Title	微分方程式の滞留解と模索過程の安定性
Sub Title	Viable solutions of differential equations and the stability of Tâtonnement processes
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki) 虞, 朝聞(Yu, Chaowen)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2013
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.106, No.1 (2013. 4) ,p.109- 133
JaLC DOI	10.14991/001.20130401-0109
Abstract	本稿の目的は, 一般均衡理論において, 均衡価格の安定性を論じる際に前提となる, 微分方程式の解の滞留性に関する主要な結果を厳密に述べること, およびその結果を応用して三つの古典的な経済モデルの解の滞留性が統一的に記述できることを示すことである。具体的には, Crandall(1972)に基づいて, Nagumo-Crandallの定理の証明を厳密に記述し, それを用いて, Nikaidô and Uzawa(1960), Nikaidô(1959), および, Arrow, Block, and Hurwicz(1959)の定式化した価格の模索過程における解の滞留性について論じる。 This study strictly discusses the main results relating to the viability of solutions to differential equations, which are premises when debating the stability of equilibrium prices in general equilibrium theory, while also indicating that, with an application of the results obtained, three solutions for classical economic models can be described in a unified form. In practice, based on Crandall (1972), we strictly describe a proof of the Nagumo–Crandall theorem and, based on this, discuss the viability of solutions in tâtonnement processes for formularized prices in Nikaidô and Uzawa (1960), Nikaidô (1959), and Arrow, Block, and Hurwicz (1959).
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20130401-0109

微分方程式の滞留解と模索過程の安定性

Viable Solutions of Differential Equations and the Stability of Tâtonnement Processes

細矢　祐誉(Yuki Hosoya)

虞　朝聞(Chaowen Yu)

本稿の目的は，一般均衡理論において，均衡価格の安定性を論じる際に前提となる，微分方程式の解の滞留性に関する主要な結果を厳密に述べること，およびその結果を応用して三つの古典的な経済モデルの解の滞留性が統一的に記述できることを示すことである。具体的には，Crandall(1972)に基づいて，Nagumo-Crandall の定理の証明を厳密に記述し，それを用いて，Nikaidô and Uzawa(1960)，Nikaidô(1959)，および，Arrow, Block, and Hurwicz(1959)の定式化した価格の模索過程における解の滞留性について論じる。

Abstract

This study strictly discusses the main results relating to the viability of solutions to differential equations, which are premises when debating the stability of equilibrium prices in general equilibrium theory, while also indicating that, with an application of the results obtained, three solutions for classical economic models can be described in a unified form. In practice, based on Crandall (1972), we strictly describe a proof of the Nagumo–Crandall theorem and, based on this, discuss the viability of solutions in tâtonnement processes for formularized prices in Nikaidô and Uzawa (1960), Nikaidô (1959), and Arrow, Block, and Hurwicz (1959).

「三田学会雑誌」106 巻 1 号（2013 年 4 月）

微分方程式の滞留解と模索過程の安定性*

細　矢　祐　誉
虞　　　朝　聞

（初稿受付 2012 年 9 月 20 日，
査読を経て掲載決定 2013 年 1 月 7 日）

要　　旨

本稿の目的は，一般均衡理論において，均衡価格の安定性を論じる際に前提となる，微分方程式の解の滞留性に関する主要な結果を厳密に述べること，およびその結果を応用して三つの古典的な経済モデルの解の滞留性が統一的に記述できることを示すことである。具体的には，Crandall（1972）に基づいて，Nagumo-Crandall の定理の証明を厳密に記述し，それを用いて，Nikaidô and Uzawa（1960），Nikaidô（1959），および，Arrow, Block, and Hurwicz（1959）の定式化した価格の模索過程における解の滞留性について論じる。

キーワード

微分方程式，滞留性，模索過程

1　序論

一般均衡理論の基礎として，均衡の存在とその安定性に関する問題は，数理経済学者の主要な研究題目の一つである。本稿はその中で安定性の問題に着目し，微分方程式の滞留解の存在定理を用いて，安定性の議論を見通しよく整理できることを示すことを目的としている。

超過需要の正負に応じて，価格が調整される模索過程（tâtonnement process）を微分方程式によって表現し，その安定性を議論することがある。このとき，この微分方程式の解は，時間を通じて（すなわち $[0, +\infty[$ 上で）正象限に留まり続けなければならない。何故ならば，均衡理論の標準モデルでは価格は常に正であるから，上の条件が満たされない微分方程式の解は，もはや価格と見なすことができなくなってしまうためである。

この，「微分方程式の解がある領域の外に出ない」という条件は，数学においては，微分方程式の

＊　本稿を作成するにあたっては，慶應義塾大学経済学部の丸山徹教授の講義および講義で配布された資料を参考にした。また，丸山教授には本稿に対して非常に有益な助言をいただいた。ここに謝意を表する。なお，本稿にあり得べき誤りに関しては，その責任は本稿の著者にあることを念のために記す。

滞留解の存在問題として古くから研究されてきた。滞留解の存在をめぐる最も重要な成果は，1942年というきわめて早い時期に得られた南雲道夫の古典的結果である。以来，長い休止期間の後に，1970年代以降，M. G. Crandall, H. Brezis, R. M. Redheffer, R. H. Martin, Jr. らの精力的な研究によって最盛期を迎えた。本稿では，その中でも特に重要な Nagumo-Crandall の基本定理について，証明も含め厳密に論じている。特に，Crandall（1972）が行った議論には若干の論理のギャップがあったので，そこを正確に埋めてある(1)。さらに本稿では，この定理を用いることで，原論文においては個別に論じられている，Nikaidô and Uzawa（1960），Nikaidô（1959），Arrow, Block, and Hurwicz（1959）に登場する価格の模索過程を表現する微分方程式の滞留性を統一的に証明する(2)。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では，常微分方程式の滞留解の定義を述べ，それに関する基本的な結果を論じている。第3節では，第2節の結果を用いて，滞留解の存在の十分条件について述べた Nagumo-Crandall の基本定理を証明し，さらに，延長不能な滞留解が $[0,+\infty[$ を定義域として持つための十分条件について述べている。最後に，第4節では，Nagumo-Crandall の基本定理の応用として，3種類の価格の模索過程の滞留解の存在について議論している。

2　常微分方程式の滞留解

自励系の常微分方程式の初期値問題

$$\dot{u} = Au,\ u(0) = x_0 \tag{1}$$

を考えよう。ただし $A:\Omega\to\mathbb{R}^n$ の定義域 Ω は $\mathbb{R}^n$ の非空部分集合で x_0 を含むとする。また，Au は A と u の合成関数 $A\circ u$ を表している。A や Ω に多少の条件があれば，解の存在や一意性を言うことができるのはよく知られている。ここで問題としたいのは，ある集合 $H\subseteq\Omega$ について，$x_0\in H$ であるとき，解 u の値が H に留まり続けるための A や H の条件とはなにか，という問題である。詳しく書くと，ある正の数 T に対して $[0,T]$ 上で定義された（1）の解で，

$$u(t)\in H \text{ for all } t\in[0,T]$$

となるものが存在するとき，この解 u を H についての滞留解（viable solution）と呼ぶ。H 上の任意の点 x_0 に対して，（1）の滞留解が存在するとき，H 自身が滞留的（viable）である，と呼ぶ。

（1）　具体的に言うと，Crandall の論文では系1の証明の（8）式の導出から先の部分がほぼ全部省略されている。

（2）　なお，経済モデルにおいては，模索過程が微分方程式ではなく，微分包含式（differential inclusion）で記述されることが自然である場合もあり，それに関する理論も重要であるが，冗長さを避けるためにもこれについて整理することは将来の課題としたい。

滞留解の存在を保証する最も重要な条件が，

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{\rho(x+\theta Ax, H)}{\theta} = 0$$

という条件，あるいは

$$\liminf_{\theta \downarrow 0} \frac{\rho(x+\theta Ax, H)}{\theta} = 0$$

という条件である。ただし $\rho(y, H)$ は y と H の任意の元 z との距離の下限を表す関数で，y と H との距離と呼ばれる。正確に書くと，

$$\rho(y, H) = \inf_{z \in H} \|y - z\|$$

である。

定義：$x \in H$ に対して，次の集合：

$$T_H(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\theta \downarrow 0} \frac{\rho(x+\theta v, H)}{\theta} = 0 \right\}$$

を x における H の Bouligand の意味での接線錐（contingent cone）と呼ぶ。

次の事実は重要なので定理としてまとめておこう。

定理 1：次の二命題は互いに同値である。

（i） $v \in T_H(x)$.

（ii） 正数列 (θ_m) と点列 (v_m) を，

（a） $\theta_m \downarrow 0$,

（b） $v_m \to v$,

（c） $x + \theta_m v_m \in H$

が成り立つようにうまく取ることができる。

証明：最初に（ii）を仮定する。このとき，

$$0 \leq \frac{\rho(x+\theta_m v, H)}{\theta_m} \leq \frac{\|(x+\theta_m v) - (x+\theta_m v_m)\|}{\theta_m} = \|v_m - v\| \to 0$$

なので，$v \in T_H(x)$ がわかり，（i）が言える。

逆に（i）を仮定する。下極限の定義から，うまく正数列 (θ_m) を取ってきて，$\theta_m \downarrow 0$ かつ

$$0 \leq \rho(x+\theta_m v, H) < \frac{\theta_m}{m}$$

となるようにできる。したがってある $z_m \in H$ に対して，

$$0 \leq \|x+\theta_m v - z_m\| < \frac{\theta_m}{m}$$

である。ここで，$v_m = \frac{z_m - x}{\theta_m}$ とすれば $z_m = x + \theta_m v_m$ であり，

$$\|v_m - v\| = \frac{\|(x+\theta_m v)-(x+\theta_m v_m)\|}{\theta_m} = \frac{\|x+\theta_m v - z_m\|}{\theta_m} < \frac{1}{m}$$

であるから，$v_m \to v$ が成り立つ。よって（ii）が言えた。■

さて，次に集合

$$N_H^\circ(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, v\rangle \leq 0 \text{ for all } v \in T_H(x)\}$$

を x における H の劣法線錐（subnormal cone）と呼んでみよう。ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表す。このとき次が成り立つ。

定理 2：$x \in H, y \in \mathbb{R}^n$ として，

$$B_{\|y-x\|}(y) \cap H = \emptyset$$

であるとすると，$y - x \in N_H^\circ(x)$ である。ここで，$B_r(z)$ は z を中心とする半径 r の開球である。

証明：$v \in T_H(x)$ とすると，定理 1 から 0 に収束する正数列 (θ_m) と点列 (v_m) をうまく取って，$x+\theta_m v_m \in H$ が常に成り立ち，かつ $v_m \to v$ となるようにできる。いま，仮定から x は y から H への最短距離を与える点の一つであるから，

$$\|y-x\| \leq \|y-x-\theta_m v_m\|$$

が成り立つ。両辺を自乗して整理すると，

$$2\langle y-x, \theta_m v_m\rangle \leq \theta_m^2 \|v_m\|^2$$

を得る。両辺を θ_m で割ると，

$$2\langle y-x, v_m\rangle \leq \theta_m \|v_m\|^2$$

となるが，この右辺は $m \to \infty$ のとき 0 に収束し，$v_m \to v$ なので，

$$2\langle y-x, v\rangle \leq 0$$

となって，証明が終わる。■

3　滞留解の存在

以下，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ は非空集合で，$A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は連続であると仮定する。また H は Ω の非空部分集合であり，さらに局所閉（つまり，どの $z \in H$ に対しても，z を中心とする十分小さな半径 $r > 0$ の閉球 $\overline{B}_r(z)$ をうまく取れば，$\overline{B}_r(z) \cap H$ は閉集合となる）という条件を課すことにする。

3.1　重要な補題

滞留解の存在を言う際，鍵となるのは次の補題である。これは，$\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{\rho(x+\theta Ax,H)}{\theta} = 0$ という条件が，実は $\liminf$ ではなく $\lim$ が 0 であること，さらにその収束が一様であることまで含意してしまう，ということを主張している。

補題 1：関数 A が，任意の $x \in H$ に対して $Ax \in T_H(x)$ という条件を満たすのであれば，

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{\rho(x+\theta Ax, H)}{\theta} = 0 \tag{2}$$

が成り立つ。しかも，この収束は任意の H のコンパクト部分集合 K 上で一様である。

証明：一点 $x \in H$ について（2）式が成り立つということを証明するためには，$K = \{x\}$ として一様収束を言えばよいので，最初から一様収束性だけを証明すればよい。

さて，まず H が局所閉であるから，K のコンパクト近傍 V をうまく取れば，$V \cap H = K_1$ もまたコンパクトになるようにできる。実際，$x \in K$ に対して $\overline{B}_r(x) \cap H$ が閉集合になるような r を取って，この $\overline{B}_r(x)$ を W_x と書けば，W_x の内部は K の開被覆を構成する。K はコンパクトなので，K 内の有限個の点 $x_1, \ldots, x_q$ が存在して，K は集合 $\bigcup_{i=1}^q W_{x_i}$ に含まれる。そこでこれを V の定義とすればよい。

次に，この K_1 についてうまく $\theta_0 > 0$ を取ると，任意の $\theta \in [0, \theta_0]$ と任意の $x \in K$ に対して，

$$\rho(x+\theta Ax, H) = \rho(x+\theta Ax, K_1)$$

となることを証明しよう。そのためにまず関数 $\phi : K \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を，

$$\phi(x, \theta) = \rho(x+\theta Ax, K_1)$$

とおくと，ϕ は連続であり，定義域がコンパクトなので一様連続である。明らかに $\phi(x,0) = 0$ が常に成り立つ。次に，V の内部の補集合を W と書いたとき，

$$\alpha = \min_{x\in K, w\in W} \|x - w\|$$

とおこう。K は V の内部に含まれるコンパクト集合，したがって閉集合なので，$\alpha > 0$ である。ϕ は一様連続だったので，十分に小さな $\theta_0 > 0$ を取れば，任意の $\theta \in [0, \theta_0]$ と任意の $x \in K$ に対して常に

$$\phi(x, \theta) < \frac{\alpha}{2}$$

とすることができる。また，A は連続で K はコンパクトなので，十分小さい θ については，θAK は原点を中心とする半径 $\alpha/2$ の閉球に含まれる。したがって，前述の記号 θ_0 を再び用いて，任意の $t \in [0, \theta_0]$ と任意の $x \in K$ に対して，

$$\|\theta Ax\| \leq \frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

が成り立つと仮定してよい。いま，$x \in K$ と $\theta \in [0, \theta_0]$ を任意に取る。もし $x + \theta Ax \in K_1$ であれば，明らかに

$$\rho(x + \theta Ax, H) = \rho(x + \theta Ax, K_1) = 0$$

である。そこで，そうでないと仮定しよう。まず，

$$\rho(x + \theta Ax, K_1) = \phi(x, \theta) < \frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

である。一方，

$$\rho(x + \theta Ax, H \setminus K_1) \geq \frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

とならなければならない。実際，仮に $\rho(x+\theta Ax, H \setminus K_1) < \alpha/2$ ならば，(3) より，$\rho(x, H \setminus K_1) < \alpha$ となり，α の定義に矛盾する。したがって，(4)，(5) から，この場合にも

$$\rho(x + \theta Ax, K_1) = \rho(x + \theta Ax, H)$$

が成り立ち，所望の帰結が得られたことになる。

以下，$s, t \in [0, \theta_0]$ とし，$x \in K, y_t = x + tAx$ とおき，さらに $x_t \in K_1$ を

$$\rho(y_t, H) = \|y_t - x_t\|$$

となるようにうまく選ぶ。定理 2 から，

$$y_t - x_t \in N_H^{\circ}(x_t)$$

であること，したがって特に

$$\langle Ax_t, y_t - x_t \rangle \leq 0 \tag{6}$$

であることに注意する。また，

$$\|x - x_t\| \le \|x - y_t\| + \|x_t - y_t\| \le 2\|x - y_t\| = 2t\|Ax\| \tag{7}$$

という関係にも注意しておく。

次に関数 γ を,

$$\gamma(r) = \sup\{\|Az - Ay\| \ |z, y \in K_1, \|z - y\| \le r\}$$

と定義する。定義からただちに γ は非減少関数であり，また Berge の定理から γ は連続関数である。特に,

$$\lim_{r \downarrow 0} \gamma(r) = 0$$

であることに注意する。最後に,

$$L = \max_{x \in K} 2\|Ax\|$$

と定義する。

ここで関数 f を,

$$f(t) = \rho(y_t, H)^2$$

と定義しよう。このとき，$s < t$ とすれば,

$$\begin{aligned}
f(t) - f(s) &= \|y_t - x_t\|^2 - \|y_s - x_s\|^2 \\
&\le \|y_t - x_s\|^2 - \|y_s - x_s\|^2 \\
&= \|y_t - y_s\|^2 + 2\langle y_t - y_s, y_s - x_s\rangle \\
&= (t-s)^2\|Ax\|^2 + 2(t-s)\langle Ax, y_s - x_s\rangle \\
&= (t-s)^2\|Ax\|^2 + 2(t-s)\langle Ax_s, y_s - x_s\rangle + 2(t-s)\langle Ax - Ax_s, y_s - x_s\rangle \\
&\le (t-s)^2\|Ax\|^2 + 2(t-s)\gamma(\|x - x_s\|)\sqrt{f(s)} \ (\because (6) \text{ と Cauchy-Schwarz の不等式}) \\
&\le (t-s)^2\|Ax\|^2 + 2(t-s)\gamma(2s\|Ax\|)\sqrt{f(s)} \ (\because (7)) \\
&\le (t-s)^2\|Ax\|^2 + 2(t-s)\gamma(Ls)\sqrt{f(s)}
\end{aligned}$$

がわかる。この両辺を $t - s$ で割ると,

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \le (t-s)\|Ax\|^2 + 2\gamma(Ls)\sqrt{f(s)}$$

であることがわかる。よって,

$$\begin{aligned}
\limsup_{s \uparrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} &\le 2\gamma(Lt)\sqrt{f(t)} \\
\limsup_{t \downarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} &\le 2\gamma(Ls)\sqrt{f(s)}
\end{aligned}$$

がわかったことになる。

以下，ここまでの式を用いて，$t \in [0, \theta_0]$ について

$$\sqrt{f(t)} \le \int_0^t \gamma(Ls)ds$$

であることを証明しよう。これが証明できれば，$\theta \in]0, \theta_0]$ に対して，

$$0 \le \frac{\rho(x+\theta Ax, H)}{\theta} \le \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \gamma(Ls)ds$$

となり，右辺は $\theta \downarrow 0$ のとき $\gamma(0) = 0$ に収束するが，この収束は x に依らないので，左辺の収束も x について一様であることがわかって，証明が完成する。

証明は背理法による。仮にある $h \ge 0$ に対して，

$$\sqrt{f(h)} > \int_0^h \gamma(Ls)ds$$

であったと仮定しよう。右辺は 0 以上なので左辺は 0 より大きい。$f(0) = 0$ なので $h > 0$ である。そこで $[0, h]$ 内で $\sqrt{f(t)} = 0$ となるような t の中で最大のものを k としよう。このとき，$0 \le k < h$ である。

いま，関数 $g(t)$ を，

$$g(t) = \sqrt{f(t)} - \int_0^t \gamma(Ls)ds$$

と定義しよう。$g(k) \le 0$ であり，よって $g(h) - g(k) > 0$ である。そこで，

$$\ell(t) = (h-k)(g(t) - g(k)) - (t-k)(g(h) - g(k))$$

と定義する。この ℓ は $\ell(h) = \ell(k) = 0$ であるため，$]k, h[$ 内に最大点か最小点のいずれかを有する。もし最大点 t^* を有しているとすれば，そこでは

$$\begin{aligned} 0 \ &\le \ \limsup_{t\uparrow t^*} \frac{\ell(t) - \ell(t^*)}{t - t^*} \\ &= \ (h-k)\limsup_{t\uparrow t^*} \frac{g(t) - g(t^*)}{t - t^*} - (g(h) - g(k)) \\ &= \ (h-k)\left[\limsup_{t\uparrow t^*} \frac{\sqrt{f(t)} - \sqrt{f(t^*)}}{t - t^*} - \gamma(Lt^*)\right] - (g(h) - g(k)) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。$t^* > k$ なので，$f(t^*) > 0$ がわかる。

さて，$\sqrt{x}$ は $x = f(t^*)$ の点で微分可能なので，$f(t^*)$ の近傍で定義された実数値関数 ε で，$\varepsilon(x) \to 0 (x \to f(t^*))$ となるものが存在して，

$$\sqrt{x} = \sqrt{f(t^*)} + \frac{1}{2\sqrt{f(t^*)}}(x - f(t^*)) + (x - f(t^*))\varepsilon(x)$$

と書ける。そこで，

$$\sqrt{f(t)}-\sqrt{f(t^*)}=\left(\frac{1}{2\sqrt{f(t^*)}}+\varepsilon(f(t))\right)(f(t)-f(t^*))$$

である。これを $t-t^*$ で割って，$t\uparrow t^*$ としたときの $\limsup$ を取ると，

$$\limsup_{t\uparrow t^*}\frac{\sqrt{f(t)}-\sqrt{f(t^*)}}{t-t^*}=\frac{1}{2\sqrt{f(t^*)}}\limsup_{t\uparrow t^*}\frac{f(t)-f(t^*)}{t-t^*}\le\gamma(Lt^*)$$

が言える[(3)]。そこでこれを（8）に代入すると，$0\le-(g(h)-g(k))<0$ が出てくるがこれは矛盾である。以上で，最大点 t^* が $]k,h[$ 内に存在する場合の証明が終了した。最小点 t^* が $]k,h[$ 内に存在する場合は，$t\uparrow t^*$ を $t\downarrow t^*$ に変えて同じ証明をすればよい。以上で証明が完成した。■

3.2　滞留解の存在定理

ここでは，前節で述べた自励系の常微分方程式の初期値問題（1）が H において滞留解を持つための十分条件である Nagumo-Crandall の基本定理について，Crandall（1972）に基づいて論じよう。

定理 3（Nagumo-Crandall）：関数 A は連続で，集合 $H\subseteq\Omega$ は局所閉集合であるとする。このとき，任意の $x\in H$ について $Ax\in T_H(x)$ が成り立つならば，任意の $x_0\in H$ について，適当な区間 $[0,T]$ 上で定義される方程式（1）の H における滞留解が存在する。

証明：常微分方程式の解の存在証明に用いられる Peano の古典的方法に基づいて，まず近似解を構成し，その部分列の一様収束先の関数が求める滞留解であることを示す。

$x_0\in H$ とし，各 $r>0$ に対して，

$$H_r=\overline{B}_r(x_0)\cap H$$

と書く。ここで H は仮定から局所閉であるから，H_{2r} が閉集合となるような $r>0$ を一つ取ることができる。さらに

$$M=\max\left\{\max_{x\in H_{2r}}\|Ax\|,1\right\},$$

とおき，

$$T=\frac{r}{3M}$$

と定義しよう。$\ell\in\mathbb{N}$ に対して，$x_{\ell,0}=x_0$ とし，

（3）　これは，$a_hb_h=c_h$ であり，$h\uparrow 0$ のときに $a_h\to a>0$ となるとき，

$$\limsup_{h\uparrow 0}c_h=a\limsup_{h\uparrow 0}b_h$$

であるという事実による。

$$x_{\ell,i} \in H, \quad i = 1, 2, \cdots, \ell$$

を次のように選ぶ。

$$\left\| x_{\ell,i+1} - \left(x_{\ell,i} + \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i} \right) \right\| \leq \rho \left(x_{\ell,i} + \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i}, H \right) + \frac{TM}{\ell^2}. \tag{9}$$

すると，各 $x_{\ell,i} (i = 1, 2, \cdots, \ell)$ は H_r に含まれることを示そう。$x_{\ell,0} = x_0$ であるから，$x_{\ell,0} \in H$ は明らかである。$z \in H$ とすれば，

$$\rho \left(z + \frac{T}{\ell} Az, H \right) \leq \left\| z + \frac{T}{\ell} Az - z \right\| \leq \frac{T}{\ell} \| Az \| \leq \frac{TM}{\ell}. \tag{10}$$

特に $z = x_{\ell,i} (i = 0, \cdots, \ell - 1)$ として，（9)，（10）を適用すれば，

$$\begin{aligned} \| x_{\ell,i} - x_{\ell,i-1} \| \ &\leq \ \rho \left(x_{\ell,i-1} + \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i-1}, H \right) + \frac{TM}{\ell^2} + \left\| \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i-1} \right\| \\ &\leq \ \frac{3TM}{\ell}. \end{aligned} \tag{11}$$

ゆえに各 $i = 1, \cdots, \ell$ に対して，

$$\begin{aligned} \| x_{\ell,i} - x_0 \| \ &\leq \ \sum_{k=0}^{i-1} \| x_{\ell,k+1} - x_{\ell,k} \| \\ &\leq i \cdot \frac{3TM}{\ell} \leq 3TM = r. \end{aligned}$$

次に $x_{\ell,i} (i = 0, 1, \cdots, \ell)$ を結んで，関数 $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ を

$$u_\ell(t) = x_{\ell,i} + \left(t - \frac{iT}{\ell} \right) \frac{\ell}{T} (x_{\ell,i+1} - x_{\ell,i}), \quad \text{for } t \in \left[\frac{iT}{\ell}, \frac{(i+1)T}{\ell} \right], 0 \leq i \leq \ell - 1$$

と定義する。

上で構成した各 u_ℓ は次の性質を有する。

（a） u_ℓ は連続で区分的に線状である。

（b） $u_\ell(0) = x_0$.

（c） $\| u'_\ell(t) \| \leq 3M$ が $t = \frac{iT}{\ell}$, $i = 0, 1, \cdots, \ell$ を除く任意の $t \in [0, T]$ で成り立つ。

（d） 関数列 $\{u_\ell\}$ は一様有界かつ同程度連続である。

関数列 $\{u_\ell\}$ の性質（d）と Ascoli-Arzelà の定理から，$\{u_\ell\}$ は $[0, T]$ 上のある連続関数 u に一様収束する部分列を有する。煩雑さを避けるために以下ではこの部分列を再び $\{u_\ell\}$ と書くことにする。

次に，$\{u_\ell\}$ の一様収束先の連続関数 u に対して，$u(t) \in H (t \in [0, T])$ が成り立つことを示そう。いま，各 $t \in [iT/\ell, (i+1)T/\ell] (i = 0, 1, \cdots, \ell - 1)$ とすると，

$$\rho(u_\ell(t), H) \ \leq \ \left\| x_{\ell,i} + \left(t - \frac{iT}{\ell} \right) \frac{\ell}{T} (x_{\ell,i+1} - x_{\ell,i}) - x_{\ell,i} \right\| \quad (\because x_{\ell,i} \in H)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(t - \frac{iT}{\ell} \right) \frac{\ell}{T} (x_{\ell,i+1} - x_{\ell,i}) \right\| \\
&\leq \frac{T}{\ell} \cdot \frac{\ell}{T} \cdot \frac{3TM}{\ell} \quad (\because (11)) \\
&= \frac{3TM}{\ell}.
\end{aligned}
$$

$\ell \to \infty$ とすれば，$u_\ell(t) \to u(t)$ と $\rho(\cdot, H)$ の連続性により，

$$\rho(u(t), H) \leq 0. \tag{12}$$

上で述べたように，各 $x_{\ell,i}$ は H_r に含まれるから，それを線分でつないだ $u_\ell(t)$ は $\overline{B}_r(x_0)$ に含まれる。この事実から，

$$\rho(u(t), H) = \rho(u(t), H_{2r}) \tag{13}$$

が成り立つことがわかる。実際，$u(t)$ の H への最短距離は，$\overline{B}_r(u(t)) \cap H \neq \emptyset$（$x_0$ はこの集合に含まれる）との最短距離に等しい。いま $z \in \overline{B}_r(u(t)) \cap H$ とすれば,

$$\|x_0 - z\| \leq \|x_0 - u(t)\| + \|u(t) - z\| \leq 2r$$

から $z \in H_{2r}$ であるから,（13）が確認された。

（12）と（13）より,

$$\rho(u(t), H_{2r}) = 0$$

が成り立ち，しかも H_{2r} は閉集合なので,

$$u(t) \in H_{2r} \subseteq H$$

が導かれる。

最後に $u'(t) = Au(t) (t \in [0, T])$ を証明する。関数 $\eta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ を

$$\eta(\theta) = \sup_{y \in H_r} \rho(y + \theta Ay, H)$$

と定義すれば，H_r の閉包 $\overline{H_r}$ が H に含まれるコンパクト集合であることに注意すると，補題 1 より

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\eta(\theta)}{\theta} = 0 \tag{14}$$

が成り立つ。$x_{\ell,i} \in H_r$ であることと（9)，（14）により

$$\left\| x_{\ell,i+1} - \left(x_{\ell,i} + \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i} \right) \right\| \Big/ \frac{T}{\ell} \leq \rho \left(x_{\ell,i} + \frac{T}{\ell} A x_{\ell,i}, H \right) \Big/ \frac{T}{\ell} + \frac{M}{\ell}$$

$$\leq 2\eta\left(\frac{T}{\ell}\right) \Big/ \frac{T}{\ell} + \frac{M}{\ell} \to 0 \ (\ell \to \infty). \qquad (15)$$

関数 u_ℓ の右側微分は

$$D_+u_\ell(t) = \frac{x_{\ell,i+1} - x_{\ell,i}}{T/\ell}, \quad t \in \left[\frac{iT}{\ell}, \frac{(i+1)T}{\ell}\right[$$

であるから，（15）から $[0,T[$ 上で一様に

$$\|D_+u_\ell(t) - Ax_{\ell,i}\| \to 0 \ (\ell \to \infty). \qquad (16)$$

ただし，（16）における $x_{\ell,i}$ は $t \in \left[\frac{iT}{\ell}, \frac{(i+1)T}{\ell}\right[$ を満たす i に対応して定まっている。

これを用いて $[0,T[$ 上で一様に $D_+u_\ell(t) \to Au(t)$ となることを示す。まず，

$$\|D_+u_\ell(t) - Au(t)\| \leq \|D_+u_\ell(t) - Ax_{\ell,i}\| + \|Ax_{\ell,i} - Au(t)\| \qquad (17)$$

が成り立つ。$\varepsilon > 0$ を任意の正数とすれば，（16）により，十分に大きな $\ell_1 \in \mathbb{N}$ に対して，$[0,T[$ 上で一様に

$$\|D_+u_\ell(t) - Ax_{\ell,i}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{for all } \ell \geq \ell_1. \qquad (18)$$

また，A が H_{2r} 上で一様連続であることと，（11）と u_ℓ の定義，u_ℓ が u に一様に収束することより，$[0,T]$ 上で一様に $x_{\ell,i} \to u(t)$ となることから，十分大きな $\ell_2 \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Ax_{\ell,i} - Au(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } \ell \geq \ell_2 \qquad (19)$$

とすることができる。したがって（17)–(19）により，$[0,T[$ 上で一様に

$$\|D_+u_\ell(t) - Au(t)\| < \varepsilon, \quad \text{for all } \ell \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$$

が成立する。

$$u_\ell(t) = u_\ell(0) + \int_0^t D_+u_\ell(\tau)d\tau$$

であるが，$\ell \to \infty$ として，

$$u(t) = x_0 + \int_0^t Au(\tau)d\tau.$$

したがって，任意の $t \in [0,T]$ に対して，

$$u'(t) = Au(t)$$

が成り立ち，証明が完了する。■

3.3　滞留解の延長可能性

定理 3 において，我々は適当な区間 $[0, T]$ 上で定義された滞留解の存在を議論した。ここでは，応用上重要な無限区間 $[0, +\infty[$ 上での滞留解の存在問題について論ずる。

本節の初めと同じように $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ を非空集合，$A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を連続関数，H を Ω の非空部分集合，$x_0 \in H$ として，（1）を満たす $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ の存在問題について，Aubin（1991）[(4)] に基づいて考察したい。

（1）の H に対する滞留解 u が延長不能であるとは，u の定義域が無限区間 $[0, +\infty[$ であるか，もしくは u が定義域 $[0, T[(T < +\infty)$ 上で定義されていて，u と $[0, T[$ 上では一致する，$[0, S[(S > T)$ で定義された，（1）の H に対する滞留解が存在しないことを言う。以下に述べるように，H が閉集合であり，延長不能な滞留解がある種の有界性を満たせば，その解の定義域は $[0, +\infty[$ でなければならない。

定理 4（延長不能解）：関数 A は連続で，集合 $H \subseteq \Omega$ は閉とする。このとき，以下が成り立つ。

（i）　$x_0 \in H$ に対して，方程式（1）の H に対する滞留解がある区間 $[0, T]$ で存在するとき，それは延長不能な解に拡大することができる。

（ii）　各 $x_0 \in H$ に対して，方程式（1）の H に対する滞留解がある区間 $[0, T]$ で存在するとしよう。このとき，任意の $x_0 \in H$ に対して，方程式（1）の H に対する延長不能な滞留解 $u(t)$ の定義域について，以下の二つの場合のうち，いずれか一方が成り立つ。

（a）　$[0, +\infty[$,

（b）　$[0, T[(T < +\infty)$ かつ $\limsup_{t \uparrow T} \|u(t)\| = +\infty$.

証明：(i) $x_0 \in H$ に対する滞留解の集合に，関数の延長による順序を定め，Zorn の補題を適用すればよい。その際，滞留解の定義域は $[0, S[$ という半開区間とする。

(ii) u が $[0, T[$ 上で定義された H に対する延長不能な滞留解とする。いま $T < +\infty$ とし，仮に

$$\alpha = \limsup_{t \uparrow T} \|u(t)\| < +\infty$$

とする。すると，十分小さな $\delta > 0$ に対して，

$$\|u(t)\| \leq \alpha + 1 \quad \text{for all } t \in [T - \delta, T[$$

が成り立つ。H は閉集合であるから，

（4）　Aubin（1991）の 1.2 を主に参照した。

$$H \cap \overline{B}_{\alpha+1}(0)$$

はコンパクトであり，したがって $A\left(H \cap \overline{B}_{\alpha+1}(0)\right)$ もコンパクトである。

$$u'(t) \in A\left(H \cap \overline{B}_{\alpha+1}(0)\right), \quad \text{for all } t \in [T-\delta, T[$$

であるから，

$$\|u'(t)\| \leq C, \quad \text{for } t \in [T-\delta, T[$$

となる $C < +\infty$ が存在する。したがって，$T - \delta \leq s < t < T$ とすれば

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \int_s^t \|u'(\tau)\| d\tau \leq C(t-s).$$

よって，極限 $\lim_{t \uparrow T} u(t)$ が存在し，これを $u(T)$ と書けば，H が閉集合であることから，$u(T) \in H$ である。また，A は連続だから，

$$u'(T) = \lim_{t \uparrow T} u'(t) = \lim_{t \uparrow T} Au(t) \tag{20}$$

と定義することができて，このとき u' は $[0, T]$ 上で連続である。

ここで，$t_k \to T$ とすれば，

$$u(t_k) = x_0 + \int_0^{t_k} u'(\tau) d\tau$$

であるから，$k \to \infty$ とすれば，Lebesgue の優収束定理により，

$$u(T) = x_0 + \int_0^T u'(\tau) d\tau.$$

よって，実際に u の T における微分は（20）で定義した $u'(T)$ に等しいことがわかる。また，（20）から当然 $u'(T) = Au(T)$ である。そこで，初期条件を $v(0) = u(T)$ として微分方程式 $v' = Av$ を考えれば，仮定より u は T を超えて $[0, T+\theta[(\theta > 0)$ まで拡大することができることがわかる。ところが，これは u が $[0, T[$ で定義された延長不能解であることに矛盾する。■

以下の系は，次節では用いられないが，延長不能な滞留解が $[0, +\infty[$ で定義されていることの十分条件として，確かめるのが比較的容易で，応用上便利なので，記しておく。

系 1：関数 A は連続で，集合 $H \subseteq \Omega$ は閉とする。任意の $x_0 \in H$ について，方程式（1）の H に対する滞留解が存在するものとし，さらに

$$\|A(x)\| \leq c(\|x\| + 1) \quad \text{for all } x \in H$$

を満たす $c > 0$ が存在すると仮定する。このとき任意の $x_0 \in H$ について，$[0, +\infty[$ 上で定義される，微分方程式（1）の H に対する滞留解が存在する。

証明：$x_0 \in H$ とし，u を $[0, T[(T < +\infty)$ 上で定義される方程式（1）の H に対する延長不能な滞留解とすれば，条件から，$t \in [0, T[$ に対して，

$$\|u'(t)\| \leq c(\|u(t)\| + 1).$$

したがって，$u(t) \neq 0$ となる任意の $t \in [0, T[$ に対して，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(t)\| &= 2\left\langle \frac{u(t)}{\|u(t)\|}, u'(t) \right\rangle \\ &\leq \|u'(t)\| \text{（$\because$ Cauchy-Schwarz の不等式）} \\ &\leq c(\|u(t)\| + 1). \end{aligned}$$

これを用いて，以下の三つの場合について，$t \in [0, T[$ における $\|u(t)\|$ の値を評価する：

（i） $t = 0$ あるいは $u(t) = 0$ のとき：
このときは，明らかに

$$\|u(t)\| \leq (\|x_0\| + 1)\, e^{ct}$$

が成り立つ。

（ii） $t > 0$ で，$[0, t]$ に $u(s) = 0$ となる s が存在しないとき：
このとき，各 $s \in [0, t]$ について，$\|u(s)\|$ は s について微分可能で，上述の不等式より，

$$\frac{d}{ds}\|u(s)\| \leq c(\|u(s)\| + 1)$$

であるから，

$$\frac{\frac{d}{ds}\|u(s)\|}{\|u(s)\| + 1} \leq c.$$

この両辺をそれぞれ，0 から t まで積分すると，

$$\log \frac{\|u(t)\| + 1}{\|x_0\| + 1} \leq ct.$$

さらに，この両辺を指数関数に代入すれば，

$$\|u(t)\| \leq \|u(t)\| + 1 \leq (\|x_0\| + 1)e^{ct}$$

が得られる。

（iii） $t>0$ で，$[0,t]$ 内に $u(s)=0$ となる s はあるが，$u(t)\neq 0$ のとき：
この場合は，そのような s の上限を s^* とすれば，u の連続性から，$u(s^*)=0$ であり，$s^*<s<t$ ならば，$u(s)\neq 0$ であるから，そのような s に対しては，（ii）の場合と同様に

$$\frac{\frac{d}{ds}\|u(s)\|}{\|u(s)\|+1}\leq c$$

であるから，これを s^* から t まで両辺積分すれば，

$$\log(\|u(t)\|+1)\leq c(t-s^*).$$

よって，（ii）同様，両辺を指数関数に代入して，

$$\|u(t)\|\leq\|u(t)\|+1\leq e^{c(t-s^*)}\leq(\|x_0\|+1)e^{ct}$$

を得る。

以上の議論から，全ての $t\in[0,T[$ について

$$\|u(t)\|\leq(\|x_0\|+1)e^{ct}$$

が成り立つ。したがって，

$$\limsup_{t\uparrow T}\|u(t)\|<+\infty.$$

ところが，これは定理 4（ii）の帰結に矛盾するので，u の定義域は $[0,+\infty[$ でなければならない。■

4　応用：模索過程の延長可能性

超過需要関数を $\zeta(p)$ と書いたとき，$f(p,0)\equiv 0$ となるようななんらかの関数 $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$ によって，

$$\dot{p}=f(p,\zeta(p))$$

で表される微分方程式を模索過程（tâtonnement process）と呼ぶ。経済学的には，この模索過程は需要と供給を一致させるための価格を探すための，価格の調整過程である，という形で理解され，そう解釈できるような形に f を定義するのが通例である。

さて，$\zeta(p)=0$ となる p は均衡価格と呼ばれる。この均衡価格によって取引が行われて経済の状態が決まる，というのが一般均衡理論の理解であるが，そのためには，なんらかの形で価格の調整が行われ，p が見つけられなければならない。そこで，この均衡価格[(5)]が安定的であるか否か，とい

（5）　$f(p,0)\equiv 0$ なので，均衡価格は自動的に模索過程の定常点である。

う問題が，いわゆる均衡の安定性の問題としてよく取り沙汰されるのである。つまり，p^* という均衡があったとき，上の方程式の解 $p(t)$ について，$t \to \infty$ のときに $p(t) \to p^*$ となるかどうか，という問題が，安定性の問題と呼ばれるものである。

この問題は古典的であるが，一つ重大な注意がある。それは，上の問題を議論するためには，模索過程の解 $p(t)$ が $[0, +\infty[$ 上で定義できていなければいけない，ということである。つまり，任意の $t \in [0, +\infty[$ に対して，値 $p(t)$ が経済学的に意味のある領域に含まれていなければならない。この問題を解の延長可能性の問題と呼ぶ。過去の様々な研究では，f の形に応じてそれぞれ個別の詳細な議論がなされ，それによってこの延長可能性の問題をクリアした研究もあれば，クリアされているかどうかが明らかでない研究もあった[(6)]。今回は，Nikaidô and Uzawa（1960），Nikaidô（1959），Arrow, Block, and Hurwicz（1959）の三つについて，この問題を解の滞留性（viability）の理論を用いて統一的に議論し，延長可能性の問題を解決できるということを確かめてみたい。

4.1　Nikaidô and Uzawa（1960）の延長可能性

この項では，Nikaidô and Uzawa（1960）による価格調整方程式について議論する。

財の種類を $(n+1)$ 種とし，価格ベクトルを

$$q = (q_0, q_1, \cdots, q_n) \geq 0$$

とする。第 0 財をニュメレールとする他財の価格，つまり q_j/q_0 を $p_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ とし，そのベクトルを

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

と書く。

超過需要関数 $E : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^{n+1}$ は一価，連続でゼロ次同次性を満たすものとする：

$$E(q) = E(1, p).$$

もちろん，各 j 財に対して，$E_j(1, p)$ は j 財の超過需要を表している。特に，上式の右辺を $\zeta(p)$ と書くことにする：

$$\zeta(p) = E(1, p). \tag{21}$$

（6）　たとえば，Nikaidô and Uzawa（1960）の Lemma 3 から Proposition 1 の証明，Nikaidô（1959）の Proposition 2 などはこれを解決している。一方で，Arrow, Block, and Hurwicz（1959）では Lemma 6 でこの問題を扱っているが，この証明に超過需要関数の粗代替性を使用しており，この仮定がない場合の延長可能性の問題はまったく手つかずである。

また，価格ベクトル p の調整方程式を

$$\frac{dp_j}{dt} = \theta_j(p) - p_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{22}$$

とする。ただし，$\theta_j(p) = \max\{\rho\zeta_j(p) + p_j, 0\}$, $\rho > 0$ である。(7)

以上の条件の下で，任意の $p_0 \in H := \mathbb{R}^n_+$ を初期点とする，$[0, +\infty[$ で定義された，微分方程式（22）の H における滞留解が存在する：

定理 5：超過需要関数 $E : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^{n+1}$ は一価，連続，ゼロ次同次とし，ζ を（21）式で定義された関数とする。このとき，任意の $p_0 \in H := \mathbb{R}^n_+$ に対して，p_0 を初期点とし，$[0, +\infty[$ を定義域に持つ，微分方程式（22）の H に対する滞留解が存在する。

証明：まず，各 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\theta_j(p) - p_j$ が連続であることは明らかである。

次に $p \in H$ に対して，

$$T_H(p) = \prod_{j=1}^{n} T_H^j(p),$$

ただし，

$$T_H^j(p) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & p_j > 0 \text{ の場合}, \\ \mathbb{R}^n_+ & p_j = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

であることは容易に確かめることができる。

いま，$p \in H$ に対して，ベクトル表示で

$$\theta(p) - p = (\theta_1(p) - p_1, \theta_2(p) - p_2, \cdots, \theta_n(p) - p_n)$$

とすれば，$p_j = 0$ となる j に対して，

$$\theta_j(p) - p_j = \theta_j(p) \geq 0$$

なので，

$$\theta(p) - p \in T_H(p).$$

（7）（22）のかわりに

$$\frac{dp_j}{dt} = \max\{\rho\zeta_j(p), -p_j\}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

としても同等である。すなわち $\zeta_j(p) = 0$ かつ $p_j \geq 0$ では j 財の価格はその値に留まる。なお，ワルラス法則を仮定すれば，$\zeta_j(p) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ ならば自動的に $\zeta_0(p) = 0$ が成り立つ。

よって，Nagumo-Crandall の基本定理（定理 3）により，（22）は H の任意の点を初期点とする滞留解を，適当な区間 $[0,T]$ において有する。

さて，

$$\Delta_{n+1} = \left\{ q \in \mathbb{R}^{n+1} : q \geq 0, \sum_{j=0}^{n} q_j = 1 \right\}$$

とおけば，連続性の仮定から，E は Δ_{n+1} 上で有界である。したがって，ゼロ次同次性から E は $\mathbb{R}_+^{n+1} \setminus \{0\}$ 上で有界であり，このことから ζ は H 上で有界である：

$$|\zeta_j(p)| \leq M, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \text{ for all } p \in H \tag{23}$$

（22）より，任意の $p \in H$ に対して，

$$|\theta_j(p) - p_j| \leq \max\{\rho\zeta_j(p), p_j\}$$

であることに注意する。ここで，$p_j \leq \rho M$ と $p_j > \rho M$ という二つの場合に分けて，$|\theta_j(p) - p_j|$ を評価する：

（i） $0 \leq p_j \leq \rho M$ の場合：

$$|\theta_j(p) - p_j| \leq \rho M.$$

（ii） $p_j > \rho M$ の場合：
（23）により，

$$\rho\zeta_j(p) + p_j > 0$$

であるから，θ_j の定義により，

$$\theta_j(p) - p_j = \rho\zeta_j(p).$$

したがって，

$$|\theta_j(p) - p_j| \leq \rho M.$$

ゆえにいずれの場合にも $|\theta_j(p) - p_j| \leq \rho M$ である。

いま，$p_0 \in H$ を任意に取り，p を $p_0 \in H$ を初期点に持ち，方程式（22）の H に対する延長不能な滞留解とする。この p の存在については，上の議論と定理 4（i）から保証されている。

$$p_j(t) = p_j(0) + \int_0^t [\theta_j(p(\tau)) - p_j(\tau)] d\tau$$

であるから，p の定義域が仮に $[0,T[(T<+\infty)$ であるとすれば，p は $[0,T[$ 上で有界となり，定理4（ii）により矛盾が生ずる。よって，p は $[0,+\infty[$ で定義されていなければならないことがわかる。

したがって，各 $p_0 \in H$ について，p_0 を初期点とし，$[0,+\infty[$ 上で定義された，方程式（22）の H に対する滞留解が存在することが示された。■

4.2　Nikaidô（1959）の延長可能性

次に Nikaidô（1959）によって研究された Brown-von Neumann の微分方程式について議論しよう。

$$\Delta_n = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : p \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$$

とし，超過需要関数 $\zeta : \Delta_n \to \mathbb{R}^n$ は一価で連続とする。もちろん，$p \in \Delta_n$ は n 種類の財の価格ベクトルと解釈され，各 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\zeta_j(p)$ は価格ベクトルが $p \in \Delta_n$ のときの第 j 財の超過需要を表す。また価格調整の微分方程式を

$$\frac{dp_j}{dt} = \theta_j(p) - \sigma(p)p_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

と定義する。ただし，各 j に対して $\theta_j(p) = \max\{\zeta_j(p), 0\}$, $\sigma(p) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(p)$ である。

前項同様，以上の条件の下で，任意の $p_0 \in H := \Delta_n$ を初期点とし，定義域を $[0,+\infty[$ に持つ，微分方程式（24）の H に対する滞留解が存在する：

定理 6：超過需要関数 $\zeta : \Delta_n \to \mathbb{R}^n$ を一価で連続な関数とする。このとき，任意の $p_0 \in H := \Delta_n$ に対して，p_0 を初期点とし，$[0,+\infty[$ で定義された，方程式（24）の H に対する滞留解が存在する。

証明：まず，各 j に対して，$\theta_j(p) - p_j$ の p に対する連続性は明らかである。また，容易にわかるように，$\mathbf{1}$ を全ての要素が1に等しい $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし，$\#(p) = \{j \in \{1, 2, \cdots, n\} : p_j = 0\}$ とすれば，$T_H(p)$ は以下のように表される[(8)]：

$$T_H(p) = \begin{cases} \{q \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{1}, q \rangle = 0\} & \text{if } p \in \mathrm{ri}\ \Delta_n, \\ \{q \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{1}, q \rangle = 0,\ q_j \geq 0 \text{ for } j \in \#(p)\} & \text{if } p \in \Delta_n \setminus \mathrm{ri}\ \Delta_n. \end{cases}$$

（8）　ri Δ_n は Δ_n のアフィン包 aff $\Delta_n = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$ に対する相対位相での Δ_n の内部（interior）を表す：

$$\mathrm{ri}\ \Delta_n = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : p_j > 0,\ k = 1, 2, \cdots, n,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}.$$

（24）をベクトル表示で，

$$\frac{dp}{dt} = \theta(p) - \sigma(p)p$$

とすれば，

$$\sum_{j=1}^{n}[\theta_j(p) - \sigma(p)p_j] = 0 \tag{25}$$

であり，$p_j = 0$ となる j については，

$$\theta_j(p) - \sigma(p)p_j = \theta_j(p) \geq 0$$

であるから，

$$\theta(p) - \sigma(p)p \in T_H(p)$$

が任意の $p \in H$ について成り立つ。したがって，Nagumo-Crandall の基本定理（定理 3）から，各 $p_0 \in H$ を初期点とする，適当な区間 $[0, T]$ 上で定義された，（24）の H に対する滞留解が存在する。

いま，p を $p_0 \in H$ を初期点とし，$[0, T[(T < +\infty)$ を定義域とする，（24）の H に対する延長不能な滞留解とする。すると，各 j について，

$$p_j(t) = p_j(0) + \int_0^t [\theta_j(p(\tau)) - \sigma(p(\tau))p_j(\tau)]d\tau, \quad t \in [0, T[$$

となるので，（25）より，

$$p(t) \in \Delta_n, \quad t \in [0, T[$$

が成り立つ。したがって，p は $[0, T[$ 上で有界となるため，定理 4（ii）から，$T < +\infty$ では矛盾が生ずる。よって，p は $[0, +\infty[$ で定義された解でなければならず，これで定理 6 の証明が完了する。■

4.3　Arrow, Block, and Hurwicz（1959）の延長可能性

この項で議論されるのは，

$$\dot{p} = \zeta(p)$$

という，これまでで最も単純な模索過程である[9]。ただし，その初期点 p^0 には $\|p^0\| = 1$ という条件と，$p_i^0 > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ という条件を課すことにする。このとき，後に述べるワルラス法則の

（9）　これは，需要が供給を超過していると価格が上がり，逆だと価格が下がるという，解釈上は非常に自然な模索過程である。なお，Arrow, Block, and Hurwicz（1959）はもう少し一般の場合を議論しているが，符号を保存する関数をかぶせているだけで，本質的な差はそれほどない。本稿では簡単化のために，この場合のみを扱うことにする。

下では，簡単な証明によって，模索過程の解 $p(t)$ は $\|p(t)\|=1$ を常に満たすことがわかる。よって議論しなければならない領域も，$\mathbb{R}^n$ の単位球面 $S^{n-1}=\{p\in\mathbb{R}^n|\|p\|=1\}$ の部分集合であると考えて問題ない。

前項まででは，$p_i=0$ であるときにも $\zeta(p)$ は定義できて連続である，ということを仮定して議論してきた。しかし実は，前稿で扱った二つの論文の発表時期から数年ほど後になると，超過需要関数がいわゆる境界条件というものを満たすということが知られるようになった。これは $p\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ で，かつ $p_i=0$ となる i が存在するとし，さらに $\mathbb{R}^n_{++}$ の点列 (p^m) が $p^m\to p$ を満たすとすれば，$\|\zeta(p^m)\|\to+\infty$ が必ず成り立つ，という条件である。この条件は経済についてのそれほど強くない条件から導出することができ，いまでは均衡の存在証明などにも用いられる標準的な仮定であると言える。しかし，この仮定があると $p_i=0$ となる座標がある p については $\zeta(p)$ の値を定義することができなくなるため，ζ は $\mathbb{R}^n_{++}$ の内部でしか定義できないことになる。そこで本項では，ζ の定義域は $\mathbb{R}^n_{++}$ であると仮定しよう。また前項までと同じように，ζ にはゼロ次同次性：

$$\zeta(ap)=\zeta(p)\text{ for all }a>0$$

と連続性を仮定しておく。このため，事実上 ζ の値は $\Pi=\mathbb{R}^n_{++}\cap S^{n-1}$ 上の動きだけで全て決まってしまう。これを踏まえた上で，上の模索過程の延長可能性を議論したい。

以後，ζ には先ほど議論した境界条件を仮定するのだが，ここではより強く，次の性質を仮定しておこう。いま，Π 上の点列 (p^m) が $p^m\to p$ を満たし，また $p_i=0$ となるような i の集合を I と書いたとき，I が非空ならば，

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i\in I}\zeta^i(p^m)=+\infty$$

であるとする[10]。この条件を以降，「強い境界条件」と呼ぼう。また，他に通常の仮定として，いわゆるワルラス法則：

$$p\cdot\zeta(p)=0$$

を仮定する。この条件の下で，任意の $p^0\in\Pi$ に対して，p^0 を初期点とする上の模索過程は $[0,+\infty[$ 上で定義された解を持つことを証明するのだが，そのためには p^0 を含むコンパクトな $H\subset\Pi$ で，滞留的なものが存在すればよい[11]。H がコンパクトであるなら系 1 の条件は当然成り立つので，そこから延長可能性が自動的に言えることになる。

（10） たとえば，消費者が全て完備，推移的，連続，強単調，強凸な選好を有しているような純粋交換経済ではこの仮定が成り立つことを証明できる。

（11） この結果は事実上，先に述べた「ワルラス法則の下では，$\|p(t)\|=1$ が常に成り立つ」という内容の証明にもなっている。

実際には次の結果を示す。$\mathcal{I} = \{I \subsetneq \{1,\dots,n\} | I \neq \emptyset\}$ としよう。いま，$\varepsilon_1 > 0$ が十分小さいとすれば，$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{n-1} > 0$ となる有限点列 (ε_i) をうまく取ると，

$$H = \left\{ p \in \Pi : \sum_{i \in I} p_i \geq \varepsilon_{n-|I|} \text{ for all } I \in \mathcal{I} \right\}$$

が滞留的になる。ただしここで $|I|$ は I の要素の個数である。$p \in H$ であるならば $p_i \geq \varepsilon_{n-1}$ なので，H はコンパクトである。また任意の初期点 $p^0 \in \Pi$ に対して，ε_1 が十分小さければ，$p^0 \in H$ となる。これで条件が全て満たされる。

上の主張を証明するために，まず次のことを確認しよう。いま，H が上の形をしている非空集合であったとしてみよう。ここで任意の $p \in H$，任意の $I \in \mathcal{I}$ について，もし $\sum_{i \in I} p_i = \varepsilon_{n-|I|}$ であるならば，

$$\sum_{i \in I} \zeta^i(p) > 0$$

であるとする（以下，性質 A と称する）。このとき，H は滞留的である。

まず，$t > 0$ に対して，$p + t\zeta(p)$ と最短距離である S^{n-1} 上の点が，ただの射影

$$g(t) = \frac{1}{\|p + t\zeta(p)\|}(p + t\zeta(p))$$

であることは，図形的な性質から明らかである[12]。そこで，十分 $t > 0$ が小さいとき，上の射影 $g(t)$ が H に含まれることを示すことができれば，

$$\rho(p + t\zeta(p), H) = \|p + t\zeta(p) - g(t)\| = \|p + t\zeta(p)\| - 1 = \|p + t\zeta(p)\| - \|p\|$$

となる。したがって，

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{\rho(p + t\zeta(p), H)}{t} = \left. \frac{d}{dt}\|p + t\zeta(p)\| \right|_{t=0} = 0$$

であるため，滞留解の存在条件が満たされる。よって証明するためには，上に書いたように $g(t) \in H$ が十分小さな $t > 0$ について言えればよい。ところが，$I \in \mathcal{I}$ を一つ固定したとき，単純な計算から

$$\left. \frac{d}{dt} \sum_{i \in I} g^i(t) \right|_{t=0} = \sum_{i \in I} \zeta^i(p)$$

であることがわかるので，H が性質 A を満たしていれば，$\sum_{i \in I} p_i = \varepsilon_{n-|I|}$ のときには十分小さな $t > 0$ に対して $\sum_{i \in I} g^i(t) \geq \varepsilon_{n-|I|}$ となることがわかる。$\sum_{i \in I} p_i > \varepsilon_{n-|I|}$ のときにはもちろん，

(12) なお，ワルラス法則から，

$$\|p + t\zeta(p)\| = \sqrt{1 + t^2\|\zeta(p)\|^2} \geq 1$$

であることには注意が必要である。

$g(0)=p$ であることと g の連続性から，十分小さな $t>0$ に対して $\sum_{i\in I} g^i(t)>\varepsilon_{n-|I|}$ である。したがって，$\mathcal{I}$ が有限集合であることを考えれば，十分 $t>0$ が小さいときに $g(t)\in H$ であることがわかる。これで H が滞留的であることが示せた。

あとは H が上の性質 A を満たすような正の $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ が取れるかどうか，だけが問題となる。証明には帰納法を用いるが，その帰納法の鍵となる命題（$P(j)$ と書く）は次のように書かれる：

$P(j)$：ある有限列 $\varepsilon_1,...,\varepsilon_j$ が存在して，$\varepsilon_1>\cdots>\varepsilon_j>0$ であり，また任意の $p\in\Pi$ に対して，$n-|I|\le j$ であるようなある $I\in\mathcal{I}$ について $\sum_{i\in I} p_i=\varepsilon_{n-|I|}$ であり，さらに $|I|<|J|$ であるような $J\in\mathcal{I}$ に対しては $\sum_{i\in J} p_i\ge\varepsilon_{n-|J|}$ であるとすれば，必ず

$$\sum_{i\in I}\zeta^i(p)>0$$

が成り立つ。

$P(n-1)$ が言えれば H は性質 A を満たす。以下，これを j についての帰納法で証明していこう。$P(1)$ については，$|I|=n-1$ である。このとき主張を満たす ε_1 が存在しないとすれば，$\varepsilon_1^m\downarrow 0$ となる数列 (ε_1^m) を取って，対応して $|I_m|=n-1$ となる $I_m\in\mathcal{I}$ をうまく取ると，ある $p^m\in\Pi$ について $\sum_{i\in I_m} p^m=\varepsilon_1^m$ であり，かつ

$$\sum_{i\in I_m}\zeta^i(p^m)\le 0$$

が成り立つ。I_m のあり得る可能性は有限通りなので，必要ならば部分列を取って I_m は m に依存しない共通した I であると仮定してよい。このとき，$i\in I$ ならば $p_i^m\to 0$ であり，$i\notin I$ ならば $p_i^m\to 1$ であるが，強い境界条件から，

$$\sum_{i\in I}\zeta^i(p^m)\to+\infty$$

となるので矛盾である。よってこれはあり得ず，$P(1)$ が言えた。

次に $P(j-1)$ が言えたとし，対応する $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{j-1}$ を取ったとしてみよう。仮に $P(j)$ が成り立たないとすれば，$\varepsilon_j^m\downarrow 0$ となる正数列 (ε_j^m) について，対応して $|I_m|=n-j$ となる $I_m\in\mathcal{I}$ をうまく取ると，$\sum_{i\in I_m} p_i^m=\varepsilon_j^m$ となり，なおかつ $|J|>n-j$ となるような任意の $J\subset\{1,...,n\}$ に対しては $\sum_{i\in J} p_i^m\ge\varepsilon_{n-|J|}$ となるような $p^m\in\Pi$ の中で，

$$\sum_{i\in I_m}\zeta^i(p^m)\le 0$$

が成り立つものが少なくとも一つは存在する。I_m の取り得るパターンは有限通りしかないので，必要ならば部分列を取って I_m は m に依存しない I であると仮定してよい。さらに (p^m) は有界な点列

なので，必要ならばさらに部分列を取ることにより，$p^m \to p^*$ となる $p^* \in S^{n-1}$ が存在すると仮定して問題ない。このとき，$i \in I$ に対しては $p_i^m < \varepsilon_j^m$ なので，$p_i^* = 0$ が成り立つ。また一方，$k \notin I$ であるとき，$p_k^m + \sum_{i \in I} p_i^m \geq \varepsilon_{j-1}$ なので，$p_k^m \geq \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j^m$ であり，したがって $p_k^* \geq \varepsilon_{j-1} > 0$ である。すると強い境界条件から

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i \in I} \zeta^i(p^m) = +\infty$$

となることになるが，これは先ほどの不等式と矛盾する。これで $P(j)$ が言えた。

以上の議論から，次の定理が得られる：

定理 7：$\Pi = \mathbb{R}^n_{++} \cap S^{n-1}$ とし，ζ は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で定義され，ゼロ次同次性，連続性，強い境界条件，ワルラス法則を満たすとする。このとき，模索過程

$$\dot{p} = \zeta(p)$$

は，任意の $p^0 \in \Pi$ を初期点としたときに，Π 内を動く $[0, +\infty[$ 上で定義された解を持つ。

（通信教育部講師）

（経済学部助教）

参 考 文 献

[1] K. J. Arrow, H. D. Block, and L. Hurwicz, “On the Stability of Competitive Equilibrium, II,” *Econometrica*, **27** (1959), 82–109.

[2] J. -P. Aubin, *Viability Theory,* Binkhäuser, Boston/Basel/Berlin, (1991).

[3] M. G. Crandall, “A Generalization of Peano’s Existence Theorem and Flow Invariance,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 36, No. 1, (1972), 151–155.

[4] H. Nikaidô, “Stability of Equilibrium by the Brown-von Neumann Differential Equation,” *Econometrica*, **27** (1959), 654–671.

[5] H. Nikaidô and H. Uzawa, “Stability and Non-negativity in a Walrasian Tâtonnement Process,” *International Economic Review*, **1** (1960), 50–59.