Title	ショートフォールリスク測度とその表現
Sub Title	Shortfall risk measure and its representation results
Author	新井, 拓児(Arai, Takuji)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2012
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.105, No.2 (2012. 7) ,p.199(91)- 215(107)
Abstract	ショートフォールリスク測度の意味と数学的背景を概説し, ロバスト表現定理の導出を, ポートフォリオ制約がない場合と凸錘制約がある場合について行う。ショートフォールリスク測度とは, 条件付き請求権のヘッジと価格付けに関連した凸リスク測度である。さらに凸リスク測度とは, 確率変数のクラスの上に定義された移動不変性を持つ単調凸汎関数であり, 金融資産の将来価値のリスクを計量するために用いられる。 We give an outline of the financial meaning and mathematical background of shortfall risk measures; and discuss its robust representation results for models without constraints and with convex constraints. Now, a shortfall risk measure is a convex risk measure related to hedging and pricing for contingent claims. In addition, a convex risk measure is a monotone cash-invariant convex functional on a certain class of random variables; and is used for quantifying risk related to future value of financial assets.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20120701-0091

ショートフォールリスク測度とその表現

Shortfall Risk Measure and its Representation Results

新井 拓児(Takuji Arai)

ショートフォールリスク測度の意味と数学的背景を概説し，ロバスト表現定理の導出を，ポートフォリオ制約がない場合と凸錘制約がある場合について行う。ショートフォールリスク測度とは，条件付き請求権のヘッジと価格付けに関連した凸リスク測度である。さらに凸リスク測度とは，確率変数のクラスの上に定義された移動不変性を持つ単調凸汎関数であり，金融資産の将来価値のリスクを計量するために用いられる。

Abstract

We give an outline of the financial meaning and mathematical background of shortfall risk measures; and discuss its robust representation results for models without constraints and with convex constraints. Now, a shortfall risk measure is a convex risk measure related to hedging and pricing for contingent claims. In addition, a convex risk measure is a monotone cash-invariant convex functional on a certain class of random variables; and is used for quantifying risk related to future value of financial assets.

「三田学会雑誌」105 巻 2 号（2012 年 7 月）

ショートフォールリスク測度とその表現(1)

新　井　拓　児

要　　旨

ショートフォールリスク測度の意味と数学的背景を概説し，ロバスト表現定理の導出を，ポートフォリオ制約がない場合と凸錘制約がある場合について行う。ショートフォールリスク測度とは，条件付き請求権のヘッジと価格付けに関連した凸リスク測度である。さらに凸リスク測度とは，確率変数のクラスの上に定義された移動不変性を持つ単調凸汎関数であり，金融資産の将来価値のリスクを計量するために用いられる。

キーワード

数理ファイナンス，無裁定価格理論，凸リスク測度，ショートフォール，Orlicz 空間

1　序

無裁定条件の下で条件付き請求権の価格付け問題を扱うと，市場が完備でないときは価格が一意に定まらず，無裁定価格の区間だけが得られる。この事実は，非常にラフに言えば，非完備市場ではマルチンゲール測度が一意に定まらないことに対応している。この無裁定価格区間は非常に広く，「この区間の何処かに価格が存在する」ということ以上何も分からない。そこで，各投資家が多少のリスクを受け入れるという前提に立ち，この区間の上下限を狭めることを試みる。請求権の売り買いを行う投資家にとってのリスクとは，最終的なキャッシュフローが負になるショートフォール（shortfall）が起こることであり，そのショートフォールの値を損失関数で重み付けしたものをショートフォールリスク（shortfall risk）と呼ぶ。損失関数は投資家のリスク選好を反映したものである。本論文では，ショートフォールリスクをある限界値以内に抑えたい投資家，主に請求権の売り手が，

(1)　本論文では，正式な日本語訳がないような用語であっても可能な限り日本語で表記する。しかし，重要な用語または日本語訳に関して混乱が生じる可能性がある用語については，初めて登場した時に限り英語表記を併記する。また，数式内においては日本語表記をすると不自然かつ分かりにくくなる場合があるので，英語表記で統一することとする。さらに，確率過程論や確率解析に関する用語を無定義で使用している箇所がある。そのような用語の定義については Dellacherie and Meyer [8] や Protter [15] を参照されたい。

ぎりぎり許容できる価格の導出を行う。実は，そのような価格を請求権の汎関数と見なすと，それは移動不変性（cash-invariance）という性質を持った単調凸汎関数であることが分かる。この汎関数をショートフォールリスク測度（shortfall risk measure）と呼ぶ。これは近年数理ファイナンスにおいて盛んに研究されている凸リスク測度（convex risk measure）の一つになっている。そこで，請求権のクラスとして適当な関数空間を取ることにより，一般の関数解析の枠組みで論じることができる。つまり，凸汎関数に対する共役汎関数を用いた Fenchel-Moreau 型の表現定理を用いる。数学上の問題点は共役汎関数の正確な表現を得ることに集約される。

ショートフォールリスク測度についてもう少し詳しい説明を加えよう。今，非完備市場において条件付き請求権 X を売却しようとしている投資家を考える。ここでは細かな数学的設定については論じないが，X は確率変数であり，適当な関数空間に属しているものとする。初期費用 0 の自己資金調達的（self-financing）な取引戦略から得られるキャッシュフローの全体を $\mathcal{C}$ と記そう。投資家がヘッジ戦略（ポートフォリオ）を組むとは，$\mathcal{C}$ から要素を一つ選び出すことである。投資家が X を価格 $x \in \mathbf{R}$ で売却しヘッジ戦略 $C \in \mathcal{C}$ を選択したものとすると，最終的なキャッシュフローは $x + C - X$ となる。もし x が十分に高く，確率 1 で $x + C - X \geq 0$ となるような $C \in \mathcal{C}$ を選択できる時，この投資機会は投資家にとって裁定機会となる。このような x のうちで最小のものを優ヘッジ費用（superhedging cost）と呼ぶ。しかし一般に，投資家が優ヘッジ費用よりも高く請求権を売却することは難しい。何故ならば，それは買い手にとってあまりにも高いからである。そこで，優ヘッジ費用よりも安い価格で取引することを考えなければならない。そのような場合には，投資家の最終的なキャッシュフロー $x + C - X$ が負値を取る可能性を考慮しなければならない。$-\min\{x + C - X, 0\} = (x + C - X)^-$ を一般にショートフォールと呼ぶが，このショートフォールを上手く制御するように戦略 $C \in \mathcal{C}$ を選択したい。逆に言えば，良い戦略を選択できるようなぎりぎりの x を求めたいということである。そこで，投資家のショートフォールに対する選好を損失関数 l で表現し，ショートフォールに対するリスクを計量化する。損失関数 l は，実数上の連続非減少凸関数で，$x \leq 0$ では $l(x) = 0$ となるものを取る。例えば，x^p/p $(p \geq 1)$, $e^x - 1$, $x - \log(x+1)$, $(x+1)\log(x+1) - x$ などである。そして，キャッシュフロー $x + C - X$ に対して，ショートフォールの損失関数による重み付き期待値をショートフォールリスクと呼ぶ。つまり，$E[l((x + C - X)^-)]$ である。投資家が許容できるショートフォールリスクの限界値を $\delta > 0$ とする時，$E[l((x + C - X)^-)] \leq \delta$ となる $C \in \mathcal{C}$ を選択できる x の最小値を考える。請求権 X をこの最小値より高く売却すれば，適当な戦略を選ぶことにより，ショートフォールリスクを受け入れ可能な範囲，つまり δ 以下に抑えることができる。本論文では，この最小値を請求権 X の汎関数と見なし，その汎関数の表現を得ることを目標とする。つまり，汎関数 ρ_l を

$$\rho_l(X) := \inf\{x \in \mathbf{R} | \exists C \in \mathcal{C} \text{ such that } E[l((x + C + X)^-] \leq \delta\}$$

と定義すると，上記の最小値は $\rho_l(-X)$ となる。この ρ_l がショートフォールリスク測度である。この ρ_l が凸リスク測度になることを示し，表現定理の導出を行う。尚，汎関数の定義域として，損失関数から誘導される Orlicz 核（Orlicz heart）を取る。正確な定義は 2 節に譲るが，$E[l(|X|)] < \infty$ となるようなクラスである。

ここで，凸リスク測度とショートフォールリスク測度の研究に関する歴史をざっと振り返ってみよう。凸リスク測度とは，確率変数の適当なクラスの上に定義された移動不変性を持つ凸単調汎関数のことであり，金融資産の将来価値が確率変数で与えられた時に投資家が負っているリスクを計量化するために用いられる。きちんとした定義は 3 節で与えられる。凸リスク測度については Föllmer and Schied [11] が詳しい。凸リスク測度は Föllmer and Schied [10] や Frittelli and Rosazza-Gianin [12] で初めて紹介された。[12] は下半連続性を持つ凸リスク測度の表現定理を導出した。一方，[10] は有界な確率変数の空間 L^∞ 上に凸リスク測度を定義し，表現定理の導出を行った。さらに彼らは，ショートフォールリスク測度を離散時間モデルの枠組みで定義し，それが凸リスク測度になることを示し，具体的な表現を得た。従って，本論文で紹介する結果は，[10] の結果を連続時間モデルかつ Orlicz 核上の汎関数まで拡張したものである。Xu [17] や Klöppel and Schweizer [14] はリスク無差別評価法（risk indifference valuation）について研究したものである。詳細は述べないが，これはショートフォールリスク測度と密接な関わりを持つ。最近，Kaina and Rüschendorf [13] は L^p 空間上の凸リスク測度について研究し，ショートフォールリスクに関連した凸リスク測度についても扱っている。さらに，Cheridito and Li [6] は凸リスク測度の概念を Orlicz 核まで拡張した。

本論文のアウトラインを述べておこう。2 節で数学的準備を行い，ショートフォールリスク測度が凸リスク測度になることを 3 節で示す。4 節では，許容可能（admissible）な戦略が線形空間である場合のショートフォールリスク測度の表現を示し，いくつかの具体例を紹介する。さらに 5 節では，投資家の資産を表す確率過程が下からある正値確率変数の定数倍で抑えられているような制約条件を課した場合について考察する。最後の節では，市場が完備である場合の注意点について述べる。尚，5 節までは Arai [2] の結果の紹介である。

2　準備

一つの安全資産と d 個の危険資産から成る非完備市場を考える。$T > 0$ を市場の満期とし，金利は 0 とする。危険資産の価格変動は，完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$-値 RCLL(2) special semimartingale(3) S で与えられているものとする。但し，S の局所有界性（locally boundedness）は仮定しない。また，$\mathbf{F}$ は右連続なフィルトレーションで $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ となり，$\mathcal{F}_0$ は trivial(4) であり $\mathcal{F}$ の全ての零集合を含むものとする。$\mathcal{X}$ を $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率変数の全体 L^0 のある部

分集合とする。ここでは，$\mathcal{X}$ を条件付き請求権の全体と見なす。

次に，請求権 $X \in \mathcal{X}$ を売却しようとしている売り手を考える。この売り手の損失関数を l とする。これは $\mathbf{R}$ 上の $\mathbf{R}_+$-値連続非減少凸関数である。但し，$\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ である。ここで，$x \leq 0$ の時，$l(x) = 0$ であり，$x > 0$ の時，$l(x) > 0$ であるとする。Θ を 0 を含む S-可積分可予測過程（S-integrable predictable process）の凸集合とする。さらに，任意の $t \in [0, T]$ と任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して，$G_t(\vartheta) := \int_0^t \vartheta_s dS_s$ と記述しよう。この論文を通して，Θ は全ての許容可能な戦略の集合を表す。ここで，許容可能な戦略とは，自己資金調達的な戦略であり，数学的には可予測過程として与えられる。確率過程 $G(\vartheta)$ は許容可能な戦略 $\vartheta \in \Theta$ から導かれる利得を表す確率過程である。4 節では Θ として，$G_T(\vartheta)$ が損失関数 l から生成される Orlicz 核に属す S-可積分可予測過程 ϑ による線形空間 Θ^M を取る。一方，5 節では，適当な条件を満たす確率変数 $W(\geq 1)$ に対して，$G_t(\vartheta) \geq -cW$ が任意の $t \in [0, T]$ で成り立つ定数 $c > 0$ が取れる ϑ の集合 Θ^W を考える。Θ^W は凸錐であり，これを W-制約と呼ぶ。

請求権 X の価格が $x \in \mathbf{R}$ で与えられ，それを売る投資家がヘッジ戦略として $\vartheta \in \Theta$ を選んだ時，ショートフォールとショートフォールリスクはそれぞれ $(-x - G_T(\vartheta) + X) \vee 0$, $E[l(-x - G_T(\vartheta) + X)]$ となる。本論文では，投資家はショートフォールリスクをある限界値，ここではそれを $\delta > 0$ と記す，を超えないように取引するものと仮定する。この時，投資家が受け入れ可能な価格の下限は，ある戦略 $\vartheta \in \Theta$ が存在して $x + G_T(\vartheta) - X \in \mathcal{A}^0$ となるような $x \in \mathbf{R}$ の最小値となる。但し，$\mathcal{A}^0 := \{Y \in \mathcal{X} | E[l(-Y)] \leq \delta\}$ である。今ここで，$\mathcal{X}$ 上の汎関数 ρ_l を

$$\begin{aligned}\rho_l(X) := \inf\{x \in \mathbf{R} | &\text{ there exists a } \vartheta \in \Theta \\ &\text{such that } x + G_T(\vartheta) + X \in \mathcal{A}^0\} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

と定義すると，そのような最小値は $\rho_l(-X)$ で与えられる。本論文では，この ρ_l が凸リスク測度であることを示し，さらにその表現の導出を目的とする。

例 1（一期間モデル） 取引時刻が $t = 0$ と 1 である一期間モデルを考える。特に，資産価格過程 S が非局所有界である場合を考察する。S は $S_0 = 1$ 及び $S_1 = |Y|$ を満たすものとせよ。但し，Y は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする。$K > 0$ を行使価格とするヨーロピアン・コール・オプション $X = (S_1 - K)^+$ を考える。許容可能な戦略の全体 Θ は $\mathbf{R}$ と一致する。売り手である投資家にとっての X に対する優ヘッジ費用は 1 である。損失関数 l は指数型 $e^x - 1$ であり，ショート

(2) RCLL とは，right continuous with left limits，つまり右連続で左極限を持つ確率過程という意味。

(3) special semimartingale の適当な日本語訳が思い当たらないので，英語表記のままにしておく。

(4) この場合の trivial に相当する日本語が思い当たらないのでそのまま trivial と記す。つまり，$A \in \mathcal{F}_0$ ならば $P(A)$ は 0 または 1 である。

フォールリスクの限界値を $\delta > 0$ とする。$x \le 0$ では $l(x) = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\inf_{\vartheta \in \mathbf{R}} E[l(-1 + \varepsilon - \vartheta(S_1 - 1) + X)] \\
\le\ & E[l(-1 + \varepsilon - (S_1 - 1) + X)] = E[l(\varepsilon - S_1 + (S_1 - K)^+)] \\
=\ & E[l(\varepsilon - S_1)1_{\{S_1 < K\}}] + E[l(\varepsilon - K)1_{\{S_1 \ge K\}}] \\
=\ & \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(e^{\varepsilon - |y|} - 1\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \le \frac{2\varepsilon(e^{\varepsilon} - 1)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \le \delta
\end{aligned}$$

が任意の十分小さな正数 $\varepsilon \in (0, K)$ に対して成立する。ゆえに，投資家にとって受け入れ可能な価格の最小値 $\rho_l(-X)$ は優ヘッジ費用 1 を下回っている。

注意 1　Xu [17] はリスク無差別評価法を提案した。それは以下のような凸リスク測度を用いた条件付き請求権に対する評価法である。ρ を凸リスク測度とし，L を初期負債とする。これは $\mathcal{F}_T$-可測確率変数である。請求権 X の売り手サイドの価格を

$$\inf\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \inf_{\vartheta \in \Theta} \rho(x + G_T(\vartheta) - L - X) \le \inf_{\vartheta \in \Theta} \rho(G_T(\vartheta) - L)\right\}$$

と定義する。同様にして買い手側の価格も定義する。[17] における数学的な設定は我々とは異なるが，問題そのものは我々がここで論じているものと深く関わっている。実際，[17] は ρ_l に基づくリスク無差別評価法を論じ，売り手側の価格が $\rho_l(-X) - \rho_l(0)$ となることを述べている。しかし，そこでは凸リスク測度の表現については触れていない。

この論文を通して，ρ_l は損失関数から生成される Orlicz 核上に定義されているものとする。つまり，$\mathcal{X}$ として Orlicz 核を取るのである。従って，Orlicz 空間に関する定義と用語を準備しなければならない。左連続非減少凸 non-trivial (5) 関数 $\Phi : \mathbf{R}_+ \to [0, \infty]$ で $\Phi(0) = 0$ となるものを Orlicz 関数と呼ぶ。但し，Φ が non-trivial であるとは，ある $x > 0$ で $\Phi(x) > 0$ となり，ある $x > 0$ で $\Phi(x) < \infty$ となるときに言う。Φ が $\mathbf{R}_+$-値連続増加 Orlicz 関数である時，それを狭義 Orlicz 関数と呼ぶことにする。任意の狭義 Orlicz 関数 Φ に対して，$\Phi(x) \in (0, \infty)$ が任意の $x > 0$ に対して成立し，かつ $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$ であることに注意する。さらに，狭義 Orlicz 関数 Φ はほとんど至るところ可微分であり，その左導関数 Φ' は

$$\Phi(x) = \int_0^x \Phi'(u) du$$

を満たす。Φ' は左連続であり，不連続点は高々可算個である。$I(y) := \inf\{x \in (0, \infty) | \Phi'(x) \ge y\}$ とし，これを Φ' の左連続逆関数と呼ぶ。各 $y \ge 0$ に対して，$\Psi(y) := \int_0^y I(v) dv$ と定義すると，これは Orlicz 関数となる。以下これを Φ の共役関数と呼ぶ。

(5)　ここでの non-trivial も上手く日本語に訳せないのでそのまま non-trivial とする。

注意 2　次数が 1 以上，係数が全て非負で定数項が 0 である多項式関数は狭義 Orlicz 関数である。例えば，cx^p $(c > 0, p \geq 1)$ や $x^2 + 3x^5$ などである。さらに，$e^x - 1$, $e^x - x - 1$, $(x+1)\log(x+1) - x$ and $x - \log(x+1)$ も狭義 Orlicz 関数。

定義 2　Orlicz 関数 Φ に関して，以下の空間とノルムを定義する:
Orlicz 空間：$L^\Phi := \{X \in L^0 | E[\Phi(c|X|)] < \infty \text{ for some } c > 0\}$,
Orlicz 核：$M^\Phi := \{X \in L^0 | E[\Phi(c|X|)] < \infty \text{ for any } c > 0\}$.
さらに二つのノルムを定義する:
Luxemburg ノルム：$\|X\|_\Phi := \inf\left\{\lambda > 0 | E\left[\Phi\left(\left|\frac{X}{\lambda}\right|\right)\right] \leq 1\right\}$,
Orlicz ノルム：$\|X\|_\Phi^* := \sup\{E[XY] | \ \|Y\|_\Phi \leq 1\}$.

$M^\Phi \subset L^\Phi$ であり，L^Φ と M^Φ は共に線形であることに注意する。さらに，Φ が狭義 Orlicz 関数であるならば，$(M^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ の双対ノルムは $(L^\Psi, \|\cdot\|_\Phi^*)$ である。尚，Orlicz 空間については，Edgar and Sucheston [9] や Rao and Ren [16] が詳しい。

注意 3　$\Phi(x) = x^p/p$ $(p > 1)$ の場合は，Orlicz 空間 L^Φ と Orlicz 核 M^Φ は共に L^p 空間そのものである。この場合，共役関数は x^q/q である。但し，$q = p/(p-1)$ であり，$M^\Psi = L^\Psi = L^q$ となる。例 11 を参照せよ。

一般に，$\limsup_{x \to \infty} \frac{x\Phi'(x)}{\Phi(x)} < \infty$ ならば，M^Φ は L^Φ と一致する。例えば，$\Phi(x) = x - \log(x+1)$. さもなければ，M^Φ は L^Φ の真部分集合である。例えば，$\Phi(x) = e^x - 1$ である。

これ以降，狭義 Orlicz 関数 Φ を任意に固定し，l を Φ に伴う損失関数とする。つまり，

$$l(x) := \begin{cases} \Phi(x), & \text{if } x \geq 0, \\ 0, & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

である。さらに，定数 $\delta > 0$ を固定し，ρ_l を M^Φ 上の汎関数として扱う。従って，$\mathcal{X}$ として M^Φ を取り，$\mathcal{A}^0$ は $\mathcal{A}^0 := \{Y \in M^\Phi | E[l(-Y)] \leq \delta\}$ と定義されるものとする。

3　ρ_l の凸リスク測度性

Föllmer and Schied [10] は，ラフに言えば，(2.1) によって定義された ρ_l が凸リスク測度になることを有界確率変数かつ離散時間の枠組みで示した。この節では，彼らの結果を Orlicz 核かつ連続時間の枠組みまで拡張することを目指す。全ての許容可能な戦略の集合 Θ が 0 を含む S-可積分可予測過程の凸集合であることを再び注意しておく。$\mathcal{P}^\Psi$ を P に絶対連続で P に関する密度関数が L^Ψ に属す確率測度の集合とする。つまり，

$$\mathcal{P}^\Psi := \{Q \ll P | dQ/dP \in L^\Psi\}$$

である。次に，仮定を述べておこう。

仮定 3　$\rho_l(0) > -\infty$.

仮定 3 は命題 5 で ρ_l の完全性（properness）を示すためだけに使われる。この条件を満たす例は多数ある。ここでは，仮定 3 に対する十分条件を述べておこう。

例 4　ある $m > 0$ が存在して $\inf_{\vartheta\in\Theta} E[l(m - G_T(\vartheta))] > 0$ であると仮定する。この条件は無裁定条件に非常に近い。実際，この条件の下，ある $c \geq 1$ が取れて $\inf_{\vartheta\in\Theta} E[l(cm - G_T(\vartheta))] > \delta$ となることが Θ の凸性より得られる。従って，$\rho_l(0) > -\infty$ である。

注意 4　多くの完備市場では仮定 3 が満たされない。詳しくは 6 節を参照のこと。

Cheridito and Li [6] は Orlicz 核 $\mathcal{Y}$ 上の凸リスク測度 ρ を以下の四つの条件を満たす $(-\infty, +\infty]$-値汎関数として定義した:

（1）　**完全性（properness）**：$\rho(0) \in \mathbf{R}$ and $\rho > -\infty$,

（2）　**単調性（monotonicity）**：$X \leq Y$ となる任意の $X, Y \in \mathcal{Y}$ に対して $\rho(X) \geq \rho(Y)$,

（3）　**移動不変性（cash-invariance）**：$X \in \mathcal{Y}$, $m \in \mathbf{R}$ ならば $\rho(X+m) = \rho(X) - m$,

（4）　**凸性（convexity）**：任意の $X, Y \in \mathcal{Y}$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

まず，次を示そう。

命題 5　ρ_l は M^Φ 上の $\mathbf{R}$-値凸リスク測度である。

証明.　ρ_l が単調性と移動不変性を持つことは明らかなので，まずは凸性を示す。$\vartheta \in \Theta$ に対して $\mathcal{A}^0 - G_T(\vartheta) := \{Y - G_T(\vartheta) | Y \in \mathcal{A}^0\}$ と書くと，任意の $X \in M^\Phi$ に対して，

$$\begin{aligned}
\rho_l(X) &= \inf\left\{x \in \mathbf{R} |\ \text{there exists a } \vartheta \in \Theta \text{ such that } x + G_T(\vartheta) + X \in \mathcal{A}^0\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbf{R} |\ \text{there exists a } \vartheta \in \Theta \text{ such that } x + X \in (\mathcal{A}^0 - G_T(\vartheta))\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbf{R} | x + X \in \bigcup_{\vartheta\in\Theta} (\mathcal{A}^0 - G_T(\vartheta))\right\}.
\end{aligned}$$

凸集合の和集合は一般に凸でないが，集合 $\bigcup_{\vartheta\in\Theta}(\mathcal{A}^0 - G_T(\vartheta))$ は，Θ の凸性と G_T の線形性から凸になる。X_1 と X_2 を M^Φ の要素としよう。任意の $x_1 > \rho_l(X_1)$, $x_2 > \rho_l(X_2)$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \rho_l(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)$ が成立することはすぐに示せる。x_1 と x_2 の任意性から ρ_l の凸性が従う。

次に，ρ_l の完全性，$\rho_l(0) \in \mathbf{R}$ と $\rho_l > -\infty$ を示す。$\rho_l(0) \leq 0$ は明白である。残りは $\rho_l > -\infty$ の証明である。まず，$\rho_l(X) = -\infty$ となる $X \in M^\Phi$ が存在することを仮定する。ρ_l の凸性から

$$\rho_l(\lambda X) \leq \lambda\rho_l(X) + (1-\lambda)\rho_l(0) = -\infty$$

が任意の $\lambda \in (0,1]$ に対して成立する。よって，$E[l(X)] \leq \delta/2$ としても差支えない。$\rho_l(0) > -\infty$ であるから，ある $m > 0$ が存在して $E[l(m - G_T(\vartheta))] > \delta$ が任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して成立する。この時，$\rho_l(X) = -\infty$ であるから

$$\delta \leq \inf_{\vartheta\in\Theta} E[l(m - G_T(\vartheta))] \leq \frac{1}{2}E[l(2m - G_T(\vartheta^X) - X)] + \frac{1}{2}E[l(X)] \leq \frac{3}{4}\delta$$

となる $\vartheta^X \in \Theta$ が存在する。これは矛盾である。ゆえに，完全性を得る。

最後に，$\rho_l < \infty$ を示す。$\vartheta = 0$ が Θ に属するので，任意の $X \in M^\Phi$ に対して $\rho_l(X) \leq \inf\{m \in \mathbf{R} | E[l(-m - X)] \leq \delta\} < +\infty$ となる。最後の不等号は有界収束定理から m を ∞ に飛ばした時に $E[l(-m - X)] \to 0$ となることから得られる。 □

$(M^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ はオーダー連続（order continuous）なトポロジーを持つ局所凸 Fréchet 束（locally convex Fréchet lattice）である。例えば，Biagini and Frittelli [5] や Aliprantis and Border [1] を参照。命題 5 と [5] の Corollary 1 から ρ_l が以下のように表現されることが分かる:

$$\rho_l(X) = \max_{Q\in\mathcal{P}^\Psi} \{E_Q[-X] - a_l(Q)\}.$$

但し，$a_l : \mathcal{P}^\Psi \to \mathbf{R}$ は ρ_l の凸共役汎関数で，最小処罰項（minimal penalty term）と呼ばれる。a_l は実際には

$$a_l(Q) := \sup_{X\in M^\Phi} \{E_Q[-X] - \rho_l(X)\} \tag{3.1}$$

と定義される。

a_l の表現を得るためにいくつかの準備をしよう。まず，記号を準備し，補題を一つ紹介する。

$$\mathcal{A}_{\rho_l} := \{X \in M^\Phi | \rho_l(X) \leq 0\} \tag{3.2}$$

と定義する。さらに

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}} := \{X \in M^\Phi | &\text{ there exists a } \vartheta \in \Theta \\ &\text{such that } X + G_T(\vartheta) \geq Y \text{ for some } Y \in \mathcal{A}^0\}\end{aligned}$$

とおくと，$\rho_l(X) = \inf\{m \in \mathbf{R} | m + X \in \widetilde{\mathcal{A}}\}(=: \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}(X))$ が成立することが分かる。Föllmer and Schied [11] の Remark 4.16（c）から $a_l(Q) = \sup_{X\in\widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X]$ と書ける。但し，[11] では L^∞ の場合のみ取り扱われたので，念のためにここでは改めて証明を与えておく。

補題 6　任意の $Q \in \mathcal{P}^{\Psi}$ に対して $a_l(Q) = \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X]$ が成立する。

証明.　(3.1) と (3.2) より

$$\begin{aligned}\sup_{X \in \mathcal{A}_{\rho_l}} E_Q[-X] &\leq \sup_{X \in \mathcal{A}_{\rho_l}} \{E_Q[-X] - \rho_l(X)\} \\ &\leq \sup_{X \in M^{\Phi}} \{E_Q[-X] - \rho_l(X)\} = a_l(Q)\end{aligned} \tag{3.3}$$

が成立する。$\rho_l = \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ であるから $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_{\rho_l}$ であり，(3.3) と併せて

$$a_l(Q) \geq \sup_{X \in \mathcal{A}_{\rho_l}} E_Q[-X] \geq \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X] \tag{3.4}$$

を得る。

ρ_l の移動不変性から，任意の $m \in \mathbf{R}$, $X \in M^{\Phi}$ と $Q \in \mathcal{P}^{\Psi}$ に対して

$$E_Q[-(X+m)] - \rho_l(X+m) = E_Q[-X] - \rho_l(X). \tag{3.5}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{X \in M^{\Phi} | \rho_l(X) = -\varepsilon\} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ となることより

$$\begin{aligned}a_l(Q) &= \sup_{X \in M^{\Phi}} \{E_Q[-X] - \rho_l(X)\} = \sup_{X \in M^{\Phi}, \rho_l(X) = -\varepsilon} \{E_Q[-X] - \rho_l(X)\} \\ &= \sup_{X \in M^{\Phi}, \rho_l(X) = -\varepsilon} E_Q[-X] + \varepsilon \leq \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X] + \varepsilon\end{aligned}$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立する。二番目の等号は (3.5) による。従って，$a_l(Q) \leq \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X]$ を得る。(3.4) と併せて $a_l(Q) = \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X]$ を得る。 □

以上の準備を踏まえて凸リスク測度 ρ_l の表現定理について議論しよう。

命題 7　凸リスク測度 ρ_l は $X \in M^{\Phi}$ に対して以下の表現を持つ。

$$\rho_l(X) = \max_{Q \in \mathcal{P}^{\Psi}} \left\{ E_Q[-X] - \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] - \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ \delta + E\left[\Psi\left(\lambda \frac{dQ}{dP} \right) \right] \right\} \right\}. \tag{3.6}$$

但し，

$$\mathcal{A}^1 := \{X^1 \in M^{\Phi} | \text{ there exists a } \vartheta \in \Theta \text{ such that } X^1 + G_T(\vartheta) \geq 0 \ P\text{- a.s.}\} \tag{3.7}$$

である。

証明.　任意の $X \in \widetilde{\mathcal{A}}$ に対して，ある $\vartheta \in \Theta$ とある $Y \in \mathcal{A}^0$ が存在して $X + G_T(\vartheta) \geq Y$ が満たされる，つまり $X - Y + G_T(\vartheta) \geq 0$ である。ゆえに，$X - Y \in \mathcal{A}^1$ であり，よって $\widetilde{\mathcal{A}} = \{X^1 + X^0 | X^1 \in \mathcal{A}^1, X^0 \in \mathcal{A}^0\}$ である。従って，補題 6 から任意の $Q \in \mathcal{P}^{\Psi}$ に対して

$$a_l(Q) = \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{A}}} E_Q[-X] = \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} \sup_{X^0 \in \mathcal{A}^0} E_Q[-X^1 - X^0]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} \left\{ E_Q[-X^1] + \sup_{X^0 \in \mathcal{A}^0} E_Q[-X^0] \right\} \\
&= \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] + \sup_{X^0 \in \mathcal{A}^0} E_Q[-X^0]
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

が成立する。結局，（3.8）から

$$
\begin{aligned}
\rho_l(X) &= \max_{Q \in \mathcal{P}^\Psi} \{E_Q[-X] - a_l(Q)\} \\
&= \max_{Q \in \mathcal{P}^\Psi} \left\{ E_Q[-X] - \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] - \sup_{X^0 \in \mathcal{A}^0} E_Q[-X^0] \right\}
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

が成立する。さらに，[10] の Theorem 10 と同様にして

$$
\sup_{X^0 \in \mathcal{A}^0} E_Q[-X^0] = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ \delta + E\left[\Psi\left(\lambda \frac{dQ}{dP} \right) \right] \right\}
$$

を得る。これと（3.9）から命題 7 が成立する。 □

4　ポートフォリオに制約がない場合

全ての許容可能なヘッジ戦略の集合 Θ が M^Φ の線形部分空間である時を考察する。$L(S)$ を全ての S-可積分可予測過程の集合とする。$\Theta^M := \{\vartheta \in L(S) | G_T(\vartheta) \in M^\Phi\}$ とすると，Θ^M は許容可能な戦略の集合と見なすことができる。ここで Θ^M は線形であることに注意する。この設定の下での ρ_l の表現とその具体例について論じよう。

まず，マルチンゲール測度の集合を以下のように定義する:

$$
\mathcal{M}^\Psi := \left\{ Q \in \mathcal{P}^\Psi | E_Q[G_T(\vartheta)] = 0 \text{ for any } \vartheta \in \Theta^M \right\}. \tag{4.1}
$$

次の定理はこの節の主定理であり，証明は Θ^M の線形性に強く依存している。

定理 8　Θ が Θ^M で与えられ，$\mathcal{M}^\Psi \neq \emptyset$ であるとする。凸リスク測度 ρ_l は $X \in M^\Phi$ に対して以下の表現を持つ。

$$
\rho_l(X) = \max_{Q \in \mathcal{M}^\Psi} \left\{ E_Q[-X] - \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ \delta + E\left[\Psi\left(\lambda \frac{dQ}{dP} \right) \right] \right\} \right\}.
$$

証明.　命題 7 より $\sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1]$ を求めれば十分である。任意の $X^1 \in \mathcal{A}^1$ に対して，ある $\vartheta \in \Theta^M$ が存在し $X^1 \geq G_T(-\vartheta)$ を満たす。よって，$\sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] \leq \sup_{\vartheta \in \Theta^M} E_Q[G_T(\vartheta)]$ が成立する。一方，任意の $\vartheta \in \Theta^M$ に対して $G_T(\vartheta) \in \mathcal{A}^1$ であるから $\sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] \geq$

$\sup_{\vartheta\in\Theta^M} E_Q[-G_T(\vartheta)] = \sup_{\vartheta\in\Theta^M} E_Q[G_T(\vartheta)]$ が成立する。Θ^M の線形性と（4.1）から

$$\sup_{X^1\in\mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] = \sup_{\vartheta\in\Theta^M} E_Q[G_T(\vartheta)] = \begin{cases} 0, & \text{if } Q\in\mathcal{M}^\Psi, \\ \infty, & \text{if } Q\notin\mathcal{M}^\Psi, \end{cases}$$

となり，定理 8 を得る。 □

注意 5　ここで仮定 $\mathcal{M}^\Psi \neq \emptyset$ は無裁定条件を保証しないことを注意する。例を用いて説明しよう。一期間モデルを考える。資産価格過程 S を，$S_0 = 0$ であり，S_1 はパラメータ 1 の指数分布に従うものとする。この時，このモデルは裁定機会を含む。$\Phi(x) = e^x - 1$ とすると，$\Theta^M = \{0\}$ である。ゆえに，$\mathcal{M}^\Psi$ は $\{Q \ll P | dQ/dP \in L^\Psi\}$ によって与えられる。但し，$\mathcal{M}^\Psi$ の各元はマルチンゲール測度ではないことに注目しなくてはならない。

系 9　任意の $Q\in\mathcal{M}^\Psi$ に対して，$\delta = E\left[\Phi\left(I\left(\widehat{\lambda}_Q \frac{dQ}{dP}\right)\right)\right]$ を満たす $\widehat{\lambda}_Q > 0$ が存在するならば

$$a_l(Q) = E_Q\left[I\left(\widehat{\lambda}_Q \frac{dQ}{dP}\right)\right] \tag{4.2}$$

が成立する。ここで，I は左導関数 Φ' の左連続逆関数である。また，少なくとも I が連続ならばそのような $\widehat{\lambda}_Q$ は存在する。

証明.　Young の不等式から，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\delta + E\left[\Psi\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)\right]\right\} \geq E_Q\left[I\left(\widehat{\lambda}_Q\frac{dQ}{dP}\right)\right]$$

が成立する。さらに $\frac{1}{\widehat{\lambda}_Q}\left\{\delta + E\left[\Psi\left(\widehat{\lambda}_Q\frac{dQ}{dP}\right)\right]\right\} = E_Q\left[I\left(\widehat{\lambda}_Q\frac{dQ}{dP}\right)\right]$ であるから（4.2）が成立する。

□

典型的な例を三つばかり紹介しよう。

例 10（期待ショートフォール）　Φ を $\Phi(x) = x$ とすると，その共役関数は

$$\Psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{if } y \leq 1, \\ +\infty, & \text{if } y > 1, \end{cases}$$

となる。$\mathcal{M}^{bdd} := \{Q \ll P | dQ/dP \in L^\infty, E_Q[G_T(\vartheta)] = 0 \text{ for any } \vartheta\in\Theta^M\}$ とおくと

$$\rho_l(X) = \max_{Q\in\mathcal{M}^{bdd}}\left\{E_Q[-X] - \delta\left\|\frac{dQ}{dP}\right\|_\infty\right\}$$

を得る。

例 11（Lower partial moments） [6] Φ を $\Phi(x)=x^p/p$ とする。但し，$p>1$ とする。$M^\Phi=L^\Phi=L^p$ と $M^\Psi=L^\Psi=L^q$ が成立する。但し，q は p の共役指数である。[10] の Example 13 から

$$a_l(Q)=(p\delta)^{\frac{1}{p}}\left\|\frac{dQ}{dP}\right\|_q$$

となる。従って，ρ_l は

$$\rho_l(X)=\max_{Q\in\mathcal{M}^q}\left\{E_Q[-X]-(p\delta)^{\frac{1}{p}}\left\|\frac{dQ}{dP}\right\|_q\right\}$$

と表現できる。ここで，$\mathcal{M}^q$ は P に対して絶対連続なマルチンゲール測度でその密度関数が L^q に属すものの全体である。

例 12（指数型損失関数） $\Phi(x)=C(e^{\alpha x}-1)$ の場合を考えよう。ここで，$C>0$，$\alpha>0$ とする。$\Phi'(x)=C\alpha e^{\alpha x}$ であり，$y\geq C\alpha$ の時 $I(y)=\dfrac{1}{\alpha}\log\frac{y}{C\alpha}$ である。ゆえに，$y\geq C\alpha$ に対して

$$\Psi(y)=\frac{y}{\alpha}\left(\log\frac{y}{C\alpha}-1\right)+C$$

である。$L^\infty\subset M^\Phi\subset L^p\subset L^\Psi\subset L^1$ が任意の $1<p<\infty$ に対して成立する。$\mathcal{M}^f:=\{Q\ll P|H(Q|P)<\infty, E_Q[G_T(\vartheta)]=0\text{ for any }\vartheta\in\Theta^M\}$ と定義する。ここで，$H(Q|P):=E\left[\dfrac{dQ}{dP}\log\dfrac{dQ}{dP}\right]$ である。任意の $Q\in\mathcal{M}^f$ に対して，$E\left[\Phi\left(I\left(\widehat{\lambda}_Q\dfrac{dQ}{dP}\right)\right)\right]=\delta$ を満たす実数を $\widehat{\lambda}_Q$ と書くと，系 9 から

$$\rho_l(X)=\max_{Q\in\mathcal{M}^f}\left\{E_Q[-X]-\frac{1}{\alpha}E_Q\left[\log\left(\frac{\widehat{\lambda}_Q\frac{dQ}{dP}}{C\alpha}\vee 1\right)\right]\right\}$$

を得る。

5　W-制約

この節ではポートフォリオ制約がある場合を取り扱う。つまり，Θ が線形空間でない場合の ρ_l の表現について議論する。特に，W-制約と呼ばれる錐制約を伴うモデルを考える。W-制約のファイナンス的意味付けについては Biagini and Frittelli [3] を参照のこと。命題 7 より，(3.6) における $\sup_{X^1\in\mathcal{A}^1}E_Q[-X^1]$ の計算を行えば十分である。但し，$\mathcal{A}^1$ の定義は (3.7) によって与えられている。これ以降，$\mathcal{F}_T$-可測関数 W で $W\geq 1$ かつ $W\in M^\Phi$ なるものを固定する。さらに，

(6)　適当な日本語訳が思い当たらないのでそのまま英語で表記する。

$$\begin{aligned}\Theta^W := \{\vartheta \in L(S) | &\text{there exists a } c > 0 \text{ such that } G_t(\vartheta) \ge -cW \ P\text{- a.s.}\\ &\text{for any } t \in [0,T]\} \qquad (5.1)\end{aligned}$$

と定義する。以下の補題は重要である。

補題 13　$\Theta \subset \Theta^W$ とせよ。任意の $Q \in \mathcal{P}^\Psi$ に対して,

$$\sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] = \sup_{\vartheta \in \Theta} E_Q[G_T(\vartheta)]$$

が成立する。

証明.　任意の $\widetilde{c} > 0$ と任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して，ある $c > 0$ が存在して $-cW \le G_T(\vartheta) \wedge \widetilde{c}W \le \widetilde{c}W$ を満たす。よって，$G_T(\vartheta) \wedge \widetilde{c}W \in M^\Phi$ であり，$-(G_T(\vartheta) \wedge \widetilde{c}W) \in \mathcal{A}^1$ が任意の $\widetilde{c} > 0$ に対して成立する。単調収束定理から

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} E_Q[G_T(\vartheta)] = \sup_{\vartheta \in \Theta} \lim_{\widetilde{c} \to \infty} E_Q[G_T(\vartheta) \wedge \widetilde{c}W] \le \sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] \qquad (5.2)$$

を得る。一方，任意の $X^1 \in \mathcal{A}^1$ に対して，ある $\vartheta \in \Theta$ が存在し $G_T(\vartheta) \ge -X^1$ となる。ゆえに，$\sup_{X^1 \in \mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] \le \sup_{\vartheta \in \Theta} E_Q[G_T(\vartheta)]$ を得る。(5.2) と併せて補題 13 を得る。 □

集合 Θ^W を許容可能な戦略の全体とする。つまり，Θ は Θ^W であるとする。P に絶対連続な σ-マルチンゲール測度の全体を

$$\mathbf{M}^\sigma := \{Q \ll P | S \text{ is a } \sigma\text{-martingale under } Q\}$$

と定義しよう。σ-マルチンゲールや σ-マルチンゲール測度については，Delbaen and Schachermayer [7] の 14 章を参照のこと。さらに，非負確率変数 Y が適切であるとは以下の二条件を満たす時にいう:

1. $Y \ge 1$,
2. $i = 1, \dots, d$ に対して，ある $\vartheta^i \in L(S^i)$ が存在し
   $P(\{\omega | \text{ there exists a } t \in [0,T] \text{ such that } \vartheta^i_t(\omega) = 0\}) = 0$ と,
   任意の $t \in [0,T]$ に対して $\left| \int_0^t \vartheta^i_s dS^i_s \right| \le Y, P$-a.s. を満たす。

この節の主定理を述べよう。W-制約の場合でも ρ_l は前節で論じた制約がない場合と同様の表現を持つ。違いは $\mathcal{M}^\Psi$ の代わりに $\mathbf{M}^\sigma$ を用いる点である。

定理 14　Θ は Θ^W で与えられているとし，$\mathbf{M}^\sigma \cap \mathcal{P}^\Psi \neq \emptyset$ であり，W は適切であるとする。任意の $Q \in \mathcal{P}^\Psi$ に対して

$$\sup_{X^1\in\mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] = \begin{cases} 0, & \text{if } Q\in\mathbf{M}^\sigma, \\ +\infty, & \text{if } Q\notin\mathbf{M}^\sigma, \end{cases}$$

が成立する。ゆえに，

$$\rho_l(X) = \max_{Q\in\mathbf{M}^\sigma\cap\mathcal{P}^\Psi}\left\{E_Q[-X] - \inf_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\left\{\delta + E\left[\Psi\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)\right]\right\}\right\}$$

が任意の $X\in M^\Phi$ に対して成立する。

証明. ステップ 1. Biagini and Frittelli [4] の Proposition 19（d）から

$$\mathbf{M}^\sigma\cap\mathcal{P}^\Psi = \{Q\in\mathcal{P}^\Psi | G(\vartheta) \text{ is a } Q\text{-supermartingale for any } \vartheta\in\Theta^W\} \tag{5.3}$$

を得る。$Q\in\mathbf{M}^\sigma\cap\mathcal{P}^\Psi$ である時，$E_Q[G_T(\vartheta)]\le 0$ が任意の $\vartheta\in\Theta^W$ に対して成立する。$0\in\Theta^W$ であることから $\sup_{\vartheta\in\Theta^W} E_Q[G_T(\vartheta)] = 0$ となる。補題 13 から $\sup_{X^1\in\mathcal{A}^1} E_Q[-X^1] = \sup_{\vartheta\in\Theta^W} E_Q[G_T(\vartheta)] = 0$ が任意の $Q\in\mathbf{M}^\sigma\cap\mathcal{P}^\Psi$ に対して成立する。

ステップ 2. $Q\in\mathcal{P}^\Psi$ かつ $Q\notin\mathbf{M}^\sigma$ とする。（5.3）から $G(\vartheta)$ が Q-優マルチンゲールでない, ある $\vartheta\in\Theta^W$ が存在する。ここで，$0\le t_1<t_2\le T$ と $\vartheta\in\Theta^W$ に対して

$$U(t_1,t_2;\vartheta) := \{E_Q[G_{t_2}(\vartheta)|\mathcal{F}_{t_1}] > G_{t_1}(\vartheta)\} \tag{5.4}$$

と定義する。すると，$t_1<t_2$ を満たす $t_1,t_2\in[0,T]$ と $\overline{\vartheta}\in\Theta^W$ が存在して $Q(U(t_1,t_2;\overline{\vartheta}))>0$ を満たす。さもなければ，$E_Q[G_{t_2}(\vartheta)|\mathcal{F}_{t_1}]\le G_{t_1}(\vartheta)$ が任意の $0\le t_1<t_2\le T$ と任意の $\vartheta\in\Theta^W$ に対して成立する。$t_1=0$ を代入すると，任意の $t_2\in[0,T]$ と $\vartheta\in\Theta^W$ に対して，$E_Q[G_{t_2}(\vartheta)]\le 0$ が成立する。ところで（5.1）から，任意の $\vartheta\in\Theta^W$ に対して，ある $c>0$ が存在して $G_t(\vartheta)\ge -cW$ が任意の $t\in[0,T]$ に対して成立する。よって $G_t(\vartheta)\in L^1(Q)$ が任意の $t\in[0,T]$ と $\vartheta\in\Theta^W$ に対して成立する。ゆえに，$G(\vartheta)$ は $\vartheta\in\Theta^W$ ならば Q-優マルチンゲールである。これは矛盾である。

ここで，$t\in[0,T]$，$k\ge 1$ と $\vartheta\in\Theta^W$ に対して

$$B(t,k;\vartheta) := \{G_t(\vartheta)\le k\}$$

と定義すると，任意の $t\in[0,T]$ と $\vartheta\in\Theta^W$ に対して $Q(\cup_{k=1}^\infty B(t,k;\vartheta)) = 1$ が成立する。十分大きな $\overline{k}\ge 1$ を取ると $Q(U(t_1,t_2;\overline{\vartheta})\cap B(t_1,\overline{k};\overline{\vartheta}))>0$ となる。$\overline{U} = U(t_1,t_2;\overline{\vartheta})\cap B(t_1,\overline{k};\overline{\vartheta})$ とおくと $\overline{U}\in\mathcal{F}_{t_1}$。$\overline{\vartheta}$ を用いて $\widetilde{\vartheta}$ を構成しよう。

$$\widetilde{\vartheta}_t := \begin{cases} 0, & \text{if } t\le t_1 \text{ or } t_2<t, \\ 1_{\overline{U}}\overline{\vartheta}_t, & \text{if } t_1<t\le t_2. \end{cases} \tag{5.5}$$

$\overline{U}$ 上で $G_{t_1}(\overline{\vartheta})\le\overline{k}\le\overline{k}W$ であり，さらに $\overline{\vartheta}\in\Theta^W$ なので，ある $\overline{c}>0$ が存在して $G_t(\overline{\vartheta})\ge -\overline{c}W$ が任意の $t\in[0,T]$ に対して成立する。（5.5）から，任意の $t\in[0,T]$ に対して

$$G_t(\widetilde{\vartheta}) \geq -(\overline{c}+\overline{k})W$$

が成立することを得る。つまり，$\widetilde{\vartheta} \in \Theta^W$ ということである。結局，(5.4) と $\overline{U}$ の定義から

$$\begin{aligned} E_Q[G_T(\widetilde{\vartheta})] &= E_Q[1_{\overline{U}}(G_{t_2}(\overline{\vartheta}) - G_{t_1}(\overline{\vartheta}))] \\ &= E_Q[1_{\overline{U}}(E_Q[G_{t_2}(\overline{\vartheta})|\mathcal{F}_{t_1}] - G_{t_1}(\overline{\vartheta}))] > 0 \end{aligned}$$

を得る。任意の $c>0$ に対して $c\widetilde{\vartheta} \in \Theta^W$ であることから，$\sup_{\vartheta\in\Theta^W} E_Q[G_T(\vartheta)] = +\infty$ となる。□

6　完備市場モデルにおける注意

これまでのショートフォールリスク測度 ρ_l に関する議論は，仮定 3 の下で行われてきた。実際，ρ_l が凸リスク測度であることを主張している命題 5 をこの仮定 3 なしで示すことはできない。ところが，非完備市場モデルでは多くの場合に仮定 3 は満たされるにもかかわらず，多くの完備市場モデルではこの仮定 3 が満たされない。そもそも完備市場モデルでは，請求権に対して唯一の適正価格が存在する。つまり，売り手がある程度のショートフォールリスクを許容することは，買い手にとって裁定機会が生じるような価格で請求権を取引することになる。従って，多くの完備市場モデルに対してショートフォールリスク測度が議論できないとしても理論上は大きな問題はない。ここでは，ショートフォールリスク測度に関するトリッキーな話題として，この問題について考察を与える。

幾何ブラウン運動に従う危険資産と金利 0 の安全資産から成る完備市場モデルを考える。P を元々の確率とし，Q を唯一存在するリスク中立確率とする。ここでは $P \neq Q$ としよう。密度関数 dQ/dP は対数正規分布に従うことに注意しよう。今，Θ として $G(\Theta)(=\{G(\vartheta)|\vartheta\in\Theta\})$ が 0 から出発する 2 乗可積分 Q-マルチンゲールの全体になるように取る。このことはマルチンゲールの表現定理より，$G_T(\Theta)=\{G_T(\vartheta)|\vartheta\in\Theta\}$ が Q の下での期待値が 0 となる 2 乗可積分な確率変数の全体になることと同値である。このとき，$\rho_l(0)=-\infty$ になることを示す。

$l(c)>\delta$ となる任意の十分大きな $c>0$ に対して，$E[l((c-g)^+)] \leq \delta$ となる $g \in G_T(\Theta)$ の存在を示せば十分である。$\varepsilon>0$ を任意に取る。さらにここで

$$P(A) \geq \frac{l(c+\varepsilon)-\delta}{l(c+\varepsilon)}, \quad Q(A) = \frac{\varepsilon}{c+\varepsilon},$$

を満たすように $A \in \mathcal{F}$ を取る。このような A が取れることは，dQ/dP が対数正規分布に従っていることから保証されている。確率変数 g を

$$g = \begin{cases} c & \text{on } A, \\ -\varepsilon & \text{on } A^c, \end{cases}$$

と取ると，$E_Q[g]=0$ となるので，$g\in G_T(\Theta)$ を得る。一方，$E[l((c-g)^+)]=l(c+\varepsilon)P(A^c)\leq\delta$ であることに注意する。

以上より，上記のモデルでは仮定 3 が満たされないため，ρ_l を凸リスク測度として扱うことができない。時刻 0 でいくら大きな損失を出しても，市場取引を通じて，時刻 T における損失を（ショートフォールリスクで計るという意味において）いくらでも小さくできることを意味しており，上記の結論は直感からはかけ離れている。Black-Scholes 型のモデルに限らず，完備市場モデルはある種のマルチンゲールの表現定理が成り立つ場合を指しているので，同様のことがより広いモデルでも言えるであろう。

（経済学部准教授）

参 考 文 献

[1] Aliprantis, C.D. and Border, K.C. *Infinite dimensional analysis, 3rd edition*, Springer, 2005.

[2] Arai, T. *Good deal bounds induced by shortfall risk*, SIAM J. Fin. Math., 2 (2011), pp. 1–21.

[3] Biagini, S. and Frittelli, M. *Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes*, Finance and Stochastics, 9 (2005), pp. 493–517.

[4] Biagini, S. and Frittelli, M. *A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach*, Ann. Appl. Probab., 18 (2008), pp. 929–966.

[5] Biagini, S. and Frittelli, M. *On the extension of the Namioka-Klee theorem and on the Fatou property for risk measures*, in Optimality and risk: modern trends in mathematical finance, The Kabanov Festschrift, Delbaen, Rasonyi, Stricker eds., Springer, 2009, pp. 1–28.

[6] Cheridito, P. and Li, T. *Risk measures on Orlicz hearts*, Mathematical Finance, 19 (2009), pp. 189–214.

[7] Delbaen, F. and Schachermayer, W. *The mathematics of arbitrage*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. *Probabilities and potential B*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[9] Edgar, G.A. and Sucheston, L. *Stopping times and directed processes*, Cambridge University Press, 1992.

[10] Föllmer, H. and Schied, A. *Convex measures of risk and trading constraints*, Finance and Stochastics, 6 (2002), pp. 429–447.

[11] Föllmer, H. and Schied, A. *Stochastic finance: an introduction in discrete time, 2nd edition*, de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, 2004.

[12] Frittelli M. and Rosazza-Gianin, E. *Putting order in risk measures*, Journal of Banking & Finance, 26 (2002), pp. 1473–1486.

[13] Kaina, M. and Rüschendorf, L. *On convex risk measures on L^p-spaces*, Math. Meth. Oper. Res., 69 (2009), pp. 475–495.

[14] Klöppel, S. and Schweizer, M. *Dynamic indifference valuation via convex risk measures*, Mathematical Finance, 17 (2007), pp. 599–627.

[15] Protter, P. *Stochastic integration and differential equations, 2nd edition*, Applications of Mathematics (New York), 21, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[16] Rao, M.M. and Ren, Z.D. *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[17] Xu, M. *Risk measure pricing and hedging in incomplete markets*, Annals of Finance, 2 (2006), pp. 51–71.