

Title	偏微分方程式と逆需要関数の積分可能性：Frobeniusの定理を中心として
Sub Title	Partial differential equations and the integrability of inverse demand functions : focusing on frobenius theorem
Author	細矢, 祐誉(Hosoya, Yuki) 虞, 朝聞(Yu, Chaowen)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2012
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.105, No.2 (2012. 7) ,p.247(139)- 270(162)
JaLC DOI	10.14991/001.20120701-0139
Abstract	本稿は積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式, および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い, その導出を行う。主に行われるのは仮線形偏微分方程式の解の存在定理と, Frobeniusの定理の証明である。また, 積分可能性条件と需要関数の条件の対応関係についても議論する。 This study explains the existence theorem on a solution for partial differential equations necessary for solidifying the theoretical basis of integrability problems, as well as total differential equations, and performs its derivation. Primarily, an existence theorem on the solution of provisionally linear partial differential equations and a proof of the Frobenius theorem was performed. In addition, we discuss the correspondence of conditions for integrability and demand functions.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20120701-0139

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

偏微分方程式と逆需要関数の積分可能性—Frobenius の定理を中心として—
Partial Differential Equations and the Integrability of Inverse Demand
Functions —Focusing on Frobenius Theorem—

細矢 祐誉(Yuki Hosoya)

虞 朝聞(Chaowen Yu)

本稿は積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式、および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い、その導出を行う。主に行われるのは仮線形偏微分方程式の解の存在定理と、Frobenius の定理の証明である。また、積分可能性条件と需要関数の条件の対応関係についても議論する。

Abstract

This study explains the existence theorem on a solution for partial differential equations necessary for solidifying the theoretical basis of integrability problems, as well as total differential equations, and performs its derivation. Primarily, an existence theorem on the solution of provisionally linear partial differential equations and a proof of the Frobenius theorem was performed. In addition, we discuss the correspondence of conditions for integrability and demand functions.

偏微分方程式と逆需要関数の積分可能性

—— Frobenius の定理を中心として ——

細 矢 祐 誉^{*}
虞 朝 聞^{†‡}

（初稿受付 2012 年 5 月 17 日、
査読を経て掲載決定 2012 年 7 月 24 日）

要 旨

本稿は積分可能性問題の理論的な基礎を固めるために必要な偏微分方程式、および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い、その導出を行う。主に行われるのは仮線形偏微分方程式の解の存在定理と、Frobenius の定理の証明である。また、積分可能性条件と需要関数の条件の対応関係についても議論する。

キーワード

積分可能性問題、効用関数、偏微分方程式

1 序論

本稿は消費者理論でしばしば議論の対象となるいわゆる積分可能性問題の理論的な基礎を固め、初学者が同分野に手を付けるための基礎を与えることを目的とする。このために本稿では、同結果に必要な偏微分方程式および全微分方程式の解の存在定理について解説を行い、主要な存在定理を導出してゆく。

積分可能性問題とは、消費者の効用関数を、より観測が容易であると考えられる需要関数から導出するための手続きはあるか、またあるとすればどのような手続きでそれが達成できるかを考察する消費者理論の一分野である。古くは Antonelli (1886) から考えられてきた同分野であるが、これ

* 慶應義塾大学通信教育部講師

† 慶應義塾大学大学院経済学研究科後期博士課程

‡ 本稿を作成するにあたっては、慶應義塾大学経済学部の丸山徹教授の講義および講義で配布された資料を参考にした。また、丸山教授および匿名のレフェリーには本稿に対して非常に有益な助言をいただいた。ここに謝意を表する。なお、本稿にあり得べき誤りに関しては、その責任は本稿の著者にあることを念のために記す。

をきちんと理解するためには相当な量の数学的教養を必要とするため、経済学者の多くにとって参入しにくいという実情がある。これをどうにかすること、具体的には、微分位相幾何学とくに微分形式についての煩雑な議論は避け、それよりはるかに簡単な常微分方程式の解についての知識だけから議論を構築することにより、証明を追う難易度を激減させることが、本稿の主目的である。ただし内容が多くなりすぎると読みにくくなってしまうため、本稿では議論の対象を逆需要関数からの効用関数の導出理論に絞り、需要関数からの導出理論については別稿に内容を譲ることにした。

さて、逆需要関数とは消費集合から価格の集合への一価関数のことを通例呼ぶが、これは消費集合内の点（通例消費計画と呼ばれる） x に対して、その x が買われる可能性がある価格 p_x を返す関数 $g: x \mapsto p_x$ として解釈される。もし x が消費集合の内部に属し、また微分可能な効用関数 u が存在しているのであれば、よく知られた Lagrange の未定乗数法から、ある定数 $\lambda(x)$ をうまくとれば、

$$Du(x) = \lambda(x)g(x) \quad (1)$$

となることがわかっている。積分可能性理論の第一歩は、逆にこの (1) 式を成り立たせるような関数 u を見つけることができるか、という点にある。これを局所的に解決するのが Frobenius の定理と呼ばれる定理である。しかし現代的な教科書の多くでは Frobenius の定理というのは理解すること自体が非常に難しい言語でその主張が書かれており、⁽¹⁾ 普通の理論経済学者の知識では内容をチェックすることが困難である。そこで本稿では、この定理の比較的簡単な証明を用意することとしたが、そのためにまず一階の線形偏微分方程式の解の性質についての知識が必要である。本稿の序盤はそれらの知識についての記述に多くを割く。その後、主要な論点となる Frobenius の定理について、まず次元が小さい場合の証明を与え、次により難しい高次元の場合について証明する。

また、Frobenius の定理が経済学的にどのような事実と結びついているのか、ということについても、きちんと議論しておくことが必要であろう。とりわけ、上の u が存在するための g の条件が、需要関数のいかなる条件と対応しているのかをはっきりさせることが重要である。この議論は Samuelson (1950) によってなされており、有名な結果である。この事実自体はよく知られているので本稿自身のオリジナルではないが、本稿で得られた知見がどのように経済学に活用されるのかを見せるために、付け加えることにした。

第 2 節で我々は、仮線形と呼ばれるタイプの偏微分方程式の解の存在定理について述べる。第 3 節ではとくに線形と呼ばれるタイプの偏微分方程式に議論を絞り、その解の特徴付け定理をひとつ導出する。第 4 節ではこれらを用いて、上に名を挙げた Frobenius の定理の初等的証明を与える。

(1) たとえば「 n 次元多様体の r 次元微分式系の局所方程式 $\omega_1 = \dots = \omega_{n-r} = 0$ について——」などと書かれている（松島 (1965) など）。この文章が理解できるだけの基礎知識がなければ、読者は証明をチェックすることはおろか、なぜこの定理が上の問題を解決したことになっているのかを理解することすらできない。

第5節ではこの Frobenius の定理を用いて, Samuelson の結果の解説を行うこととする。

2 仮線形偏微分方程式の解の存在定理

この節では,

$$\sum_{i=1}^n a_i(u, x) u_i(x) = a_0(u, x) \quad (2)$$

というタイプの偏微分方程式を問題に挙げる。開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ を定義域とする実数値関数 u が上の方程式の解であるとは、上の u の箇所に $u(x)$ を、 u_i のところに $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ を代入したときに、件の等式が成り立つこと、つまり、

$$\sum_{i=1}^n a_i(u(x), x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = a_0(u(x), x)$$

が全ての $x \in W$ について成り立つことを指す。

このとき、主要な結果は次で与えられる。

定理 1 : $a_1, \dots, a_n$ と a_0 はともに $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上で定義されて C^1 級であることとし、 $b_1, \dots, b_n$ と b_0 は $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上に定義されて C^1 級、さらにある s^* において $b_i(s^*) = x_i^*$ かつ $b_0(s^*) = z^*$ とおくとき、

$$\begin{vmatrix} a_1(z^*, x^*) & \frac{\partial b_1}{\partial s_1}(s^*) & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial s_{n-1}}(s^*) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n(z^*, x^*) & \frac{\partial b_n}{\partial s_1}(s^*) & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial s_{n-1}}(s^*) \end{vmatrix} \neq 0$$

が成り立つとする。このとき、 x^* の近傍 W をうまく選べば、 W 上で

$$u(b(s)) = b_0(s)$$

を常に満たす C^1 級の (2) の解がただひとつ存在する。さらに、 a_i や b_i が全て C^ℓ ($\ell \geq 1$) 級だったとすれば、 u も C^ℓ 級である。

証明 : まず常微分方程式、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= a_0(z, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_1(z, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n(z, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

の、 $z(0) = b_0(s)$ および $x_i(0) = b_i(s)$ を初期値とする解のことを $(z(t, s), x(t, s))$ と書こう。⁽²⁾ これらは常微分方程式の一般論から (t, s) について C^ℓ 級である。そして、 $x(t, s)$ のヤコビアンを $(t, s) = (0, s^*)$ で計算すると、それは

$$\begin{vmatrix} a_1(z^*, x^*) & \frac{\partial b_1}{\partial s_1}(s^*) & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial s_{n-1}}(s^*) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n(z^*, x^*) & \frac{\partial b_n}{\partial s_1}(s^*) & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial s_{n-1}}(s^*) \end{vmatrix} \neq 0$$

である。したがって逆関数定理から、 $(0, s^*)$ のある凸近傍 X と x^* を含む近傍 W をうまく選べば、 x は X から W への関数として全単射で、 C^ℓ 級の逆写像 $(\tau(x), \sigma(x))$ を持つ。そこで、

$$u(x) = z(\tau(x), \sigma(x))$$

とおく。これが解であることを示そう。

まず、 $u(x(t, s)) = z(t, s)$ であることに注意する。 $x \in W$ をひとつ選ぶと $x = x(t^+, s^+)$ となる t^+, s^+ が存在する。そこでこの (t^+, s^+) の点で $u(x(t, s)) = z(t, s)$ の両辺を t について微分してみよう。明らかに右辺は $a_0(u(x), x)$ となる。一方で左辺は合成関数の微分の公式から、

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x_i}{\partial t}(t^+, s^+) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) a_i(u(x), x)$$

となる。これが等しいのであるから、たしかに x の点で (2) の等式が成り立っていることが確認できた。 x は W の任意の点であったから、これで u が解であることが知れたことになる。形から明らかに u は C^ℓ 級である。

次に一意性を示す。 v は W 上で定義された C^1 級の (2) の解で、さらに $v(b(s)) = b_0(s)$ が常に満たされるとしよう。このとき、 $x \in W$ をひとつとると、 $x = x(t^+, s^+)$ となる t^+, s^+ が存在するはずである。 v は (2) の解であるから、上と同様の計算により、

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x(t, s)) = a_0(v(x(t, s)), x(t, s))$$

が示せるので、常微分方程式の解の一意性定理から、 $v(x(t, s)) = z(t, s)$ である。したがって $v(x(t^+, s^+)) = z(t^+, s^+) = u(x(t^+, s^+))$ となって、 $v = u$ が知れる。以上で証明が完成した。

□

このような $b_1, \dots, b_n$ と b_0 のことを初期多様体と呼ぶ。注意しなければならないのは、 $a_1, \dots, a_n$ が全部 0 にはならないような (z^*, x^*) をとると (このような点を正常点と呼ぶ)、条件を満たす初期多

(2) この曲線を特性曲線と呼び、とくに x のほうを特性基礎曲線と呼ぶことがある。

(3) 凸にしておかないと一意性が出ないので凸にしておいた。このような選び方は X さえ十分小さくとれば可能である。

様体 $b_1, \dots, b_n$ は必ずひとつは存在するということである。たとえば, $a_1(z^*, x^*) \neq 0$ だとすれば,

$$b_1(s) = x_1^*, b_j(s) = s_{j-1} \quad (j = 2, \dots, n)$$

とおけば, $s^* = x^*$ として条件は満たされる。

次の系は容易に示すことができる。

系 1: もし $a_0, \dots, a_n$ が $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 以外のパラメータ $p \in \mathbb{R}^m$ にも依存する $C^\ell (\ell \geq 1)$ 級の関数だったとき, (2) の解 $u(x, p)$ は初期点の近傍上で定義され, $(x, p) \in \mathbb{R}^{n+m}$ について C^ℓ 級である。

証明: $a_{n+1}(x, u, p) = \dots = a_{n+m}(x, u, p) = 0$ とし, $c_0(s, p) = b_0(s), \dots, c_n(s, p) = b_n(s), c_{n+1}(s, p) = p_1, \dots, c_{n+m}(s, p) = p_m$ としてやって, 新たな全微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_i(x, u, p) u_i(x, p) = a_0(x, u, p)$$

を $c_0, \dots, c_{n+m}$ という初期多様体の元で解いた関数を u とすれば, u が p を固定した下で初期条件を満たす (2) の解となることは明らかである。作り方から明らかに u は (x, p) について C^ℓ 級であり, したがって主張は正しい。

□

3 一階線形同次偏微分方程式

偏微分方程式,

$$\sum_{i=1}^n A_i(x) u_i = 0 \quad (3)$$

を考える。ここで, $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は $W \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された C^1 級の実数値関数とする。(3) に対応して常微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

を考え, この方程式の解を $x(t)$ としよう (前節でも述べたようにこの解を特性基礎曲線と呼ぶことがある)。このとき, W の部分集合上で定義された任意の微分可能な実数値関数 u をひとつとろう。もしこの u が (3) の解であるならば, u の定義域内に常に値を持つような任意の (4) の解 x に対して

$$\frac{du(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n u_i(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n A_i(x(t)) u_i(x(t)) = 0$$

であるから, $u(x(t))$ は定数関数である。逆に, u の定義域内に常に値を持つような任意の (4) の解 $x(t)$ に対して u が定数関数であるならば, u の定義域内の任意の点 a を初期点とする (4) の解 x を持てれば,

$$0 = \frac{du(x(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n u_i(a) \frac{dx_i}{dt}(0) = \sum_{i=1}^n A_i(a) u_i(a)$$

となるため、 u は (3) の解であることがわかる。

以上の準備の下、本節の目的である、Frobenius の定理 (定理 5) の証明に用いられる以下の定理を証明する。

定理 2: $A_1, \dots, A_n$ が x^0 の近傍上で定義された実数値関数で、全て $C^\ell (\ell \geq 1)$ 級であるとする。仮に x^0 が正常点 (つまり、 $A_i(x^0) \neq 0$ となる i が存在する) だとすれば、 x^0 のある近傍 W と、 W 内で

$$\text{rank } D(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = n - 1$$

を満たすような $(n - 1)$ 個の C^ℓ 級の (3) の解 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ が存在する。さらに、 $k \leq \ell$ のとき、 C^k 級であるような (3) の任意の解 u は、 x^0 の近傍において、ある C^k 級実数値関数 $S: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて、

$$u(x) = S(\eta_1(x), \dots, \eta_{n-1}(x))$$

と書くことができる。

証明: 一般性を失うことなく、 $A_1(x^0) \neq 0$ を仮定して問題ない。このとき、 x^0 の近傍で A_1 は 0 にならないので、あらかじめ問題の定義域を絞ることで $A_1(x) \neq 0$ が常に成り立つと仮定して問題ない。ここで、

$$u_1(x) + \sum_{i=2}^n \frac{A_i(x)}{A_1(x)} u_i(x) = 0 \quad (5)$$

という新しい方程式を作ると、(3) の解は (5) の解でもあり、逆もまた成り立つことが容易にわかる。したがって以下は (5) の解を考えればよい。対応して (4) の形の方程式を作れば、それは

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{A_i(x)}{A_1(x)} \quad (6)$$

という形になる。 $x_1 = x_1^0, x_2 = c_1, \dots, x_n = c_{n-1}$ という初期値の元での (6) の解を $\varphi(x_1, c)$ と書くことにする。定義から、

$$\varphi_i(x_1^0, c) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (7)$$

である。この両辺を $c^0 = (x_2^0, \dots, x_n^0)$ の点で $(c_1, \dots, c_{n-1})$ について全微分すれば、⁽⁴⁾

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{D(c_1, \dots, c_{n-1})} \Big|_{(x_1^0, c^0)} \neq 0. \quad (8)$$

したがって、

$$\tilde{\varphi}_i(x, c) = \varphi_i(x_1, c) - x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

(4) (8) の左辺は $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ の $(c_1, \dots, c_{n-1})$ に関する導関数の $((x_1^0, c^0)$ における) 行列式、つまり関数行列式を表している。

と定義すると、(7) から

$$\tilde{\varphi}(x^0, c^0) = 0$$

となるから、(8) より陰関数定理が適用できて、 x^0 の近傍で定義され、 $\mathbb{R}^{n-1}$ に値をとる関数 η が存在して、 (x^0, c^0) の近傍において、

$$c = \eta(x) \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(x, c) = 0 \Leftrightarrow \varphi_i(x_1, c) = x_{i+1} \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

が成り立つ。ここで、 $\tilde{\varphi}$ が C^ℓ 級であることから、各 η_i も C^ℓ 級である。(9) の両端から

$$\eta_i(x_1, \varphi(x_1, c)) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (10)$$

が成り立つ。(10) により、初期値を c^0 の近傍の値 c とする (6) の解に沿って計算された η_i の値は c_i という定数となることが知られた。したがって前述の議論から、 $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) は x^0 の近傍において方程式 (3) の解である。

また、(10) の両辺を c で微分すれば、連鎖律より

$$\left(\frac{D(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})}{D(x_2, \dots, x_n)} \Big|_{(x_1, \varphi(x_1, c))} \right) \cdot \left(\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{D(c_1, \dots, c_{n-1})} \Big|_{(x_1, c)} \right) = 1$$

であるから、

$$\frac{D(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})}{D(x_2, \dots, x_n)} \Big|_{(x_1, \varphi(x_1, c))} \neq 0.$$

すなわち (x^0 の近傍において)

$$\text{rank } D(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = \text{rank} \begin{pmatrix} (\eta_1)_2 & \cdots & (\eta_1)_n \\ \vdots & & \vdots \\ (\eta_{n-1})_2 & \cdots & (\eta_{n-1})_n \end{pmatrix} = n-1 \quad (11)$$

が成り立つ。以上で定理の前半が示された。

次に x^0 を (3) の正常点とし、 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ をすでに存在することが確認された、 x^0 の近傍で (11) を満たす (3) の解としよう。一般性を失うことなく $A_1(x^0) \neq 0$ と仮定すれば、 η_i は (5) の解でもあるため、 x^0 の近傍で、

$$(\eta_i)_1 + \sum_{j=2}^n \frac{A_j(x)}{A_1(x)} (\eta_i)_j = 0 \quad (12)$$

が成り立つ。そこで、

$$\tilde{\eta}_i(x, c) = \eta_i(x) - c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

と定義し、

$$\eta_i(x^0) = c_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

とおけば,

$$\tilde{\eta}(x^0, c^0) = 0$$

が成り立つ。そこで (11) より陰関数定理が適用できて, (x_1^0, c^0) の近傍で定義され, $\mathbb{R}^{n-1}$ に値をとる関数 φ が存在して, (x^0, c^0) の近傍において,

$$\eta(x) = c \Leftrightarrow \tilde{\eta}(x, c) = 0 \Leftrightarrow \varphi_i(x_1, c) = x_{i+1} \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

が成り立つ。

さて, 定義よりただちに,

$$\eta_i(x_1, \varphi(x_1, c)) = c_i$$

がわかる。そこで, $\eta_i(x_1, \varphi_1(x_1, c^0), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, c^0))$ ($i = 1, \dots, n-1$) を x_1 で微分すると,

$$(\eta_i)_1 + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \varphi_{j-1}(x_1, c^0)}{\partial x_1} (\eta_i)_j = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (14)$$

となる。(12), (14) 式は $\frac{A_i}{A_1}$ と $\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x_1}$ が入れ替わっただけの同じ形の式であり, この線形方程式の解は (11) より一意であるから, 両者は一致する。したがって, $(x_1, \varphi(x_1, c))$ は方程式 (6) の解である。

さて, u を x^0 のまわりで定義された C^k 級の (3) の解とし, $W = \prod_{i=1}^n]x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta[$ を, $\delta > 0$ を十分小さくにとって次の条件を満たすようにする。

- 1) 任意の $x \in W$ に対して, $\eta_i(x) = c_i$ としたときに (x, c) が (13) を満たす範囲に含まれる。
- 2) $y_1 \in]x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta[$ ならば常に $(y_1, \varphi(y_1, c))$ が u の定義域内に常に収まっている。

このような δ の存在は, x^0 の十分近くで $\frac{A_i(x)}{A_1(x)}$ が有界であることからわかる。また, $i = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $\eta_i(x) = c_i$ ならば $\varphi_i(x_1, c) = x_{i+1}$ なので, 2) からとくに x は u の定義域に入っていることに注意する。

ここでもし仮に, $\eta_i(y) = c_i = \eta_i(z)$ が全ての i に対して成り立つ $y, z \in W$ をとれば, (13) から $\varphi_i(y_1, c) = y_{i+1}$ であり, また $\varphi_i(z_1, c) = z_{i+1}$ である。つまり, 曲線 $(x_1, \varphi(x_1, c))$ の軌道は y と z を共に通る (6) の解であり, さらにその軌道は u の定義域内に常に属している。本節冒頭で述べたように, このとき $u(x_1, \varphi_i(x_1, c))$ は一定なので, $u(y) = u(z)$ が言える。こうして, $u(x)$ の値は $\eta_i(x) = c_i$ としたときの c だけで決まることがわかった。したがって c^0 の近傍⁽⁵⁾で定義された実数値関数 S で,

$$u(x_1, \varphi(x_1, c)) = S(c_1, \dots, c_{n-1}) \quad (15)$$

(5) 細かく言えば, W による η の像である。これが c^0 を含む開集合となることは (13) による。

を常に満たすものが存在する。ここで、 u, φ は共に C^k 級であるから、 S も C^k 級である。したがって (13) より、 W 上で、

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1, \varphi(x_1, \eta(x))) \\ &= S(\eta_1(x), \dots, \eta_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上で証明が完成した。 $\square$

4 積分可能条件——Frobenius の定理

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、 $f_i : U \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ が与えられているとする。形式的に

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i = 0 \quad (16)$$

なる形式の式を考え、これを全微分方程式 (total differential equation) と呼ぶ。微分可能な関数 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$D_i \varphi = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

が成り立つとき、全微分方程式 (16) は狭義の積分可能性 (strict integrability) を満たす、あるいは完全 (exact) であるという。また U の内部の点 x を含む開部分集合で定義される実数値関数 μ と φ を、 μ が常に 0 にならないようにうまくとって、

$$D_i \varphi = \mu f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

が成り立つようにできるとき、(16) は x のまわりで積分可能性 (integrability) を満たす、あるいは積分可能 (integrable) であるといい、 φ を (16) の積分、 μ を (16) の積分因子 (integrating factor) と呼ぶ。任意の点のまわりで (16) が積分可能であるとき、(16) は単に積分可能であるという。

4.1 $n = 2, 3$ の場合

本節の目的は、全微分方程式がどのような条件の下に積分可能となるかを調べることである。そこでまず、一般の場合を調べる前に $n = 2, 3$ での積分可能性の条件を調べてみよう。以下の定理で示すように $n = 2$ の場合には全微分方程式はほとんどの場合積分可能である。

定理 3 : U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし、 P, Q を U 上で定義された C^2 級実数値関数とする。このとき、全微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (19)$$

は正常点のまわりで積分可能である。さらに、 P, Q が共に $C^\ell (\ell \geq 2)$ 級であれば、積分も C^ℓ 級であり、積分因子は $C^{\ell-1}$ 級である。

証明：全微分方程式 (19) が積分可能ならば、 φ と μ をうまくとれば、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q$$

が成り立つ。さらに φ が C^2 級であれば、

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad (20)$$

すなわち、

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (21)$$

が成り立つ。ここでの証明のアイデアは、(21) 式を偏微分方程式とみなして解いて μ を導出し、そこから φ を逆算することである。

さて、(21) は μ についての線形の偏微分方程式であり、よって定理 1 から偏微分方程式 (21) は正常点の近傍で 0 にならない C^1 級の解を有する。一般性を失うことなく、 μ の定義域は長方形の形であると仮定しておく（後の積分計算に便利のためである）。この解 μ に対して、

$$\varphi(x, y) = \int_a^x \mu P dx + \psi(y)$$

という形の φ を考えてみよう。ここで ψ としては、

$$\psi(y) = \int_b^y \mu(a, t) Q(a, t) dt$$

などという形を選ぶとよい。このとき、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P$$

は明らかである。一方、 μ が (20) を満たすことから、

$$\begin{aligned} \mu(x, y) Q(x, y) &= \mu(x, y) Q(x, y) - \mu(a, y) Q(a, y) + \mu(a, y) Q(a, y) \\ &= \int_a^x \frac{\partial \mu Q}{\partial x}(s, y) ds + \psi'(y) \\ &= \int_a^x \frac{\partial \mu P}{\partial y}(s, y) ds + \psi'(y) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

が言える。ここで最後の等式には微分と積分の順序交換定理を用いた。作り方から明らかに、 P, Q が C^ℓ 級であるならば μ は $C^{\ell-1}$ 級で、 φ は C^ℓ 級である。□

$n = 3$ の場合については、次の積分可能性に関する必要十分条件が知られている。

定理 4: U を $\mathbb{R}^3$ の開集合とし、 P, Q, R は U 上で定義された C^2 級の実数値関数とする。また、全微分方程式

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (22)$$

について、正常点 (x_0, y_0, z_0) をとる。このとき次の三命題は互いに同値である。

- (i) 方程式 (22) は (x_0, y_0, z_0) のまわりで μ を積分因子として積分可能である。
- (ii) $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}$.
- (iii) $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$.

さらに P, Q, R が全て C^ℓ ($\ell \geq 2$) 級であれば、積分は C^ℓ 級に、積分因子は $C^{\ell-1}$ 級にとれる。

上の (iii) で現れる等式を、Jacobi の等式と呼ぶ。

証明: (i) $\implies$ (ii) は自明であるから、(ii) $\implies$ (iii) と (iii) $\implies$ (i) を示す。

(ii) $\implies$ (iii): (ii) を計算して整理すると、

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) &= R\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial z}, \\ \mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) &= P\frac{\partial\mu}{\partial z} - R\frac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) &= Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y}. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) の各式の両辺にそれぞれ P, Q, R を乗じて加えれば、右辺の和は 0 になるので、

$$\mu P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \mu Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \mu R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

定義より $\mu \neq 0$ なので、 $1/\mu$ を上式にかければ (iii) が得られる。

(iii) $\implies$ (i): (x_0, y_0, z_0) は正常点であると仮定しているの、一般性を失うことなく $Q(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ を仮定してよい。そこで、 z をパラメータとみなして、 P, Q も (x, y) の関数とみなすことにすれば、二次元の全微分方程式

$$Pdx + Qdy = 0$$

は定理 3 から (x_0, y_0, z_0) のまわりで C^ℓ 級の積分 u と $C^{\ell-1}$ 級の積分因子 $\lambda(x, y, z)$ を有する。定理 3 の証明での λ の作り方を見れば、それはある一階の偏微分方程式の解であり、したがって系 1 から λ はパラメータ z も含めて $C^{\ell-1}$ 級であることがわかる。関数 $u(x, y, z)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda Q$$

を満たす。そこで $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$v = \frac{\partial u}{\partial z} - \lambda R$$

と定義する。つまり,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda R + v \quad (24)$$

である。(24) から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} &= \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\lambda P)}{\partial z} &= \frac{\partial(\lambda R)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial z} &= \frac{\partial(\lambda R)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q \frac{\partial \lambda}{\partial x} - P \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \\ \lambda \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= P \frac{\partial \lambda}{\partial z} - R \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) &= R \frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

が得られる。上式にそれぞれ R, Q, P を乗じて加えると (iii) より,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \left[P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] \\ &= P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (25)$$

さて, ここで新たな関数 $\tilde{u}$ を

$$\tilde{u}(x, y, z, \theta) = u(x, y, z) - \theta$$

と定義する。このとき $\tilde{u}(x_0, y_0, z_0, u(x_0, y_0, z_0)) = 0$ であり, また

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, u(x_0, y_0, z_0)) = \lambda(x_0, y_0, z_0) Q(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

だから, 陰関数定理より $(x_0, y_0, u(x_0, y_0, z_0))$ の近傍で定義された C^ℓ 級の実数値関数 φ が存在して, $(x_0, y_0, z_0, u(x_0, y_0, z_0))$ の近傍で,

$$\tilde{u}(x, y, z, \theta) = 0 \iff u(x, y, z) = \theta \iff \varphi(x, \theta, z) = y$$

が成り立つ。よって

$$V(x, \theta, z) = v(x, \varphi(x, \theta, z), z)$$

とおけば, (x_0, y_0, z_0) の近傍で,

$$V(x, u(x, y, z), z) = v(x, y, z)$$

が成り立つ。この両辺を x, y でそれぞれ微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x, u(x, y, z), z) + \frac{\partial V}{\partial \theta}(x, u(x, y, z), z) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial \theta}(x, u(x, y, z), z) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z).\end{aligned}$$

そこで (25) から,

$$\begin{aligned}0 &= P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= P \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial y} - Q \left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \lambda P Q \frac{\partial V}{\partial \theta} - Q \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda P Q \frac{\partial V}{\partial \theta} = -Q \frac{\partial V}{\partial x}.\end{aligned}$$

したがって,

$$Q \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

(x_0, y_0, z_0) の近傍で $Q \neq 0$ だから,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

したがって, $V(x, \theta, z)$ は x に依存せず, $w(\theta, z) = V(x, \theta, z)$ という形に書くことができる。これを用いて全微分方程式

$$d\theta - w(\theta, z)dz = 0 \tag{26}$$

を考えると, 定理 3 からこれは積分可能で,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, z) &= \rho(\theta, z), \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(\theta, z) &= -\rho(\theta, z)w(\theta, z)\end{aligned}$$

を満たす C^ℓ 級の $\psi(\theta, z)$ と $C^{\ell-1}$ 級の $\rho(\theta, z)$ が存在する。以下, $\phi : (x, y, z) \mapsto \psi(u(x, y, z), z)$ が (22) の積分, $\mu : (x, y, z) \mapsto \rho(u(x, y, z), z)\lambda(x, y, z)$ がその積分因子となっていることを示そう。実際,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(u(x, y, z), z) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \\ &= \rho(u(x, y, z), z)\lambda(x, y, z)P(x, y, z) = \mu(x, y, z)P(x, y, z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(u(x, y, z), z) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) \\
&= \rho(u(x, y, z), z) \lambda(x, y, z) Q(x, y, z) = \mu(x, y, z) Q(x, y, z), \\
\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(u(x, y, z), z) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, z) \\
&= \rho(u(x, y, z), z) (\lambda(x, y, z) R(x, y, z) + v(x, y, z)) \\
&\quad - \rho(u(x, y, z), z) w(u(x, y, z), z) \\
&= \rho(u(x, y, z), z) (\lambda(x, y, z) R(x, y, z) + V(x, u(x, y, z), z)) \\
&\quad - \rho(u(x, y, z), z) V(x, u(x, y, z), z) \\
&= \rho(u(x, y, z), z) \lambda(x, y, z) R(x, y, z) = \mu(x, y, z) R(x, y, z).
\end{aligned}$$

よって、(i) が成り立つことがわかった。以上で証明が完成した。 $\square$

4.2 一般の場合

以上の準備の下に一般の全微分方程式の積分可能条件を考えることにしよう。(16) が μ を積分因子として積分可能であるならば、(18) が成り立つ。仮に各 f_i と μ が共に C^1 であるならば、 C^2 級の関数については偏微分の順序の交換が可能なので、任意の $i, j = 1, \dots, n$ に対して、

$$\frac{\partial(\mu f_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu f_j)}{\partial x_i},$$

すなわち、

$$\mu \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) = f_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - f_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

が満たされなければならない。ここで

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

とおけば、前式は

$$\mu a_{ij} = f_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - f_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j},$$

と書き換えることができる。ゆえにどんな $i, j, k = 1, \dots, n$ に対しても、

$$\begin{aligned}
\mu(a_{ij}f_k + a_{jk}f_i + a_{ki}f_j) &= \left(f_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - f_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \right) f_k + \left(f_k \frac{\partial \mu}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \right) f_i \\
&\quad + \left(f_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} - f_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) f_j \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

μ は定義により 0 でないから、上の条件は

$$a_{ij}f_k + a_{jk}f_i + a_{ki}f_j = 0, \tag{28}$$

と同値である。こうして (16) が C^1 級の積分因子を持って積分可能であるためには、(28) の成り立つことが必要であることが知られた。(28) の左辺を、以後は A_{ijk} と書く。

注意：(28) は一部の $i, j, k = 1, \dots, n$ で成り立てば、全ての i, j, k について成り立つ。たとえば、(28) の定義を見れば、 i, j, k のどれかふたつが等しければ $A_{ijk} = 0$ は自動的に出てくるので、これらは条件として書く必要がない。また、 A_{ijk} のふたつの記号、たとえば j と k などを入れ替えると符号が反転するので、 $i < j < k$ という状況だけで成り立つことが確認できれば、全ての i, j, k について成り立つことが確認できたことになる。さらに $a_{ij} = -a_{ji}$ であるから、

$$\begin{aligned} A_{ijk}f_1 - A_{jk1}f_i + A_{k1i}f_j - A_{1ij}f_k &= f_1(a_{jk}f_i + a_{ki}f_j + a_{ij}f_k) - f_i(a_{k1}f_j + a_{1j}f_k + a_{jk}f_1) \\ &\quad + f_j(a_{1i}f_k + a_{ik}f_1 + a_{k1}f_i) - f_k(a_{ij}f_1 + a_{j1}f_i + a_{1i}f_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえにもし $f_1 \neq 0$ であれば、

$$A_{1ij} = 0, A_{1ik} = 0, A_{1jk} = 0 \implies A_{ijk} = 0$$

がわかる。したがって、

$$A_{1pq} = 0, p, q = 2, 3, \dots, n, p < q \implies A_{hik} = 0, h, i, k = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

が成り立てば、全ての (i, j, k) に対して (28) が成り立つことがわかる。

さて、この節の主定理を述べよう。これは上とは逆に、(28) が成り立てば (16) は積分可能であることを主張するものである。

定理 5 (Frobenius) : $n, \ell \geq 2$ とし、各 $f_i : U \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ が C^ℓ 級であるとき、全微分方程式

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i = 0$$

を考える。 x^0 が上の方程式の正常点であるとき、この方程式が x^0 のまわりで C^ℓ 級の積分と $C^{\ell-1}$ 級の積分因子を持つためには、(28) が成り立つことが必要十分である。⁽⁶⁾

証明：すでに必要性を示したので、十分性のみを示せばよい。 x^0 は正常点であると仮定してあるので、一般性を失うことなく $f_1(x_0) \neq 0$ を仮定する。したがって x^0 の近傍上で $f_1 \neq 0$ であり、よって (28) 式は (29) 式と同値である。以下、各 f_i の定義域を絞る、 f_1 は常に 0 でないと仮定して議論を続ける。

(6) $\ell = 1$ であるとその証明は成り立たない。この場合については Hosoya (forthcoming) を参照せよ。

まず定理 3 から、全微分方程式

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0$$

は積分可能で、 (x_1, x_2) について C^ℓ 級の積分 θ と $C^{\ell-1}$ 級の積分因子 λ を持つ。 $n = 2$ のときはこれで証明が終わる。よって以降では $n \geq 3$ を仮定する。さらに証明には n についての数学的帰納法を用いるため、 $n - 1$ までは定理の主張が正しいと仮定しよう。

さて、定理 3 の証明の中身における θ と λ の作り方を見れば、系 1 からそれが $(x_1, \dots, x_n)$ 全体についてもそれぞれ C^ℓ 級、 $C^{\ell-1}$ 級であることがわかる。積分と積分因子の定義から、

$$\lambda f_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \quad \lambda f_2 = \frac{\partial \theta}{\partial x_2}$$

がわかる。ここで、

$$\beta_i = \lambda f_i - \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \tag{30}$$

とおけば β_i は $C^{\ell-1}$ 級で、また定義から $\beta_1 = \beta_2 = 0$ である。また、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \lambda f_i - \beta_i$$

であるから、

$$\frac{\partial(\lambda f_i - \beta_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\lambda f_j - \beta_j)}{\partial x_i},$$

すなわち、

$$\lambda a_{ij} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} f_i - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_j \right) - b_{ij} = 0. \tag{31}$$

ここで、 $b_{ij} = \partial \beta_i / \partial x_j - \partial \beta_j / \partial x_i$ である。 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ であるから、

$$b_{12} = 0, \quad b_{1j} = -\frac{\partial \beta_j}{\partial x_1}, \quad b_{2j} = -\frac{\partial \beta_j}{\partial x_2}.$$

いま

$$B_{ijk} = b_{jk} f_i + b_{ki} f_j + b_{ij} f_k$$

とおけば、(30) より

$$\begin{aligned} \lambda A_{ijk} &= \lambda a_{jk} f_i + \lambda a_{ki} f_j + \lambda a_{ij} f_k \\ &= \left(b_{jk} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} f_j + \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} f_k \right) f_i + \left(b_{ki} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_k + \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} f_i \right) f_j \\ &\quad + \left(b_{ij} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} f_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_j \right) f_k \\ &= b_{jk} f_i + b_{ki} f_j + b_{ij} f_k = B_{ijk} \end{aligned}$$

が成り立つから、仮定により、

$$B_{ijk} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (32)$$

が得られる。とくに $B_{12p} = 0$ なので、

$$b_{2p}f_1 + b_{p1}f_2 + b_{12}f_p = 0. \quad (33)$$

ここで、

$$b_{2p} = -\frac{\partial \beta_p}{\partial x_2}, \quad b_{p1} = \frac{\partial \beta_p}{\partial x_1}, \quad b_{12} = 0$$

であるから、これを (33) に代入すれば、

$$-\frac{\partial \beta_p}{\partial x_2}f_1 + \frac{\partial \beta_p}{\partial x_1}f_2 = 0. \quad (34)$$

がわかる。

さて、ここで未知関数 β についての偏微分方程式

$$f_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} = 0 \quad (35)$$

を考えると、まず θ がこの方程式の解であることは、

$$f_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = f_1 \lambda f_2 - f_2 \lambda f_1 = 0$$

からすぐにわかる。一方、 $i = 3, \dots, n$ に対して $\eta_i(x) = x_i$ と定義すれば、これが上の方程式の解となることもただちにわかる。さらに、関数 $(\theta, \eta_3, \dots, \eta_n)$ の導関数は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \\ 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

である。ここで、 E_{n-2} は $(n-2)$ 次単位行列を表す。 $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \lambda f_1 \neq 0$ なのでこの行列の階数は $n-1$ であり、よって定理 2 より、偏微分方程式 (35) の任意の解は $\theta(x), x_3, \dots, x_n$ の関数として表現することができる。そして (34) より β_p ($p = 3, 4, \dots, n$) は (35) を満たすので、ある C^ℓ 級の関数 S_p を使って、

$$\beta_p(x) = S_p(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \quad (36)$$

と書けることがわかる。

そこで、全微分方程式

$$d\kappa + \sum_{i=3}^n S_i(\kappa, x_3, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (37)$$

を考えよう。最初に、この (37) が $(\theta(x^0, x_3^0, \dots, x_n^0))$ のまわりで積分 w と積分因子 ρ を持てば、 $v(x) = w(\theta(x), x_3, \dots, x_n)$ とし、 $\mu(x) = \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n)\lambda(x)$ と定義することで、 v が元の全微分方程式の積分、 μ が積分因子となることを示そう。実際、

$$\frac{\partial w}{\partial \kappa} = \rho, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} = \rho S_i \quad (i = 3, \dots, n) \quad (38)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial w}{\partial \kappa}(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \lambda(x) f_1(x) = \mu(x) f_1(x) \end{aligned}$$

がわかる。同様にして

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x) = \mu(x) f_2(x)$$

もわかる。最後に、 $i = 3, \dots, n$ に対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial w}{\partial \kappa}(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_2}(x) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_2}(x) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \lambda(x) f_2(x) = \mu(x) f_2(x), \\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial w}{\partial \kappa}(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial w}{\partial x_i}(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial w}{\partial x_i}(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x) + S_i(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \right) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) (\lambda(x) f_i(x) - \beta_i(x) + \beta_i(x)) \\ &= \rho(\theta(x), x_3, \dots, x_n) \lambda(x) f_i(x) = \mu(x) f_i(x) \end{aligned}$$

となって、主張が正しいことがわかる。

そこで後は、(37) が C^ℓ 級の積分と $C^{\ell-1}$ 級の積分因子を持てばよい。(37) は $n-1$ 変数の全微分方程式なので、帰納法の仮定から、そのためには定理の条件が成り立っていることを示せばよい。 $d\kappa$ の係数は恒等的に 1 であり、0 にならないため、先に示した注意から、

$$\frac{\partial S_p}{\partial x_q} - \frac{\partial S_q}{\partial x_p} + S_p \frac{\partial S_q}{\partial \kappa} - S_q \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} = 0 \quad (39)$$

が全ての $p, q = 3, \dots, n$ に対して成り立っていれば十分である。これが証明の目標となる。

最初にひとつ注意をしておく。上の条件が成り立っているかどうかを確認する際の変数はもちろん $(\kappa, x_3, \dots, x_n)$ であるが、どの範囲の $(\kappa, x_3, \dots, x_n)$ について成り立つかを明示しておかなければならない。我々は θ を x^0 の近傍上で定義された関数としたが、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \lambda f_1 \neq 0$$

であるから、 θ の値域は $\kappa^0 = \theta(x^0)$ を内部に含む。よって、 $(\kappa^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ の近傍を十分小さくとれば、その中のどんな $(\kappa, x_3, \dots, x_n)$ に対しても $(\theta(x), x_3, \dots, x_n) = (\kappa, x_3, \dots, x_n)$ となるような x をとってくる⁽⁷⁾ことができる。これに留意し、以降 $(\kappa, x_3, \dots, x_n)$ をそのような近傍の内部のものとして固定し、対応する x をあらかじめとって議論する。以降の議論で変数が省略してあるが、 β や θ 、それらの導関数には x が、 S_i やその導関数には $(\kappa, x_3, \dots, x_n)$ が常に入る。

さて、では続けて議論しよう。 S_p の定義から、

$$\beta_p(x) = S_p(\theta(x), x_3, \dots, x_n)$$

であることに注意しよう。これを x_q で偏微分することで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_q} &= \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x_q} + \frac{\partial S_p}{\partial x_q} \\ &= \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} [\lambda f_q + \beta_q] + \frac{\partial S_p}{\partial x_q} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial S_p}{\partial x_q} = \frac{\partial \beta_p}{\partial x_q} - \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} [\lambda f_q + S_q]$$

を得る。同様に、

$$\frac{\partial S_q}{\partial x_p} = \frac{\partial \beta_q}{\partial x_p} - \frac{\partial S_q}{\partial \kappa} [\lambda f_p + S_p]$$

もわかる。これを (39) 式に代入すれば、

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \beta_q}{\partial x_p} + \frac{\partial S_q}{\partial \kappa} \lambda f_p - \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} \lambda f_q = 0 \quad (40)$$

が (39) と同値であることがわかる。一方、

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial x_1} = \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial S_p}{\partial \kappa} \lambda f_1$$

なので、 $\lambda f_1 \neq 0$ から、

(7) 正確には $x_2 = x_2^0$ に固定して逆関数定理を用いる。

$$\frac{\partial S_p}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda f_1} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_1}$$

と言える。同様に、

$$\frac{\partial S_q}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda f_1} \frac{\partial \beta_q}{\partial x_1}$$

もわかる。これを (40) に代入して f_1 をかければ、

$$f_1 \left[\frac{\partial \beta_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \beta_q}{\partial x_p} \right] + f_p \frac{\partial \beta_q}{\partial x_1} - f_q \frac{\partial \beta_p}{\partial x_1} = 0, \quad (41)$$

すなわち、

$$B_{1pq} = 0$$

が (39) と同値になる。しかしこれはすでに (32) で示してある。以上で証明が完成した。□

なお、Debreu (1972) ではこの結果を大域的に拡張することが可能かどうかを吟味し、 g が常に正象限のベクトルを値として持つならば可能だが、そうでない場合には反例があることを示している。彼の証明は若干の誤りを含んでいたが⁽⁸⁾、その主張自体はその後、別の手法によって大筋正しかったことが確認されている。

5 Samuelson の結果：積分可能性条件と Slutsky 行列の対称性

この節では、前節までに見た結果を用いて、消費者理論における逆需要関数の積分可能性条件の特徴付けを行うことを目的とする。⁽⁹⁾ この節を通じて我々は、消費可能なベクトルの集合を Ω と記述するが、この Ω は $\mathbb{R}_{++}^n$ であると仮定して議論することにする。

まず、関数 $f: \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \Omega$ を考え、この関数は C^1 級であるとしよう。経済学の解釈として f が需要関数であるために、我々は f が正ゼロ次同次で、またワルラス法則と呼ばれる次の等式、

$$p \cdot f(p, m) = m$$

を常に満たすとする。この節全体を通じて、 (p, m) に対して $f(p, m)$ の第 i 座標を返す関数を f^i と書くことにし、またその p_j による偏微分を f_j^i と書く。 m による偏微分は f_m^i と書くことにする。また、 f の p だけによる全微分を $D_p f$ と、 m による微分を $D_m f$ と書くことにする。

また $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ を考え、これも C^1 級程度の滑らかさを仮定しておこう。この解釈は逆需要関数であり、点 x に対して x が需要されるような価格を返す関数である。したがって我々は

(8) 細矢 (2010) の第三章を見よ。

(9) すでに序論で書いたように、本節の結果自体はそれほど目新しいものではない。ここでは、Frobenius の定理がどのように使われるのかという例示として有益であるという観点から、この内容を本稿に付け加えることにした。

$$f(g(x), g(x) \cdot x) = x$$

を常に仮定する。ただしこれに加えて、 $g(x)$ の第 n 座標は恒等的に 1 であると仮定する。先と同様に x に対して $g(x)$ の第 i 座標を返す関数を g^i と書けば、これは $g^n(x) \equiv 1$ を仮定した、という意味である。またこれも先ほどと同様、 g^i の x_j による偏微分を g_j^i と書くことにしよう。

このとき、もしこの需要関数に対応する C^1 級の効用関数があるとすれば、Lagrange の定理からそれは

$$Du(x) = \lambda(x)g(x)$$

となるような実数値関数 λ を持たなければならない。言い換えれば、 u は次の全微分方程式、

$$\sum_{i=1}^n g^i(x) dx_i = 0$$

の解である、ということである。前節での議論から、そのような u が x の近傍で存在するための必要十分条件は、 g が積分可能性条件 (28) を満たすことであることがわかっている。具体的に書くと、全ての i, j, k に対して、

$$g^i(g_k^j - g_j^k) + g^j(g_i^k - g_k^i) + g^k(g_j^i - g_i^j) = 0$$

だということである。しかしすでに示したようにこの条件は全てが独立ではなく、 $k = n$ のときだけ成立していれば全て成立している。 $g^n = 1$ と $g_i^n = g_j^n = 0$ に注意すれば、上の式は

$$g^i g_n^j - g^j g_n^i + g_j^i - g_i^j = 0,$$

さらに言い換えれば、

$$g_j^i - g_n^i g^j = g_i^j - g_n^j g^i$$

という意味になる。 $g_j^i - g_n^i g^j$ を a_{ij} と書けば、上の式はもっと単純に

$$a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \dots, n-1 \quad (42)$$

という形に整理できる。 a_{ij} を (i, j) 要素とする $(n-1)$ 次正方行列のことを A と書き、これを g に対応する Antonelli 行列と呼ぶ。こうして、我々がここまで見た積分可能性条件は、Antonelli 行列の対称性に置き換えることができることがわかった。

ところが、Samuelson (1950) はこれをもう一步進めて議論し、これを f についての条件に書き直すことに成功した。彼の定理を次に記そう。

定理 6： (42) は Slutsky 行列の対称性、つまり、

$$f_j^i + f_m^i f^j = f_i^j + f_m^j f^i \quad (43)$$

と同値である。

証明：以下，(43) で出た $f_j^i + f_m^i f^j$ を s_{ij} と書き，これを (i, j) 要素とする n 次正方行列のことを S と書くことにする（この S を Slutsky 行列と呼ぶ）。

さて，

$$y = f(g(y), g(y) \cdot y)$$

の両辺を $y = x$ の点で y について全微分すれば，

$$\begin{aligned} I_n &= D_p f(p, m) Dg(x) + D_m f(p, m) D[g(x) \cdot x] \\ &= D_p f(p, m) Dg(x) + D_m f(p, m) [g^T(x) + x^T Dg(x)] \\ &= S(p, m) Dg(x) + D_m f(p, m) p^T \end{aligned}$$

である（ただし g^T は g の転置， p^T も同様）。そこで p と直交する任意の $w \neq 0$ に対して

$$w = S(p, m) [Dg(x)w]$$

となる。これは $S(p, m)$ の線形写像としての像の次元が $n - 1$ 以上であることを意味する。一方で

$$p^T S(p, m) = 0^T \quad (44)$$

$$S(p, m)p = 0 \quad (45)$$

のふたつがゼロ次同次とワルラス法則から容易に⁽¹⁰⁾出るので， $S(p, m)$ の階数はちょうど $n - 1$ である。また， $p \gg 0$ であることから， $S(p, m)$ のうちの $n - 1$ 列も互いに一次独立であることがわかる。

次に， $\hat{S}$ を S の n 列目だけを $D_m f$ で取り替えた行列とし，また F を $D_p f$ の n 行目だけを $D_m f$ で取り替えた行列とする。そして，

$$H = \begin{pmatrix} g_1^1 & \cdots & g_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{n-1} & \cdots & g_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$b = (g_n^1, \dots, g_n^{n-1})^T,$$

$$\hat{g} = (g^1, \dots, g^{n-1})^T,$$

$$c(x) = (\partial_1[g(x) \cdot x], \dots, \partial_{n-1}[g(x) \cdot x]),$$

(10) Mas-Colell, Whinston, and Green (1995) の第 2 章 E 節を参照せよ。

$$\hat{f} = (f^1, \dots, f^{n-1})^T$$

と定義する。

さて、いま $x = f(p, m)$ とし、 $g_i^n \equiv 0$ に注意して $y = f(g(y), g(y) \cdot y)$ を $y = x$ の点で y で微分すれば、

$$I_n = D_p f(p, m) Dg(x) + D_m f(p, m) D[g(x) \cdot x] = F(p, m) \times \begin{pmatrix} H(x) & b(x) \\ c(x) & \partial_n[g \cdot x] \end{pmatrix}$$

である。よって $F(p, m)$ は逆行列を持ち、

$$\begin{aligned} F^{-1}(p, m) &= \begin{pmatrix} H(x) & b(x) \\ c(x) & \partial_n[g \cdot x] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{f}^T(p, m) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H(x) & b(x) \\ \hat{g}^T(x) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{f}^T(p, m) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H(x) - b(x)\hat{g}^T(x) & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{g}^T(x) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{f}^T(p, m) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A(x) & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{g}^T(x) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \hat{S}(p, m) &= F(p, m) \times \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{f}^T(p, m) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{g}^T(x) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} A(x) & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\hat{g}^T(x) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A(x))^{-1} & -(A(x))^{-1}b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

がわかった。こうして (42) は $i \neq n \neq j$ のときの (43) と同値であることが知れた。しかし (44) (45) から、それは i, j のどちらかが n であるときも含めた (43) と同値である。以上で証明が完成した。 $\square$

(通信教育部講師)

(経済学研究科後期博士課程)

参 考 文 献

- [1] G. B. Antonelli, *Sulla Teoria Matematica Dell' Economia Politica*, Tipografia del Folchetto, Pisa, 1886.
- [2] G. Debreu, Smooth Preferences, *Econometrica* 40 (1972), 603–615.
- [3] Y. Hosoya, Elementary Form and Proof of the Frobenius Theorem for Economists, forthcoming in *Advances in Mathematical Economics*.
- [4] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [5] P. A. Samuelson, The Problem of Integrability in Utility Theory, *Economica* 17 (1950), 355–385.
- [6] 細矢祐誉 (2010) 『効用関数の測定理論——消費者の需要から選好を逆算するための手法——』三菱経済研究所。
- [7] 松島与三 (1965) 『多様体入門』裳華房。