Title	CRRA効用を持つ連続型Ramsey=Cass=Koopmansモデルについて
Sub Title	On the continuous-time Ramsey=Cass=Koopmans Model with CRRA utility function
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2013
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.106, No.2 (2013. 7) ,p.227(41)- 254(68)
JaLC DOI	10.14991/001.20130701-0041
Abstract	本稿では, CRRA効用を持つ連続型のRamsey=Cass=Koopmansモデルについて分析し, その解の存在と一意性について, 数学的に厳密な形で導出する。この議論によって通常のマクロ経済学の教科書において行われる位相図による分析が持っていたあいまいな部分はすべて埋められる。また本稿では, 解として対象となる関数の空間としていくつかのものを取り上げ, それによって議論の難易度が大幅に変わってくることを確認する。さらに我々は, 議論を通じて厚生経済学の基本定理がこの議論内でどのように現れるかを確認する。 This study analyzes the continuous-type Ramsey–Cass–Koopmans model with a constant relative risk aversion (CRRA) utility function, strictly and mathematically deriving the existence and uniqueness of its solution. With this debate, this study fulfills all the portions left obscure in the analysis from the phase diagram typically performed in macroeconomics textbooks. In addition, this study raises numerous items as solutions with targeted spaces of functions, confirming that depending on those, the degree of difficulty surrounding the discussion changes significantly. Furthermore, it confirms the emergence of the basic theorem of welfare economics through this debate.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20130701-0041

CRRA 効用を持つ連続型 Ramsey=Cass=Koopmans モデルについて

On the Continuous-Time Ramsey=Cass=Koopmans Model with CRRA Utility Function

細矢 祐誉(Yuki Hosoya)

本稿では，CRRA 効用を持つ連続型の Ramsey=Cass=Koopmans モデルについて分析し，その解の存在と一意性について，数学的に厳密な形で導出する。この議論によって通常のマクロ経済学の教科書において行われる位相図による分析が持っていたあいまいな部分はすべて埋められる。また本稿では，解として対象となる関数の空間としていくつかのものを取り上げ，それによって議論の難易度が大幅に変わってくることを確認する。さらに我々は，議論を通じて厚生経済学の基本定理がこの議論内でどのように現れるかを確認する。

Abstract

This study analyzes the continuous-type Ramsey–Cass–Koopmans model with a constant relative risk aversion (CRRA) utility function, strictly and mathematically deriving the existence and uniqueness of its solution. With this debate, this study fulfills all the portions left obscure in the analysis from the phase diagram typically performed in macroeconomics textbooks. In addition, this study raises numerous items as solutions with targeted spaces of functions, confirming that depending on those, the degree of difficulty surrounding the discussion changes significantly. Furthermore, it confirms the emergence of the basic theorem of welfare economics through this debate.

「三田学会雑誌」106 巻 2 号（2013 年 7 月）

CRRA効用を持つ連続型 Ramsey = Cass = Koopmans モデルについて [*]

細　矢　祐　誉[†]

（初稿受付 2013 年 2 月 8 日，
査読を経て掲載決定 2013 年 5 月 24 日）

要　　旨

本稿では，CRRA 効用を持つ連続型の Ramsey = Cass = Koopmans モデルについて分析し，その解の存在と一意性について，数学的に厳密な形で導出する。この議論によって通常のマクロ経済学の教科書において行われる位相図による分析が持っていたあいまいな部分はすべて埋められる。また本稿では，解として対象となる関数の空間としていくつかのものを取り上げ，それによって議論の難易度が大幅に変わってくることを確認する。さらに我々は，議論を通じて厚生経済学の基本定理がこの議論内でどのように現れるかを確認する。

キーワード

Ramsey = Cass = Koopmans モデル，CRRA 効用，均衡の存在，均衡の一意性，厚生経済学の基本定理

1　序論

Ramsey = Cass = Koopmans による最適資本蓄積モデルは Ramsey（1928）によって初めて考察され，後に Cass（1965）と Koopmans（1965）によって修正されたものである。このモデルはマクロ経済学において長期トレンドを分析するモデルとして定番のひとつであり，非常に多くの応用を持つ。このモデルについての説明が載っている教科書も少なくない。だが，多くの教科書において，特に連続時間型のモデルでの解挙動の取り扱いを巡る議論が，数学的に非常に不正確である。本稿はこの問題を解決することを第一の目標としている。

＊　本稿を作成するにあたって，慶應義塾大学経済学部の丸山徹教授に繰り返し非常に有益な助言をいただいた。ここに謝意を表したい。また，投稿後に匿名の査読者の方から非常に有益なコメントをいただき，それによって本稿は大きく改良することが可能となった。こちらの方にも謝意を表したい。なお当然ながら，本稿に残存するあらゆる誤りについては，本稿の著者がそのすべての責任を負うものである。

†　E-mail: ukki@gs.econ.keio.ac.jp

問題をきちんと理解するために，まずマクロ経済学の主要なテキストにおける，同モデルの定番の解析手法について述べよう[(1)]。まず，消費者の効用最大化問題を分析し，そこから**オイラー方程式**と呼ばれる常微分方程式を導出する。次にそれと資本蓄積についての財市場の均衡を意味する微分方程式を合わせて，一階の 2 連立の自励系の常微分方程式を作る。この種の常微分方程式は相空間（phase space）[(2)]の分析でかなりのことが言える。その相空間を図解した図のことを経済学では位相図（phase diagram）[(3)]と呼ぶのだが，この位相図の分析を通じて，最適解は定常点に収束する解ただひとつであると結論づけるのである。

しかし，このやり方はたいへん不完全である。まずなによりも，**オイラー方程式が解の必要条件であることの根拠**が，大半の文献で示されていない。オイラー方程式は通常，消費者の効用最大化問題の一階の条件として，Lagrange の未定乗数法などの技術を用いて導出されると説明される[(4)]。しかし，Lagrange の未定乗数法は通常，Banach 空間で定義される Fréchet 微分可能な関数についての最大化問題で，しかも制約も Fréchet 微分可能な実数値関数で書かれているものについて適用される定理である。では今回，変数である $c(t)$ の入っている Banach 空間はどれなのだろうか？　ということになると，これがどの教科書にも書いてないのである。

連続関数の空間であろうか？　しかし，$c(t)$ の定義域は $[0,+\infty[$ であるから，通常の一様ノルムを入れてしまうとこの空間は Banach 空間にならない。では**有界な**連続関数の空間はどうか？　これはたしかに Banach 空間である。しかし，取り得る $c(t)$ の可能性にあらかじめ有界性を仮定してよいとする経済学的な根拠はなにか？　これについては標準的な教科書はなにも告げてくれない。

この大問題を解決して，$c(t)$ のあり得る空間についてきっちりとした定義ができたとしてみよう。ところが，それでもまだ問題は残る。Ramsey = Cass = Koopmans モデルにおいて，消費者の効用最大化問題の制約条件は次のものである。

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}c(t)dt \le k(0) + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}w(t)dt$$

ここで，$R(t)=\int_0^t r(s)ds$ であり，つまりこの式は w と r という，賃金とレント料がどのように決定されるかに依存して，大幅に性質が変わる。ということは，$R(t)$ がどういう形であるかについての仮定がないため，c について連続性があるのかどうか自体がよくわからない。下手をすると，$c(t)$ についてはこの式の左辺が一定値で押さえられていたとしても，$c(t)+\varepsilon$ という形でちょっとだけ一様に上に押し上げただけで，左辺が $+\infty$ になってしまうかもしれない。これでは Fréchet 微分は定義

（1）　Ramsey = Cass = Koopmansモデルには集権型と分権型があるが，本稿では分権型を主に取り扱う。
（2）　この用語はポントリャーギン（1968）による。
（3）　なお，位相という語は理論経済学では “topology” の訳語としての「位相」のほうがメジャーであるが，主に物理において “phase” の訳語として「位相」が定訳としてあり，決して誤訳ではない。
（4）　Hamiltonian などの別のテクニックを使う文献もあるが，結局本質的に大きな差異はない。

できないことになるが，そうすると Lagrange の未定乗数法が使えなくなる。では $R(t)$ を Lagrange の未定乗数法が使える形に制限するか？　しかしこれもまた，上と同じ問題に戻る。価格であるレント料 $r(t)$ の取り得る範囲に制限が加わる経済学的根拠はなにか？　という問いに，容易に答えられないのである。

これらの問題が解決して，無事にオイラー方程式が解の必要十分条件であることが証明できたとしよう。しかし，それでもなお問題は残っている。たとえば，通常の議論では，位相図を用いて初期値をいろいろ動かしたときに，定常点に収束する初期値がひとつだけ存在することを述べている。だが，この結論はどういう議論から出たものだろうか？　たとえば，安定多様体，不安定多様体という通常の自励系の常微分方程式の理論を用いれば，定常点の周辺で定常点に収束する初期値があることは示せる。しかし，定常点に対応する k から初期資本 $k(0)$ が遠いとき，$c(0)$ をどう定めても定常点に収束しない可能性は吟味されているのだろうか？

無事，定常点に収束する初期値がただひとつ存在することが示せたとしよう。それでもさらに問題は残っている。たとえば，その初期値より上から出発した経路は，時間が経つにつれて $k(t) \le 0$ となり，したがって均衡ではあり得ないという。しかし，これは本当に確認した結果か？　たとえば $k(t) \le 0$ になることが示せたとして，それが解でないことはどうやって確かめるのか？　また定常点に収束する初期値より下から出発した経路は，時間が経つにつれて定常点とはべつの場所に収束していくことが示せる。それはどうして解ではないのか？　解ではないということを証明した文章はどこにあるのか？　これらの山積みの疑問に，標準的なマクロ経済学のテキストは一切答えてくれない。(5)

本稿の問題意識はここに集約される。要するに，これほど標準的なモデルとして有名である Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルについて，数学的にきちんと解析したテキストがどこにもない。そこで，このギャップを埋めるような日本語の文献を作るのが，本稿の主目的である。ただし一般論は難しいので，本稿ではローマー（1998）を参考にして CRRA 型の効用関数を持った消費者

---

(5)　ここでいくつかのテキストでの記述について言及しておこう。斉藤（2006）では，有限時間の変分法を用いたオイラー方程式の導出について書かれているが，その導出法はあいまいに書かれており，また時間が無限である問題に適用できるための条件についても詳しく書かれていない。ローマー（1998）は Blanchard and Fischer（1989）（日本語訳はブランチャード・フィッシャー（1999））を参照するにとどめているが，Blanchard and Fischer（1989）ではほとんど説明なく Hamiltonian が出てくるのみで，議論が非常に不足している。西村，矢野（2007）の 7 章では双対性と Hamiltonian のふたつのアプローチで最適解の持つ条件が記述されており，これはかなりの程度厳密に議論されているものの，条件を記述するのみで，存在について述べた箇所を見いだすことはできなかった。Seierstad and Sydnaeter（1987）の 3 章の定理 15 は最適解の存在定理であるが，これは許容可能な値の集合にあらかじめ有界性を仮定して証明しているため，本稿の問題には適用できない。なお同書 3 章の定理 19 は位相図についての結果であり，これと定理 13 などを用いて問題を解くやり方も紹介されているが，我々の結果に直接適用できるかどうかは不明である。

に焦点を絞る。[6]

なお，本稿では他の文献でよく見られるいわゆる横断性条件がまったく出てこない。この理由は定理 2 に由来する。この定理はオイラー方程式と均衡方程式を満たす軌道を 3 つに分類したものだが，おおまかに言うとその分類は「そもそも有限時間でしか定義されないもの」「消費，資本蓄積ともに正の値に収束するもの」「消費がゼロに収束するもの」の 3 通りであり，そのうち 2 番目のタイプは定理 1 によって解であり，また 3 番目のタイプは定理 5 によって解ではないことが示されるのだが，これらの事実を証明するために横断性条件を使う必要がないのである。調べてみれば 2 番目のタイプの軌道は横断性条件を満たし，また 3 番目のタイプの軌道は横断性条件を満たしていないことがわかるのだが，議論に直接の必要がないため，本文では一切触れていない。[7]

本稿ではまた同時に，従来では軽視されてきたある問題に焦点を当てる。それは，解としてあり得る範囲をどこに定めるかといった問題である。解として c や k にどのような仮定を置くかによって，問題の難易度は大幅に変わる。これについても，きちんとした議論をしてみたい。また，従来のテキストでは，厚生経済学の基本定理が成り立つということを根拠にして，集権型のモデルと分権型のモデルが同じ解を持つと説明していることがほとんどである。本稿ではこの結果も同時に確認する。

2 節はモデルのセットアップであり，3 節は主結果とその証明，解説に当てる。

2　基本モデル

t 時点での資本のレント料を単位あたり $r(t)$ と書き，また t 時点の賃金を $w(t)$ と書くことにする。$R(t)=\int_0^t r(\tau)d\tau$ と定義しておこう。n は人口成長率，g は技術進歩率とし，それぞれ正であると仮定する。$\bar{k}>0$ は初期資本としよう。

この条件下で，家計の効用最大化問題は次のように書ける。[8] ただし $u(c)=\dfrac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$ あるいは $u(c)=\log(c)$ のいずれかを仮定する。$u(c)=\log(c)$ のときは $\theta=1$ としておこう。$\theta>0,\beta>0$ であると仮定しておく。

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & \int_0^\infty e^{-\beta t}u(c(t))dt \\ \text{sub.to.} \quad & c(t)\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(6)　CRRA 型に焦点を絞る理由のひとつは，それが応用研究において最も使われるクラスの効用関数であるからである。もうひとつは，後に述べるオイラー方程式において，$\dot{c}=0$ である点が c の値に依存せず決まるため，分析が大幅に楽になることに由来する。ただし，分析を簡明にする点では役に立っているものの，この仮定は本質的に必要ではないと筆者は考えている。

(7)　横断性条件については，上東（2002）において詳細なサーベイが行われている。

(8)　どうしてこう書けるかはローマー（1998）を参照。

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}c(t)dt \le \bar{k} + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}w(t)dt$$

また，生産者の利潤関数は

$$F(K(t), A(t)L(t)) - w(t)A(t)L(t) - r(t)K(t)$$

と書ける。ここで F は凹関数で，さらに一次同次であると仮定する。$k(t) = \dfrac{K(t)}{A(t)L(t)}$ とし，また $f(k) = F(k, 1)$ とする。f は $[0, +\infty[$ 上で定義され，定義域の内点で二階連続微分可能，かつ狭義凹で，$f(0) = 0$ であり，また稲田条件[9]を満たすと仮定しておこう。このとき生産者の利潤最大化の一階条件から，$k(t) > 0$ であれば必ず，

$$r(t) = f'(k(t)) \tag{2}$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \tag{3}$$

が成り立たなければならないことが示せる。なお，$f(0) = 0$ であることと f の凹性から，$k(t) > 0$ であり続ける限り必ず $w(t) > 0$ である。また F は一次同次であるから，この条件下では

$$F(K(t), A(t)L(t)) - w(t)A(t)L(t) - r(t)K(t) = 0$$

でなければならない。なお，$k(t) = 0$ で生産者が利潤最大化しているとすれば，

$$r(t) \ge f'(k(t)) = f'(0) = +\infty$$

が成り立っていなければいけないことになるが，これは価格としてはあり得ないため，考えなくてよい。

ここでこの分権型ラムゼイモデルにおいて，均衡という用語がなにを指すかをきちんと提示しておきたい。それは通常，次の条件を満たす $c(t), k(t), r(t), w(t)$ の組を指す。

（i） $c(t)$ は（1）の効用最大化問題の解である。

（ii） $r(t)$ と $w(t)$ は（2）（3）を満たす。つまり $k(t)$ は利潤を最大化している。

（iii） 市場の均衡条件，

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t) \tag{4}$$

が成り立つ。

（iv） $k(0) = \bar{k}$ が成り立つ。

（9） $\lim_{k\downarrow 0} f'(k) = +\infty$ かつ $\lim_{k\uparrow\infty} f'(k) = 0$ であることをこう呼ぶ。

特に本稿では，$c(t)$ と $k(t)$ だけを指して「均衡配分」という言葉を用いることがある。

上の文章で我々は「提示」という言葉を使った。

なぜ，「定義」ではなく「提示」と言ったのかというと，それには大きな理由がある。実は上の文章には，「定義」としては数学的にあいまいな部分がある。それは，c と k に課せられるべき「条件」である。

本当に数学的な「定義」とするためには，「c は○○という条件を満たす関数で～」「k は○○という条件を満たす関数で～」ということを，きちんと確定させせなければならない。上の問題などを見ると，たとえば c は積分の中に入っているから，少なくとも可測でなければ定義自体が意味をなさないだろう。だが連続性はどうだろうか？　また k は（4）式を満たさなければならないが，これは k が微分可能であることを意味するように見える。だが数学では，微分方程式は「ほとんどすべての点で[(10)]」成り立つことだけを仮定し，絶対連続な関数を解とすることもある。実際，c が可測関数であって連続でないとすれば，（4）の解は絶対連続関数まで広げないと存在しないことが多い。では k は絶対連続であればよいのか，それとも連続微分可能であることを要求するのか？

本稿ではこの問題に立ち入るために，次の 3 つの定義をそれぞれ区別して扱う。

定義：$c(t), k(t), r(t), w(t)$ が第 1 種の均衡である，とは，$c(t)$ が可測，$k(t)$ が絶対連続で，かつ，次の（i)–(iv）の条件を満たすことを言う。

（i）　$c(t)$ は，**可測関数である**ような c についての（1）の効用最大化問題の解である。

（ii）　$r(t)$ と $w(t)$ は（2）（3）を満たす。

（iii）市場の均衡条件，つまり（4）式が成り立つ。

（iv）$k(0) = \bar{k}$ が成り立つ。

第 2 種の均衡である，とは，$c(t)$ が連続，$k(t)$ が連続微分可能で，かつ先の(i)–(iv)のうち，上の(i)の「可測関数である」という条件を**連続である**と置き換えたものが成立していることを言う。

第 3 種の均衡である，とは，$c(t)$ が連続微分可能，$k(t)$ も同様で，かつ先の(i)–(iv)のうち，上の(i)の「可測関数である」という条件を**連続微分可能である**と置き換えたものが成立していることを言う。

（10） この用語は「測度 0 の点を除いて」という意味を表す数学用語であり，厳密に定義されており，あいまいな用語ではないことに注意。

3　主結果と証明

本節で我々は，前節で定義した均衡の存在と一意性を示す。(11)

標準的なマクロ経済学の教科書では，均衡の存在と一意性を示すために，いわゆるオイラー方程式と言われる自励系の常微分方程式を $c(t), k(t)$ が満たすことが解の必要条件であるということを示し，次に位相図と呼ばれる図を書いて，オイラー方程式を満たす中で解であるものは定常点（つまり，$\dot{c} = \dot{k} = 0$ となる点）に収束するものだけであることを示して，そういう c の初期値はひとつしかないことから解が一意である，という形で締めくくる。しかしそのロジックに問題があることはすでに述べた通りである。したがってここでは**あえて位相図を書かず**，数式のみで議論することに努めたい。図解は証明ではなく，あくまでイメージを理解するための手助けに過ぎない，というのは現代数学の基本的なスタンスであると思うが，ここでもそれに従う。

3.1　均衡の十分条件

さて，最初に次の定理を示そう。(12)

定理 1：いま，$c^*(t), k^*(t)$ が次の常微分方程式，

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\theta}(f'(k(t)) - n - g - \beta)c(t) \tag{5}$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t) \tag{6}$$

の解であるとする。(13) これらは共に $[0, +\infty[$ 上で定義され，$k^*(0) = \bar{k}$ であるとする。また，$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*$，および $\lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*$ の存在を仮定しておく。$w^*(t), r^*(t)$ は（2）（3）式を満たすように作り，$R^*(t) = \int_0^t r(\tau)d\tau$ とする。もし仮に $c^* > 0$ であり，また次の条件

$$f'(k^*) > n + g \tag{7}$$

が成り立つとすると，$c^*(t), k^*(t), w^*(t), r^*(t)$ は第 1 種，第 2 種，第 3 種のすべての意味で均衡である。

（11）後で厳密に限定するが，本稿では，$f'(\bar{k}) > n + g + \beta$ である場合のみを扱う。逆の不等号を持つ場合も，同様の結果が示せると思われるが，定常状態を越えて資本蓄積を行った状態というのが経済学的にそこまで重要だとは考えなかったので，本稿では扱わない。

（12）常微分方程式についての知識が十分でない読者には，先に次の節の最初のほうを読んでおくことをおすすめする。

（13）（5）式が通常，オイラー方程式と呼ばれる。この方程式系の右辺の関数の定義域が，$\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ であることに注意。特に，$k = 0$ ならば $f'(k)$ は定義されない。

証明：（5）（6）は右辺が k, c の双方について連続微分可能な自励系の常微分方程式系なので，その解は存在するとすれば同一の初期値の下では一意に定まり，さらにそれは連続微分可能である。[14] よって主張を証明するためには，$c^*(t), k^*(t), w^*(t), r^*(t)$ が第 1 種の均衡であることを示せばよい。以下，$R^*(t) = \int_0^t r^*(\tau)d\tau$ とする。

ここで（6）式から，

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}c^*(t)dt &= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k^*(t)) - (n+g)k^*(t))dt \\ &\quad - \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}\dot{k}^*(t)dt \\ &= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k^*(t)) - (n+g)k^*(t))dt \\ &\quad + \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}((n+g)k^*(t) - f'(k^*(t))k^*(t))dt \\ &\quad - [e^{(n+g)t-R^*(t)}k^*(t)]_0^T \\ &= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k^*(t)) - f'(k^*(t))k^*(t))dt \\ &\quad - [e^{(n+g)t-R^*(t)}k^*(t)]_0^T \\ &= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}w^*(t)dt + \bar{k} - e^{(n+g)T-R^*(T)}k^*(T)\end{aligned}$$

と書ける。ここで 2 番目の等号は部分積分公式から従う。$T \to \infty$ とすれば，（7）式から $e^{(n+g)T-R^*(T)}k^*(T) \to 0$ なので，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c^*(t)dt = \bar{k} + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}w^*(t)dt$$

となる。したがって c^* は予算制約を等号で満たすことがわかった。[15]

次に，$c^*(t)$ はオイラー方程式（5）の解である。$c^*(t) = 0$ となる t がひとつでも存在した場合，$c(t) \equiv 0$ として $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+g)k(t)$ を解けばそれが（5）（6）の解になる。よって解の一意性から $c^*(t) \equiv 0$ となるが，$c^* = \lim_{t\to\infty} c^*(t) > 0$ なので，それはあり得ない。よってすべての t に対して $c^*(t) > 0$ である。そこで両辺を $c^*(t)$ で割って積分することで，

$$\log c^*(t) = \log c^*(0) + \frac{1}{\theta}[(R^*(t) - (n+g)t) - \beta t]$$

がわかる。そこで両辺に指数関数を作用させれば，

（14） この定理の主張は「$c^*(t), k^*(t)$ が解であるとすれば～」という形式をしているので，前件で解の存在を仮定していることになる。よって，解の存在定理はこの定理の証明では引用する必要がない。微分方程式の解の存在定理については 3.2 節の冒頭で紹介している。

（15） なお，$c^*(t)$ が有界であることと（7）式から，この式の左辺は $+\infty$ ではないということに注意。

$$e^{\frac{\beta t}{\theta}}c^*(t)=c^*(0)e^{\frac{R^*(t)-(n+g)t}{\theta}}$$

であり，この両辺を $-\theta$ 乗すると，

$$e^{-\beta t}u'(c^*(t))=\lambda e^{(n+g)t-R^*(t)}$$

となる正の数 λ の存在が示せる。この λ は t に依存しない定数である。

さて，いま u は凹関数であるから，

$$u(c)-u(c^*(t))\le u'(c^*(t))(c-c^*(t))$$

である。そこで任意の予算制約を満たす可測関数 $c(t)$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta t}(u(c(t))-u(c^*(t)))dt &\le \int_0^\infty e^{-\beta t}u'(c^*(t))(c(t)-c^*(t))dt\\ &=\lambda\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}(c(t)-c^*(t))dt\\ &=\lambda\left[\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c(t)dt-\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c^*(t)dt\right]\\ &=\lambda\left[\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c(t)dt-\left(k(0)+\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}w^*(t)dt\right)\right]\\ &\le 0\end{aligned}$$

となる。二行目から三行目への等式は $\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c^*(t)dt<+\infty$ から，最後の不等式は $c(t)$ が予算制約を満たすことから成り立つ。こうして均衡の条件（i）が成り立つ。

条件（ii）（iii）（iv）は明白に成り立つので，これで証明が完成した。 ■

3.2　オイラー方程式の解析

定理 1 から，(5)（6）で示された常微分方程式系が，このモデルの均衡に重大な関係を持っているのではないか，ということが類推できたであろう。そこで，いったん脇道に逸れて，まずこの常微分方程式について解析してみよう。

最初に，常微分方程式の一般論について多少の記述を割いておく。ここで書く結果についてはすべてポントリャーギン（1968）に厳密な議論がされているため，本稿では証明をすべて省く。

まず，次の方程式

$$\dot{x}=f(x)$$

を考えよう。この問題を**自励系の常微分方程式**と呼ぶ。[(16)] 関数 f の定義域は n 次元ユークリッド空間の開集合 U で，さらに f は C^1 級であるとしておこう。関数 $x(t)$ が上の方程式の**解**（solution）であるとは，その定義域がある区間 I（ここで言う区間とは実数の凸部分集合で，かつ空集合でも一点集

合でないもののことであり，半直線や直線でもよい）であり，すべての $t \in I$ について $x(t) \in U$ かつ $\dot{x}(t) = f(x(t))$ が成り立つことを指す。ここで $\dot{x}$ とは x の t についての微分である。

$\bar{x} \in U$ であるとすれば，上の方程式の解で $x(0) = \bar{x}$ となるものは**少なくともひとつ必ず存在する**。また $x_1(t), x_2(t)$ が共に上の方程式の解で，さらにある t について $x_1(t) = x_2(t)$ であれば，これらの関数は**定義域の共通部分で完全に一致する**。この結果を常微分方程式の**解の一意性**と呼ぶ。特に，$x_1(t)$ の定義域が $x_2(t)$ の定義域に厳密に含まれるとき，x_2 を x_1 の**延長**と言う。

延長が存在する解を延長可能な解と呼び，延長が存在しない解を延長不能な解と呼ぶ。任意の初期値 $\bar{x} \in U$ に対して $x(0) = \bar{x}$ となる延長不能な解が存在することは容易に示せる。また，次の結果が知られている：0 を含む区間で定義された解 x が延長不能であり，かつその定義域 I が $[0, +\infty[$ を含まないとしよう。すると，開集合 U の任意のコンパクト部分集合 C に対して，定義域 I の内部に属する点 t^* をうまく取ると，$t \in I$ かつ $t > t^*$ であれば $x(t) \notin C$ であるようになる。対偶を取れば，**延長不能な解があるコンパクト集合から出ないならば，その定義域は必ず** $[0, +\infty[$ **を含む**ことが言えたことになる。以下の議論では，この結果を何度も繰り返し用いる。

また，仮に上の方程式のある延長不能な解 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ について，$x_1(t_1) = x_2(t_2)$ であったとしてみよう。上の方程式は自励系の常微分方程式であるから，$x_3(t) = x_1(t - t_2 + t_1)$ と定義すれば $x_3(t)$ も解である。$x_3(t)$ の軌道は $x_1(t)$ の軌道と完全に一致する。また，$x_3(t)$ が延長可能であればそこからさかのぼって $x_1(t)$ も延長可能になり矛盾が出るので，$x_3(t)$ は延長不能でなければならない。ここで $x_3(t_2) = x_1(t_1) = x_2(t_2)$ であるので，$x_3(t)$ と $x_2(t)$ は定義域の共通部分で一致しなければならないが，両方とも延長不能なので，このふたつは完全に一致する。よって $x_1(t)$ の軌道と $x_2(t)$ の軌道は完全に一致することになる。まとめると，**自励系の常微分方程式の延長不能なふたつの解の軌道は，互いにまったく交わらないか，完全に一致するかのどちらかしかあり得ない**のである。

さて，オイラー方程式の解説に戻ろう。言うまでもなく，(5)(6) は自励系の常微分方程式であり，その右辺の定義域は $\{(c,k)|k > 0\}$ である。

まず，我々は $k(0) = \bar{k} > 0$ を固定している。k^* は $f'(k) = n + g + \beta$ となるような唯一の $k > 0$ であるとしよう。以降，断らない限り常に我々は $\bar{k} < k^*$ を仮定することにする。このとき，我々がこの方程式の解を考える際に初期値として変えてよいのは $c(0)$ のみである。また方程式として形式的に定義されてはいるものの，$c(0) < 0$ であるような解は (1) の問題の制約条件を満たさないので，そのような解は最初から考えないこととする。

---

(16) 自励系（autonomous）という言葉は自律系と訳されることもあるが，いずれにせよ右辺の関数 f の変数が (t, x) ではなく (x) と書かれているときにこの語を用いる。本稿で必要なのはこの自励系の常微分方程式の性質のみである。

$c(0)$ が 0 のときは，非常に簡単な解析になる。この場合，$c^*(t) \equiv 0$ として，方程式

$$\dot{k} = f(k) - (n+g)k$$

を解いて出てきた延長不能な $k^*(t)$ を取ってくれれば，その $c^*(t), k^*(t)$ が解となる。解の一意性から，この初期値についての解はこれしかあり得ない。一方で，$f(k) = (n+g)k$ となる k を $\hat{k}$ と書けば，f の凹性と $f(0) = 0$ から $f'(\hat{k}) < (n+g)$ であり，したがって $\hat{k} > k^*$ である。初期値が $(0, \hat{k})$ であるような（5）（6）の解は $c(t) \equiv 0, k(t) \equiv \hat{k}$ であるが，自励系の常微分方程式では軌道が異なるふたつの解は互いにまったく交われないので，$k^*(t) < \hat{k}$ が任意の $t \in [0, +\infty[$ について成り立つ。すると $\dot{k}^*(t) > 0$ が常に成り立ち，よって $k^*(t)$ は増加関数である。よって，$(c^*(t), k^*(t))$ は $\{0\} \times [\bar{k}, \hat{k}]$ というコンパクト集合の外側に出ることがあり得ないため，先ほど紹介した結果より，$[0, +\infty[$ を含む区間まで延長可能であることがわかる。そこで $\lim_{t\to\infty} k^*(t) = k_\infty$ が存在することがわかる。$k_\infty \le \hat{k}$ であることは明らかである。$k_\infty < \hat{k}$ であるとしよう。すると，

$$\dot{k}^*(t) > \min_{\bar{k} \le k \le k_\infty} (f(k) - (n+g)k) > 0$$

がすべての t について成り立つが，これは $k^*(t) \to +\infty$ を意味し，矛盾。よって $k_\infty = \hat{k}$ でなければならない。

以上が $c(0) = 0$ のときの結果である。では，$c(0) > 0$ のときはどうか。結論を定理として先に提示する。

定理 2：$k(0) = \bar{k}$ であるような延長不能な（5）（6）の解について，$c(0) \ge 0$ であれば $t > 0$ について $c(t) \ge 0$ が常に成り立つ。また，ある $\bar{c} > 0$ が存在して，以下の主張を満たす。

（I） $0 \le c(0) < \bar{c}$ である場合，解 $c(t), k(t)$ の定義域は $[0, +\infty[$ を含み，$\lim_{t\to\infty}(c(t), k(t)) = (0, \hat{k})$ である。

（II） $c(0) = \bar{c}$ である場合，解 $c(t), k(t)$ の定義域は $[0, +\infty[$ を含み，$\lim_{t\to\infty}(c(t), k(t)) = (c^*, k^*)$ である。ここで k^* は上に書いた通りであり，$c^* = f(k^*) - (n+g)k^* > 0$ である。

（III） $c(0) > \bar{c}$ である場合，解 $c(t), k(t)$ の定義域は $[0, +\infty[$ を含まない。

証明：まず，$k(t^*) = k^*$ となる $t^* > 0$ が存在するような $c(0)$ の上限を $\bar{c}$ としよう。すでに述べたように $c(0) = 0$ ならばそのような t が存在するので，上限は存在する。上限が $+\infty$ でないことは次の補題からわかる。

補題 1：$(c(t), k(t))$ が（5）（6）の解であるとし，仮に $k(t^*) < k^*$ かつ $c(t^*) > f(k(t^*)) - (n+g)k(t^*)$ となる $t^* \ge 0$ が存在したとすれば，t^* 以降では $k(t)$ は減少関数であり，$c(t)$ は増加関数である。

証明：もし仮に $t_1 > t_2 \geq t^*$ に対して $k(t_1) \geq k(t_2)$ であったとすると，平均値の定理から，$t_2 < s < t_1$ となるある s に対して $\dot{k}(s) \geq 0$ とならなければならない。そこで，$t^* \leq s$ という条件下で $\dot{k}(s) \geq 0$ となるような s の下限を s^* としよう。$\dot{k}(t^*) < 0$ なので $s^* > t^*$ である。$[t^*, s^*]$ 内では $k(t)$ は減少関数であるが，$\dot{k}(s^*) = 0$ なので，$c(s^*) = f(k(s^*)) - (n+g)k(s^*) < f(k(t^*)) - (n+g)k(t^*) < c(t^*)$ である。しかし $[t^*, s^*]$ 内では $k(t) < k^*$ なので，$\dot{c}(t) > 0$ であり，よって $c(s^*) > c(t^*)$ である。これは矛盾であり，このようなことはあり得ない。よって k は t^* 以降では減少的である。$k(t) < k^*$ が常に成り立つので，c のほうは増加的である。 ■

以上で，$\bar{c} \leq f(\bar{k}) - (n+g)\bar{k}$ がわかった。特にここから，$c(0) = \bar{c}$ ならば $\dot{k}(0) \geq 0$ がわかる。次にもうひとつ補題を示す。

補題 2：$(c(t), k(t))$ が（5）（6）の解であるとし，仮に $k(t^*) = k^*$ となるような $t^* > 0$ が存在したとする。もし $c(t^*) < f(k^*) - (n+g)k^*$ であれば，t^* 以降では c は減少的であり，k は非減少的である。

証明：仮にある $t_1 > t_2 \geq t^*$ について $k(t_1) < k(t_2)$ であったとすると，平均値の定理から $t_2 < s < t_1$ となるある s に対して $\dot{k}(s) < 0$ とならなければならない。そこで，$t^* \leq s$ という条件下で $\dot{k}(s) < 0$ であるような s の下限を s^* としよう。$\dot{k}(t^*) > 0$ なので，$s^* > t^*$ であり，また $[t^*, s^*]$ 上では k は非減少的である。よって $\dot{c}(s^*) < 0$ である。一方で $\dot{k}(s^*) = 0$ であるため，

$$\ddot{k}(s^*) = \dot{c}(s^*) < 0$$

となり，故に十分小さく $\varepsilon > 0$ を取れば $s^* < t < s^* + \varepsilon$ であれば $\dot{k}(t) < 0$ である。これは s^* の定義に矛盾する。よって k は非減少的である。$t > t^*$ ならば $k(t) > k^*$ なので，$\dot{c}(t) < 0$ であり，よって c は減少的である。 ■

以上で準備が整った。まずは，$c(0) = \bar{c}$ である解について解析してみよう。この解がある $t^* > 0$ について $\dot{c}(t^*) = 0$ となったとする。これは $k(t^*) = k^*$ と同値である。一般に（5）（6）の解は初期値について連続微分可能なので[17]，陰関数定理によって，$\varepsilon > 0$ が十分小さければ，任意の $c(0) \in [\bar{c}, \bar{c}+\varepsilon]$ を初期値とする（5）（6）の解も $\dot{c}(t^*) = 0$ となるような $t^* > 0$ を持つことがわかる。しかしこれは $\bar{c}$ の定義と矛盾している。よって，このようなことはあり得ず，$\dot{c}(t) > 0$ が常に成り立つ。

今度はある $t^* \geq 0$ に対して $\dot{k}(t^*) = 0$ となったと仮定してみよう。$\dot{c}(t^*) > 0$ なので，$k(t^*) < k^*$ である。するとやはり陰関数定理によって，十分小さな $\varepsilon > 0$ を取れば，$\bar{c} - \varepsilon < c(0) < \bar{c}$ であるような（5）（6）の解には常に同様の $t^* > 0$ が存在しなければならない。すると補題 1 によって

（17） これもポントリャーギン（1968）を参照。

$t > t^*$ ならば $k(t) < k(t^*) < k^*$ である。$\bar{c}$ の定義により，$]\bar{c} - \varepsilon, \bar{c}[$ の範囲でうまく $c(0)$ を選べば，$k(t) = k^*$ となる $t > 0$ が存在するはずであるが，上に述べた事実から $t < t^*$ であることがわかる。しかし補題 2 によってこのとき $k(t^*) \geq k(t) = k^*$ でなければならないため，これは矛盾である。よってこのようなこともあり得ず，$\dot{k}(t^*) > 0$ も常に成立しなければならない。

よって，$c(0) = \bar{c}$ であれば $c(t), k(t)$ は増加的であること，およびその軌道は

$$\{(c,k)|\bar{k} \leq k \leq k^*, \bar{c} \leq c \leq f(k) - (n+g)k\}$$

というコンパクト集合の内部に含まれていなければならない，ということがわかる。したがって $c(t), k(t)$ は $[0, +\infty[$ を含む区間上で定義されており，さらに

$$\lim_{t\to\infty}(c(t), k(t)) = (c_\infty, k_\infty) \gg (\bar{c}, \bar{k})$$

が存在することもわかる。

以下，$(c_\infty, k_\infty) = (c^*, k^*)$，ただし $c^* = f(k^*) - (n+g)k^*$ となることを示そう。まず，$k_\infty \leq k^*$ は，$k(t) < k^*$ からただちにわかる。$k_\infty < k^*$ であったとすれば，$\dot{c}(t) \geq M > 0$ となる定数 $M > 0$ が存在することになり，$\lim_{t\to\infty} c(t) = +\infty$ となるがこれは c_∞ の有界性に矛盾である。よってこれはあり得ず，$k_\infty = k^*$ である。

次に $c_\infty \leq c^*$ も，$\dot{k}(t) > 0$ から容易にわかる。$c_\infty < c^*$ であるとすれば，$\dot{k}(t) \geq M > 0$ となる定数 $M > 0$ が存在することになり，$\lim_{t\to\infty} k(t) = +\infty$ となって矛盾する。よって $c_\infty = c^*$ でなければならない。

最後に，$c(t)$ が増加的なので $t > 0$ ならば明らかに $c(t) > 0$ である。以上で(II)が示せたことになる。

次に $0 < c(0) < \bar{c}$ であるとしよう。このとき，$c(0)$ と $\bar{c}$ の間にある $\hat{c}$ をうまく取れば，$\hat{c}$ を初期値とする（5）（6）の解 $\hat{c}(t), \hat{k}(t)$ について $\hat{k}(t^*) = k^*$ となる $t^* > 0$ が存在する。$\bar{c}$ を初期値とする（つまり，(II) の条件を満たす）解を $\bar{c}(t), \bar{k}(t)$ としてみよう。このとき，自励系のふたつの異なる解軌道は交われないので，$[0, t^*[$ 上では $(\hat{c}(t), \hat{k}(t))$ に対して，$\bar{k}(s) = \hat{k}(t)$ となる $s > 0$ が存在し，$\hat{c}(t) < \bar{c}(s)$ でなければならない。このため，$\hat{c}(t) < f(\hat{k}(t)) - (n+g)\hat{k}(t)$ が常に成り立つ。また，同じ結果から $\hat{c}(t^*) \leq c^*$ であるが，もし $\hat{c}(t^*) = c^*$ であるとすれば，$\hat{c}(0) < \tilde{c}(0) < \bar{c}$ となる $\tilde{c}(0)$ をうまく選ぶことで，$\tilde{k}(s^*) = k^*$ かつ $\tilde{c}(s^*) > c^*$ となるような s^* が存在してしまうことが示せるが，$\tilde{c}(t)$ についても $\hat{c}(t)$ と同じ論法で $\tilde{c}(s^*) \leq c^*$ が示せてしまうため，これは矛盾である。よって $\hat{c}(t^*) < c^*$ である。ということは，

$$\min\{f(k) - c - (n+g)k|\bar{k} \leq k \leq k^*, 0 \leq c \leq \hat{c}(\hat{k}^{-1}(k))\} = M > 0$$

だとわかる。仮に $c(0)$ を初期値とする解 $c(t), k(t)$ について $k(t) = k^*$ となるような k^* が存在しないとすれば，再び微分方程式の解が交われないという事実から，

$$(c(t), k(t)) \in \{(c, k) | \bar{k} \leq k \leq k^*, 0 \leq c \leq \hat{c}(\hat{k}^{-1}(k))\}$$

が言える。この集合はコンパクトなので，$c(t), k(t)$ は $[0, +\infty[$ 上まで延長可能であるが，そうすると $k(t) > \bar{k} + Mt$ となって，$\lim_{t\to\infty} k(t) = +\infty$ となってしまい矛盾である。よって，$c(0) < \bar{c}$ であれば必ず $k(t^*) = k^*$ となる $t^* > 0$ が存在する。

このとき，t^* 以降では補題 2 によって $k(t)$ は非減少的，$c(t)$ は減少的であるということがわかる。$k(t) > \hat{k}$ ならば $\dot{k}(t) < 0$ なので，対偶を取れば $k(t) \leq \hat{k}$ であることがわかる。もし仮に $c(t^*) = 0$ となる $t^* > 0$ が存在したとするならば，$k(t^*) \leq \hat{k}$ であることから，この解の軌道は $c(t) \equiv 0$ となるような別の解軌道と交わることが示せたことになり，そこから $c(0) = 0$ となって矛盾が生ずる。よって $c(t) > 0$ が常に成り立ち，

$$(c(t), k(t)) \in \{(c, k) | \bar{k} \leq k \leq \hat{k}, 0 \leq c \leq f(k) - (n + g)k\}$$

がわかる。この集合はコンパクトなので，$(c(t), k(t))$ は $[0, +\infty[$ 上で定義されている。よって，

$$\lim_{t\to\infty} (c(t), k(t)) = (c_\infty, k_\infty)$$

が存在する。以降我々は，$(c_\infty, k_\infty) = (0, \hat{k})$ であることを示す。

まず，$c_\infty \geq 0$ は明らかである。$c_\infty > 0$ であるとしよう。このとき，十分大きな $T > 0$ を取れば，$t \geq T$ のとき常に $\dot{c}(t) < 0$，つまり $f'(k(t)) < n + g + \beta$ が成り立つことになる。すると，そのような t については

$$\dot{c}(t) \leq \inf_{s \geq T} c(s) \times (f'(k(T)) - (n + g + \beta)) < 0$$

という評価を得る。したがって $c_\infty = -\infty$ となるがこれは矛盾である。よって $c_\infty = 0$ でしかあり得ない。

次に，$k_\infty \leq \hat{k}$ も当然である。$k_\infty < \hat{k}$ であるとしよう。このとき，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば，十分大きな $t > 0$ に対しては

$$c(t) < \min_{\bar{k} \leq k \leq k_\infty} [f(k) - (n + g)k] - \varepsilon$$

とできる。このとき $\dot{k}(t) > \varepsilon$ なので，$k_\infty = +\infty$ となるがやはり矛盾である。したがって，$k_\infty = \hat{k}$ でなければならない。これで（I）が証明できた。

最後に，$c(0) > \bar{c}$ であるとしよう。$\bar{c}$ の定義から，このとき $k(t) < k^*$ が常に言える。ここで次の補題を示す。

補題3：$\bar{c}$ を初期値とする (5) (6) の延長不能な解を $\bar{c}(t), \bar{k}(t)$ とすれば，$k(t) \le \bar{k}(t)$ かつ $c(t) - c(0) \ge \bar{c}(t) - \bar{c}$ である。

証明：まず最初に，$[0, t]$ 上で後半の不等式が成り立っていたとして，$k(t) \le \bar{k}(t)$ を示す。仮にそうでなく，ある $t^* > 0$ について $0 \le t \le t^*$ ならば $c(t) - c(0) \ge \bar{c}(t) - \bar{c}$ であるにもかかわらず $k(t^*) > \bar{k}(t^*)$ であったとしよう。このとき $[0, t^*]$ 内で $k(t) > \bar{k}(t)$ が成り立つような t の下限を t^+ とする。このとき $k(t^+) = \bar{k}(t^+)$ であり，また $c(t^+) > \bar{c}(t^+)$ なので，

$$\frac{d}{dt}[k(t) - \bar{k}(t)]\Big|_{t=t^+} < 0$$

が成り立つ。これは十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$t^+ < t < t^+ + \varepsilon$ であれば $k(t) < \bar{k}(t)$ であることを意味し，t^+ の定義に矛盾。よってこのような t^* は存在し得ない。

次に後半の不等式を示そう。仮にそうでないとし，不等式の成り立たない t の下限を t^* としよう。すると $0 < t \le t^*$ では先ほど示したように $k(t) \le \bar{k}(t)$ である。よって，$f'(k(t^*)) \ge f'(\bar{k}(t^*))$ かつ $c(t^*) > \bar{c}(t^*)$ なので，

$$\frac{d}{dt}(c(t) - \bar{c}(t))\Big|_{t=t^*} > 0$$

となるが，ここから先ほどと同様にして矛盾が示せる。以上で証明が完成した。■

$\bar{k}(t) < k^*$ が常に成り立つので，補題3からただちに，$k(t) < k^*$ を得る。また同様に $\bar{c}(t) > 0$ が常に成り立つので，$c(t) > 0$ も得る。

さて，ここで仮に，$\dot{k}(t) \ge 0$ が常に成り立っていると仮定しよう。すると，

$$(c(t), k(t)) \in \{(c, k) | \bar{k} \le k \le k^*, 0 \le c \le f(k) - (n + g)k\}$$

となり，この集合はコンパクトなので，ふたたび $(c(t), k(t))$ の定義域は $[0, +\infty[$ である。ここで $\bar{c}(t) \to c^*$ なので，十分大きな $t > 0$ に対しては

$$f(k^*) - \bar{c}(t) - (n + g)k^* < c(0) - \bar{c}$$

となるが，このとき $k(t) < k^*$ であるため，

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + g)k(t) < 0$$

となって矛盾する。よって，ある $t^* > 0$ に対して $\dot{k}(t^*) < 0$ である。よって補題1から，t^* より大

きい t の領域において k は減少的，c は増加的であるため，$t > t^*$ ならば

$$\dot{k}(t) < \dot{k}(t^*) < 0$$

が言える。これは，有限時間で $k(t) > 0$ が成り立たなくなることを意味するが，そのような領域では f' の値が定義されていないため，（5）（6）の解も定義されない。したがって $c(t), k(t)$ は $[0, +\infty[$ 上では定義されていない。以上で（III）の証明が終わった。■

定理 1 と定理 2 を組み合わせることで，次の定理が示せる。このようにして，均衡の存在は言えた。

定理 3：$(\bar{c}, \bar{k})$ から出発する（5）（6）の解を $c^*(t), k^*(t)$ とすると，これは（2）（3）式で定義した $r^*(t), w^*(t)$ と共に均衡となる。

証明：（7）式，つまり

$$f'(k^*) > n + g$$

が成り立てばよい。しかし，

$$f'(k^*) = n + g + \beta$$

なので主張は正しい。■

3.3　厚生経済学の第一基本定理（不完全）

次に均衡の一意性を示すのだが，そのためにはまず，ある問題を経由しておく必要がある。次の問題を考えよう。

$$\begin{aligned} &\max\nolimits_{c(t),k(t)} && \int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t))dt \\ &\text{subject to.} && \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t) \\ & && k(0) = \bar{k}, k(t) \geq 0, c(t) \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

この問題を，集権型の Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルと呼ぶ。このとき，次の定理が最初の重要なステップとなる。

定理 4：定理 3 で示した均衡配分 $(c^*(t), k^*(t))$ は上の集権型モデルの解である。

証明：仮にそうでないとし，ある $c_+(t), k_+(t)$ が（8）の制約条件を満たしつつ，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} u(c_+(t))dt > \int_0^\infty e^{-\beta t} u(c^*(t))dt$$

を満たしていたとしよう。このとき，均衡の定義の（i）から，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c_+(t)dt > \bar{k} + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}w^*(t)dt$$

が成り立っていなければならない。ここで左辺を 0 から T までの積分に変えて計算すると，

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}c_+(t)dt &= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - (n+g)k_+(t) - \dot{k}_+(t))dt \\
&= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - (n+g)k_+(t))dt \\
&\quad - \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}\dot{k}_+(t)dt \\
&= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - (n+g)k_+(t))dt \\
&\quad -[e^{(n+g)t-R^*(t)}k_+(t)]_0^T + \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}((n+g)k_+(t) - r^*(t)k_+(t))dt \\
&= \int_0^T e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - r^*(t)k_+(t))dt + \bar{k} - e^{(n+g)T-R^*(T)}k_+(T)
\end{aligned}$$

が示せる。(7) より $e^{(n+g)t-R^*(t)}$ は $[0,+\infty[$ 上可積分であり, 特に $T \to \infty$ のとき $e^{(n+g)T-R^*(T)} \to 0$ である。また $k_+(t) \leq \hat{k}$ であるから，$T \to \infty$ とすることで

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}c_+(t)dt = \bar{k} + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - r^*(t)k_+(t))dt$$

がわかる。これを先ほどの式と合わせて整理すると，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R^*(t)}(f(k_+(t)) - r^*(t)k_+(t) - w^*(t))dt > 0$$

がわかったが，これに $A(0)L(0)$ をかけると

$$\int_0^\infty e^{-R^*(t)}[F(K_+(t), A(t)L(t)) - r^*(t)K_+(t) - w^*(t)A(t)L(t)]dt > 0$$

がわかる。ただし $K_+(t) = k_+(t)A(t)L(t)$ である。一方で F が一次同次であることと $k^*(t)$ が均衡であることから，$K^*(t) = k^*(t)A(t)L(t)$ とすれば

$$F(K^*(t), A(t)L(t)) - r^*(t)K^*(t) - w^*(t)A(t)L(t) = 0$$

であるが，これは均衡において企業が $K^*(t), L(t)$ で利潤最大化をしていないことになり，均衡の定義に矛盾。よってこれはあり得ない。 ■

以上で，$(c^*(t), k^*(t))$ という特別な配分について，厚生経済学の第一基本定理の証明が完成した。特にこの結果から，集権型モデル（8）の目的関数の値は上に有界であることがわかる。任意の均衡

配分は（8）の制約条件を満たすので，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}u(c(t))dt < +\infty$$

であることがわかった。これが，後々まで大きな役割を果たす。

なお，この時点で厚生経済学の第一基本定理を完全に証明しきることはできない。なぜかと言えば，上のロジックのうち，

$$\int_0^T e^{(n+g)t-R(t)}(f(k_+(t)) - r(t)k_+(t))dt$$

が $T \to \infty$ としたときにうまい場所に収束してくれる，という事実が，r についての制約がないと言えないように思われるからである。上で使った均衡配分 $(c^*(t), k^*(t))$ に付随する $r^*(t)$ については，この積分の収束は言えて，定理の証明はうまくいく。しかしこの時点では，一般の均衡についての同じ命題が証明できることを，筆者は確認できなかった。後に示すように均衡は一意であるため，結果として第一基本定理は正しいのだが，この点からも同定理はこの種のモデルについて「自明」であるとは言えないことが見て取れる。

3.4　オイラー方程式を満たす均衡の一意性

さて，いよいよ均衡の一意性の議論に入るのだが，まだワンクッション必要である。さしあたり，（5）（6）を満足する $c(t), k(t)$ について，$c(0) = \bar{c}$ を満たさない解はすべて均衡ではないということを示しておかなければならない。$c(0) > \bar{c}$ であればこれは $[0, +\infty[$ まで延長可能でないため，解でないのは明らかである。そこで $c(0) < \bar{c}$ であるときだけを問題にすればよい。

まず，

$$f'(\hat{k}) < n + g$$

であったことを思い出そう。これは，

$$f(0) = f(\hat{k}) - (n + g)\hat{k} = 0$$

であることと，f が凹関数であることからわかる。このとき，定理 1 の証明と同様の計算から，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}c(t)dt < \bar{k} + \int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)}w(t)$$

が示せることになる。

一方で定理 4 から，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}u(c(t))dt < +\infty$$

であることがわかっている。そこで

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & （x > 0 のとき） \\ 0 & （それ以外） \end{cases}$$

と定義し[18]，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$d(t) = c(t) + \varepsilon h(1-t)$$

と定義すれば，$d(t)$ は予算制約を満たしつつ，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t))dt < \int_0^\infty e^{-\beta t} u(d(t))dt$$

が成り立ってしまう[19]。つまり，$c(t)$ は効用最大化しておらず，よって解ではない。以上で次の定理の証明が完了したことになる。

定理 5：（5）（6）を満たし，$k(0) = \bar{k} < k^*$ であるような解で，均衡配分となり得るのは $c(0) = \bar{c}$ となるもののみである。

3.5　均衡の一意性

いよいよ最後に，均衡の一意性を述べる。すでに示した結果により，後は均衡配分が必ずオイラー方程式（5）を満たすことを述べればよい。ここでは第 1 種，第 2 種，第 3 種の均衡概念によって，議論の仕方が大幅に変わる。おおまかに言うと，第 1 種が最も簡単であるが，その代わり泥臭い議論が必要である。このようなことが起こる理由は，第 1 種のほうが比較しなければいけない $c(t)$ の種類が多いため，「○○は均衡でない」ということを証明するためのロジックを組む方法が豊かであるという事実に起因する。一方で第 2 種，第 3 種の場合は $c(t)$ の種類が少ないために問題が難しくなっているが，これは無限次元の Lagrange の未定乗数法というエレガントな技術を使うことによって，比較的きれいに解くことができる。

さて，最初に $c(t) > 0$ が常に成り立つとし，$c(t), k(t)$ が（5）式を満たすとしよう。このときすでに定理 1 の証明中で示したように，

$$e^{-\beta t} u'(c(t)) = \lambda e^{(n+g)t - R(t)} \tag{9}$$

となるような正の λ が存在する。逆にほとんどすべての t に対して $c(t) > 0$ であり，かつ（9）が成り立つと仮定してみよう。このとき，$c(t)$ は一階連続微分可能で 0 より常に大きい関数とほとんどすべての点で一致することになる。測度 0 の点は積分の値に影響しないので，$c(t)$ をその関数と

（18）　この関数はすべての $x \in \mathbb{R}$ について無限回微分可能な関数として知られている。
（19）　左辺が∞であるとこのロジックは成り立たない。これが定理 4 を先に示した理由である。

同一視してみよう。そこで両辺の対数を取れば,

$$-\beta t - \theta \log c(t) = \log \lambda + (n+g)t - R(t)$$

となり，ここから

$$\log c(t) = \frac{1}{\theta}[R(t) - (n+g+\beta)t - \log \lambda]$$

を得る。これを両辺 t で微分して $c(t)$ をかけると,

$$\dot{c}(t) = \frac{r(t) - (n+g+\beta)}{\theta} c(t),$$

すなわち（5）式が得られる。

つまり，$c(t) > 0$ という条件の下では（5）式は（9）式と同値であることがわかった。以下では，均衡は必ず $c(t) > 0$ で（9）式を満たすということを示す。[20]

・第 1 種の均衡

まず最初に，第 1 種の均衡についての一意性を示す。$c(t), k(t), w(t), r(t)$ が均衡であるとしよう。まず，定理 4 から,

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t)) dt < +\infty$$

であることに注意する。繰り返すが，この事実はとても重要であり，以下のロジックの各所で顔を出す。

さて，もし $c(t) \equiv 0$ であったとしたら，予算制約の右辺は正であるため，$0 \le t \le 1$ で $d(t) = \varepsilon > 0$ とし，$t > 1$ で $d(t) = 0$ とすれば，十分 ε が小さければ $d(t)$ は予算制約を満たし，故に $c(t)$ は効用最大化をしておらず，矛盾である。したがって $c(t) > 0$ となるような t は正の測度で存在する。よって十分 $\varepsilon > 0$ を小さく取れば，$c(t) > \varepsilon$ となるような t が正の測度で存在する。一方，$c(t) = 0$ となる点が正の測度で存在するとすれば，正の測度を持つ集合 A_1, A_2 を,

$$A_1 \subset \{t | c(t) = 0\}$$

$$A_2 \subset \{t | c(t) > \varepsilon\}$$

$$\int_{A_1} e^{(n+g)t - R(t)} dt = \int_{A_2} e^{(n+g)t - R(t)} dt$$

$$A_1 \cup A_2 \subset [0, T]$$

となるように取ることができる。このとき，十分小さな $a > 0$ に対して

(20) ただし第 1 種の均衡を考える際には，$c(t)$ は「ほとんどすべての点で」（つまり，測度 0 の t を除いて）その条件を満たすことを示す。

$$d(t)=\begin{cases} a & (t\in A_1 \text{ のとき}) \\ c(t)-a & (t\in A_2 \text{ のとき}) \\ c(t) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定義すれば，$\lim_{c\downarrow 0} u'(c)=+\infty$ から $c(t)$ より $d(t)$ のほうが効用が高く[21]，したがって $c(t)$ は効用最大化をしておらず，矛盾。よって $c(t)$ は測度 0 の点を除いて正であることがわかった。

次に，$T>0$ を任意に固定し[22]，(9) 式をほとんどすべての $t\in[0,T]$ に対して満たすような $\lambda>0$ が存在しないと仮定しよう。すると，$0<\lambda_1<\lambda_2$ を満たす λ_1,λ_2 をうまく取れば，

$$A_1\subset\{t\in[0,T]|e^{-\beta t}u'(c(t))\le \lambda_1 e^{(n+g)t-R(t)}\}$$

$$A_2\subset\{t\in[0,T]|e^{-\beta t}u'(c(t))\ge \lambda_2 e^{(n+g)t-R(t)}\}$$

$$\int_{A_1}\lambda_1 e^{(n+g)t-R(t)}dt=\int_{A_2}\lambda_2 e^{(n+g)t-R(t)}dt$$

であるような正の測度を持つ A_1,A_2 を取ることができる。このとき，

$$d_\varepsilon(t)=\begin{cases} c(t)-\lambda_1\varepsilon & (t\in A_1 \text{ のとき}) \\ c(t)+\lambda_2\varepsilon & (t\in A_2 \text{ のとき}) \\ c(t) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすれば，$\varepsilon>0$ が十分小さい限り $d_\varepsilon(t)>0$ である。A_1,A_2 の取り方から，$d_\varepsilon(t)$ は予算制約を満たす。さらに，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{A_1}e^{-\beta t}(u(d_\varepsilon(t))-u(c(t)))dt &= \int_{A_1}\lambda_1 e^{-\beta t}u'(c(t))dt \\ &\le \int_{A_1}\lambda_1^2 e^{(n+g)t-R(t)}dt \\ &< \int_{A_2}\lambda_2^2 e^{(n+g)t-R(t)}dt \\ &\le \int_{A_2}\lambda_2 e^{-\beta t}u'(c(t))dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{A_2}e^{-\beta t}(u(d_\varepsilon(t))-u(c(t)))dt\end{aligned}$$

---

(21) ここでのロジックのために，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}u(c(t))dt<+\infty$$

が必要であることに注意しよう。もし仮に左辺が $+\infty$ であれば，$d(t)$ のほうが効用が高いという事実は出てこない。

となるので，十分 $\varepsilon > 0$ が小さければ $d_\varepsilon(t)$ のほうが $c(t)$ よりも効用が高いが，これは効用最大化の仮定に矛盾である[23]。したがって $c(t)$ はほとんどすべての t についてある $\lambda > 0$ に対して（9）式が満たされなければならない。第1種の均衡についてはこれですべての問題が解決する。

・Lagrange の未定乗数法

次に進む前に，Lagrange の未定乗数法について記述しておく。この方法について証明も含めた詳しい解説は Luenberger（1997）の第9章に載っているので，ここでは事実のみを淡々と示す。

まず，X がベクトル空間であるとし，$\|\cdot\|$ は X から $\mathbb{R}$ への関数であり[24]，次の三条件

（i）　$\|x\| \geq 0$ が常に成り立ち，さらに $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る。

（ii）　$\|ax\| = |a|\|x\|$ がすべての $a \in \mathbb{R}$ について成り立つ。

（iii）$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が常に成り立つ。

を満たすとする。この $\|\cdot\|$ を X のノルムと呼ぶ。ノルムがひとつ決まれば，距離 $d(x,y) = \|x-y\|$ によって X は距離空間となる。ノルムが与えられたベクトル空間をノルム空間と呼び，特にそれが距離空間として完備であるとき，Banach 空間と呼ぶ。

Banach 空間 X の開部分集合 U から Banach 空間 Y への関数 f と点 $x \in U$ について，f が x で Fréchet 微分可能であるとは，ある連続線形作用素 A が存在して，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことを指す。またこのとき A を f の x における Fréchet 微分の値と呼び，$Df(x)$ で表す。特に $\|Df(x)\|$ と書いた場合，それは作用素ノルム

$$\sup\{\|Df(x)z\| \,|z \in X, \|z\| \leq 1\}$$

を表す。このノルムについて $Df(x)$ が連続なとき，f は Fréchet 連続微分可能と言う。

Banach 空間として有名な例を挙げると，まずコンパクト集合 K 上の連続な実数値関数の空間 $C(K)$ がある。ここでノルムは，

（22）固定することで $[0,T]$ という有限測度の空間に限定した議論をするのがポイントである。これがないといくつかの議論はうまくいかない。

（23）やはりここでも，

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t))dt < +\infty$$

を用いていることに注意。

（24）$\|\cdot\|(x)$ のことを通常は $\|x\|$ と書く。

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

で与えられる。また，同じくコンパクト集合 K 上の連続微分可能な実数値関数の空間 $C^1(K)$ も有名である。この空間のノルムは,

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{x \in K} \|Df(x)\|$$

で与えられる。

ここで次の定理が成り立つ。

定理（Lagrange の未定乗数法）：X, Y は Banach 空間とし，U は X の開部分集合で，$F : U \to \mathbb{R}$ と $H : U \to Y$ は共に Fréchet 連続微分可能であるとする。仮に $H(x) = 0$ という制約の下で $x^* \in U$ が F の極大点となっているとし，さらに $DH(x^*)$ が X から Y への全射であるならば，Y から $\mathbb{R}$ への連続な線形汎関数 y^* が存在して,

$$DF(x^*) = y^* \circ DH(x^*)$$

が成り立つ。

・第 2 種の均衡

さて，次に第 2 種の均衡について考えよう。いま $c(t), k(t), r(t), w(t)$ が均衡であるとする。再び定理 4 から,

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t))dt \le \int_0^\infty e^{-\beta t} u(c^*(t))dt < +\infty$$

であることがわかる。最初に，$c(t) = 0$ となる点が存在しないことを示そう。まず，すべての点で $c(t) = 0$ であったとすれば，先ほどと同様に

$$d(t) = \begin{cases} a & (t \le 1 \text{ のとき}) \\ a - (t-1) & (1 < t \le 1 + a \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすれば，十分小さな $a > 0$ に対して $d(t)$ は制約条件を満たし，かつ効用の値が大きくなるため，$c(t)$ の効用最大化の仮定に矛盾である。したがってある t^* において $c(t^*) > 0$ である[(25)]。ここで仮に $c(s^*) = 0$ となる点 s^* があったとすれば，c の連続性から，どんな小さな $\varepsilon > 0$ に対しても，ある

(25) この時点ですでに，第 1 種の均衡についての議論と違う $d(t)$ を取っていることに気づいていただきたい。実際，第 1 種の均衡のときに選んだ $d(t)$ は連続ではないので，第 2 種の均衡を議論する際には使えない。

$\delta_1, \delta_2 > 0$ をうまく選べば，

$$|t - t^*| < \delta_1 \Rightarrow c(t) > c(t^*) - \varepsilon$$

$$|t - s^*| < \delta_2 \Rightarrow c(t) < \varepsilon$$

となる。一般性を失うことなく，

$$x(t) = \min\{\delta_1 - |t - t^*|, 1\}$$

$$y(t) = \min\{\delta_2 - |t - s^*|, 1\}$$

としたとき，

$$\int_{t^*-\delta_1}^{t^*+\delta_1} e^{(n+g)t-R(t)} x(t)dt = \int_{s^*-\delta_2}^{s^*+\delta_2} e^{(n+g)t-R(t)} y(t)dt$$

であると仮定してよい。そこで，

$$d(t) = \begin{cases} c(t) - ax(t) & (|t - t^*| < \delta_1 \text{ のとき}) \\ c(t) + ay(t) & (|t - s^*| < \delta_2 \text{ のとき}) \\ c(t) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすれば $d(t)$ は予算制約を満たす連続関数である。そして，$\varepsilon > 0$ が十分小さく，また $a > 0$ も十分小さければ，$d(t)$ のほうが $c(t)$ よりも効用の値が高くなる。これは $c(t)$ が効用最大化しているという仮定に矛盾する。よって，$c(t) > 0$ がすべての $t > 0$ に対して言えなければならない。

さて，ここで仮に

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)} w(t)dt = +\infty$$

であったとしよう。すると $c(t) + 1$ も予算制約を満たし，さらに目的関数の値が $+\infty$ でないため，$c(t)$ は効用最大化をしていないことになる。よってこれはあり得ず，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)} w(t)dt < +\infty$$

である。よって，

$$\int_0^\infty e^{(n+g)t-R(t)} c(t)dt < +\infty$$

もわかる。

そこで，$T > 0$ を任意に取り，空間 C_T を，$[0, +\infty[$ 上で定義された連続関数で，$t \geq T$ ならば $x(t) = 0$ となるものの全体としよう。C_T には一様収束ノルムを入れて，Banach 空間としておく。ここで次のふたつの汎関数，

$$F(x(t)) = \int_0^\infty e^{-\beta t} u(c(t) + x(t))dt$$

$$H(x(t))=\int_0^{\infty}e^{(n+g)t-R(t)}(c(t)+x(t))dt$$

を定義する。すると F,H は共に次の集合，

$$\{x\in C_T|c(t)+x(t)>0\}$$

内で定義された実数値関数であり，さらに 0 関数が次の問題，

$$\begin{array}{ll}\max_{x(t)\in C_T} & F(x(t))\\ \text{subject to.} & H(x(t))=\bar{k}+\int_0^{\infty}e^{(n+g)t-R(t)}w(t)dt\end{array}$$

の解でなければならない。先ほど示した F,H の定義域は 0 を中心とした $\min\{c(t)|t\in[0,T]\}$ の半径の開球を含むため，0 関数は F,H の定義域の内点に位置する[(26)]。そこで，もし F,H が 0 で Fréchet の意味で連続微分可能であり，かつ $DH(0)$ がゼロ作用素でないならば，Lagrange 未定乗数法の原理から，

$$DF(0)=\lambda DH(0)$$

となる定数 λ がなければならない[(27)]。実際に確かめてみると F,H はたしかに 0 で Fréchet 連続微分可能で，

$$DF(0)x(t)=\int_0^T e^{-\beta t}u'(c(t))x(t)dt$$

$$DH(0)x(t)=\int_0^T e^{(n+g)t-R(t)}x(t)dt$$

である。したがってこれらから，$[0,T]$ 上の任意の t に対して，

$$e^{-\beta t}u'(c(t))=\lambda e^{(n+g)t-R(t)}$$

であることがわかる[(28)]。T は任意だったから，$[0,+\infty[$ 上の任意の t に対して上が成り立つ。こうして，（9）式が示せたことになる。これで第 2 種の均衡の一意性の証明が完成した。

・第 3 種の均衡

最後に第 3 種の均衡について述べる。ここでは定理 5 で用いた関数：

（26） なぜ第 1 種の均衡でこのロジックが使えないかというと，この半径が 0 になってしまう可能性を否定できないからである。

（27） 念のために意味を確認しておくと，これはすべての $x(t)\in C_T$ に対して

$$DF(0)x(t)=\lambda DH(0)x(t)$$

が成り立つという意味である。

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & （x > 0 \text{ のとき}） \\ 0 & （\text{それ以外}） \end{cases}$$

が大活躍する。特にこの変形として，

$$g(x) = \frac{\int_0^x h(y)h(1-y)dy}{\int_0^1 h(y)h(1-y)dy}$$

は，あらゆる点で何回でも微分可能で，さらに $x \leq 0$ ならば 0 かつ $x \geq 1$ ならば 1 である関数である。これをうまく活用することで，問題を解決していきたい。

まず，第 2 種のときと同様に，$c(t) > 0$ が常に成り立つことを証明しなければならない。証明の流れは第 2 種とほぼ同じである。まず，$c(t) \equiv 0$ でないことを示すためには，第 2 種の $d(t)$ の代わりに

$$d(t) = ah(1-t)$$

を使ってやれば事足りる。次に $c(t) = 0$ となる t が存在しないことを証明するためには，

$$x(t) = g(\delta_1^2 - (t^* - t)^2)$$

$$y(t) = g(\delta_2^2 - (s^* - t)^2)$$

で置き換えてやればよい。後は，C_T の代わりに，$t \geq 0$ ならば $x(t) = 0$ となる一階連続微分可能な関数の空間 C_T^1 を使い，一様ノルムの代わりに C^1 ノルムを用いて同じ議論をする。最後に，脚注で書いたところでは，T_1 の任意の連結な部分集合（つまり開区間）$]a, b[$ が存在すると仮定して，

$$x_m(t) = g(m(t-a))g(m(b-t))$$

---

(28) 詳しく書くと次のようである。いま $e^{-\beta t}u'(c(t)) > \lambda e^{(n+g)t-R(t)}$ であるような $t \in]0, T[$ の集合を T_1 とすれば，これは $\mathbb{R}$ の開集合である。ここで，連続関数 $x_m(t)$ を

$$x_m(t) = \min\{1, m\rho(t, T_1^c)\}$$

とすれば（ただし $\rho(t, T_1^c) = \inf_{s \notin T_1} |t-s|$ とする），いま示したことから

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}u'(c(t))x_m(t)dt = \int_0^\infty \lambda e^{(n+g)t-R(t)}x_m(t)dt$$

がわかる。$m \to \infty$ とすれば

$$\int_{T_1} e^{-\beta t}u'(c(t))dt = \int_{T_1} \lambda e^{(n+g)t-R(t)}dt$$

となって，T_1 の測度が 0 であることがわかるが，両辺連続なので $T_1 = \emptyset$。よって $[0, T]$ 上で $e^{-\beta t}u'(c(t)) \leq \lambda e^{(n+g)t-R(t)}$ である。逆の不等号も同様に示せばよい。

と取れば，同じ推論から $]a,b[$ の測度が 0 であることが示せ，矛盾となり，よって $T_1 = \emptyset$ である，という形になる。こうしてすべての議論が尽くされる。

以上をまとめて，次を得る。

定理 6：第 1 種，第 2 種，第 3 種の均衡はすべて（ただし第 1 種の均衡については測度 0 の点を除いて）一意である。

3.6 厚生経済学の基本定理

均衡の一意性と定理 5 から，ただちに次の命題（厚生経済学の第一基本定理）が言える。

定理 7：分権型 Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルの唯一の均衡配分は，集権型 Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルの解である。

一方で，（8）の問題を改造した次の問題，

$$\begin{aligned} &\max_{c(t),k(t)} && \int_0^\infty e^{-\beta t}u(c(t))dt \\ &\text{subject to.} && \dot{k}(t) \le f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t) \\ & && k(0) = \bar{k}, k(t) \ge 0 \end{aligned}$$

を考えると，これは凸制約領域上の狭義凹関数の最大化問題であるため，解は一意である。（8）の問題の解はこの問題の解であることが容易に示せるため，（8）の解は $(c^*(t), k^*(t))$ だけしか存在しない。よって，ここから厚生経済学の第二基本定理が示せる[(29)]。つまり，

定理 8：集権型の Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルの解は（2）（3）で定義された価格の下で分権型の Ramsey＝Cass＝Koopmans モデルの均衡配分となる。

（通信教育部講師）

参 考 文 献

[1] Blanchard, O. J. and S. Fischer（1989）*Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

[2] Cass, D.（1965）Optimum growth in an aggregative model of accumulation. *Review of Economic Studies*, 32, 233–240.

（29） 厚生経済学の第二基本定理は通常，所得調整を通じてパレート最適な点が均衡となることを主張する定理であるが，ここでは消費者がひとりしかいないために所得調整の必要がない。

[3] Koopmans, T. C.（1965）On the concept of optimal economic growth. *Pontificiae Academiae Scientarum Varia*, 28, 225–300.
[4] Luenberger, D. G.（1997）*Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons.
[5] Ramsey, F.（1928）A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38, 543–559.
[6] Seierstad, A. and K. Sydnaeter（1987）*Optimal Control Theory with Economic Applications*, North Holland.
[7] ブランチャード，O. J.，フィッシャー，S.，高田聖治訳（1999）『マクロ経済学講義』多賀出版。
[8] ポントリャーギン，L. S., 千葉克裕訳（1968）『常微分方程式（新版）』共立出版。
[9] ローマー，D.，堀雅博，岩成博夫，南條隆訳（1998）『上級マクロ経済学（初版）』日本評論社。
[10] 上東貴志（2002）「横断性条件の必要性と十分性」神戸大学経済経営研究所 Discussion Paper Series J45.
[11] 斉藤誠（2006）『新しいマクロ経済学（第2版）』有斐閣。
[12] 西村和雄，矢野誠（2007）『マクロ経済動学』岩波書店。