Title	凸集合の分離定理の証明
Sub Title	Proof of separation theorem of convex sets
Author	西岡, 久美子(Nishioka, Kumiko)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2013
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.106, No.1 (2013. 4) ,p.171- 173
JaLC DOI	10.14991/001.20130401-0171
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20130401-0171

「三田学会雑誌」106 巻 1 号（2013 年 4 月）

研究ノート

凸集合の分離定理の証明

西　岡　久美子

（初稿受付 2013 年 1 月 24 日，
査読を経て掲載決定 2013 年 3 月 4 日）

凸集合の分離定理は最適化問題において重要な役割を演じる。この証明についての考察が本稿の目的である。

分離定理　A_1, A_2 は $\mathbf{R}^n$ の空でない凸集合で $A_1 \cap A_2 = \phi$ とする。このとき

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1) \geq \alpha \quad (\mathbf{x}_1 \in A_1)$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}_2) \leq \alpha \quad (\mathbf{x}_2 \in A_2)$$

をみたすベクトル $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する。

よく知られているように，この定理は次の 2 つの補題を使って証明される。

補題 1　S は $\mathbf{R}^n$ の空でない閉凸集合とし，$\mathbf{a} \notin S$ とする。このとき

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq \alpha > (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \quad (\mathbf{x} \in S)$$

をみたすベクトル $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する。

これは $\mathbf{a}$ からの距離が最小となる点 $\mathbf{b} \in S$ をとり，$\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$，$\alpha = (\mathbf{p}, \mathbf{b})$ とすれば示される。

補題 2　A は $\mathbf{R}^n$ の凸集合とし，$\mathbf{0} \notin A$ とする。このとき $(\overline{A})^c$ の点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ で $\mathbf{0}$ に収束するものがある。

経済数学と題する本の中にはこの補題 2 は明らかとして証明されていないものも多いが，明らかではない。例えば，岡田 [3] の以前の版では

> 「凸集合 C の境界点 a に対して閉包 $\overline{C}$ に属さない点列 $\{a^n\}$ がとれて，$a^n \longrightarrow a \ (n \longrightarrow \infty)$ とできる」

といった内容の主張が自明のこととして書かれているが，これは自明ではない。実際，2010 年以降の印刷ではこれが補題として主張され，

証明もされている。しかしながらこの追加された証明では一部省略されたところがあり，これをきちんと証明しようとすると更に長い証明が必要となる。

まず，補題 2 の 2 通りの証明の概略を述べておこう。

永谷 [2] または岡田 [3] における証明：

A が内点 $\mathbf{c}$ をもつ場合。まず $\mathbf{b} \in \overline{A}$ に対して，線分 $[\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \{(1-t)\mathbf{c} + t\mathbf{b} \mid 0 \leq t < 1\}$ 上の任意の点は A の内点であることを示す。$\mathbf{a}(t) = (1-t)\mathbf{c} + t\mathbf{0}$ $(t > 1)$ とおくとき，$\mathbf{a}(t) \in \overline{A}$ なら $\mathbf{0}$ は線分 $[\mathbf{c}, \mathbf{a}(t))$ 上にあるから A の内点となり矛盾。これより補題 2 が示される。A が内点をもたない場合は，証明は与えずに，A は超平面に含まれることからわかるとしている。

Kelly and Weiss [1] における証明：

A が内点をもつ場合。まず $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$ であることを示し，$(\overline{A})^\circ = A^\circ$ であることを示す。$\mathbf{0} \notin A^\circ = (\overline{A})^\circ$ ということで補題 2 が得られる。A が内点をもたない場合には A は超平面に含まれることをきちんと証明してあるが 8 ページ程かかっている。

いずれにおいても証明中に得られる事実も興味深いのであるが，講義で証明を与える場合には短く自己完結的にしたいと思い，次のような証明を考えた。これなら内点のあるなしで分ける必要はなく，幾何的イメージに頼ることもなく 1 回の講義で分離定理の証明を完結することができる。

補題 2 の証明　n に関する帰納法で証明する。$n = 1$ のとき $0 \notin A$ より $A \subset (0, +\infty)$ または $A \subset (-\infty, 0)$ であるから補題が成り立つ。

$n-1$ のとき成り立つと仮定する。

$$B = \{\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in A\}$$

とおくと B は凸で $\mathbf{0} \notin B$ である。B に対して補題が成り立つから $(\overline{B})^c$ の点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ で $\mathbf{0}$ に収束するものがある。補題の結論を否定して $\{\mathbf{x}_k\}$ が存在しないとする。$\{\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}\}$ はともに $\mathbf{0}$ に収束する点列だから $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} \in (\overline{A})^c$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} \in (\overline{A})^c$ となる k はそれぞれ有限個しかない。何故なら，もしどちらかが無限個あれば $(\overline{A})^c$ の点列で $\mathbf{0}$ に収束するものが存在することになるからである。したがって十分大きな k をとれば $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} \in \overline{A}$ でなければならない。A の点列 $\{\begin{pmatrix} a_m \\ \mathbf{z}_m \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} b_m \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix}\}$ でそれぞれ $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}$ に収束するものがある。$a_m > 0$, $b_m < 0$ としてよい。$0 \in (b_m, a_m)$ だから

$$0 = \lambda_m a_m + (1-\lambda_m) b_m, \quad 0 < \lambda_m < 1$$

となる λ_m がある。$\{\lambda_m\}$ は有界な数列だ

から収束する部分列をもつ。部分列に取り直すことにより $\{\lambda_m\}$ は λ に収束するとしてよい。

$$\lambda_m \begin{pmatrix} a_m \\ \mathbf{z}_m \end{pmatrix} + (1-\lambda_m) \begin{pmatrix} b_m \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix} \in A$$

だから $\lambda_m \mathbf{z}_m + (1-\lambda_m)\mathbf{w}_m \in B$ である。$m \to \infty$ とすると

$$\lambda \mathbf{y}_k + (1-\lambda)\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k \in \overline{B}$$

となり矛盾。

ついでに分離定理の証明も載せておく。

分離定理の証明　$A = A_1 - A_2$ とおくと A は凸集合で，$\mathbf{0} \notin A$ である。補題 2 より $(\overline{A})^c$ の点列 $\{\mathbf{y}_k\}$ で $\mathbf{0}$ に収束するものがある。補題 1 より $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{0}$ があって

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) > (\mathbf{p}_k, \mathbf{y}_k) \quad (\mathbf{x} \in \overline{A})$$

が成り立つ。$\|\mathbf{p}_k\| = 1$ としてよい。$\{\mathbf{p}_k\}$ は有界な点列だから収束する部分列をもつ。部分列に取り替えることにより $\{\mathbf{p}_k\}$ は $\mathbf{p}$ に収束するとしてよい。$\|\mathbf{p}\| = 1$ だから $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ である。$\mathbf{x}_1 \in A_1$，$\mathbf{x}_2 \in A_2$ とすると $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in A$ だから

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) > (\mathbf{p}_k, \mathbf{y}_k).$$

$k \to \infty$ として

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \geq (\mathbf{p}, \mathbf{0}) = 0$$

となり，

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1) \geq (\mathbf{p}, \mathbf{x}_2)$$

となる。$\mathbf{x}_2$ を固定すれば $\{(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1) \mid \mathbf{x}_1 \in A_1\}$ は下に有界な集合であることがわかる。この下限を α とすればよい。

補題 2 は平行移動して考えれば $\mathbf{0}$ の代わりに一般の $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ に対しても成り立つ。これより $\mathbf{b}$ が A の内点でないなら $(\overline{A})^c$ の点列で $\mathbf{b}$ に収束するものがあることがわかる。なぜなら任意の $\varepsilon > 0$ に対して近傍 $U_\varepsilon(\mathbf{b})$ は A の元でない $\mathbf{c}$ を含み，したがって $(\overline{A})^c$ の元を含むからである。これを使って上と同様にして次の形の分離定理を証明することができる。

分離定理′　A は $\mathbf{R}^n$ の空でない凸集合とし，$\mathbf{b}$ は A の内点でないとする。このとき

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{p}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{x} \in A)$$

をみたすベクトル $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が存在する。

（経済学部教授）

参 考 文 献

［1］Paul Kelly and Max Weiss「Geometry and Convexity」, Dover Publication, 1979.

［2］永谷裕昭「経済数学」，有斐閣，1998。

［3］岡田章「経済学・経営学のための数学」，東洋経済新報社，2001。