Title	偏微分方程式と需要関数の積分可能性 : Nikliborcの定理とその応用
Sub Title	Partial differential equations and the integrability of demand functions : Nikliborc theorem and its applications
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki) 虞, 朝聞(Yu, Chaowen)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2012
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.105, No.3 (2012. 10) ,p.461(179)- 479(197)
JaLC DOI	10.14991/001.20121001-0179
Abstract	本稿では, 積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式, および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い, その導出を行った。主に行われるのは正規形の一階線形偏微分方程式の解の存在定理であるNikliborcの定理と, それを応用したHurwicz-Uzawaの結果である。 This study explains the existence theorem on a solution for partial differential equations necessary for solidifying the theoretical basis of integrability problems, as well as total differential equations, and performs its derivation. Primarily, it analyzes the result of the application of the Nikliborc Theorem, an existence theorem solution to first-order linear partial differential equations of the normal form, to the Hurwicz–Uzawa integrability theorem.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20121001-0179

偏微分方程式と需要関数の積分可能性―Nikliborc の定理とその応用―

Partial Differential Equations and the Integrability of Demand Functions: Nikliborc Theorem and its Applications

細矢 祐誉(Yuki Hosoya)
虞 朝聞(Chaowen Yu)

本稿では，積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式，および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い，その導出を行った。主に行われるのは正規形の一階線形偏微分方程式の解の存在定理である Nikliborc の定理と，それを応用した Hurwicz-Uzawa の結果である。

Abstract
This study explains the existence theorem on a solution for partial differential equations necessary for solidifying the theoretical basis of integrability problems, as well as total differential equations, and performs its derivation. Primarily, it analyzes the result of the application of the Nikliborc Theorem, an existence theorem solution to first-order linear partial differential equations of the normal form, to the Hurwicz–Uzawa integrability theorem.

「三田学会雑誌」105 巻 3 号（2012 年 10 月）

偏微分方程式と需要関数の積分可能性

——Nikliborc の定理とその応用*——

細 矢 祐 誉
虞 朝 聞

（初稿受付 2012 年 5 月 17 日，
査読を経て掲載決定 2012 年 7 月 24 日）

要　旨

本稿では，積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式，および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い，その導出を行った。主に行われるのは正規形の一階線形偏微分方程式の解の存在定理である Nikliborc の定理と，それを応用した Hurwicz-Uzawa の結果である。

キーワード

積分可能性問題，効用関数，偏微分方程式

1　序論

本稿は消費者理論でしばしば議論の対象となるいわゆる積分可能性問題の理論的な基礎を固め，初学者が同分野に手を付けるための基礎を与えることを目的とする。本稿では主に正規形の偏微分方程式の解の存在定理を導出し，その応用として Hurwicz-Uzawa の積分可能性理論の解説を行う。

古典的な積分可能性理論では，主に逆需要関数から効用関数を導出するための方法を扱っている。しかし今回我々が議論するのはそちらではなく，需要関数からダイレクトに効用関数を導出する方法である。この手法は歴史的にはやや新しい内容であり，Hurwicz and Uzawa（1971）に初めてその姿を現した手法であると言える。ただし，彼らの手法の核心にあるのは Nikliborc（1929）の結果であり，その結果自体は Katzner（1970）によって別の議論の中において既に用いられたことがあった。(1)

＊　本稿を作成するにあたっては，慶應義塾大学経済学部の丸山徹教授の講義および講義で配布された資料を参考にした。また，丸山教授および匿名のレフェリーには本稿に対して非常に有益な助言をいただいた。ここに謝意を表する。なお，本稿にあり得べき誤りに関しては，その責任は本稿の著者にあることを念のために記す。

需要関数から効用関数を導出するに当たっては，次の考え方が重要である。いま，通常の選好から出発する消費者理論を考えよう。選好が既に与えられている以上，そこから通常のやり方で支出関数 $E(p,x)$ を導出することができる。念のために定義を述べておくと，p を価格ベクトル，x を消費計画としたとき，$E(p,x)$ は x より好まれる y と p との内積 $p\cdot y$ の下限として定義されるものである。このとき，価格 p をひとつ固定して

$$u_p(x)=E(p,x)$$

として関数 u_p を定義すると，この u_p はいくつかの仮定の下で元の選好を表現する効用関数になるということが知られている。

そこで，効用関数を計算するためには支出関数が計算できればよい，ということがわかる。よって次に必要なのは，選好が不明である際に需要関数 f だけの情報からどうやって支出関数を求めるか，というアイデアである。このために，我々はいわゆる Shephard の補題

$$\frac{\partial E}{\partial p_i}=f^i(p,E(p,x)),$$

に注目する。この式は偏微分方程式であると見なすことができ，したがって，この式で表される偏微分方程式を解けば，支出関数が求まるのではないか，と期待できる。この点を突き詰めて生まれたのが先に述べた Hurwicz-Uzawa 式の積分可能性理論であるが，そのためには上の微分方程式が解けなければいけない。本稿ではそれらの知識について主に述べ，最後に応用として Hurwicz-Uzawa の積分可能性理論を解説する。特に，Hurwicz-Uzawa の出した定理では証明が正しくなかった箇所を訂正し，微分可能性についての仮定を精査してある。

第 2 節では以後の節の準備として，いわゆる全微分方程式が完全であるための必要十分条件について解説する。第 3 節では先ほど挙げた Nikliborc の定理について詳しく論ずると共に，その解が正値であるようにするための議論を行う。第 4 節では多少の脱線だが，Nikliborc の定理の局所的な拡張命題と言える Dieudonne（2006）の結果について触れる。第 5 節では Nikliborc の定理を用いて，Hurwicz-Uzawa の方法について解説する。

2　完全積分可能

我々が本来扱いたい方程式は

$$u_i=f^i(x,u) \tag{1}$$

(1)　Katzner（1970）は逆需要関数からの積分可能性問題に Nikliborc（1929）の定理を適用して，いくつかの結果を導出している。

というタイプのものである[2]が，それを最初に扱う前に，右辺の関数 f が u に依存しない場合の解の存在定理を出しておきたい。つまり，

$$u_i = f^i(x)$$

という形の微分方程式を扱うということである。これは時として，全微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(x)dx_i = 0 \tag{2}$$

と呼ばれる形式で書かれることがある問題であり，上記を満たす関数 u が存在するとき，上の方程式は完全積分可能，あるいは狭義の積分可能性を満たす，と言う。

最初に，実際に開凸集合 U 上で定義された上の問題の解 u があったと仮定する。このとき，U 上の点 a をひとつ固定し，関数 $x(t) = (1-t)a + tx$ としよう。すると，

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) - u(a) + u(a) \\ &= u(x(1)) - u(x(0)) + u(a) \\ &= u(a) + \textstyle\int_0^1 \sum_{i=1}^n u_i(x(t))(x_i - a_i)dt \\ &= u(a) + \textstyle\int_0^1 \sum_{i=1}^n f^i(x(t))(x_i - a_i)dt \end{aligned} \tag{3}$$

である。右辺には u は $u(a)$ を除いて出てこないため，あらかじめ $u(a)$ の値をひとつ決めておき，この右辺を関数 u の定義としてしまえばよいのではないか，というアイデアが生まれる。

次の定理は，このアイデアがうまくいくための必要十分条件が $f^i_j = f^j_i$ であることを示している。

定理 1：f^i がすべて開凸集合 U 上[3]で定義され C^1 級であるとき，全微分方程式（2）が狭義の積分可能性条件を満たすための必要十分条件は，$f^i_j = f^j_i$ が常に成り立つことである。さらにこのとき，解 u は $u(a) = b$ という初期条件の下で一意に定まる。

証明：もし u が解であるとすれば，$u_i = f^i$ かつ $u_j = f^j$ なのでこれらは共に C^1 級であり，したがって偏微分の順序交換定理から $u_{ij} = u_{ji}$ がわかる。しかしこれは $f^i_j = f^j_i$ を意味する。これで必要性は示せた。

十分性について。（3）式の形で u を定義すれば，微分と積分の順序交換定理から，

$$u_i(x) = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n f^j_i(x(t))t(x_j - a_j) + f^i(x(t)) \right] dt$$

（2） 本稿では，なんらかの関数 f について，その第 i 変数による偏導関数を f_i と書く。また，f の第 i 座標のことはそれと区別するため，f^i と書くことにする。

（3） U の凸性は連結性に容易に弱めることができる。

$$= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n f_j^i(x(t))t(x_j - a_j) + f^i(x(t)) \right] dt$$
$$= [f^i(x(t))t]_0^1 = f^i(x(t))$$

である。ここで最後から 2 番目の等式は部分積分の公式による。したがって u は（2）の解である。（2）の解はすべて（3）の式を満たすから，一意性はただちに従う。■

この結果は，次節以降に出てくる（1）の形の方程式の解の存在条件と密接に関連している。そこでは

$$f_j^i + f_z^i f^j = f_i^j + f_z^j f^i$$

という条件が頻出するのだが，もし上の f が z に依存しない関数だった場合，$f_z^i = f_z^j = 0$ となるので，上の条件は

$$f_j^i = f_i^j,$$

すなわち，定理 1 の仮定と同値になる。

3　一階正規形偏微分方程式（1）：Nikliborc の定理

$\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}$ をいずれも非空集合とし，$\Omega = \Pi \times \Theta$ とおく。Ω 上の実数値関数

$$f^i(x, z) : \Omega \to \mathbb{R}; \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$
$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

が与えられたとき，偏微分方程式

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f^i(x, z); \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

を考える。

(x^0, z^0) を Ω の点とする。C^1 級関数 $\omega : \Pi \to \Theta$ が次の条件を満たすとき，ω は初期条件 (x^0, z^0) の下での（4）の解であるという。

$$\omega_i(x) = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) = f^i(x, \omega(x))$$
$$\text{for all } x \in \Pi;\ i = 1, 2, \cdots, n,$$
$$\omega(x^0) = z^0.$$

本節の主題である（4）の解の存在の十分条件を明らかにした以下の定理は，Nikliborc（1929）による。

定理 2：$\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n|a'\leq x_i\leq a''\ ;\ i=1,2,\cdots,n\}(a'<a'')$, $\Theta=\mathbb{R}$, $\Omega=\Pi\times\Theta$ とおく。また関数 f^i は Ω から $\mathbb{R}$ への関数とし，以下の仮定を満たすとする。

（i） $f^i(x,z)(i=1,2,\cdots,n)$ は Ω 上で連続微分可能。[4]

（ii） $f^i_z(x,z)=\frac{\partial f^i}{\partial z}(x,z)(i=1,2,\cdots,n)$ は Ω 上で一様有界。すなわち，

$$\sup_{(x,z)\in\Omega}|f^i_z(x,z)|\leq K \text{ for all } i=1,2,\cdots,n$$

を満たす $K<\infty$ が存在する。

（iii） $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}=f^i_j$ と表記すると，

$$f^i_j(x,z)+f^i_z(x,z)f^j(x,z)=f^j_i(x,z)+f^j_z(x,z)f^i(x,z),$$
$$\text{for all } i,j=1,2,\cdots,n$$

が成り立つ。

このとき $(x^0,z^0)\in\Omega$ に対して，これを初期条件とする方程式（4）の解 $\omega(x;x^0,z^0)$ が一意的に存在する。

証明：変数変換により，

$$(x^0,z^0)=(0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$$

として上の定理を証明できればよい。また Π における $|x_1|,...,|x_n|$ の最大値を $a>0$ と呼んでおこう。

いま，関数列 $z^{(r)}:\Pi\to\mathbb{R}(r=1,2,\cdots)$ を帰納的に

$$\begin{aligned}&z^{(0)}\equiv 0\\&z^{(r+1)}(x)=\int_0^1\sum_{k=1}^n f^k(tx,z^{(r)}(tx))x_k dt\end{aligned}$$

と定義する。各 $z^{(r)}$ が連続微分可能であることは微分と積分の順序交換定理からわかる。

この関数列 $\{z^{(r)}\}$ に対して以下が成り立つ：

$$|z^{(r+1)}(x)-z^{(r)}(x)|\leq\frac{M(x)}{K}\cdot\frac{\{K\cdot\sum_{i=1}^n|x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!}$$

（4） Nikliborc（1929）のオリジナルではこの仮定で議論している。Hurwicz and Uzawa（1971）はこの仮定を微分可能まで弱めたと主張しているが，実際には証明内の $z^{(r)}$ が微分可能になるための根拠がなく，不十分である。なお Richter（1979）でも同様の定理を用いているが，こちらは Tsuji（1948）の研究を元にしたと書かれており，証明は与えられていない。

$$\leq \frac{M}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!};\ r = 0, 1, 2, \cdots. \tag{5}$$

ここで,

$$\begin{aligned} M(x) &= \max_{i=1,2,\cdots,n,\ t\in[0,1]} |f^i(tx, 0)|, \\ M &= \max_{x\in\Pi} M(x) \end{aligned}$$

である。なお，各 f^i は連続だから，$M \leq \max_{i=1,2,\cdots,n,\ x\in\Pi} |f^i(x,0)| < \infty$ となる。

$r = 0$ の場合には,

$$\begin{aligned} |z^{(1)}(x) - z^{(0)}(x)| &= |z^{(1)}(x)| \\ &= \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f^k(tx, 0) x_k dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |f^k(tx, 0)| \cdot |x_k| dt \\ &\leq M(x) \sum_{k=1}^{n} |x_k| \end{aligned}$$

が成り立つ。

次にある $r \geq 1$ について

$$\begin{aligned} |z^{(r)}(x) - z^{(r-1)}(x)| &\leq \frac{M(x)}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^r}{r!} \\ &\leq \frac{M}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^r}{r!} \end{aligned} \tag{6}$$

が成り立つと仮定しよう。このとき,

$$\begin{aligned} |z^{(r+1)}(x) - z^r(x)| &= \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f^k(tx, z^{(r)}(tx)) x_k dt - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f^k(tx, z^{(r-1)}(tx)) x_k dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 |f^k(tx, z^{(r)}(tx)) - f^k(tx, z^{(r-1)}(tx))| \cdot |x_k| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \int_0^1 K |z^{(r)}(tx) - z^{(r-1)}(tx)| dt \quad (\because \text{(ii) と平均値の定理}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot K \int_0^1 \frac{M(tx)}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |tx_i|\}^r}{r!} \quad (\because (6)) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \int_0^1 \frac{M(x)}{r!} K^r t^r \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^r \quad (\because M(tx) \leq M(x)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^{r+1} \frac{M(x)}{r!} K^r \cdot \frac{1}{r+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{M(x)}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!}$$
$$\leq \frac{M}{K} \cdot \frac{\{K \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!}$$

が成り立つ。したがって帰納法によって，（5）が証明された。

次に関数列 $\{z^{(r)}\}$ が Π 上の連続関数に一様収束することを証明しよう。（5）から，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} |z^{(r)} - z^{(r-1)}(x)| &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{M}{K} \cdot \frac{\{K \sum_{i=1}^{r} |x_i|\}^{r}}{r!} \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{M}{K} \cdot \frac{\{anK\}^{r}}{r!} \\ &\leq \frac{M}{K}(e^{anK} - 1)\end{aligned}$$

がすべての $x \in \Pi$ について成り立つから，$\{z^{(r)}\}$ は Π における一様収束ノルムについて Cauchy 列である。したがって，Π 上の連続関数の集合 $C(\Pi)$ が一様収束ノルムについて完備であることから，

$$\sup_{x \in \Pi} |z^{(r)}(x) - \omega(x)| \to 0$$

を満たす $\omega \in C(\Pi)$ が存在する。特に $z^{(r)}(r \geq 1)$ の定義式

$$z^{(r)}(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f^k(tx, z^{(r-1)}(tx)) x_k dt$$

において $r \to \infty$ とすれば，Lebesgue の有界収束定理により，

$$\omega(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f^k(tx, \omega(tx)) x_k dt$$

が得られる。

さて，$\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ については，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(x) - f^i(x, z^{(r)}(x)) \right| &\leq nM(x) \frac{\{3Kn \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^{r}}{r!} \\ &\leq nM \frac{\{3Kn \sum_{i=1}^{n} |x_i|\}^{r}}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

まず，$r = 0$ については自明である。そこで $r \geq 0$ について（7）が成立すると仮定し，$r + 1$ についても成り立つことを確認しよう。まず，$z^{(r)}(tx)$ の積分の中身を x_k で微分したものを $g(t, x)$ と呼んでこれを計算してみると，（iii）を用いれば[5]，

（5） 以下，関数には $(tx, z^{(r)}(tx))$ が入っていることが非常に多く煩雑なので，その場合に限って適宜省略して書く。

$$
\begin{aligned}
g(t,x) &= f^i + \sum_{k=1}^n \left(f_i^k + f_z^k \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) \right) tx_k \\
&= f^i + \sum_{k=1}^n \left(f_k^i + f_z^i \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) \right) tx_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n f_z^i \left(f^k - \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) \right) tx_k + \sum_{k=1}^n f_z^k \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) - f^i \right) tx_k \qquad (8) \\
&= \frac{d}{dt}[f^i(tx, z^{(r)}(tx))t] + \sum_{k=1}^n \left(f_z^k \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) - f^i \right) - f_z^i \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) - f^k \right) \right) tx_k
\end{aligned}
$$

とまとめられる。故に,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial x_i}(x) - f^i(x, z^{(r+1)}(x)) \right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left| f^i(x, z^{(r)}(x)) - f^i(x, z^{(r+1)}(x)) + \int_0^1 g(t,x)dt - f^i(x, z^{(r+1)}(x)) \right| \\
&\le \sum_{i=1}^n |f^i(x, z^{(r)}(x)) - f^i(x, z^{(r+1)}(x))| \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(f_z^k \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) - f^i \right) - f_z^i \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) - f^k \right) \right) tx_k dt \right|
\end{aligned}
$$

とできる。上式右辺を $J_1 + J_2$ と分解すると,

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le nK|z^{(r+1)}(x) - z^{(r)}(x)| \quad (\because \text{(ii) と平均値の定理}) \\
&\le nK \cdot \frac{M(x)}{K} \frac{\{K\sum_{i=1}^n |x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!} \quad (\because (5)) \qquad (9) \\
J_2 &\le \sum_{i=1}^n \int_0^1 t \sum_{k \ne i} |x_k| \left[K \left| \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) - f^k(tx, z^{(r)}(tx)) \right| + K \left| \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) - f^i(tx, z^{(r)}(tx)) \right| \right] dt \\
&\le K \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k \ne i} \left\{ \left| \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_k}(tx) - f^k(tx, z^{(r)}(tx)) \right| + \left| \frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(tx) - f^i(tx, z^{(r)}(tx)) \right| \right\} dt \\
&\le K \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) \int_0^1 2(n-1)nM(x) \frac{\{3Kn\sum_{i=1}^n |tx_i|\}^r}{r!} dt \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= K \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) 2(n-1)nM(x) \frac{\{3Kn\sum_{i=1}^n |x_i|\}^r}{r!} \int_0^1 t^r dt \\
&= nM(x) \cdot 3^r 2(n-1)n^r \left\{ K \sum_{i=1}^n |x_i| \right\}^{r+1} \cdot \frac{1}{(r+1)!}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

(9) と (10) より,

$$
J_1 + J_2 \le nM(x) \frac{\{K\sum_{i=1}^n |x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!} \{1 + 3^r 2(n-1)n^r\}
$$

$$\leq nM(x)\frac{\{3Kn\sum_{i=1}^{n}|x_i|\}^{r+1}}{(r+1)!}$$

となるから，

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial x_i}(x)-f^i(x,z^{(r+1)}(x))\right| \leq nM(x)\frac{\{3Kn\sum_{i=1}^{n}|x_i|\}^{(r+1)}}{(r+1)!}$$

が得られる。したがって，（7）が示された。

（7）より，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial z^{(r)}}{\partial x_i}(x)=\lim_{r\to\infty}f^i(x,z^{(r)}(x))=f^i(x,\omega(x)) \tag{11}$$

が成り立つ。ここで（11）は Π 上の一様収束である。何故なら，$z^{(r)}$ が ω に Π 上で一様収束することと仮定（ii），さらには平均値の定理から，$f^i(x,z^{(r)}(x))$ は $f^i(x,\omega(x))$ に Π 上で一様収束するからである。

以上から，ω が解であることが容易に示せる。実際，まず $\omega(0)=0$ は $z^{(r)}(0)=0$ からただちにわかる。次に $z^{(r)}(x)$ は $\omega(x)$ に一様収束し，その第 i 偏導関数は $f^i(x,\omega(x))$ に一様収束しているため，$z^{(r)}$ は $C^1(\Pi)$ の Cauchy 列であり，よってどこかの関数に C^1 収束していなければならない。C^1 収束していれば一様収束もしているため，その収束先は ω 以外にあり得ない。よって $z^{(r)}(x)$ の偏微分は $\omega(x)$ の偏微分と $f^i(x,\omega(x))$ に共に収束していることになり，したがって ω は解でなければならない。

最後に解の一意性を示そう。$\theta(x)$ を初期条件 $\theta(0)=0$ を満たす（4）の解であるとする。$x\in\Pi$ を固定し，$v(t)=\theta(tx)$ とおけば

$$v'(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}(tx)x_k=\sum_{k=1}^{n}f^k(tx,\theta(tx))x_k.$$

したがって，

$$\theta(x)=\theta(x)-\theta(0)=\int_0^1 v'(t)dt=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}f^k(tx,\theta(tx))x_k dt \tag{12}$$

いま，

$$A:=\sup_{t\in[0,1]}|\theta(tx)|(<\infty)$$

と定義すれば，

$$|\theta(tx)-z^{(r)}(tx)|\leq A\frac{(K\sum_{k=1}^{n}|tx_k|)^r}{r!};\quad t\in[0,1],\ r=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

が成り立つことを帰納法で証明する。$r=0$ の場合は定義より自明である。そこで，ある $r \geq 0$ で（13）が成り立っているとしよう。$z^{(r+1)}$ の定義と（12）から，$t \in [0,1]$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\theta(tx) - z^{(r+1)}(tx)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 |f^k(stx, \theta(stx)) - f^k(stx, z^{(r)}(stx))| \cdot |tx_k| ds \\
&\leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |tx_k| \right) \int_0^1 |\theta(stx) - z^{(r)}(stx)| ds \quad (\because \text{(ii) と平均値の定理}) \\
&\leq A \frac{(K \sum_{k=1}^{n} |tx_k|)^{r+1}}{(r+1)!}. \quad (\because \text{帰納法の仮定})
\end{aligned}$$

したがって，帰納法より（13）が証明された。（13）に $t=1$ を代入して，$r \to \infty$ とすれば，

$$|\theta(x) - z^{(r+1)}(x)| \to 0$$

が得られる。よって，任意の $x \in \Pi$ について，$\theta(x) = \omega(x)$ が得られ，一意性の証明が完了する。■

定理 2 を経済学上の問題に適用するとき，第 5 節で扱うように解の変域 Θ の元が所得を表すと解釈される場合には，Θ は非負の範囲に限定しなければならないだろう。その要請に応ずるために導出された次の結果は Hurwicz and Uzawa（1971）によるものである。

系 1：$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n | a' \leq x_i \leq a''; i = 1, 2, \cdots, n\} (a' < a'')$，$\Theta = \mathbb{R}_+$，$\Omega = \Pi \times \Theta$ とおく。関数 f^i は Ω から $\mathbb{R}$ への関数とし，定理 2 の（i），（ii），（iii）および，新たに

（iv）　$f^i(x, 0) = 0$ for all $x \in \Pi$, $i = 1, 2, \cdots, n$

を仮定する。このとき，任意の $(x^0, z^0) \in \Omega$ に対して，これを初期条件とする偏微分方程式（4）の解 $\omega(x; x^0, z^0)$ が一意的に存在する。

証明：各 i に対して，$F^i : \Omega \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する：

$$F^i(x, z) = \begin{cases} f^i(x, z) & \text{if } z \geq 0, \\ -f^i(x, -z) & \text{if } z < 0. \end{cases}$$

F^i が定理 2 の（i）–（iii）を満たしていることを確かめよう。まず（i）については，定義により $(x, 0)$ の連続微分可能性について調べれば十分である。$F^i_j(x, 0) = f^i_j(x, 0) = -f^i_j(x, 0) = 0$ は明らかであり，これは f^i_j の連続性より，$(x, 0)$ の近傍で連続である。したがって $F^i_z(x, 0)$ の連続性だけ確かめればよいが，F^i の定義から

$$\lim_{z \downarrow 0} \frac{F^i(x, z) - F^i(x, 0)}{z} = \lim_{z \downarrow 0} \frac{f^i(x, z) - f^i(x, 0)}{z}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_z^i(x,0),\\
\lim_{z\uparrow 0}\frac{F^i(x,z)-F^i(x,0)}{z} &= \lim_{z\uparrow 0}\frac{-f^i(x,-z)-f^i(x,0)}{z}\\
&= \lim_{z\uparrow 0}\frac{-f^i(x,-z)+f^i(x,0)}{z} \quad (\because \text{(iv)})\\
&= \lim_{z\downarrow 0}\frac{f^i(x,z)-f^i(x,0)}{z}\\
&= f_z^i(x,0)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
F_z^i(x,0)=f_z^i(x,0) \tag{14}
$$

であることがわかる。再び f_z^i の連続性から F_z^i も $(x,0)$ のまわりで連続である。以上で，F^i の連続微分可能性がわかった。

（ii）については，f^i が（ii）を満たすことと（14）から F^i が（ii）を満たすことはただちにわかる。

最後に F^i,F^j が（iii）を満たすことを確認しよう。（iii）を確かめるためには

$$
F_j^i(x,z)+F_z^i(x,z)F^j(x,z)=F_i^j(x,z)+F_z^j(x,z)F^i(x,z)
$$

を $z<0$ について証明すればよい。ところがこれは，

$$
\begin{aligned}
F_j^i(x,z)+F_z^i(x,z)F^j(x,z) &= -f_j^i(x,-z)-f_z^i(x,-z)f^j(x,-z)\\
&= -f_i^j(x,-z)-f_z^j(x,-z)f^i(x,-z) \quad (\because f^i,f^j \text{ に関する仮定（iii）})\\
&= F_i^j(x,z)+F_z^j(x,z)F^i(x,z)
\end{aligned}
$$

からただちに導かれる。

いま，偏微分方程式

$$
\frac{\partial z}{\partial x_i}=F^i(x,z),\ i=1,2,\cdots,n \tag{15}
$$

を考えることにすれば，定理 2 により，任意の $(x^0,z^0)\in\Pi\times\mathbb{R}$ を初期条件とする（15）の解 $\omega(x;x^0,z^0)$ が一意的に存在する。（iv）と解の一意性により，任意の $x^0\in\Pi$ に対して，

$$
\omega(x;x^0,0)=0 \ \text{ for all } x\in\Pi \tag{16}
$$

が成り立つ。一方，$x^0\in\Pi$，$z^0>0$ とすれば，

$$
\omega(x;x^0,z^0)>0 \ \text{ for all } x\in\Pi \tag{17}
$$

である。実際，仮に

$$\omega(x';x^0,z^0)\le 0$$

となる点 $x'\in\Pi$ が存在すると仮定してみよう。いま，

$$x^t=(1-t)x^0+tx',\quad 0\le t\le 1,$$
$$\varphi(t)=\omega(x^t;x^0,z^0)$$

とおけば，

$$\varphi(0)\,=\,\omega(x^0;x^0,z^0)=z_0>0,$$
$$\varphi(1)\,=\,\omega(x^t;x^0,z^0)\le 0$$

であるから，中間値の定理により，

$$\varphi(t')=0$$

を満たす $t'\in]0,1]$ が存在する。解の一意性から，

$$z^0=\omega(x^0;x^{t'},0) \tag{18}$$

とならねばならないが，（16）から

$$\omega(x^0;x^{t'},0)=0. \tag{19}$$

（18），（19）により，$z^0=0$ となるが，これは当初の仮定 $z^0>0$ に反する。よって，（17）が示された。したがって，（16），（17）と F^i の定義から，$(x^0,z^0)\in\Omega$ を初期条件とする（15）の解は，当初の方程式（4）の解となることがわかる。一意性は定理 2 から明らかである。■

第 5 節の Hurwicz-Uzawa の結果の証明に用いられる次の命題は，定理 2 の系 1 からただちに示される。

系 2：$\Pi=\mathbb{R}^n_{++}$，$\Theta=\mathbb{R}_+$ とし，$\Omega=\Pi\times\Theta$ とおく。関数 $f^i:\Omega\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$ は定理 2 の（i），（iii）および系 1 の（iv），さらに次の（ii′）を満たすものとする。

（ii′） $0<a'<a''$ なる任意の実数 a',a'' に対して，

$$\sup_{a'\le x\le a'',z\ge 0}|f^i_z(x,z)|\le K_{a',a''} \text{ for all } i=1,2,\cdots,n$$

を満たす $K_{a',a''}<\infty$ が存在する。

このとき，任意の $(x^0, z^0) \in \Omega$ に対して，これを初期条件とする方程式（4）の解が一意的に存在する。

証明：(x^0, z^0) を Ω の任意の要素とする。各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，a'_m, a''_m を $0 < a'_m < a''_m$，$x_i^0 \in [a'_m, a''_m] (i = 1, 2, \cdots, n)$ かつ $a'_m \downarrow 0$, $a''_m \uparrow \infty$ となるようにとる。いま，

$$\Pi_m = \{x \in \mathbb{R}^n : a'_m \le x_i \le a''_m,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

と定義すれば，集合列 $\{\Pi_m\}$ は $x^0 \in \Pi_m (m = 1, 2, \cdots)$ を満たす単調増加列で，$\bigcup_{m=1}^\infty \Pi_m = \mathbb{R}^n_{++}$ を満たすことはただちに確認できる。いま，$\Omega_m = \Pi_m \times \Theta$ とおけば，$f^i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を Ω_m に制限したものは系 1 の仮定をすべて満たすので，系 1 の結果から，

$$\frac{\partial \omega^m}{\partial x_i}(x) = f^i(x, \omega^m(x)) \text{ for all } x \in \Pi_m, \tag{20}$$

$$\omega^m(x^0) = z^0 \tag{21}$$

を満たす関数 $\omega^m : \Pi_m \to \Theta$ が一意的に存在する。いま，各 $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して，$x \in \Pi_m$ を満たす m が存在するので，

$$\omega(x) = \omega^m(x) \tag{22}$$

とすれば，関数 $\omega : \mathbb{R}^n_{++} \to \Theta$ が定義される。なお，$m < \ell$ ならば，解の一意性から ω^ℓ を Π_m に制限した関数は ω^m に一致するので，（22）の定義に矛盾は生じない。

関数 ω が所望の解であることはただちに確かめることができる。また，解の一意性については ω^m が（20），（21）を満たす唯一の Π_m 上の関数であることから明らかである。■

4　一階正規形偏微分方程式（2）：Dieudonne の結果

前節の結果の中で，条件

$$\sup_{(x,z)\in\Omega} |f_z^i(x, z)| \le K \text{ for all } i = 1, 2, ..., n \tag{23}$$

というのがあった。この仮定は積分による逐次近似の収束のために必要であったが，それ以外で役割を果たしていないように見える。そこでこの仮定を取り除いてなお成立する結果を考えてみたときに出てくるのが，Dieudonne（2006）による次の結果である。

定理 3：ℓ, $n \ge 1$ とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は開集合で，$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^ℓ 級とする。また，$(x^*, z^*) \in \Omega$ をひとつとる。このとき，偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f^i(x, u)$$

の，x^* の近傍上で定義された C^ℓ 級の解で，$u(x^*)=z^*$ を満たすものが存在するための必要十分条件は，

$$f_j^i+f_z^if^j=f_i^j+f_z^jf^i \tag{24}$$

が任意の i,j に対して成り立つことである。

証明：まず，解が存在するとすれば，u は自動的に C^2 級以上となる。したがって，$u_{ij}=u_{ji}$ が成り立つのだが，一方で

$$u_{ij}=f_j^i+f_z^iu_j=f_j^i+f_z^if^j$$

であり，u_{ji} も同様であるから，これは（24）を意味する。

逆に（24）が成り立っているとし，次の常微分方程式

$$\dot{w}(t;z)=f(x^*+tz,w(t;z))\cdot z, w(0;z)=z^*$$

を考えよう(6)。常微分方程式についての一般論から，この方程式は十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，$]-2,2[\times\prod_{i=1}^n]-\varepsilon,\varepsilon[$ 上で定義された C^ℓ 級の解 w を持つ。そこで，

$$u(x)=w(1;x-x^*)$$

と定義し，これが解の条件を満たすことを確かめよう。

まず，$h^j(t,z)=w_j(t;z)-tf^j(x^*+tz,w(t;z))$ と定義しよう。常微分方程式の一般論から，$\dot{w}_j=\frac{\partial\dot{w}}{\partial z_j}$ であり，したがって(7)，

$$\begin{aligned}\dot{h}^j &= \frac{\partial}{\partial z_j}\sum_i f^iz_i-f^j-t\sum_i[f_i^j+f_z^jf^i]z_i\\ &= f^j+\sum_i[tf_j^i+f_z^iw^j]z_i-f^j-t\sum_i[f_i^j+f_z^jf^i]z_i\\ &= t\sum_i[f_j^i-f_i^j-f_z^jf^i]z_i+\sum_i f_z^iw_jz_i\\ &= [w_j-tf^j]\sum_i f_z^iz_i\\ &= h^j\sum_i f_z^iz_i\end{aligned}$$

となり，これは $h^j(\cdot,z)$ が上の線形常微分方程式の解であることを意味する。$h(0,z)=0$ なので，上の解は $h\equiv 0$ しかあり得ず，よって常に $w_j(t;z)=tf^j(x^*+tz,w(t;z))$ であるから，特に $t=1$ のときを考えれば，

$$u_j(x)=w_j(1;x-x^*)=f^j(x,w(1;x-x^*))=f^j(x,u(x))$$

（6） 以降，なんらかの関数 g に対して，$\dot{g}$ は g の t についての微分を表す。
（7） 以下の式で省略している変数の値は常に $(x^*+tz,\ w(t;z))$ である。

となって証明が終わる。■

なお，Richter（1979）は上の結果を用いて大域的な解の存在証明ができると主張しているが，その根拠はあいまいである。確実な証明，あるいは反例の存在証明が待たれる。

5　応用：Hurwicz-Uzawa の積分可能性理論

以上の結果を用いて，Hurwicz and Uzawa（1971）による積分可能性の結果を導出しよう。まず，需要関数 $f:\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n_+$ が与えられたものとする。ここで $f(p,m)$ の最初の変数 p は価格ベクトル，次の変数 m は所得であり，$x=f(p,m)$ は消費計画である。ここで，以下の議論で用いられる仮定を述べておこう。

1）　f は連続微分可能である。

2）　f はワルラス法則を満たす。つまり，

$$p\cdot f(p,m)=m$$

　　が常に成り立つ。

3）　Slutsky 行列

$$S_f(p,m)=D_pf(p,m)+D_mf(p,m)f^T(p,m)$$

　　は半負値定符号かつ対称である。

4）　Π を $\mathbb{R}^n_{++}$ に含まれる任意のコンパクト集合としたとき，

$$\sup_{p\in\Pi,m\in\mathbb{R}_{++}}\max_i|f^i_m(p,m)|<K$$

　　を満たす定数 K が必ず存在する。

以上の仮定の下では，Slutsky 行列の対称性から

$$f^i_j+f^i_mf^j=f^j_i+f^j_mf^i$$

が言えるため，f は定理 2 の系 2 の仮定をすべて満たす。したがって，

$$E_i(p;q,w)=f^i(p,E(p;q,w)),E(q;q,w)=w \tag{25}$$

を満たす関数 $E(p;q,w)$ がただひとつ存在する。そこで，

$$u_p(x)=E(p;f^{-1}(x))$$

と定義しよう。このとき，次の定理が成り立つ。

定理 4：仮定 1)−4) の下で，u_p は f の値域上できちんと定義された一価関数になる。詳しく言うと，$f^{-1}(x)$ に含まれる任意の $(p_1, m_1), (p_2, m_2)$ に対して $E(p; p_1, m_1) = E(p; p_2, m_2)$ が成り立つ。さらに，任意の p' に対して，

$$f(p', m) = \arg\max\{u_p(x) | x \in \mathrm{dom}(u_p), p' \cdot x \leq m\}$$

が成り立つ。

証明：まず注意しておきたいのは，偏微分方程式の解の一意性から，もしある点 p_0 について $E(p_0; p_1, m_1) = E(p_0; p_2, m_2)$ が成り立っていれば, すべての p に対して $E(p; p_1, m_1) = E(p; p_2, m_2)$ が成り立つという点である。中間値の定理を勘案すれば，$E(p_0; p_1, m_1) < E(p_0; p_2, m_2)$ であればすべての p に対して $E(p; p_1, m_1) < E(p; p_2, m_2)$ であるということがわかる。

ここで，仮に f が弱公理を満たす，つまり $x \neq y$ で，$x = f(p, m), y = f(q, w)$ かつ $p \cdot y \leq m$ であれば $q \cdot x > w$ である，ということが常に成り立つと仮定してみよう。$x = f(p_1, m_1) = f(p_2, m_2)$ であるとし,

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2,\ m(t) = (1-t)m_1 + tm_2$$

と定義しよう。ワルラス法則から,

$$p(t) \cdot x = m(t)$$

である。したがって $p_1 \cdot x \leq m_1$ か $p_2 \cdot x \leq m_2$ のいずれかが成り立つ。一般性を失うことなく前者を仮定しよう。もし仮に $f(p(t), m(t)) = y \neq x$ だとすれば，弱公理から $p_1 \cdot y > m_1$ が成り立たねばならない。すると $p(t) \cdot y = m(t)$ なので $p_2 \cdot y < m_2$ であるが，このとき $p(t) \cdot x > m(t)$ でなければならず，先ほど出した式と矛盾する。故に $f(p(t), m(t)) = x$ である。ここで,

$$g(t, w) = f(p(t), w) \cdot (p_2 - p_1)$$

と定義すると，g は t, w について微分可能かつ w について $[0, 1] \times \mathbb{R}$ 上でリプシッツであり，したがって常微分方程式,

$$\dot{w}(t) = g(t, w(t)),\ w(0) = m_1$$

の解は存在するとすれば一意である。ところが，$m(t)$ と $E(p(t); p_1, m_1)$ は共に上の方程式の解であり，したがって両者は一致しなければならない。そこで特に,

$$E(p_2; p_1, m_1) = m_2 = E(p_2; p_2, m_2)$$

が成り立つ。よって任意の p に対して $E(p;p_1,m_1)=E(p;p_2,m_2)$ が成り立つことが知られる。これで一意性命題が証明できる。したがって一意性命題のために必要な情報は，f が弱公理を満たすことであるということがわかる。[8]

そこで弱公理を証明の目標としよう。このため，次の補題を使う。

補題：$x=f(p_1,m_1)$ かつ $y=f(p_2,m_2)$ であるとし，$x\neq y$ を仮定する。もし $m_2\geq E(p_2;p_1,m_1)$ であるならば，$p_1\cdot y>m_1$ である。

補題の証明：まず，$m_2=E(p_2;p_1,m_1)$ であるケースから示そう。

$$p(t)=(1-t)p_1+tp_2,\ m(t)=E(p(t);p_1,m_1),\ x(t)=f(p(t),m(t)),\ w(t)=p_1\cdot x(t)$$

とする。すると，

$$\dot{w}(t)=p_1^TS_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)$$

がわかる。一方で $m(t)=p(t)\cdot x(t)$ の両辺を t で微分すると，

$$p(t)^TS_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)=0$$

がわかる。後者から前者を引けば，

$$\dot{w}(t)=-t(p_2-p_1)^TS_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)\geq 0$$

がわかる。よって

$$w(1)\geq w(0)$$

である。ここでもし $w(1)=w(0)$ ならば，$w(t)$ は定数関数であり，したがって

$$(p_2-p_1)^TS_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)=0$$

が常に成り立っていることになる。S_f が半負値定符号かつ対称であることから，これは次の事実と同値である。[9]

$$S_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)=0.$$

一方で，

$$\dot{x}(t)=S_f(p(t),m(t))(p_2-p_1)=0$$

---

(8)　なお，f のゼロ次同次性は仮定していないが，弱公理を満たしていることから自動的に導かれる。
(9)　直交行列を用いて対角化すれば容易に示せる。

であるから，$x(1) = x(0)$ であることになる。しかし $x(1) = y, x(0) = x$ なので仮定に矛盾する。こうして $w(1) > w(0)$ が示せたが，$w(1) = p_1 \cdot y, w(0) = m_1$ なので補題は正しい。これでこの場合は示せた。

次に $m_2 > E(p_2; p_1, m_1)$ の場合。このとき，$m_2 = E(p_2; p_2, m_2)$ であるから，先に注意した事実から，任意の p に対して $E(p; p_2, m_2) > E(p; p_1, m_1)$ が成り立つ。特に $E(p_1; p_2, m_2) > E(p_1; p_1, m_1) = m_1$ である。そこで $m^* = E(p_1; p_2, m_2)$ として，m^* を m_1 の代わりにして先ほどと同様に $p(t), m(t), x(t), w(t)$ を定義して議論すれば，やはり $w(1) \geq w(0)$ が出る。$w(0) = m^*$ はワルラス法則から明らかである。一方，$m^* = E(p_1; p_1, m^*) = E(p_1; p_2, m_2)$ であるから，$E(p; p_1, m^*) = E(p; p_2, m_2)$ がすべての p について言える。特に $p = p_2$ とすれば $m(1) = m_2$ がわかり，したがって $w(1) = p_1 \cdot y$ である。よって，

$$m_1 < m^* \leq p_1 \cdot y$$

となって証明が終わる。■

これを用いてまず弱公理を示そう。仮に $x = f(p_1, m_1), y = f(p_2, m_2)$ で，$p_1 \cdot y \leq m_1$ かつ $x \neq y$ であったとしよう。このとき補題の対偶をとれば，$E(p_2; p_2, m_2) = m_2 < E(p_2; p_1, m_1)$ であることがわかる。よって注意したことから，$E(p_1; p_2, m_2) < E(p_1; p_1, m_1) = m_1$ がわかる。これに補題をふたたび適用すれば，$p_2 \cdot x > m_2$ がわかる。これで弱公理が示せた。

あとは，$x = f(p_1, m_1)$ かつ $y = f(p_2, m_2)$ で，$x \neq y$ かつ $p_1 \cdot y \leq m_1$ であったとしたら，$u_p(y) < u_p(x)$ であることを示せば証明は終わる。まず，補題の対偶から $m_2 < E(p_2; p_1, m_1)$ を得る。$m_2 = E(p_2; p_2, m_2)$ であることから，

$$u_p(y) = E(p; p_2, m_2) < E(p; p_1, m_1) = u_p(x)$$

がわかる。よって主張は正しい。これで証明が完成した。■

このようにして，u_p の効用関数としての性質が示せたことになる。

以下は余談であるが，この u_p の性質について簡単に調べておきたい。まず，この関数は強く単調になることが容易に示せる。実際，たとえば $x \geq y$ かつ $x \neq y$ で，$x = f(p_1, m_1)$ かつ $y \in \mathrm{dom}(u_p)$ であるとすれば，仮定から $p_1 \cdot y_1 < p_1 \cdot x_1 = m_1$ であるから，上の証明にあるように $u_p(y) < u_p(x)$ となる。

また，$x, y, z \in \mathrm{dom}(u_p)$ であり，かつ $z = (1-t)x + ty$ となる $t \in]0, 1[$ が存在したとしよう。このとき，$z = f(q, w)$ となる価格 q について，$q \cdot x \leq w$ と $q \cdot y \leq w$ の少なくともどちらかが言える。すると上の定理の証明にあるように $u_p(z) > u_p(x)$ と $u_p(z) > u_p(y)$ のどちらかが言えること

になる。ただし，この結果を「u_p は狭義準凹である」と言ってしまうと間違いである。それが正しいのは，$\mathrm{dom}(u_p)$ が凸集合であるとき，またそのときに限られる。

最後に，Hurwicz and Uzawa（1971）には u_p の連続性について詳細な記述があるが，おおざっぱに要約すると，「上半連続性は容易に示せる。しかし下半連続性は追加条件がないと示せない」という内容である。つまり，u_p は上半連続，単調で，狭義準凹に近い条件を満たすが，下半連続であるためには条件が必要である。

（通信教育部講師）

（経済学研究科後期博士課程）

参 考 文 献

[1] J. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Hesperides Press, 2006.

[2] L. Hurwicz, H. Uzawa, On the Integrability of Demand Functions, In: J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, H. F. Sonnenschein (Eds.), Preferences, Utility and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, 1971, pp. 114–148.

[3] D. W. Katzner, Static Demand Theory, Macmillan Company, New York, 1970.

[4] W. Nikliborc, “Sur les équations linéaires aux différentielles totales.” Studia Mathematica, 1, 1929, pp. 41–49.

[5] M. K. Richter, “Duality and Rationality.” Journal of Economic Theory, 20, 1979, pp. 131–181.

[6] M. Tsuji, “On a System of Total Differential Equations.” Japanese Journal of Mathematics, 19, 1948, pp. 383–393.