生まれました。1930年前後は大不況でありましたから、それをめぐって経済学者が知恵を絞ったのは当然であります。有名なアービング・フィッシャー (I. Fisher) の「デット・デフレーション」の論文が『エコノメトリカ』誌に出したのも1933年です。これまでの話で、一階線形の常微分方程式では振動解が出ないので、それを克服するためのフリッシュの着想を紹介しました。つづいてもうひとつの方法——カルドア、カレッキ、そしてグッドウィン (R. Goodwin) といった人々に代表されるように、非線形の投資函数を考えることによって、振動解を導く研究にちょっと目を注いでみたいと思います。詳しいことはいま述べられませんが、⁽²⁾ 彼らの考えた方程式を一般化して整理しますと、こんな感じになっています。動いていく変数を x としますと、 x についての二階の非線形常微分方程式

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) + \theta(x) = 0 \quad (13)$$

がこの問題の主役であります。カルドア、カレッキ、そしてより新しくグッドウィンの景気変動の方程式も、それをきちんと整理して抽象的に見ますとこういう形になっているのです。この型の方程式をリエナール (A. Liénard) の常微分方程式と呼んでおります。このタイプの方程式に振動解が存在するための条件は何か——カルドアもカレッキもグッドウィンも経済学者の思考法でこの問題を考えました。

ところがまことに興味深いことに、この方程式を数学者の側から厳密に解こうという研究がこの時期に集中して生まれてくるのです。それは電気工学など経済学とは違う場面でも、同じ型の方程

式が現われまして、経済学よりもむしろ電気工学に関心を寄せた数学者がこの方程式に周期解——つまり一定の周期をもって波を打つような解が存在するためには如何なる条件が必要であるかという問題に答える努力を始めたのです。答案がいくつか出てきました。ファン・デル・ポール (B. van der Pol) やレイリー (Lord Rayleigh) の研究がその典型でございます。それがたまたま経済学にも

- (2) 粗投資 I は国民所得 Y と資本ストック K に依存して定まるものとし、その関係を函数 $I = \varphi(Y, K)$ で表わす。ここで $\partial\varphi/\partial Y > 0$, $\partial\varphi/\partial K < 0$ を仮定する。以下、 φ の形を特定化して

$$\varphi(Y, K) = F(Y) - \mu K \quad (F' > 0, \mu > 0) \quad (a)$$

とする。減耗は K の定数倍 δK とすれば、純投資がゼロとなるのは $I = \delta K$ の成り立つときである。貯蓄 $S = Y - C$ は $S = sY$ ($0 < s < 1$) として定まるものとしよう。純投資がゼロの状態では

$$F(Y) - \mu K = \delta K.$$

したがって

$$K = (1/(\mu + \delta))F(Y)$$

が成り立つが、 $I = \delta K$ であるから

$$I = \frac{\delta}{\mu + \delta} F(Y). \quad (b)$$

これは資本ストックの純変化がゼロとなるような Y と I の組み合わせを表わす関係である。(b) と $Y = C + I$ の均衡が成り立つのは

$$sY = \frac{\delta}{\mu + \delta} F(Y) \quad (c)$$

を満たす Y の水準 Y_0 であり、(b) からそのときの投資水準 I_0 と資本ストック $K_0 = I_0/\delta$ が定まる。すると

$$I - I_0 = F(Y) - F(Y_0) - \mu(K - K_0). \quad (d)$$

ここで $i = I - I_0$, $y = Y - Y_0$, $k = K - K_0$, $f(y) = F(Y) - F(Y_0)$ とおけば、(d) から

$$i = f(y) - \mu k. \quad (e)$$

さて y の時間変化率が i と sy の差に正比例するものとするれば、適当な $\varepsilon > 0$ に対して

$$\varepsilon \dot{y} = i - sy \stackrel{(e)}{=} f(y) - \mu k - sy. \quad (f)$$

また純投資の挙動は

$$\dot{k} = i - \delta k \stackrel{(e)}{=} f(y) - \mu k - \delta k \quad (g)$$

と表現しうる。(f) の両辺を時間で微分し、(g) を用いて整理すると

$$\ddot{y} + \frac{1}{\varepsilon} p(y) \dot{y} + q(y) = 0, \quad (h)$$

ただしここで

$$p(y) = \varepsilon(\mu + \delta) + s - f'(y),$$

$$q(y) = \frac{\delta}{\varepsilon} \left\{ \frac{s(\mu + \delta)}{\delta} y - f(y) \right\}$$

である。(h) はいわゆるリエナール型の微分方程式で、これについての周期解の存在条件は非線形振動論において各種のものが知られている。安井琢磨「自励振動と景気循環」、『均衡分析の基本問題』(岩波書店) 昭和 30 年所収に優れた説明がある。

関係をもつに到ったわけです。

まず二次元の場合、つまりこの x が平面上を動き回る簡単な場合ですが、この問題に答える最も直接的な方法は、ポアンカレとベンディクソン (I. Bendixon) による有名な原理です。これを使うのが常套手段だと思いますが、これは二次元の場合に限られます。平面に閉じ込められて、三次元的に解が逃げていくことを許さないような状況でないとこの定理は使えませんので、大きな制約があります。多次元のポアンカレ-ベンディクソンの定理と称すべきものを私は見たことがありません。やはり本質的に二次元の話だと思います。

高次元の空間ではどうするか——通常ホップ (E. Hopf) の分岐定理を用いるのが有効です。ホップの原論文は 1929 年に出ましたが、やはり戦間期の作物であります。こういう仕事が全部この時期に集中しているのは思えば不思議なことです。

もちろん、カルドアやカレツキがこのような数学を理解したとはとても思えませんが、しかし、空気というものがあります。数学者のなかにも話しのうまい人がいる。あるいは物理・工学方面につうじた人がこんな話があるんだと、お茶のみ話しにでもするような雰囲気かもしあったとすれば、それを聞いた経済学者の頭のなかにもそれが着想となって芽をふいても不思議ではないと思うのです。まして、すこし数学に素養のある経済学者が、あるいはすこし経済学につうじた数学者がカルドアの考えていることを知ったならば、おそらくこれとリエナール型の非線形振動論との関連にすぐ気がついたであろうと思います。殆ど数学に関心のなかったカルドアらの単純な経済理論に、実は非線形振動の深い数理がかくされていたことは驚きでございますし、当時の数学界の動向との符合にも奇縁を感じざるをえないのです。

ところでこのホップの分岐定理にはいろいろな証明が知られていますが、いずれも甚だ難しい。二、三年前のことですが、私はフーリエ解析という手法に比較的慣れているものですから、この立場からホップの定理を見直す勉強をしてみたのです。やってみてフーリエ解析とこの定理の親和性をあらためて痛感しました。このフーリエ解析に深い進展が実現したのも、実は戦間期のことでした。これは偶然でしょうか。

そこでフーリエ解析とのかかわりで先ほどのスルーツキーの問題に帰りたいと思います。

III. スルーツキー効果とフーリエ解析

1. 弱定常確率過程

いま、さまざまなショックが積み重なるとします。ショックは白色雑音 (ホワイト・ノイズ) であるとしましょう。雑音にはいろいろなものがある——強いものも弱いものも、長く持続するものもあるし、早めに消えてしまうものもある。いろいろなショックがランダムに積み重なってくるわけです。白色雑音として表現されるショックの移動平均はひとつの確率過程になる、そしてその移動

平均を適当にとりますと、その過程は弱定常確率過程となることが知られております。

確率過程を $X(t, \omega)$ と書くことにします。変数 t は時刻を表わし、 ω は確率空間を動き回る変数であります。そしてこの確率過程に対する時刻 s と t についての共分散 $\rho(s, t)$ を計算することができますが、この共分散が s と t の差だけに依存しているような、つまり $\rho(s, t) = \rho(s - t)$ となるような定常過程のことを弱定常確率過程と称するのです。弱定常過程が周期解をもつためには如何なる条件が必要か——今日の言葉で申しますとスルーツキーはこういう問題を考えたのでした。

2. スペクトル測度

さて、ここが本質的なことですが、実はこの弱定常過程の共分散は直線上のあるラドン測度のフーリエ変換として表現することができる。差 $s - t$ をいま u と書くとしますと、共分散 $\rho(u)$ は直線上のラドン測度 ν を適当に選んで

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} d\nu(t) \quad (14)$$

という形式で表現されるのです。ここで直線上のラドン測度という用語を用いましたが、大雑把に申せば直線上の分布とだけ思えば結構です。

この測度 ν をこの確率過程 $X(t, \omega)$ のスペクトル測度と申します。これはフーリエ解析のなかでも最も著名な定理のひとつでありまして、1933年にボホナー (S. Bochner) という人が見出した結果です。

ボホナーの定理に依拠すると、弱定常確率過程 $X(t, \omega)$ について次の三つの命題は互いに同値であることを証明するのは、さして難しくありません。

- (i) 共分散函数 ρ は周期 T の周期函数である。つまり ρ の値は変数が T だけずれても変わらない。同じ波形が繰り返すということです。
- (ii) $X(t + T, \omega) = X(t, \omega)$ が殆どすべての ω について成り立つ。つまり無視できるほど小さな可能性を除去すれば、確率過程 X の通る時間径路は周期的になっているということです。
- (iii) 確率過程 $X(t, \omega)$ のスペクトル測度を ν とするとき、

$$E \cap \left\{ \frac{2k\pi}{T} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} = \emptyset$$

を満たす直線上のボレル集合 E に対して $\nu(E) = 0$ 。つまり直線上に 0 から始まって間隔が $2\pi/T$ の分点を取り、ボレル集合 E がその分点を含まなければ、 ν で測った E の測度はゼロである。 ν の重さが専らこれらの分点に集中しているというわけです。

この三つの命題が全部同値である。

たとえば命題 (iii) から命題 (i) を導いてみましょうか。難しくありません。

まずボホナーの定理から、共分散函数 $\rho(u)$ はスペクトル測度 ν を用いて (14) 式のように表現されます。ところが (iii) によりまして、 ν は分点 $\{2k\pi/T \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 以外のところに重みをもちませんから、この積分は結局級数になるわけです。

$$\rho(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(2k\pi/T)u} a_k \quad (15)$$

が成り立ちます。ここで a_k は分点 $2k\pi/T$ における ν の重み、つまり $a_k = \nu(\{2k\pi/T\})$ であります。

この式をよく見ますと、 u のところを $u + T$ に変えましても値は変わりませんね。こうして ρ の周期性 $\rho(u) = \rho(u + T)$ が導かれるのです。これで (iii) を仮定すれば (i) が成り立つことの証明が完了するわけです。

(i) から (ii), そして (ii) から (iii) を導く証明は省きますが、これはまさにスルーツキーの目指した問題に最も深いレベルで答える答案と申せましょう。

ボホナーの定理とは別に、弱定常確率過程 $X(t, \omega)$ そのものを L^2 -直交測度 $\xi(d\lambda, \omega)$ を用いて次のように表現するコルモゴロフ (A. Kolmogorov) の定理も重要です。

$$X(t, \omega) = m + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \xi(d\lambda, \omega).$$

もうひとつ、ノーベルト・ウィーナー (N. Wiener) の「一般化された調和解析」という長大な論文がフーリエ解析に大きな進歩をもたらしたことも忘れられません。こういう進歩が 1920 年代から 30 年代にかけて数学の世界で起こりました。

フーリエ解析の力強い展開が背後にあった。正確なところはスルーツキーは知らなかったと思いますが、かといって全く知らなければ、スルーツキーの着想は生まれるはずもないのです。こういうフーリエ解析の発展が背後にあつて、その大きな刺激を受けてスルーツキーの結果が出てきた。あるいは、逆にスルーツキーら数理統計学者の実験的結果が刺激となつて、ボホナー、あるいは、コルモゴロフ、ウィーナーらの深い理論的結果が出てきた、そういつていえなくもないかもしれません。両方向の働きかけがあるのだらうと思います。

このフーリエ解析の進歩と、それが広い意味でのダイナミックスに与えた影響を考えますと、戦間期、20 年代、30 年代の経済学と数学との発展、またその交流は科学史上の興味深いテーマを提供すると私は思います。そのなかで数理統計学者でもあり経済学者でもあつたという特異な位置にいて、最も重要な役割を果たした人のひとりが、スルーツキーであつたといいたいのであります。彼は消費者行動の理論においても重要な研究を残しましたが、数学の仕事としての深さから見ますと、この 27 年の論文の方が私などにはずっと魅力的です。

とくに 1930 年代前後の大不況を経験した世の中で生まれてきた本格的な景気変動論の胎動の背景に、その裏付けとしてさまざまな形の数学の発展があつた。それは一方においては微分方程式に

おける非線形振動論や遅れを伴う微分方程式の発展であり、他方においては確率過程論の発展でありました。しかもさらにそれを基礎的に支えるフーリエ解析の展開、これらがすべて同一の時期に活況を呈したことは学説史上のドラマと申しても誇張ではないでしょう。

すこし余談にわたりますが、わが国の数学者で、とくに確率論との関連でフーリエ解析を深めた人として河田龍夫、丸山儀四郎——このおふたりの名がすぐに思い浮かびます。河田さんには私もまことに親しく教えを受けましたし、丸山さんの難解な講義も聴きました。大分以前のことで、エヴァンストンのノースウェスタン大学で学会がございまして、私も参加致しました。遅れて着いた私がひとり食堂で昼飯を食べておりましたところ、ハンサムな紳士が「プロフェッサー・マルヤマですね。食事をご一緒してよろしいですか？」と声をかけてきました。スタンフォードのダレル・ダフィー (D. Duffie) 教授であることはすぐわかりましたので、「もちろんどうぞ……」といっしょに食べ始めたのです。ダフィー氏は貴台の定理に実に感銘を受けたとかいってさかんにお世辞を並べるのです。まことに光栄なのですが、どうも話しがくい違う。わかりました……ダフィー氏は丸山儀四郎さんと姓が同じ私とを同一人物だと思って賞賛して下さったわけです。気がついた私は、「あなたの話しているマルヤマは G. マルヤマで、既に亡くなった。私は T. マルヤマです」。ふたりとも大爆笑になりました。これがダレルと私が初めて会ったときのエピソードです。以来、ダレルは親しい友となり、何度か慶應へも来て話しをしてくれました。

IV. ウィーンの栄光と悲劇

1. メンガー・セミナー

最後にもうひとつのドラマについて物語りたいと存じます。場所が飛びまして、次の舞台はウィーンであります。ただこれについては既に何回かの機会にお話しをしたことがありますので、今日は簡単に済ませたいと思います。

第一次世界大戦が終わりまして、ヨーロッパは大きく変わりました。とくに帝国と称するものはすべて消滅致しました、ドイツ帝国もハプスブルク帝国も消滅致しました。ヨーロッパの外では、トルコ帝国も消滅を致しました。世界中で帝国は日本だけということになりました。したがって、かつてのハプスブルク帝国の首都であったウィーンも、もはや昔のウィーンではなかったのであります。しかしながらこの頃のウィーン大学の学問を見てみますと、無視することのできない大きな発展があったように思います。数学においてもしかり、経済学においてもしかり、哲学においてもしかり、そして医学、自然科学においてもしかりであります。

経済学についてこれを見ますと、このときのリーダーは、ルートヴィヒ・フォン・ミーゼス (L. von Mises) であります。数学の分野には、いずれもリーダーと呼びうる有名な名前が綺羅星の如く並んでおりまして、たとえば、トポロジーのネーベリンク (G. Nöbering)、ハーン・バナッハの

定理で有名な解析学のハーン (H. Hahn)、それから、基礎論のゲーデル (K. Gödel) でありますとか、実に多彩な人々がウィーンの数学教室には集まっておりました。そして経済学の話しもわかる数学者として幾何学の K. メンガー (K. Menger) がおりました。これは経済学者 C. メンガーの息子さんであります。

この数学者の方の、つまり若きメンガーは毎週数学のセミナーを主宰しておりました、このセミナーのゲストも実に豊かなもので、チェック (E. Čech)、クナスター (B. Knaster)、マツルキエヴィッチ (S. Mazurkiewicz)、タルスキー (A. Tarski)、そして遠くわが国からも若き日の三村征雄教授がしばしば参加されておりました。その記録が『数学コロキウム紀要』という雑誌にまとめられて、長らく出版されておりました。フォン・ノイマン (J. von Neumann) はセミナーに出席はしませんでした、紙上参加で『紀要』に論文を寄せております。みな 35 年、36 年、37 年、ケインズ革命前後の話しであります。『紀要』が途絶したのは 1938 年、ウィーンへのヒットラー侵攻の年です。その年にはウィーン大学の学者が散りぢりになりまして、メンガーのセミナーもそこで途絶する運命にさらされたのであります。

このメンガーのセミナーで積極的な活躍を示した若手数学者に A. ヴァルト (A. Wald) という人がいました。ユダヤ人であります。このセミナーでは経済学の側から見ましても大いに関心をひかれる報告がいくつか行なわれておりました、ことにノイマンの紙上参加論文と並んでヴァルトの論文がわれわれの目をひきます。ヴァルトのやりました仕事は、今日の言葉で申しますと、一般均衡の「存在」証明であります。それ以前におきましては、一般均衡を記述する方程式の数と、解くべき未知数の数とが揃っていれば、この方程式体系は一応解けると、安直に考えられておりました。ワルラスもそうだし、もっと後のヒックスやサミュエルソンもみなそうでした。ところが、そこはそう簡単ではないのであります、たとえば $x + y = 0$, $xy = 1$ という連立方程式を考えてみれば、方程式も未知数もふたつずつですが解はありませんね。方程式の数と未知数の数が揃っていても解けるとは限らないわけであります。そこで一般均衡の連立方程式体系に解が存在するための条件を厳密に求めるとどうなるか——こういう問題をメンガーがセミナーで提案したのでしょう。それに答えて、ヴァルトがこの問題を解きまして論文にまとめました。それが今日知られている一般均衡の存在証明の最初の形であります。

殆ど時をおかず、フォン・ノイマンの論文が出ました。これは相互に依存関係を有する多数の経済部門が足並みを揃えて成長する、つまり斉一的成長径路の存在証明をその内容とするものであります。ヴァルトの論文とは問題が異なりますが、しかしある種の均衡の厳密な存在証明を目指す点において、同じモチーフに基づくものと考えてよいでしょう。

このような、いまだかつてほかでは見られなかった業績がこの 1930 年代、つまり戦間期のウィーンにおいてはいくつも現われてまいりました。これは注目すべきことだと思います。

ここで問うてみたいのは、パリでもロンドンでもなく、なぜこの時期のウィーンにおいて、ヴァ

ルトやノイマンのような研究が現われるに到ったのか、その歴史的な背景についてであります。これを最後に申し上げたいと思うのです。

2. ウィーンの哲学と数学

私はいくつか要因があると思います。まず第一は、このときのウィーン大学のとくに数学科において——哲学科も含めてといった方がいいかもしれませんが——非常に重要な役割を果たしたのは、ヒルベルト (D. Hilbert) の数学観です。ヒルベルト、おそらく 20 世紀最大の数学者といってもいいこの数学者の数学観が大きな影響力をウィーンの数学界に及ぼしました。もちろんこれに反対する学者もいました。

それは数学における思考の対象の「存在」についての考え方に深くかかわることがらです。数学の議論をするためにはいろいろな数学的な概念・観念が必要とされるわけですが、数学的な概念として何が「存在」すると考えられるのか、「存在」とは何かという問題、これであります。幾人かの著名な数学者はこう考えました。有限回のステップあるいは有限回のステップの極限として構成可能な概念こそが存在する数学の概念であって、構成不能な概念に存在を認めることはできないというのです。たとえばヘルマン・ワイル (H. Weyl) の考え方はこれに近いと申せましょう。

ところがヒルベルトはそうではないのです。「存在とは無矛盾である」と考えます。まずその概念を定義する公理系がある、その公理系に矛盾がないこと、それこそがこの概念の存在の必要にして十分な条件だと考えるわけです。具体的に構成できなくてもよい、有限回のステップで実際につくれなくてもよい、きちんと定義されて、その定義に矛盾がなければその概念は存在を保証されると考えるのがヒルベルトの立場であります。こう考えることによって、ヒルベルトは数学の思考を非常に広い領域に解放したのでした。

さてヒルベルトの数学観を認めると致しますと、数学者の仕事はまず、「存在」証明から始まらざるをえません。思索の対象である諸概念の存在が保証されなければ、思索はすべて無意味です。だからまずその概念の「存在」証明をやるということが、数学の仕事の第一歩になった。だからこそヴァルトの論文も、フォン・ノイマンの論文も「存在」証明を目指しているのです。厳密な推論を目指すということであれば、それはむしろあたりまえのことで、数学はいつでも厳密を指向します。しかしヴァルトやノイマンの仕事は、数学的に厳密だというだけではなくて、「存在」証明であることにとくに注目したいのです。なぜ「存在」証明という形で問題がえぐり出されたか、それはヒルベルトの数学観が背景にあったからである、私はそう思います。それが第一。

第二番目は、哲学の影響です。ご承知のとおりこの時期のウィーンにはヴィットゲンシュタイン (L. Wittgenstein) の『論理哲学論考』をバイブルとし、モーリツ・シュリック (M. Schlick) をリーダーとして、論理実証主義の哲学運動が非常に大きな活力と影響力をもつ学派として成長しつつありました。ポPPER (K. R. Popper) もいました、カルナップ (R. Carnap) もいました、ヘン

ペル (C. Hempel) もいました。1945 年以降に世界中で活躍する哲学者が、みなこのウィーンに集まっていたのです。

このウィーン学団と呼ばれる哲学者の集団は、基本的に経験主義に基づく哲学を主唱しておりました。そしてカント (I. Kant) のいう、総合的なア・プリオリは決して認めようとしませんでした。分析的な命題はア・プリオリ、総合的な命題はア・ポステリオリでなければならない、総合的でア・プリオリな命題は存在しないと明確に主唱致しまして、諸科学の哲学的な基盤を固めようとしていた人々です。そして哲学の重要な役割とは、具体的な科学の言明に言語分析を施すことにほかならないと考えたのです。つまり、科学者が語る言明が分析的な命題なのか、それとも総合的な命題であるのか、それを言語分析的にはっきりさせることです。そして分析的な命題であるならば、それが正しいかどうかを判定するのはア・プリオリな方法によらざるをえない。総合的な具体的な世界について言及している命題であるならば、その真偽を裁くためにはア・ポステリオリ、つまり経験的なチェックによらざるをえない。命題の論理的性格を正確により分ける仕事、これこそが哲学者の使命なのだとしてシュリックたちは考えたのです。

経済学であろうと、物理学であろうと、生物学であろうと、すべて科学は同じ方法論、認識論に則って行なわれなければならない。普遍科学、ユニバーサル・サイエンスのモットーがこの学派の立場でありました。そのためには科学は哲学の言語分析に堪える正確な公理的体系を具えていなければならない。そうでない命題は実は科学の命題ではない、お茶飲み話してあって、科学の世界で語りうるものではないのである。だからヴィットゲンシュタインの『論理哲学論考』の最後の一行には「語りえぬものについては黙らなければならない」と書いてあるのです。ショッキングな言葉ではありますが、これが論理実証主義の立場の基本的なスタンスを端的に標榜する旗印なのでございます。そして、ウィーンの経済学者も物理学者も数学者も多くの人々がこれに共鳴しました。シュリックの哲学のセミナーにはメンガーも出席します、ゲーデルもハーンもヴァルトも出ます。分野を超えて、医学者も物理学者も経済学者も数学者も参加しました。みなこのシュリックの論理実証主義の哲学のセミナーに出て、自分の立場をわきまえながらそこで哲学の議論を交したのです。分野を超えて、すべての科学分野の人々が、論理実証主義的な哲学のチェックに堪えうる明確な公理的体系を具えるべく努力を始めたのでした。公理的な表現と厳密な推論を重視する姿勢が経済学にも反映したのも自然なことでしょう。ヴァルトやノイマンの論文は経済学の論文でありますけれども、きわめて公理的な表現を施されています。その背景には論理実証主義の主張、それに共鳴したメンガーや、ヴァルトやノイマンの姿勢が、まざまざと反映されているように思います。これがなぜ、ヴァルトやノイマンの仕事がウィーンに現われてきたかという理由の第二の説明です。

もうひとつ申し上げます。この存在証明を遂行するためには特殊な数学を要します。たとえば凸集合論という新しい幾何学的な知識が必要でした。場合によっては不動点定理といった道具を用いる必要もある。実はこの凸集合論を中心としたこういう数学的な知識が、まさにこの時期のウィー

ンで成長しつつあったことに注目したいと思います。ウィーンだけではなく、ドイツやポーランド、ハンガリーも巻き込んで、元氣よくこの分野が成長しつつあった。とりわけウィーンは国際都市でした。そこに国境を越えて数学者が集い、凸集合論という新しい分野の知識が交換されて、それが生き生きとした応用の世界を生み出すようになっていった。まさにウィーンは数学の世界でも国際都市だったのです。メンガーはたしかにその中心人物でした。ヴァルトもその若き中心人物のひとりでした。数学上の知識が経済問題に応用される、そして経済学者の議論を、数学者たちは頼杖をつきながらではなく、自分の仕事に深く関係する場面として、真剣にそれを聴いていた。さまざまな分野でそういう真剣勝負のディスカッションがあった。そのなかで数学と経済学との深い交流が生まれつつあったということが、第三番目に申したいことであります。

そして最後に、すべてをつなぐ役者がいたということです。上に申しました三つの条件が揃っても、それだけでは活気のある研究活動は生まれません。数学や哲学がいくら発展しても、それを経済学とつなげる人がいなければ、ヴァルトやノイマンの研究は生まれません。ウィーンにはそれができる役者がいたということが大きいと思うのです。プロデューサーがいたということです。それはメンガーでしょう。この人の親父は大経済学者ですから、経済学のことも相当わかって、自分でも論文を書いているほどです。数学についてはもちろん専門家であります。そしてすべての分野にわたって関心が広い。そういう人間が糊代の^{のりしろ}役割を果たすことができた、これが大きいのではないのでしょうか。この四つの条件が揃いまして、この時期の、20年代、30年代のウィーンには、他のどこにも、そしてかつてなかった、見事な数理経済学の花が開いたのでした。

ところがこれは1938年までのことであります。33年にヒットラー (A. Hitler) が政権に就きます。ドイツの大学からユダヤ人を根絶やしにするという運動がすぐに始まりました。オーストリアも風前の灯であります。みんな去っていきました。ミーゼスはジュネーブに去りまして、これでウィーン大学における経済学研究は、その中心人物を失いました。マハループ (F. Machlup) はニュー・ヨークに去りました。ハーバラー (G. von Haberler) はボストンに去りました。メンガーはユダヤ人ではありませんでしたが、シカゴに去りました。アメリカやイギリスやスイスに活躍の新しい天地を求め、みんな去っていきました。モルゲンシュテルン (O. Morgenstern) はたまたまアメリカに出張中でありまして、そのまま帰らずにアメリカにとどまりました。

ヴァルトは躊躇しました。しかし、モルゲンシュテルンの熱心な説得とコウルズ財団の資金上の援助によりまして、ヴァルトはアメリカに出国することができました。しかし家族はギリギリのところまで出国ができませんで、すべてヒットラーの犠牲になりました。みな散り急ぐ枯葉のようにウィーンから去って行ってしまった。ウィーンには誰れもいなくなった。かつてあれほどの活気を呈したメンガーのセミナーもいまはなく、論理実証主義の哲学運動も消え、みな散りぢりに……。

ヒットラーがウィーンに進駐したのは1938年の3月です。その日、ただひとりだけウィーンを去らない学者がおりました。シュレジンガー (K. Schlesinger) です。これもユダヤ人ですが、ヴァル

トの研究が世に出るについては大きな貢献をした人です。——従来の線形の等式体系は解の存在を保証するのが難しい。だからそれを不等式化して存在証明を試みるべきだという大切な着想をヴァルトに伝えた人であります。このシュレジンガーだけは古都ウィーンを去らずにとどまりました。そしてヒットラーが進駐してくると同時に、彼は自らの頭を拳銃で撃って自殺を遂げたのであります。これでウィーンの学問的な伝統は、名実ともに幕を閉じたのであります。

やがてヒットラーの軍靴が高く響くようになり、第二次世界大戦が始まりました。そしてそれが終わると同時に、学問の中心はアメリカへと移っていきますが、アメリカで活躍をした多くの優れた学者たちは、その青春の一時期を、あるいは長い時期をウィーンで過ごした人々でありました。戦間期のウィーンの学問の発展は 1938 年で途絶えましたが、しかしながら第二次大戦以降も大きな灯火を、世界の学問に^{とも}点し続けている。現在もなおそうである。

そして 1938 年に私どもの前から消えてしまったウィーンの学問の伝統を偲びつつ、今日の私の話をむすびたいと思います。有難うございました。

(経済学部教授)

文 献 案 内

やや専門的な視点からこの話を聴いて下さる方のために、簡単な文献案内を付しておこう。

1. バレートとヴォルテッラ

まずスルーツキーの 1915 年の論文は

E. Slutsky, “Sulla teoria del bilancio del consumatore”, *Giornale degli economisti*, **51** (1915), 1–26

である。この論文とヒックスをはじめとするその後の展開との関連については

J. S. Chipman and J-S. Lenfant, “Slutsky’s 1915 Article: How It Came to be Found and Interpreted”, *History of Political Economy*, **34** (2002), 553–597

が詳細な研究である。また最近

V. Barnett, *E. E. Slutsky as Economist and Mathematician*, (Routledge, Oxon) 2011

が刊行された。ヴォルテッラとこの時代のイタリアの学界については、

J. R. Goodstein, “The Rise and Fall of Vito Volterra’s World”, *Journal of History of Ideas*, **45** (1984), 607–617

の一読を勧めたい。イタリアにおけるローザンヌ学派および関連文献については、

松浦保「イタリアにおけるローザンヌ学派経済学」『三田学会雑誌』61 卷 9 号（昭和 38 年）、丸山徹『ワルラスの肖像』（勁草書房）平成 20 年、第 7 章

を参照していただきたい。

II. 経済動学への途

はじめに紹介したフリッシュの論文は

R. Frisch, “Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics”, *Essays in Honor of Gustav Cassel*, (Allen and Unwin, London) 1933, 171–205

である。また遅れを伴う微分方程式へのヴォルテッラの貢献は

V. Volterra, “Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires”, *J. math. pures appl.*, **7**(1928), 249–298.

カルドア・モデルの数学的背景として述べた非線形振動論のパイオニア的研究は

B. van der Pol, “Forced Oscillations in a Circuit with Nonlinear Resistance”, *Philosophical Magazine*, **3** (1927), 65–80,

A. Liénard, “Etude des oscillations entretenues”, *Revue générale de l'électricité*, **23** (1928), 901–902.

ホップの分岐定理は

E. Hopf, „Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential-systems“, *Ber. Math. Phys. Sächsische Akad. der Wissen. Leipzig*, **94** (1942), 1–22

において開発された。

III. スルーツキー効果とフーリエ解析

スルーツキーの論文は

E. Slutsky, “The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes”, *Econometrica*, **5** (1937), 105–146

である。弱定常確率過程のフーリエ解析的研究に基礎を与えるボホナーの定理の原典は

S. Bochner, „Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse“, *Mathematische Annalen*, **108** (1933), 378–410

であるが

P. Malliavin, *Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale*, (Masson, Paris) 1982

の解説が参考になる。ボホナーの定理はいわゆる総和法に基づく証明法のほかシュヴァルツの超函数論からのアプローチも知られている。II, III のテーマ全般にわたって「景気変動の数理」と題する私の講演録(抄) (『応用数理』 **15**, 平成 17 年) が参考になるかもしれない。

IV. ウィーンの栄光と悲劇

この話題については前掲の拙著『ワルラスの肖像』第 8 章, そしてなによりも

I. Mutoh, “Mathematical Economics in Vienna between the Wars”, *Advances in Mathematical Economics*, **5** (2003), 167–195

の詳細な研究をご覧ください。