Title	非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の存在
Sub Title	Existence of a stable periodic orbit in a nonlinear macroeconomic model
Author	福岡, 正夫(Fukuoka, Masao) 須田, 伸一(Suda, Shinichi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2012
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.105, No.2 (2012. 7) ,p.109(1)- 141(33)
JaLC DOI	10.14991/001.20120701-0001
Abstract	本稿が企図するところは, 前稿で取り扱った非線形マクロ経済モデルが持つさまざまな解の中に, 弱い意味で局所的に安定な周期解が存在するための十分条件を明らかにするプログラムである。 証明の数理は基本的にコレット=エックマンの1980年の定理に負うが, その脈絡が自己完結的になることを旨として, 援用されるいくつかの補題についてもそれぞれ証明を欠かさず併せて記述するように心がけた。 This study clarifies the sufficient conditions for enabling the existence of a periodic orbit stable in a weak sense within the various solutions of the nonlinear macroeconomic model in the previous study. Although the mathematical reasoning for proof are essentially due to Colette-Eckman's 1980 theorem, we also provide explanations without missing the proofs for the lemmas adopted in this theorem, for the logical context be self-contained.
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20120701-0001

非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の存在

Existence of a Stable Periodic Orbit in a Nonlinear Macroeconomic Model

福岡　正夫(Masao Fukuoka)

須田　伸一(Shinichi Suda)

本稿が企図するところは，前稿で取り扱った非線形マクロ経済モデルが持つさまざまな解の中に，弱い意味で局所的に安定な周期解が存在するための十分条件を明らかにするプログラムである。証明の数理は基本的にコレット=エックマンの 1980 年の定理に負うが，その脈絡が自己完結的になることを旨として，援用されるいくつかの補題についてもそれぞれ証明を欠かさず併せて記述するように心がけた。

Abstract

This study clarifies the sufficient conditions for enabling the existence of a periodic orbit stable in a weak sense within the various solutions of the nonlinear macroeconomic model in the previous study. Although the mathematical reasoning for proof are essentially due to Colette-Eckman's 1980 theorem, we also provide explanations without missing the proofs for the lemmas adopted in this theorem, for the logical context be self-contained.

「三田学会雑誌」105 巻 2 号（2012 年 7 月）

非線形マクロ経済モデルにおける安定周期解の存在

福　岡　正　夫
須　田　伸　一

要　　旨

本稿が企図するところは，前稿で取り扱った非線形マクロ経済モデルが持つさまざまな解の中に，弱い意味で局所的に安定な周期解が存在するための十分条件を明らかにするプログラムである。証明の数理は基本的にコレット＝エックマンの 1980 年の定理に負うが，その脈絡が自己完結的になることを旨として，援用されるいくつかの補題についてもそれぞれ証明を欠かさず併せて記述するように心がけた。

キーワード

安定周期解，シュヴァルツ導関数，S 単峰性，巡回局面列，同相区間

1

承前である。前稿[(1)]においては筆者たちは，標準的な IS・LM 型マクロ経済モデルに若干の非線形要因を持ち込むことにより，そこに内生的な周期解が存在し，しかもあらゆる周期の周期解が存在すること，さらに加えて非周期的なカオス解もがやはり存在することを，いわゆるリー＝ヨークの定理にもとづいて厳密に立証した。これらの帰結は，当該のモデルがことのほか多様な経済変動の形態をカバーしうることを示唆するとともに，とりわけ後者の帰結はカオス現象の解明がもっぱら外生的モデルのパテントであるかのごとくに説く一部の論者の主張を反証する上でもいくばくかの意義を持ちうるであろう。

が，そのさい末尾にも記したように，これらの帰結は十分に一般的ではあるものの，反面ある意味では何でもありと言うに近く，いささか具体性，限定性に欠ける憾みがあるようにも思われる。換言するならば，そうしたきわめて多様な可能性のうち，とりわけどのような事態が発現しやすいかをさらに立ち入って究明してみるのが，望ましい後続作業であるように思われるのである。そこで

(1)　福岡正夫・須田伸一「内生的景気循環とカオスの非線形マクロ経済モデル」，『三田学会雑誌』2011 年 7 月号。

筆者たちは所望の課題の一環として，目下のモデルが満たすべき仮定をいっそう特定化することにより，それらの多数の周期解の中には安定な周期解すなわち安定な周期軌道を持つ解が存在すること，そしてそのような安定周期解は局所的に一意であるばかりでなく，また視野を大域的に拡大しても生成的（generic）にはその一意性を維持しうること，をも立証する作業を企図することにした。

以下本稿においては，上記のリサーチ・プログラムのうち，もっぱら安定周期解の存在にかかわる部分のみに限定して，当該の主張に厳密な証明を与えることを主眼としたい。一方，一意性の考察にかかわる後半部分は，紙数の都合上別稿としてつぎの機会に取り上げることを予定している。

2

基本となるマクロ経済モデルの詳細については前稿の該当箇所[2]を参照していただくにしくはないが，以下の所論に最小限必要とされるその概要のみを摘記しておけば，つぎのとおりである。t 期の国内総生産を Y_t とするとき，われわれの基本方程式は

$$Y_t = \bar{A} + cY_{t-1} + h(Y_{t-1}) = \theta(Y_{t-1}) \tag{2.1}$$

と書かれ，ここで $\bar{A}$ は自発支出，c は限界消費性向，$h(\cdot)$ は誘発投資関数である。右辺の Y が Y_{t-1} となっているのは，所得の発生・受領と消費支出ならびに投資支出とのあいだにロバートソン流の 1 期の支出ラッグがあると考えられているからである。誘発投資は Y が十分に小さいときにはゼロであるが，Y がある閾値 $\bar{Y}$ を越えるとプラスとなって Y の増加とともに増加しつづけ，ある Y の値でピークに達して，以降は利子率上昇というマイナス要因が所得増加というプラス要因を越えるために減少に転じ，$Y = \bar{\bar{Y}}$ のところでふたたびゼロになると想定される。すると横軸に Y_{t-1}，縦軸に Y_t をとって，θ のグラフを描けば，第 1 図のようになり，そこでは $\theta(Y)$ が $45°$ 線と 3 度交わる場合すなわち不動点が $\mathring{Y}$，$\mathring{Y}'$，$\mathring{Y}''$ と 3 個ある場合が想定されている。

さらにまた $\theta(Y)$ の最大値を Y^M，$\theta(Y)$ にその最大値をとらしめる Y の値を Y^* とするとき，$Y^M \leq \bar{\bar{Y}}$，$\theta(Y^M) \geq \mathring{Y}'$，$\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$ の諸条件が満たされているものとする。それらの想定下では，われわれは考察の舞台を区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ に限定することができ，以下第 2 図として描かれているような範囲についてのみ考えていけばよいことになる。

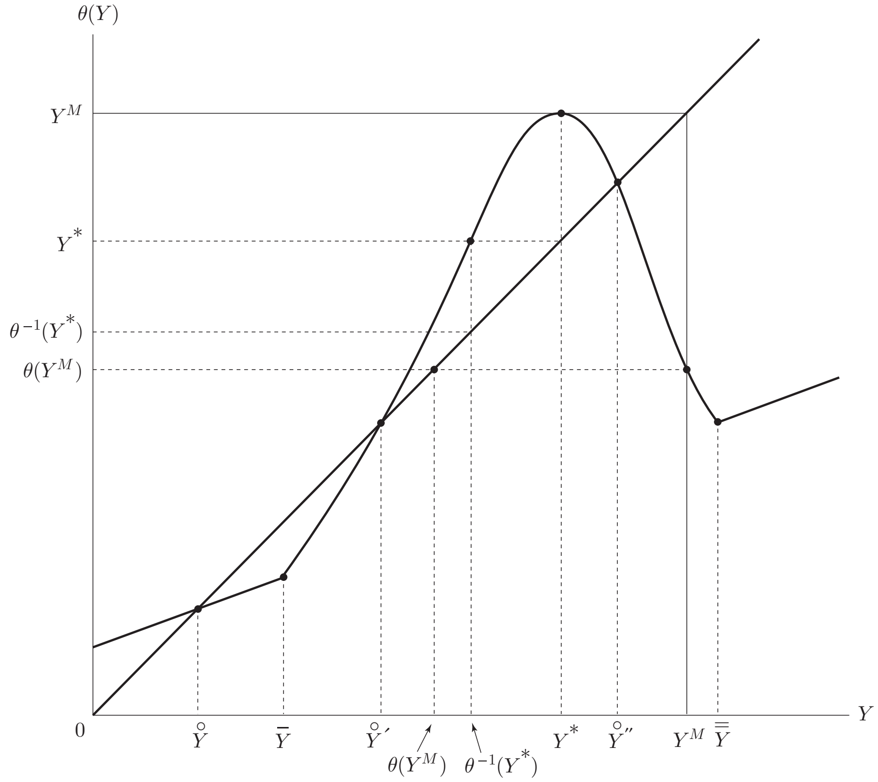
上記の区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ において θ が満たすとされるいくつかの条件をあらためて明示しておけば，つぎのとおりである。

（1）θ は連続。

（2）θ は Y^* の左側 $[\mathring{Y}', Y^*]$ では単調増加，右側 $[Y^*, Y^M]$ では単調減少。

（2）　上掲論文，pp. 3–7。

第１図



θ が（1），（2）と既述の

（3）$\theta(Y^*) = Y^M$

を満たしているとき，それは単峰型（unimodal）であると呼ばれる。

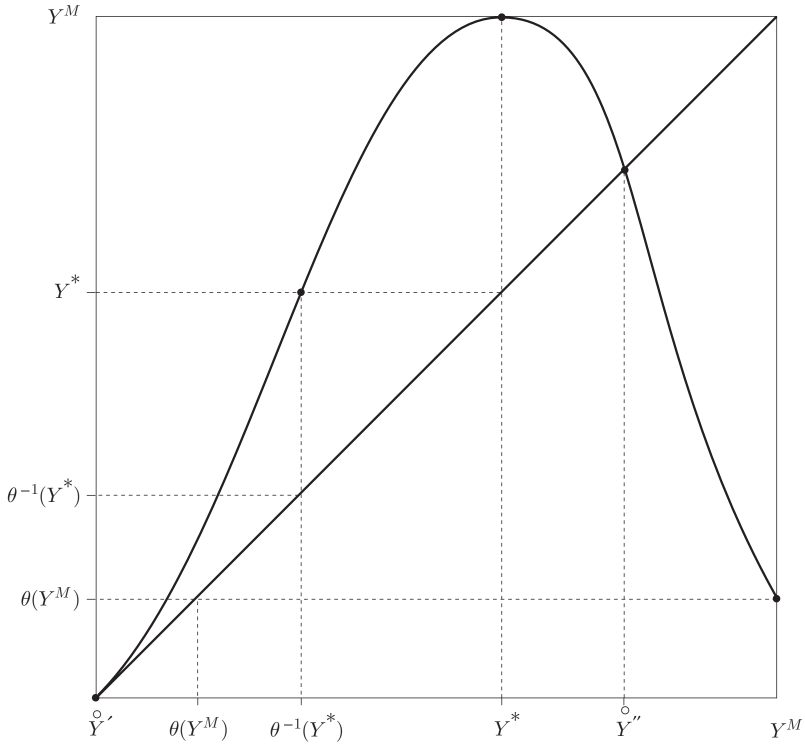
（4）θ は必要とされる回数連続微分可能

（1），（2），（3）にさらに加え（4）が満たされるとき，すなわち θ が n 回（$n = 1, 2, 3, \cdots$）連続微分可能であるときには，それは C^n 単峰型（C^n-unimodal）であると呼ばれる。

（5）Y^* においてのみ $\theta'(Y^*) = 0$
（6）$\theta'(\mathring{Y}') \geq 1$
（7）Y^* の左側 $(\mathring{Y}', Y^*]$ ではすべての Y について $\theta(Y) > Y$

なお以下の所論をつうじて, (1)～(3) で定義される単峰性ないしは (1)～(4) で定義される C^n 単峰性の仮定については, 定理や補題の表記中, 陽表的に明記するが, (5), (6) および (7) などについては, 本稿

第 2 図



のモデルが元来満たしている θ の性質として，前記の $\theta(Y^M) \geq \mathring{Y}'$, $\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$ などとともに推論中適宜に用い，いちいち表記しない場合もあるので，ご留意いただきたい。

3

すでに前稿で明らかにしたように，上記の諸仮定がすべて満たされているときには，いかなる周期の周期解もが存在しうるが，当面のプログラムとしてはさらに若干の仮定を付け加えることにより，まずはそれらの周期解の中に局所的安定性を満たす周期解が存在することを示したいわけである。

ここである周期 k の周期解 $\mathring{Y}^k$ が局所的に安定（stable）であるとは，通常つぎの 2 条件

（A）$\mathring{Y}^k$ にある開近傍 $U = (\mathring{Y}^k - \delta, \mathring{Y}^k + \delta)$, $\delta > 0$ が存在して，すべての $Y \in U$, すべての $j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ について $\theta^{kj}(Y)$ が U の中にとどまりつづけること

（B）$\lim_{j\to\infty} \theta^{kj}(Y) = \mathring{Y}^k$ となること

のいずれもが満たされていることをいう。（B）は $\theta(Y)$ の軌道が k の倍数のところで $\mathring{Y}^k$ に接近

するという形で述べられているが，θ が連続で $\theta^{kj}(Y) \to \overset{\circ}{Y^k}$ であれば，明らかに $\theta^{kj}(\theta^i(Y)) \to \theta^i(\lim_{j\to\infty}\theta^{kj}(Y)) = \theta^i(\overset{\circ}{Y^k})$ もまた成り立つことになるから，結局これは $\theta(Y)$ の軌道そのものが $\overset{\circ}{Y^k}$ の軌道に収束することを意味すると解してよいであろう。その意味において，周期解 $\overset{\circ}{Y^k}$ が安定であるということと，$\overset{\circ}{Y^k}$ から出発する周期軌道が安定であるということは等義なのである。ところでもし θ が連続微分可能であるならば，（A），（B）がともに成り立つためには $\overset{\circ}{Y^k}$ において θ^k の勾配の絶対値が 1 よりも小，すなわち

$$\left|D\theta^k(\overset{\circ}{Y^k})\right| < 1 \tag{3.1}$$

という条件が満たされていればよく，ゆえにこの条件をもって安定周期解の代替的定義と考えることも許されよう。

さて上述したところが安定性概念の慣例の定義であるが，以下本稿で考察する安定周期解についてはこれとはいささか異なり，（3.1）をいっそう拡大して等号をも含めた

$$\left|D\theta^k(\overset{\circ}{Y^k})\right| \le 1 \tag{3.2}$$

によって安定性を定義することとしたい。（3.2）が定義する安定は，それを前述のより狭義の安定と区別する上で，弱い意味での安定（weakly stable）の名で呼ばれるものである。このようにひとたび $|D\theta^k(\overset{\circ}{Y^k})|$ が 1 にひとしい場合をも加えると，可能な事態には当該の周期解が（A）を満たすだけで（B）は満たさない場合も含まれてくるし，そればかりでなく，さらにまた（A）すら満たさないいわゆる one-sided stable すなわち片側安定・片側不安定の場合や両側不安定の場合さえ含まれてこざるをえない。それゆえ，「弱い意味での」という形容句が付されるにせよ，そうした事態をも含みうる当該の条件を安定性の条件として受け入れることには若干の疑問が伴うかもしれない。しかし，この点については，上に触れた片側安定・片側不安定のケースや両側不安定のケースはいずれも臨界的（critical）な特異なケースであって，グラフをほんのわずかずらせば正規のケースに転化されることになるのに注目されたい。換言すれば，それらの変則的事態の可能性はいわば測度ゼロに類するもので，可能ではあっても実際上はほとんど起こりえないケースとして無視して差し支えないのである。そのことを考慮に入れるかぎり，（3.2）を安定性の定義のカテゴリーに含ましめることには別段に支障はないであろう。事実当面の主題の数学的分析に画期的な貢献をしたシンガー，グッケンハイマー，コレット，エックマンたちが採択するところも，あげて弱いほうの意味での安定概念であり，その背後の理由としては，忖度するに上に披瀝したような思惑があってのことと思われるのである。(3)

(3)　一方また（3.2）の下では θ^k のグラフがある幅をもって 45° 線と重なる場合も生じうるが，そのような可能性は安定周期解が局所的に一意になるという帰結を示すことによっても排除できよう。

ということで，以下にわれわれが取り上げる安定周期解もまた，重ねて言えばもっぱら（3.2）で定義される弱い意味での安定性を満たすものを指す。ただし言及の都度いちいち「弱い意味での」という形容句を繰り返すのは煩瑣にわたるので，これまたコレット，エックマンたちの述べ方に倣い，あえてそれをたんに安定周期解と呼んでいくことにした。ここに記してあらかじめ読者諸賢の了解を乞うておく次第である。

ところで既述したように，安定性の議論を完うするためには新たに若干の仮定を付加するのでなくてはならないが，まずその最初のものを述べるにさいしてはシュヴァルツ導関数という概念を導入することが必要となる。ここで $\theta(Y)$ のシュヴァルツ導関数 $S\theta(Y)$ とは

$$S\theta(Y) = \frac{\theta'''(Y)}{\theta'(Y)} - \frac{3}{2}\left[\frac{\theta''(Y)}{\theta'(Y)}\right]^2 \tag{3.3}$$

と定義される概念で，言うまでもなくそれが定義されるためには θ が 3 回微分可能であること，また $\theta'(Y) \neq 0$ であること，が前提となっている。

ここで付加される新しい仮定の第一は，このシュヴァルツ導関数に関するもので，

（S）　Y の考察区間 $[\overset{\circ}{Y}', Y^M]$ の全域をつうじて，$Y = Y^*$ という 1 点を除けば，$S\theta(Y) < 0$

というのがそれである。定義（3.3）は計算してみると

$$S\theta(Y) = -2\left|\theta'(Y)\right|^{\frac{1}{2}} D^2\left[\left|\theta'(Y)\right|^{-\frac{1}{2}}\right]$$

となるので，[(4)] この仮定が満たされるためには $|\theta'(Y)|$ が凹であればよい。[(5)]

（4）　$\theta'(Y) > 0$ の場合と $\theta'(Y) < 0$ の場合に分けて考える。前者の場合は

$$\begin{aligned}
D^2[|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}] &= D^2[\theta'(Y)^{-\frac{1}{2}}] = \frac{d}{dY}[\frac{d}{dY}(\theta'(Y)^{-\frac{1}{2}})] = \frac{d}{dY}[-\frac{1}{2}\theta'(Y)^{-\frac{3}{2}}\theta''(Y)] \\
&= (-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})\theta'(Y)^{-\frac{5}{2}}\theta''(Y)\theta''(Y) - \frac{1}{2}\theta'(Y)^{-\frac{3}{2}}\theta'''(Y) \\
&= \frac{3}{4}\theta'(Y)^{-\frac{5}{2}}\theta''(Y)^2 - \frac{1}{2}\theta'(Y)^{-\frac{3}{2}}\theta'''(Y)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&S\theta(Y) \\
&= -2\theta'(Y)^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{4}\theta'(Y)^{-\frac{5}{2}}\theta''(Y)^2 - \frac{1}{2}\theta'(Y)^{-\frac{3}{2}}\theta'''(Y)) \\
&= -\frac{3}{2}\theta'(Y)^{-2}\theta''(Y)^2 + \theta'(Y)^{-1}\theta'''(Y) \\
&= \frac{\theta'''(Y)}{\theta'(Y)} - \frac{3}{2}\left[\frac{\theta''(Y)}{\theta'(Y)}\right]^2。
\end{aligned}$$

後者の場合も，絶対値記号を外したときに

$$D^2[|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}] = D^2[-\theta'(Y)^{-\frac{1}{2}}]$$

とマイナス記号が入るだけで，あとの計算は同様。

θ が前節で述べた諸条件にさらに加えて（S）をも満たすときには，それはＳ単峰型（S-unimodal）であると呼ばれる。よって以下の所論では，われわれもまた θ がＳ単峰型であることを仮定して論を進めることになる。

つぎに第二の新仮定について述べる手順となるが，こんどは Y の巡回局面列（extended itinerary）と呼ばれる新概念を導入しなければならない。いま $I_E(Y) = ([I_E(Y)]_0,\ [I_E(Y)]_1,\ [I_E(Y)]_2,\ \cdots)$ でそれをあらわすとすれば，その意味するところはつぎのとおりである。任意の Y から出発する軌道 $\theta^j(Y),\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ は Y^* より大きくなったり小さくなったりさまざまな経路を辿るであろうが，それぞれの j について，もし $\theta^j(Y) > Y^*$ であるなら，すなわち $\theta^j(Y)$ が Y^* の右にくるなら，$[I_E(Y)]_j = R$ と記し，またもし $\theta^j(Y) < Y^*$ であるなら，すなわち $\theta^j(Y)$ が Y^* の左にくるなら，$[I_E(Y)]_j = L$，さらにまた $\theta^j(Y) = Y^*$ であるなら，すなわち $\theta^j(Y)$ がたまたま Y^* に一致するなら，$[I_E(Y)]_j = C$ と記すことにする。すると $I_E(Y)$ はたとえば $I_E(Y) = (R,\ R,\ L,\ \cdots)$ というように $\theta^j(Y),\ j = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ が Y^* の右にくるか左にくるかという局面 R，L また場合によっては C をも含む軌跡を示し，$j \to \infty$ に応じて限りなく拡がっていく R，L または C の無限列となる。そこでそのように R，L，C から成る局面の無限列を Y の巡回局面列と呼ぶのである。

さらにまた，この巡回局面列がすべての $j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ について

$$[I_E(Y)]_{j+k} = [I_E(Y)]_j,\quad k \text{ はこの関係を満たす最小の整数}$$

という条件を満たすとすれば，$I_E(Y)$ は周期的（periodic）で周期 k を持つと定義される。たとえば

$$I_E(Y) = (R, R, L, R, R, L, R, R, L, \cdots)$$

のように，R，R，L という同じパターンが無限に繰り返されるならば，$I_E(Y)$ は周期的で周期は 3 である。

以上の定義にもとづき第二の新仮定としては

（E） 端点 Y^M から出発する巡回局面列 $I_E(Y^M)$ は周期的で，周期 k を持つ

が新たに付け加えられることになる。

（5） $S\theta(Y)$ の計算において $-2\,|\theta'(Y)|^{\frac{1}{2}}$ の項はマイナスであるから，$S\theta(Y) < 0$ というのは $D^2[|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}] > 0$ と等義である。そして後者すなわち $|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}$ を 2 回微分したものがプラスということは，θ が単調である区間で $|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}$ が凸ということと等義であり，そのためには $|\theta'(Y)|$ が凹であれば十分である。なぜなら前注で示したように，$\theta'(Y) > 0$ なら

$$D^2[|\theta'(Y)|^{-\frac{1}{2}}] = \frac{3}{4}\theta'(Y)^{-\frac{5}{2}}\theta''(Y)^2 - \frac{1}{2}\theta'(Y)^{-\frac{3}{2}}\theta'''(Y)$$

となり，ここで $\theta'(Y) > 0$，$\theta''(Y)^2 \geq 0$，そして $\theta'''(Y)$ は $\theta'(Y)$ が凹であることから < 0 となるので，右辺は > 0 となるほかないからである。

$\theta'(Y) < 0$ の場合も同様。

本節では，上記の二つの新仮定（S）および（E）を付加した上で，いよいよ安定周期解ないしは安定周期軌道の存在を主張する基本定理の証明に取りかかることにする。

定理１　θ がＳ単峰性を満たすとき，さらに加えて $I_E(Y^M)$ の周期性の仮定（E）をも満たすならば，目下のマクロ経済モデルは区間 $[\mathring{Y}', Y^M]$ にかならず安定な周期解を持つ[(6)]。

証明

以下に展開される証明の数理は，グランモンの場合と同様，基本的にコレットおよびエックマンの共著[(7)]所収の命題Ⅱ．6．2の証明[(8)]に負うものであるが，その箇所での彼らの所論はさらにそれに先立ついくつかの定理や補題の帰結を所与として行われているので，はなはだ重層的な構造を持っている。そこで本稿では論理の流れの全貌が self-complete な形で読者に伝えられることを目指し，援用されている定理や補題についても原則としてその証明を細大漏らさず併載することにした。ただしそこまでを基本定理の証明中に繰り込むとあまりに長大な推論になるため，それらはすべて補題として本定理の証明中はその主張のみを用い，証明そのものについては次節に一括して分載する措置をとった。

なおコレット＝エックマンの命題Ⅱ．6．2は θ が $[\theta(Y^M), Y^M]$ をそれみずからの上に写す写像（onto の写像）であることを仮定に含めているが，これは本稿では前節で述べた仮定の $\theta(Y^M) < Y^*$，(1)，(2)，(3)，(7) よりおのずと満たされることになる。なぜなら，それらの条件が満たされていれば，$\theta[\theta(Y^M), Y^M]$ と $[\theta(Y^M), Y^M]$ とのあいだには当然「含みかつ含まれる」の関係が成り立ち，両者が一致することは明らかだからである。

---

(6)　この定理については Jean-Michel Grandmont, “Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-dimensional Dynamic System”, in Hildenbrand and Mas-Colell eds., *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard Debreu*, North-Holland, 1986 の Proposition 3, pp. 233–234 参照。

　グランモンは他の仮定を所与としたとき $I_E(Y^M)$ の周期性の仮定が安定周期解存在のための必要かつ十分条件になることを証明しているが，ここでのわれわれの議論では存在証明のみが主要な課題となるので，必要条件の側の議論は取り扱わない。

　またグランモンは $\theta(Y^M) \leq Y^*$ ならびに $\theta(Y^M) > Y^*$ の二つの場合を分けて，その双方について考察しているが，われわれのモデルでは $\theta(Y^M) \leq \theta^{-1}(Y^*) < Y^* < Y^M$ と仮定しているので，当然 $\theta(Y^M) < Y^*$ とされており，したがって $\theta(Y^M) \geq Y^*$ の場合は除外される。

(7)　P. Collet and J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Basel: Birkhäuser, 1980.

(8)　Collet and Eckmann, *op. cit.*, pp. 124–125 参照。

よって目下の場合彼らの仮定群はそっくりすべてが満たされることになっているので，早速その主張すなわち Y^M から始まる巡回局面列 $I_E(Y^M)$ が周期的ならかならず安定周期軌道があるという主張を立証する作業に取りかかることにしよう。

推論はまず（i）$I_E(Y^M)$ の列の中に C すなわち $\theta^j(Y^M)=Y^*$ となる局面が含まれるケースと，（ii）含まれないケースの二つを分けて考えることから始まる。

（i）$I_E(Y^M)$ の列の中に C が含まれるケース。

この場合は話ははなはだ簡単で，$[I_E(Y^M)]_0$，$[I_E(Y^M)]_1$，$[I_E(Y^M)]_2,\cdots$ のどこかに局面 C がなければならないので，いま初めて C となるのが i 番目であるとすれば，

$$\theta^i(Y^M)=Y^*。$$

すると $\theta(Y^*)=Y^M$ であるところから

$$\theta^{i+1}(Y^M)=Y^M$$

となり，Y^M から始まる軌道は

$$Y^M,\ \theta(Y^M),\ \theta^2(Y^M),\cdots,\ \theta^i(Y^M),\ Y^M,\cdots$$

のようになるので，この軌道そのものが周期 $i+1$ を持つ周期軌道となるのである。そこでこれについて $D\theta^{i+1}(Y^M)$ を計算してみると

$$D\theta^{i+1}(Y^M)=\theta'(\theta^i(Y^M))\cdot\theta'(\theta^{i-1}(Y^M))\cdot(\theta'(\theta^{i-2}(Y^M))\cdots\cdots\theta'(Y^M)$$

のごとくであり，ここで右辺の第 1 項は（5）によって

$$\theta'(\theta^i(Y^M))=\theta'(Y^*)=0,$$

ゆえに

$$D\theta^{i+1}(Y^M)=0<1$$

すなわち

$$\left|D\theta^{i+1}(Y^M)\right|<1$$

という帰結がただちに導かれる。これで当該の周期解 Y^M そのものが（3.1）したがって当然（3.2）の条件を満たすことが知られ，安定周期解の存在が示されたことになる。

（ii）$I_E(Y^M)$ の列の中に C が含まれないケース。

数理の手が込むのはこのケースである。はじめに目下のケースにあっては，つぎのような事態が

成り立っていることに注目しておこう。まず仮定により $I_E(Y^M)$ は周期的で周期 k を持つのであるから,

$$Y^M,\ \theta(Y^M),\ \theta^2(Y^M), \cdots,\ \theta^{k-1}(Y^M),$$
$$\theta^k(Y^M),\ \theta^{k+1}(Y^M),\ \theta^{k+2}(Y^M), \cdots$$

において Y^M と $\theta^k(Y^M)$, $\theta(Y^M)$ と $\theta^{k+1}(Y^M)$, $\theta^2(Y^M)$ と $\theta^{k+2}(Y^M)$, $\cdots$ は各ペアごとにそれぞれ R, L の局面を同じくしているのでなくてはならない。たとえば Y^M が R 局面に属するのであれば $\theta^k(Y^M)$ もまた R 局面に属するのでなくてはならないし,前者が L 局面に属するのであれば,後者もまた L 局面に属するのでなくてはならない,といった具合である。

なおかつこのケースにあっては,$\theta^k(Y^M) \neq Y^M$ となるのでなくてはならない。というのは,もしかりに $\theta^k(Y^M) = Y^M$ になっていたとすれば $\theta^{-1}(Y^M) = Y^*$ であるところから $\theta^{k-1}(Y^M) = Y^*$ となって,$I_E(Y^M)$ に C が含まれないという目下の設定に反するからである。よってケース(ii)においては $\theta^k(Y^M) < Y^M$ となっているのでなくてはならず,そのことから $(\theta^k(Y^M), Y^M)$ という開区間がとれることになるのである。

以下での推論はかなり込み入った経路を辿るので,あらかじめその大筋を要約しておけばつぎのとおりである。まずいま言及した $(\theta^k(Y^M), Y^M)$ という開区間が,すぐあとで定義される同相区間(homterval)と呼ばれるものになるという主張が立証される。そしてその命題が成立すれば,つぎにコレット=エックマンの定理Ⅱ. 5. 4「安定な周期解が存在しないときには同相区間もまた存在しえない[(9)]」という主張にもとづき,われわれのモデルには上述の同相区間が存在したのであるから,安定周期解もまた存在するのでなくてはならないと立言する論法となるのである。

そこでこのプログラムを完うするための前半のステップとして,まずは同相区間という概念を定義し,上で存在を確認した $(\theta^k(Y^M), Y^M)$ という区間が当の同相区間になることを示すことにしよう。

θ について開区間 J が同相区間であるとは,θ^n が J の上でどの $n \geq 1$ についても J から $\theta^n(J)$ への同相写像になっていることをいう[(10)]。ここで同相写像とは,よく知られているように1対1,onto,両連続すなわち θ^n も $(\theta^n)^{-1}$ も連続,という条件を満たす写像のことである。また開区間 J が V 上の同相区間であるとは,J が同相区間で,かつどの $n \geq 1$ についても $\theta^n(J) \subset V$ が成り立つことをいう。

以下 $n = 1$ の場合から始めて,われわれの開区間 $(\theta^k(Y^M), Y^M)$ が果たして同相区間になるかどうかを見ていくことにしよう。まず Y^M は当然 R 側であるから,前にも述べた理由で $\theta^k(Y^M)$ もまた R 側にくる。よって $Y^* < \theta^k(Y^M)$ である。そこで $J = (\theta^k(Y^M), Y^M)$ とすれば,θ は J 上

(9) Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 116.
(10) 同相区間の定義については Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 107 参照。

で単調減少となり，明らかに 1 対 1，onto，両連続の条件をみな満たしている。よって θ は J から $\theta(J)=(\theta(Y^M),\theta^{k+1}(Y^M))$ への同相写像である。

ついで $n=2$ の場合に進む。まず $J\to\theta(J)$ の写像は上記のところからすでに同相写像になることが分かっている。そこでつぎに θ を $\theta(J)=(\theta(Y^M),\theta^{k+1}(Y^M))$ 上で考えると，まず $\theta(Y^M)<Y^*$ なので前に述べた理由で $\theta^{k+1}(Y^M)<Y^*$ となる。よって $\theta(Y^M)$，$\theta^{k+1}(Y^M)$ がいずれも Y^* の L 側にあり，したがって $\theta(J)$ 上では θ は単調増加となっているところから，やはり θ が $(\theta(Y^M),\theta^{k+1}(Y^M))$ から $\theta(\theta(Y^M),\theta^{k+1}(Y^M))=(\theta^2(Y^M),\theta^{k+2}(Y^M))$ への同相写像になることが分かる。そして同相写像の合成はやはり同相写像であるから，$J\to\theta^2(J)$ もまた同相写像であることになる。

では $n=3$ の場合はどうか。すでに見たように J はかならず R 側，$\theta(J)$ はかならず L 側に入るが，$\theta^2(J)$ は J の位置によって R 側にくることも L 側にくることも可能である。そしてそれが R 側にくる場合 θ は単調減少であり，L 側にくる場合 θ は単調増加である。ゆえに $n=3$ の場合には $\theta^2(J)\to\theta^3(J)$ の写像すなわち $(\theta^2(Y^M),\theta^{k+2}(Y^M))$ から $\theta(\theta^2(Y^M),\theta^{k+2}(Y^M))$ への写像は，$\theta^2(J)$ が R 側にくればその像は $(\theta^{k+3}(Y^M),\theta^3(Y^M))$ となり，$\theta^2(J)$ が L 側にくればそれは $(\theta^3(Y^M),\theta^{k+3}(Y^M))$ となる。すなわち $n=1$，2 の場合とはいささか違って，$\theta^{k+3}(Y^M)<\theta^3(Y^M)$ の場合と $\theta^3(Y^M)<\theta^{k+3}(Y^M)$ の場合という二通りの可能性が生じるのである。しかし，そのいずれになるにしても，1 対 1，onto，両連続という条件が満たされることには変わりはないので，この場合もまた $J\to\theta^3(J)$ は同相写像であるという結論が成り立つ。

こうして $n=1$，2，3，$\cdots$ と順次に写像を繰り返していっても，同相写像の合成はやはり同相写像となるほかはなく，$J\to\theta(J)$，$J\to\theta^2(J)$，$J\to\theta^3(J)$ がいずれも同相写像になるという帰結は n を 4 以上にしていっても変わるところなく成立する。よって一般にすべての $n\geq 1$ について $J\to\theta^n(J)$ は同相写像になると結論してよいことになるのである。

以上のところでわれわれのモデルには開区間 $J=(\theta^k(Y^M),Y^M)$ が存在し，それが同相区間になるという前半の重要な主張が立証された。ここからがいよいよ，そのように同相区間が存在すれば安定な周期解が存在するという後半の主張の証明に入る段取りとなる。その目的のために援用されるのがコレット＝エックマンの定理Ⅱ．5．4 であるが，先にも触れたように彼らのこの定理は，もし安定周期解が存在しなければ θ はいかなる同相区間をも持ちえないと主張するものである。言うまでもなくそれはその対偶命題すなわちもし θ が一つでも同相区間を持つならばかならず安定周期解が存在するという主張と等義であるから，すでに同相区間の存在が立証された目下の推論の段階では，当該の定理がぴったりわれわれの当面の目的に嵌まり込むのである。

そこで以下では同定理の証明すなわち目下のプログラムの後半部分の課題に専念する。推論の基本方針としては背理法の論法にしたがい，θ が同相区間を持つにもかかわらず安定周期解を持たないとすれば，かならず矛盾が生じなければならないということを示す。

まずそのための手順としてつぎの二つの補題の主張が援用される（補題の証明そのものは次節参照）。

補題 1[11]　θ が単峰型，J が同相区間であるとすれば，$\theta^n(J)$，$n=0,1,2,\cdots$ は互いに共通部分を持たないか，あるいは $\theta|_W$ がシンクを持つような $(\mathring{Y}', Y^*)\cup(Y^*, Y^M)$ の開部分集合 W が存在するか，のいずれかである。

補題 2[12]　θ が C^1 単峰型，W が $(\mathring{Y}', Y^*)\cup(Y^*, Y^M)$ の開部分集合で $\theta|_W$ がシンクを持つとすれば，$\bar{W}$ は θ の安定周期解を持つ。

ここで $\theta|_W$ がシンクを持つとは，W の中にある開区間 K が存在して，ある $k \geq 1$ について $\theta^k(K)\subset K$ となり，かつすべての $j=1,\ 2,\cdots,\ k-1$ について $\theta^j(K)\subset W$ となるということである。第一の条件は，K の中の点 Y から出発すれば $\theta^k(Y)$ が K の中に入るので，ふたたび $\theta^k(Y)$ から出発すれば $\theta^{2k}(Y)$ もまた K の中に入るというように，K の中から出発する軌道は k の倍数ごとに何回も K の中に戻ってくることを意味している。また第二の条件は，$\theta^j(K)$ が K に戻ってくる前にはかならず W の中に入っていなくてはならないということであるから，結局 $\theta^j(K)$ はつねに W の中に含まれていなくてはならないことを意味している。以上を要するに K の中から出発する軌道のどれもが終始 W の中にとどまりつづけ，しかも繰り返し K に回帰してくるとき，そのような K をシンクと呼ぶのである。

目下の場合，補題 1 の仮定はみな満たされているからその帰結を使うことができるが，一方背理法の仮定から安定周期軌道はまったく存在しないことになっているので，W が存在して $\theta|_W$ がシンクを持つというほうの帰結はありえない。なぜなら，もしそのような W があれば，補題 2 から安定周期軌道が $\bar{W}$ の中にあることになって，背理法の仮定と矛盾するからである。よって補題 1 のもう一方の帰結から，以下の議論をつうじて $\theta^n(J)$，$n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ はどれもが互いに交わることはできないとしてよいことになる。

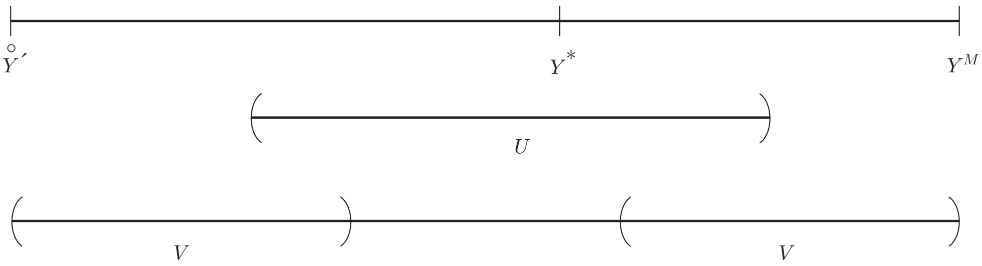
さてこれで $\theta^n(J)$，$J=(\theta^k(Y^M), Y^M)$ はどんな n についても互いに共通部分を持たないことになったので，Y^* を端点とする $\theta^m(J)$，$m\geq 0$ は，あるとしてもたかだか 2 個どまりとなるのでなくてはならない。もしそのような $\theta^m(J)$ が 2 個あったとすれば，その m の大きいほう（1 個であればその m そのもの）を k として，$\theta^{k+1}(J)$ を新たに J とみなすことにする。Y^* を端点とする $\theta^m(J)$ が 1 個もなければ，もともとの J をそのまま J としておけばよい。するとそのように J を定義しなおせば，われわれは一般性を失うことなく，θ が持っている同相区間 J については，$\theta^m(J)$，$m\geq 0$ のどれもが Y^* を端点として持つことはないと考えてよいのである。

そこで J をそのような同相区間とするとき，つぎの推論のステップとしては

（P）　Y^* を含む任意の開区間 U に対して $\theta^m(J)\subset U$ となるような $m>0$ がかならず存在する

（11）　Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 110 の Lemma Ⅱ. 5. 3 に相当する。
（12）　*op. cit.*, p. 108 の Lemma Ⅱ. 5. 1 に相当。

第 3 図



という命題が成り立つことを示したい。そのためにケースを

ケース 1　すべての $\theta^m(J)$，$m \geq 0$ を含み，かつ $\mathrm{dist}(V, Y^*) > 0$，$V \cup U = (\mathring{Y}', Y^M)$ となるような[13]，すなわち第 3 図に例示されるような，V が存在する場合

ケース 2　そのような V が存在しない場合

の二つに分けて考える。

まずケース 2 のほうから取り上げると，この場合は $\mathrm{dist}(V, Y^*) > 0$，$V \cup U = (\mathring{Y}', Y^M)$ となるようなどんな V をとってきても，どこかの $m \geq 0$ で V には含まれない $\theta^m(J)$ がかならず出てくることになる。そこで，いまそのような m を i とし，新たに $\theta^i(J)$ を含むような新たな V として V' を考えることにすれば，この V' についても同様なことがあてはまり，やはりそれには含まれない $\theta^j(J)$ が出てくるはずである。目下の場合それらの $\theta^i(J)$ と $\theta^j(J)$ が互いに重なり合えないこと，また $V \cup U = (\mathring{Y}', Y^M)$ であって V と U のあいだには隙間がないことを考えれば，上記の要領で V を拡大していくうちに，早晩 U に含まれるような $\theta^m(J)$ が現われざるをえないことは明らかであろう。よってケース 2 の場合には（P）の成り立つことが示された。

つぎにケース 1 に転ずると，目下のところ補題と背理法の仮定から $\theta|_V$ はシンクを持たないことになっているので，つぎの補題 3 を用いることによって（補題の証明は次節），その帰結から前記（P）が成立する。

補題 3[14]　θ が C^1 単峰型で，また V が第 3 図のように，すなわち $(\mathring{Y}', Y^M)$ から Y^* を含むある閉区間を取り去ったものとして定義されるとき，もし $\theta|_V$ がシンクを持たなければ，$V \cup U_0 = (\mathring{Y}', Y^M)$ となるようなどんな開区間 U_0 についても，V 上の任意の同相区間 J に対して $\theta^m(J) \subset U_0$ となるような $m > 0$ がかならず存在する。

ここまでのことが言えるとつづく数理はつぎのような流れに沿って進み，ほどなく終点に到達する。

まず J は同相区間で，$\theta^m(J)$，$m \geq 0$ のどれもが Y^* を端点として持たないようになっているの

（13）　$\mathrm{dist}(V, Y^*)$ は集合 V と点 Y^* との距離をあらわす記号である。
（14）　*op. cit.*, p. 109 の Theorem Ⅱ. 5. 2 の 1 に相当する。

で，その J と交わらず，しかも Y^* を含むような十分小さい開近傍として U をとれば，その U に命題 (P) が適用できて，$\theta^m(J) \subset U$ となるような $m > 0$ がかならず存在する。すなわちどんなに小さく U をとってもこのことは言えるので，ある $m > 0$ についてかならず

$$\mathrm{dist}(J, Y^*) > \mathrm{dist}(\theta^m(J), Y^*) \tag{4.1}$$

とならなくてはならないのである。

そこで以下の推論では数理を尖鋭化するため，コレット＝エックマンに倣って θ のグラフが Y^* の左右で対称となる場合をひとまず仮定し[15]，（4.1）を満たす最小の m を $m(J)$ と書けば，$\lambda(I)$ で区間 I の長さをあらわすことにして，

$$\lambda(\theta^{m(J)}(J)) \geq \lambda(J) \tag{4.2}$$

となることが主張できる。これを言うには証明が必要であるが，いまそれは後回しとして先を急げば，$J' = \theta^{m(J)}(J)$，$J'' = \theta^{m(J')}(J'), \cdots$ などと記して（4.2）の関係を繰り返していくことにより

$$\cdots \lambda(\theta^{m(J'')}(J'')) \geq \lambda(J'') \geq \lambda(J') \geq \lambda(J) > 0$$

のような関係が導かれる。すなわちこれら J，J'，$J'', \cdots$ は次第に長くなっていきこそすれ，決して短くはならないことが知られるのである。

θ のグラフが対称の場合には，結局この帰結がわれわれの求めている矛盾を生むことになる。なぜなら J，J'，$J'', \cdots$ はすべてが $(\mathring{Y}', Y^M)$ に含まれるのでなくてはならず，しかも前記補題 1 の帰結として示されているように互いに共通部分を持つことはできないが，一方 $(\mathring{Y}', Y^M)$ の長さはあらかじめ固定されており，それ以上伸びることはできないからである。そのように不変の幅を持つ区間の中に，幅が減らず，しかも重なり合うことのない区間が数限りなく多く入ってこれるというのは，明らかに不合理と言うほかはない。よってそれが背理法の要求する矛盾であり，（4.2）そのものを立証することを除けば，基本定理の証明はあらかた済まされたことになるのである。

なお θ のグラフが対称でない場合については，ある正の定数 $\alpha > 0$ と無限数列 $m_i \to \infty$ が存在して

$$\lambda(\theta^{m_i}(J)) > \alpha \tag{4.3}$$

が成り立つという主張が（4.2）の代案として所期の役割を果たすことになる[16]。（4.2）の場合とは違って，（4.3）の場合は $\lambda(\theta^{m_i}(J))$ がますます長くなりこそすれ短くなることはないという帰結は得ら

（15） この仮定の下では $\mathring{Y}'$ が $\theta(Y^M)$ に等しくならなければならないが，幸いわれわれのモデルではもともと $\theta(Y^M) \geq \mathring{Y}'$ と仮定されているので，目下の仮定が本来の仮定と矛盾するところはない。

（16） John Guckenheimer, "Sensitive Dependence to Initial Conditions for one Dimensional Maps", *Communications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1979, p. 143, ll. 12–13 参照。

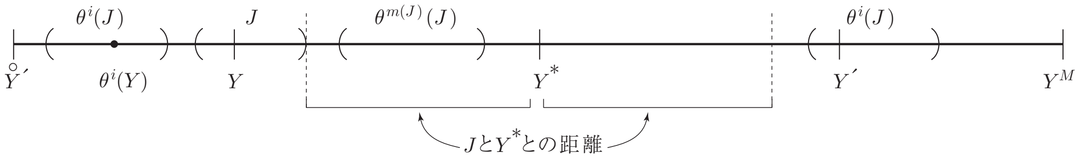
れないが，ともあれ正数 α を越える長さを持ちしかも重なり合わない区間が限りなく多く $(\overset{\circ}{Y}', Y^M)$ に入ってくるというのもやはり矛盾には違いないから，対称の場合と同様，証明の論旨はつつがなく貫徹されることになるのである。

そこで以下本節ではもっぱら（4.2）の証明に主力を注ぎ，推論の運びを詳しく述べることにする。すでに同相区間 J については $\mathrm{dist}(J, Y^*) > \mathrm{dist}(\theta^m(J), Y^*)$ となるような最初の m を $m(J)$ としたが，いますべての $Y \in (\overset{\circ}{Y}', Y^M)$ に対し $\theta(Y) = \theta(Y')$ となるような点を Y' であらわして[17]（$\overset{\circ}{Y}'$ のダッシュ記号と区別されたい）

$$K_m = \{Y |\ \theta^i(Y) \notin [Y; Y'] \text{ for } i = 1,\ 2, \cdots,\ m-1 \ \ \text{かつ}\ \theta^m(Y) \in (Y; Y')\}^{(18)}$$

と定義すれば，かならず $J \subset K_{m(J)}$ となることをまず示す。なぜなら，いま $Y \in J$ とすれば，上記の $m(J)$ の定義から，$1 \leq i < m(J)$ の i については $\theta^i(J)$ は J ならびに $\theta^{m(J)}(J)$ より Y^* から遠いところにあり，たとえば第４図に示したような位置関係が成り立っている。

第４図



しかし，このことだけからは，まだ $\theta^i(J)$ がたとえば図の左側に示したようにかならず $[Y; Y']$ より外側にくるとは断定できず，たとえば右側に示したように $[Y; Y']$ の内側に喰い込むことも可能である。ところが実は後者のような事態は決して起こりえないのである。というのは，いま $Y' \in \theta^i(J)$ になったとすれば，$\theta(Y') \in \theta^{i+1}(J)$ となるから，$\theta(Y) \in \theta(J)$，$\theta(Y) = \theta(Y')$ であることと併せて

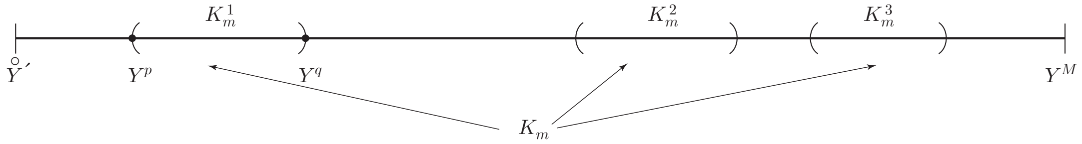
$$\theta(J) \cap \theta^{i+1}(J) \neq \varnothing$$

ということになり，前に補題１の帰結として示した $\theta^n(J)$，$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ は互いに共通部分を持たないという主張と矛盾するからである。よって $\theta^i(J)$，$i = 1,\ 2, \cdots,\ m(J) - 1$ は Y^* からばかりではなく，$[Y; Y']$ からも離れていなくてはならないのであり，$\theta^i(Y) \notin [Y; Y']$ となることが知られるのである。一方当初の設定から $\theta^{m(J)}(Y) \in (Y; Y')$ となることは自明であるから，これで $J \subset K_{m(J)}$ という上記の主張が示されたことになる。

（17） 前記の対称性の仮定の下では，$(\overset{\circ}{Y}', Y^M)$ 中 Y^* のところを除けばそのような Y，Y' のペアはかならず１個存在する。

（18） $[Y; Y']$ は Y と Y' の大小関係に依存して閉区間 $[Y, Y']$ または $[Y', Y]$ をあらわすものとする。$(Y; Y')$ についても同様。

第 5 図



つぎの推論のステップとしては K_m の連結成分（connected component）という概念を導入し，その形態に関する主張を含む下記補題 4 を援用する手順となる。ここでは連結成分とは K_m を構成する区間で，それぞれ間（あいだ）が繋がっている部分のうち最大の幅を持つものをいう。たとえば第 5 図では，K_m が K_m^1，K_m^2，K_m^3 の三つの連結成分を持つ状況が示されている。ここで K_m^1 の中の Y はいずれも K_m の定義を満たすが，そのような Y の両端は Y^p，Y^q が限界で，繋がっている部分としては (Y^p, Y^q) よりはみ出すことはできないのである。すると当面の推論は，つぎの補題 4 の帰結を用いることで先に進む（補題そのものの証明は次節参照）。

補題 4[19]　θ が単峰型であり，さらに対称性をも満たしているとき，

$$K_m = \{Y \mid \theta^i(Y) \notin [Y; Y'] \text{ for } i = 1,\ 2, \cdots,\ m-1 \ \text{ かつ } \theta^m(Y) \in (Y; Y')\}$$

と定義すれば，つぎの 2 命題が成り立つ。

（A）　K_m の連結成分はすべて (Y^p, Y^q)，$\theta^m(Y^p) = Y^p$ または $Y^{p'}$，$\theta^m(Y^q) = Y^q$ または $Y^{q'}$ の形をとる。

（B）　θ が C^1 単峰型で安定周期解を持っていなければ，$\theta^m(Y^p) = Y^p$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^{q'}$ となるか，$\theta^m(Y^p) = Y^{p'}$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^q$ となるかのいずれかであり，しかも θ^m は K_m の各連結成分上で単調となる。

（A）は K_m の連結成分が（イ）$\theta^m(Y^p) = Y^p$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^q$，（ロ）$\theta^m(Y^p) = Y^p$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^{q'}$，（ハ）$\theta^m(Y^p) = Y^{p'}$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^q$，（ニ）$\theta^m(Y^p) = Y^{p'}$ かつ $\theta^m(Y^q) = Y^{q'}$ の 4 通りの形をとりうることを言っているが，（B）はさらに仮定を強めればペアの可能性が（ロ）と（ハ）の 2 通りに絞り込めることを言っているわけである。

さて目下の背理法の仮定の下では，（B）の仮定はみな満たされているから，その帰結を用いることができ，J を含む $K_{m(J)}$ の連結成分を $C = (Y^p, Y^q)$ とするとき，可能な連結成分の形は $\theta^{m(J)}(Y^p) = Y^p$ かつ $\theta^{m(J)}(Y^q) = Y^{q'}$ のペアか，あるいは $\theta^{m(J)}(Y^p) = Y^{p'}$ かつ $\theta^{m(J)}(Y^q) = Y^q$ のペアか，の 2 通りしかない。そしてそのいずれで議論を進めても同じことになるので，以下ではもっぱら最初のペアについて推論していくことにする。まず θ は安定周期解を持たないのであるか

（19）　Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 118 の Lemma Ⅱ. 5. 6 に相当。

ら，不動点 Y^p については（3.2）の否定すなわち

$$\left| D\theta^{m(J)}(Y^p) \right| > 1$$

という条件が成り立つのでなくてはならない。また一方，$Y^{q'}$ の定義から $\theta(Y^q) = \theta(Y^{q'})$，したがって $\theta^{m(J)}(Y^q) = \theta^{m(J)}(Y^{q'})$ となるので，目下の対称性の仮定から

$$\left| D\theta^{m(J)}(Y^q) \right| = \left| D\theta^{m(J)}(Y^{q'}) \right|,$$

そして $\theta^{m(J)}(Y^q) = Y^{q'}$ であるところから $\theta^{m(J)}(Y^{q'}) = Y^{q'}$ となるので，$Y^{q'}$ もまた不動点となって

$$\left| D\theta^{m(J)}(Y^{q'}) \right| > 1,$$

ゆえに両方の帰結を併せて，やはり

$$\left| D\theta^{m(J)}(Y^q) \right| > 1$$

ともなるのでなくてはならない。

以上のところで C の両端 Y^p，Y^q では $\theta^{m(J)}$ の勾配の絶対値がいずれも 1 より大となることが示されたが，つづいてさらにすべての $Y \in C$ において同じ帰結が成り立つことを示したい。まず θ が S 単峰型であるところから，すべての $Y \in C$ についてシュヴァルツ導関数 $S\theta(Y) < 0$ という条件が満たされているが，$S\theta(Y) < 0$ なら，同じくすべての $Y \in C$ について $S\theta^{m(J)}(Y) < 0$ となることがただちに分かる[20]。するとつぎにはすべての $Y \in C$ について $S\theta^{m(J)}(Y) < 0$ なら，$\left| D\theta^{m(J)}(Y) \right|$ は $(\mathring{Y}', Y^M)$ 上で正の極小値を持ちえないことがつぎのような推論をつうじて明らかとなる[21]。

いま簡単化のため $\theta^{m(J)} = g$ とするとき，もしある $\tilde{Y} \in C$ において $|g'|$ が正の極小値を持ったとすれば，その点では $g'(\tilde{Y}) > 0$ なら $g''(\tilde{Y}) = 0$，$g'''(\tilde{Y}) \geq 0$ となるので

$$Sg(\tilde{Y}) = \frac{g'''(\tilde{Y})}{g'(\tilde{Y})} - \frac{3}{2}\left[\frac{g''(\tilde{Y})}{g'(\tilde{Y})}\right]^2$$

（20） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 97 の 2。

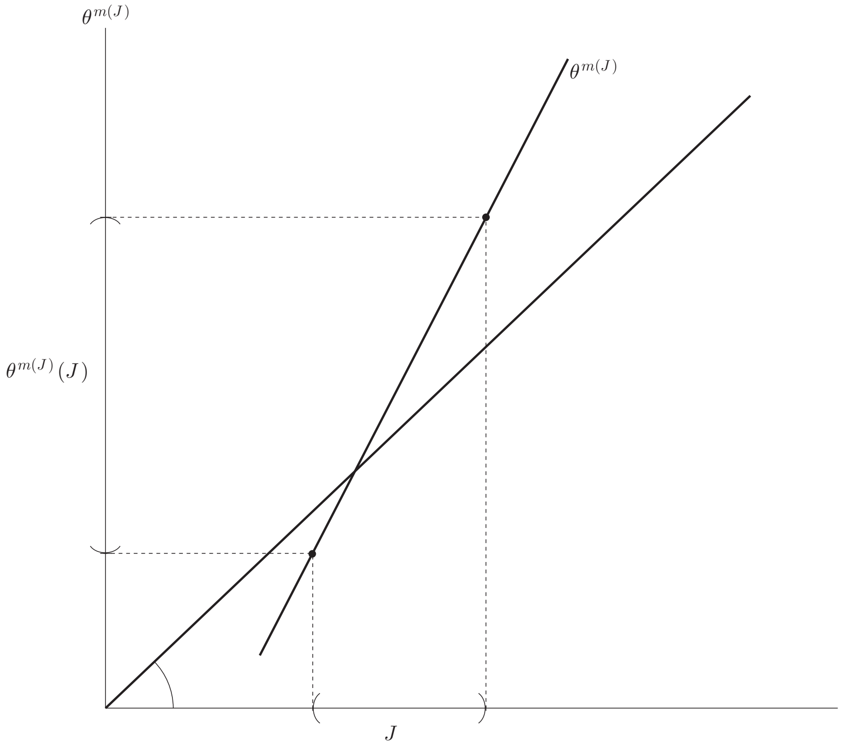
$$S\theta^2(Y) = S(\theta \circ \theta)(Y) = (S\theta)(\theta(Y))\theta'(Y)^2 + S\theta(Y) < 0$$
$$S\theta^3(Y) = S(\theta^2 \circ \theta)(Y) = (S\theta^2)(\theta(Y))\theta'(Y)^2 + S\theta(Y) < 0$$
$$\vdots$$

と，以下同様に繰り返していけば，

$S\theta^{m(J)}(Y) < 0$。

（21） Collet and Eckmann, *op. cit.*, p. 97 の 3。

第 6 図



$$= \frac{g'''(\tilde{Y})}{g'(\tilde{Y})} + 0 \geq 0$$

となって，前記の $Sg(\tilde{Y}) < 0$ と矛盾する。また $g'(\tilde{Y}) < 0$ のときも同様に $g''(\tilde{Y}) = 0$, $g'''(\tilde{Y}) \leq 0$ となるので，やはり $Sg(\tilde{Y}) \geq 0$ となり，$Sg(\tilde{Y}) < 0$ と矛盾せざるをえない。よって $\left|D\theta^{m(J)}(Y)\right|$ は $(\mathring{Y}', Y^M)$ 上で正の極小値を持ちえないことが示された。そして $\theta^{m(J)}$ は単調であるから，C 上では $\left|D\theta^{m(J)}(Y)\right| > 0$ であって，極小点がゼロになることもない。したがって，もしかりにある $Y \in (Y^p, Y^q)$ において $\left|D\theta^{m(J)}(Y)\right| \leq 1$ になっているとすれば，Y^p，Y^q では $\theta^{m(J)}$ の勾配の絶対値がいずれも 1 より大となっていることから，$\left|D\theta^{m(J)}(Y)\right|$ が (Y^p, Y^q) 上，すなわち $(\mathring{Y}', Y^M)$ 上で正の極小値を持つことになり矛盾が生じるのである。

すると以上の推論をつうじて C 上ではすべての点において $\left|D\theta^{m(J)}\right| > 1$ となることが示されたわけであり，これは C 上では $\theta^{m(J)}$ のグラフが一貫して絶対値において 45° 線より急な勾配を持つことを含意する。たとえば $D\theta^{m(J)} > 0$ の場合を図示すれば第 6 図のごとくであり，J を $\theta^{m(J)}$ で写した $\theta^{m(J)}(J)$ の長さは J の長さよりかならず大となるのである。

よって（4.2）

$$\lambda(\theta^{m(J)}(J)) \geq \lambda(J)$$

となることが立証されたことになる。

以上ここでは θ のグラフが対称である場合を主眼として（4.2）がいかにして成り立つかを詳論したが，前にも言及したように非対称の場合には

$$\lambda(\theta^{m_i}(J)) > \alpha \text{ となるようなある定数 } \alpha > 0 \text{ と数列 } m_i \to \infty \text{ がある}$$

という命題が（4.2）に準じた役割を演ずることになる。この代案命題がこれまたいかにして成り立つかという考察についてはここでは立ち入る余裕がないので，興味ある読者はみずからその証明にチャレンジされるか，あるいは前に注記したグッケンハイマーの所論（前掲論文，pp. 143–145）を参照されるかしていただければ幸いである。

5

先述したように，本節には前節の基本定理の証明中援用した四つの補題そのものの証明を収録する。それらを俟って基本定理の数理は初めて自己完結的なものとなるわけであるが，それを本定理の証明中に挿入すればあまりに論理の脈絡が複雑化し推論が迂遠なものになるので，あえて分離して本節に移すことにした次第である。

以下に各補題を，使用した順序にしたがい逐次取り上げていくが，行論をつうじていく分でも記号を簡単にするため，$\mathring{Y}' = a$，$Y^M = b$，$Y^* = x^*$，$Y^p = p$，$Y = x$，y，z などと略記することにした。

補題 1　θ が単峰型，J が同相区間であるとすれば，（イ）$\theta^n(J)$，$n = 0$，1，$2, \cdots$ は互いに共通部分を持たないか，あるいは（ロ）$\theta|_W$ がシンクを持つような $(a, x^*) \cup (x^*, b)$ の開部分集合 W が存在するか，のいずれかである。

証明

基本定理の証明のさいは（ロ）が成り立たなければ（イ）が成り立つという形で補題の帰結を利用したが，当面の証明ではその対偶を考え（イ）が成り立たなければ（ロ）が成り立つという形で主張が成立することを示したい。

まず（イ）が成り立たないと仮定するのであるから

$$\theta^n(J) \cap \theta^{n+k}(J) \neq \varnothing$$

となるようなある $n \geq 0$ とある $k > 0$ が存在する。すると当然すべての $i \geq 0$ について

$$\theta^{n+i}(J) \cap \theta^{n+k+i}(J) \neq \varnothing$$

ともならねばならないから，とくにすべての $p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ について $i=pk$ とすれば

$$\theta^{n+pk}(J)\cap\theta^{n+(p+1)k}(J)\neq\varnothing$$

となる。そして J が同相区間であるところから，J と $\theta^{n}(J),\ \theta^{n+k}(J),\ \theta^{n+2k}(J),\ \cdots$ はすべて同相であり，したがって J が開区間であれば $\theta^{n}(J),\ \theta^{n+k}(J),\ \theta^{n+2k}(J),\ \cdots$ もまたすべて開区間となる。ゆえに

$$K=\theta^{n}(J)\cup\theta^{n+k}(J)\cup\theta^{n+2k}(J)\cup\cdots=\bigcup_{p\geq 0}\theta^{n+pk}(J)$$

と定義すれば，K は開区間である。

またこのとき $\theta^{k}(K)\subset K$ となることも言える。なぜならいま $y\in\theta^{k}(K)$ を任意にとれば，当然 $y=\theta^{k}(x)$ を満たすような $x\in K$ が存在し，また上記の K の定義から $x\in\theta^{n+pk}(J)$ となるような $p\geq 0$ が存在する。よって $\theta^{k}(x)\in\theta^{n+(p+1)k}(J)$ となるが，$y=\theta^{k}(x)$ であり，$\theta^{n+(p+1)k}(J)\subset K$ であるところから，これは $y\in K$ となることを意味せざるをえない。そして y は $\theta^{k}(K)$ から任意にとったのであるから，$\theta^{k}(K)\subset K$ となるわけである。

そこで最後に

$$W=K\cup\theta(K)\cup\theta^{2}(K)\cup\cdots\cup\theta^{k-1}(K)$$

と定義すれば，前述のシンクの定義のうち $K\subset W$ となる K があるという部分は，上の W のつくり方から自明。また $\theta^{k}(K)\subset K$ の部分はすでに前パラグラフで示したところであり，さらにまた $\theta^{i}(K)\subset W,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ の部分も W の定義から当然満たされている。そして J が同相区間であるところから，$\theta^{i}(J),\ i\geq 0$ は x^{*} を含まない開区間であり，したがって W も x^{*} を含まない開集合となる。よって $\theta|_{W}$ がシンクを持つような $(a,x^{*})\cup(x^{*},b)$ の開部分集合 W があるという（ロ）の主張が立証されたことになる。

補題 2　θ が C^{1} 単峰型，W が $(a,x^{*})\cup(x^{*},b)$ の開部分集合で $\theta|_{W}$ がシンクを持つとすれば，$\bar{W}$ は θ の安定周期軌道を持つ。

証明

W は x^{*} を含まないように設定されており，シンクの定義に現れる K についても $K\subset W$ であるから，K は x^{*} を含まない開区間となる。したがって K に対応する θ のグラフは単調増加であるか単調減少であるかのいずれかであり，$K\to\theta(K)$ の写像は同相写像で，$\theta(K)$ もまた開区間となる。同様に $\theta(K)\subset W$ より $x^{*}\notin\theta(K)$，したがって $\theta(K)\to\theta^{2}(K)$ の写像も同相写像で $\theta^{2}(K)$ は開区間となり，同じように考えていけば，結局 $K\to\theta^{k}(K)$ の写像も同相写像となっていることが分かる。そしてシンクの定義より $\theta^{k}(K)\subset K$ なので，$\theta^{k}|_{K}$ が K から K の中への同相写像となっ

ていることが知られたわけである。

そのことから K の上で θ^k のグラフは単調でなくてはならないが，単調増加であることも単調減少であることも可能である。そこで k を 2 倍にして $\theta^{2k}|_K$ を考えるとすれば，かりに $\theta^k|_K$ が単調減少であったとしてもそれをもう一度単調減少の形で写すことになるから，$\theta^{2k}|_K$ はつねに単調増加となる。そこでこの $\theta^{2k}|_K$ という関数を新たに g と記し

$$g = \theta^{2k}|_{\bar{K}}$$

と定義することにする。この定義で K をその閉包 $\bar{K}$ に拡大したのは，つぎに g について不動点定理を適用するための措置である。

さてこのように g を定義すれば，それは $\bar{K}$ から $\bar{K}$ への連続写像になっているので，定石のブラウワーの不動点定理が使え，g は $\bar{K}$ の中に不動点を持つ。

もし g が $\bar{K}$ の左端で値を K の中にとるならば，当該の端点にもっとも近い不動点 x においてかならず $g'(x) \leq 1$ となり，それが安定周期解となる。また g が $\bar{K}$ の左端 x で不動点を持つ場合には，そこで $g'(x) \leq 1$ となるのであれば，やはり x が安定周期解となる。さらにそこで $g'(x) > 1$ であったとしても，g は途中に $g' \leq 1$ となる不動点を持つか右端で不動点を持つかのいずれかであり，後者の場合も明らかに g' が 1 を越えることはできない。よってこれでいかなる場合にも θ の安定周期軌道が存在するという帰結が示されたことになる。

補題 3　θ が C^1 単峰型で，また V が第 3 図のように，すなわち (a, b) から x^* を含むある閉区間を取り去ったものとして定義されるとき，もし $\theta|_V$ がシンクを持たなければ，$V \cup U_0 = (a, b)$ となるようなどんな開区間 U_0 についても，V 上の任意の同相区間 J に対して $\theta^m(J) \subset U_0$ となるような $m > 0$ がかならず存在する。

証明

まず $\log|\theta'(x)|$ が V を構成する二つの区間 V_1，V_2 のそれぞれにおいていわゆるリプシッツ関数になることを示す。ここで $\log|\theta'(x)|$ が $V_i (i = 1,\ 2)$ 上でリプシッツ関数であるとは，ある数 $\gamma > 0$ が存在して，V_i からどんな x，x' をとってきても

$$\left|\log|\theta'(x)| - \log|\theta'(x')|\right| \leq \gamma\,|x - x'|$$

という不等式が成り立つことをいう。この不等式を書き換えれば

$$\frac{|\log|\theta'(x)| - \log|\theta'(x')||}{|x - x'|} \leq \gamma$$

となるから，$\log|\theta'(x)|$ がリプシッツ関数であるとは大略 $\log|\theta'(x)|$ の勾配が有界であることを意味すると言うことができよう。いま V_1 の部分についてみると，$\theta(x)$ は $[a,\ b]$ 上で定義された C^1 級

の関数なので $|\theta'(x)|$ は $[a,\ b]$ 上で連続，そして V_1 の右端は x^* から離れているので，(5) によって V_1 上で $\theta'(x)$ もまた 0 から離れている。したがって，上記両端を含めそのあいだの諸点においても $\log|\theta'(x)|$ の勾配が $+\infty$ や $-\infty$ になることはありえないのである。同様なことはまた V_2 についても言え，よって $\mathrm{dist}(V, x^*) > 0$ であるかぎりは，$\log|\theta'(x)|$ は V_1，V_2 のいずれにおいてもリプシッツ関数たるべき資格を満たすと言ってよい。

以下証明は四つのステップに分けて行われるが，まず最初のステップではつぎの命題

（I）区間 K が $\theta^i(K) \subset V$，$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を満たすならば，

$$\log \frac{\sup_K |D\theta^n(x)|}{\inf_K |D\theta^n(x)|} \leq \gamma \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\theta^k(K))$$

となる。

の証明を目指す。前節でも述べたように，$\lambda(\theta^n(K))$ は区間 $\theta^n(K)$ の長さを意味している。

証明はつぎのごとくである。まず

$$D\theta^n(x) = \theta'(\theta^{n-1}(x)) \cdot \theta'(\theta^{n-2}(x)) \cdot \cdots \cdot \theta'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$$

であるから，すべての $y,\ z \in K$ について

$$\begin{aligned} &\log \frac{|D\theta^n(y)|}{|D\theta^n(z)|} \\ &= \log \frac{|\theta'(\theta^{n-1}(y))| \cdot |\theta'(\theta^{n-2}(y))| \cdot \cdots \cdot |\theta'(\theta(y))| \cdot |\theta'(y)|}{|\theta'(\theta^{n-1}(z))| \cdot |\theta'(\theta^{n-2}(z))| \cdot \cdots \cdot |\theta'(\theta(z))| \cdot |\theta'(z)|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\left|\theta'(\theta^k(y))\right|}{|\theta'(\theta^k(z))|} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\log\left|\theta'(\theta^k(y))\right| - \log\left|\theta'(\theta^k(z))\right|\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

という式が成り立ち，最右辺のそれぞれの k についてリプシッツ関数の性質を適用すれば，

$$\begin{aligned} &\log\left|\theta'(\theta^k(y))\right| - \log\left|\theta'(\theta^k(z))\right| \\ &\leq \left|\log\left|\theta'(\theta^k(y))\right| - \log\left|\theta'(\theta^k(z))\right|\right| \\ &\leq \gamma\left|\theta^k(y) - \theta^k(z)\right| \end{aligned} \tag{5.2}$$

となる。[22] すると $\theta^k(y)$，$\theta^k(z) \in \theta^k(K)$ であるところから当然

$$\gamma\left|\theta^k(y) - \theta^k(z)\right| \leq \gamma\lambda(\theta^k(K))$$

(22) $y,\ z \in K$ であるから，$\theta^k(y)$，$\theta^k(z) \in \theta^k(K)$ で $\theta^k(K)$ もまた区間である。そして $\theta^k(K) \subset V = V_1 \cup V_2$ であるから，$\theta^k(K) \subset V_1$ であるか $\theta^k(K) \subset V_2$ であるかのいずれかで，$\theta^k(y)$，$\theta^k(z)$ は両方ともが V_1 に入っているか，V_2 に入っているかのいずれかである。そのことによってリプシッツ条件の式が使えたのである。

となるので，

$$\log\left|\theta'(\theta^k(y))\right| - \log\left|\theta'(\theta^k(z))\right| \le \gamma\lambda(\theta^k(K)) \tag{5.3}$$

となり，もとの式（5.1）に戻って

$$\log\frac{|D\theta^n(y)|}{|D\theta^n(z)|} \le \gamma\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(\theta^k(K))$$

が言えたことになる。そして y，z は任意に K から選んだのであるから，分母の sup と分子の inf をとっても結論は変わらず，ゆえに証明すべき帰結が成立する。（Ⅰ）証了。

つぎに第二のステップでは

（Ⅱ） すべての $n \ge 0$ について $\theta^n(J)\backslash U_0 \ne \varnothing$ となる V 上の同相区間 J があるならば，ある n_0 が存在して，どの $n \ge n_0$ についても $\theta^n(J)$ を含む V 上の同相区間はどれもが U_0 とは交わらない。

という命題が証明される。ここで U_0 は，補題 3 の主張に現れる U_0 を任意に選んできたものとする。

証明は背理法により，命題の前提が成り立つにもかかわらず，どんな n_o に対してもある $n \ge n_0$ が存在して，$\theta^n(J)$ を含む V 上のある同相区間が U_0 と交わると仮定し，矛盾を導くことを目指す。

いま背理法の仮定にある V 上の同相区間を H_n と書けば，$H_n \cap U_0 \ne \varnothing$。そして $\theta^n(J) \subset H_n$ であり，仮定から $\theta^n(J)\backslash U_0 \ne \varnothing$ であるから，$H_n\backslash U_0 \ne \varnothing$ ともなっている。

すると同相区間 H_n は U_0 と交わり，しかも U_0 以外の点もを含んでいるわけであるから，当然 U_0 の一方の端点を含む。そしてこのことはどんな n_0 を選んでも言えるので，いま $n_0 = n+1$ として同じことを考えれば，$n' \ge n+1$ のような n' が存在して，$\theta^{n'}(J) \subset H_{n'}$，よって $H_{n'}$ もまた U_0 の一方の端点を含むことになる。こんどの U_0 の端点が前のそれと同じ端点になる保証はないが，もしそれらが違う端点であったなら，さらに $n_0 = n'+1$ として同じことを繰り返せば，$n'' \ge n'+1$ のような n'' が存在して $\theta^{n''}(J) \subset H_{n''}$，$H_{n''}$ は U_0 の一方の端点を含むという同様の結果が得られる。ところが U_0 の端点は二つしかないから，上記三つの端点のどれか二つは同じ端点であるほかはなく，そこでかりに n'' の場合が n の場合と同じ端点であったとしてみる。

そのとき $H_{n''} = L$，$H_n = K$ とし，また $n'' = n+k$，$k > 0$ として，上に得た結果をまとめれば，ある $n \ge 0$，ある $k > 0$ があり，さらに V 上にある同相区間 K，L があって，

$$\theta^n(J) \subset K,\ \theta^{n+k}(J) \subset L$$
$$K \text{ と } L \text{ は } U_0 \text{ の 同一の端点を含む}$$

という帰結が得られたことになる。そして K も L も同相区間であるから，$K \cup L$ もまた同相区間となるほかはない。

以上の帰結から，目指された矛盾がただちに導かれる。まず $\theta^n(J) \subset K$ であることから $\theta^{n+k}(J) \subset \theta^k(K) \subset \theta^k(K \cup L)$，また同様に $\theta^{n+k}(J) \subset L \subset (K \cup L)$ となるから，$\theta^k(K \cup L)$ と $(K \cup L)$ はともに同じ $\theta^{n+k}(J)$ を含むことになり，よって

$$\theta^k(K \cup L) \cap (K \cup L) \neq \varnothing,$$

ところが補題 3 は $\theta|_V$ がシンクを持たないと仮定しており，この仮定の下では補題 1 の代替的な二つの帰結のうち一方が否定されるから，もう一方の帰結がかならず成り立って $\theta^k(K \cup L)$ と $(K \cup L)$ とは互いに共通部分を持つことはできない。このことと上に導いた帰結は明らかに矛盾であり，よって第二ステップの目的が果たされたことになる。（Ⅱ）証了。

進んで第三のステップに移る。前二つのステップはいわば補題 3 証明の予備的段階であり，この第三ステップからが実質的な証明の始まりである。同補題で主張したい帰結は，V 上のすべての同相区間 J に対して $\theta^m(J) \subset U_0$ となるような $m > 0$ がかならず存在するということであるから，その証明に用いられる背理法の仮定は，V 上にある同相区間 J が存在し，すべての $n \geq 0$ について $\theta^n(J) \backslash U_0 \neq \varnothing$ ということになる。よってそう仮定するとすれば，すでに証明した命題（Ⅱ）の前提が満たされることになるので，その帰結から，ある n_0 が存在して，どの $n \geq n_0$ についても $\theta^n(J)$ を含む V 上の同相区間はどれもが U_0 と交わることはできないことになる。そこでとくに $n = n_0$ のところで考えるとし，$\theta^{n_0}(J)$ を含む V 上の同相区間のうち最大のものを M とする。すると第三のステップでは

（Ⅲ）すべての $n \geq 0$ について $\theta^n(M)$ を含む V 上の同相区間はどれもが U_0 とは交わらない。

という命題を証明することが課題となる。

命題（Ⅲ）の証明はつぎのようである。$\theta^{n_0}(J) \subset M$ であるから，すべての $n \geq 0$ について $\theta^{n_0+n}(J) \subset \theta^n(M) \subset V$，ゆえに $\theta^n(M)$ を含む V 上の同相区間はどれもが $\theta^{n_0+n}(J)$ を含む V 上の同相区間にもなっている。そして $n_0 + n$ は当然 n より大きい数であるから，命題（Ⅱ）の帰結から，$\theta^n(M)$ を含む V 上の同相区間はどれもが U_0 とは交わらないのである。（Ⅲ）証了。

そこでいよいよ最後の第四のステップである。まず

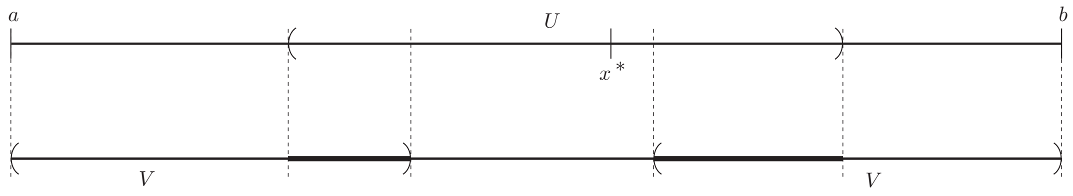
$$\alpha = \frac{|b-a|}{2}$$

と定義する。すると b と a の距離は 2α ということになり，これが考察下にある全区間の長さにほかならない。また

$$\beta = \mathrm{dist}\,((a,\ b)\backslash U_0,\ (a,\ b)\backslash V)$$

と定義する。すなわち β は $(a,\ b)$ から U_0 を取り去った集合と V を取り去った集合どうしの距離であり，第 7 図の太線で示した二つの長さの小さいほうがそれを示す。

第７図



すると第四のステップでは

（IV）　$L \subset V$ が $M \subset L$，$L \neq M$ となる開区間で，かつ

$$\frac{\lambda(L)}{\lambda(M)} < \frac{\beta}{2\alpha} e^{-\gamma(\beta+2\alpha)} + 1$$

とするとき，すべての $k \geq 0$ について

$$\frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} < \frac{\beta}{2\alpha} + 1$$

が成り立ち，また $\theta^k|_L$ は同相写像になる。

という命題が証明されることになる。

前にも述べたように，補題３の証明は背理法によって行われるので，その背理法の仮定の下で矛盾を出すという手順で運ばれる。あらかじめ推論の見通しを述べておくと，まず背理法の仮定から，L を命題（IV）の前提を満たすようにとれることが分かる。するとその L が V 上の同相区間となることが判明して，M を含み M より大きな L という同相区間が V 上にあることになり，M が元来 V 上の同相区間のうち最大のものであるという設定と相容れないことになって，所望の矛盾が導かれるのである。

コレット＝エックマンたちはひとまず命題（IV）を正しいものとして上記の主張を証明し，そのあとで命題（IV）そのものを証明するという手順をとっているが，ここではその順序を逆にして，まず命題（IV）を証明し，それを済ませたのちに上記の命題を証明するという方針をとることにしたい。

そこで早速命題（IV）の証明であるが，それは数学的帰納法による。まずは $k = 0$ のときを考えると，e のマイナス乗が１より小であることによって，仮定から

$$\frac{\lambda(L)}{\lambda(M)} < \frac{\beta}{2\alpha} + 1$$

となり，また $k = 0$ であれば $\theta^k(L)$ は L そのもの，$\theta^k(M)$ は M そのものであるから，命題の結論の不等式が当然成り立つ。$\theta^0|_L$ が同相写像となることも自明である。

そこでつぎに $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ までは結論が成り立つと仮定して，$k = n$ のときもそれが成り立つことを示す。$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ については

$$\frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} < \frac{\beta}{2\alpha} + 1$$

で，また当然

$$\lambda(\theta^k(M)) \leq |b-a| = 2\alpha$$

であるから，

$$\lambda(\theta^k(L)) < \frac{\beta}{2\alpha}\lambda(\theta^k(M)) + \lambda(\theta^k(M)) \leq \beta + \lambda(\theta^k(M)),$$

したがって

$$\lambda(\theta^k(L)) - \lambda(\theta^k(M)) < \beta \tag{5.4}$$

ということになる。すなわち $\theta^k(L)$ は $\theta^k(M)$ より長いが，$\theta^k(M)$ からはみ出た部分の長さは β 以内に収まらねばならないのである。そしていま，（Ⅲ）の帰結から $\theta^k(M) \cap U_0 = \varnothing$ なので（M が V 上の同相区間なので，$\theta^k(M)$ もまた V 上の同相区間となっている），前記の β の定義から，$\theta^k(L)$ は明らかに V に含まれる。よって $k = 0$, 1, 2, $\cdots$, $n-1$ については $\theta^k(L) \subset V$ であり，とりわけ $\theta^{n-1}(L) \subset V$ であることが示されたことになる。すると V は x^* を含まないように定義されているから，$\theta^{n-1}(L)$ 上の θ のグラフは単調であり，$\theta^{n-1}(L) \to \theta^n(L)$ の写像，したがって帰納法の仮定より $L \to \theta^n(L)$ の写像は同相写像となるのでなくてはならない。すなわち $\theta^k|_L$ は $k = n$ についても同相写像となることが示されたのである。

そこであとは

$$\frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} < \frac{\beta}{2\alpha} + 1$$

という帰結が $k = n$ についても成り立つことが示されればよい。すなわち以下の所論はもっぱら

$$\frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} - 1 < \frac{\beta}{2\alpha}$$

が成り立つことを示す推論に当てられる。まず上式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} - 1 &= \frac{\lambda(\theta^k(L)) - \lambda(\theta^k(M))}{\lambda(\theta^k(M))} \\ &= \frac{\lambda(\theta^k(L) \backslash \theta^k(M))}{\lambda(\theta^k(M))} \\ &= \frac{\lambda(\theta^k(L \backslash M))}{\lambda(\theta^k(M))} \end{aligned} \tag{5.5}$$

となるが，ここで

$$\lambda(M) \inf_L |D\theta^n| \leq \lambda(\theta^n(M))$$
$$\lambda(\theta^n(L \backslash M)) \leq \lambda(L \backslash M) \sup_L |D\theta^n|$$

という関係が成り立つので，これらの両辺を掛け合わせることによって

$$\lambda(M)\inf_L |D\theta^n|\,\lambda(\theta^n(L\backslash M)) \le \lambda(\theta^n(M))\lambda(L\backslash M)\sup_L |D\theta^n|,$$

ゆえに

$$\frac{\lambda(\theta^n(L\backslash M))}{\lambda(\theta^n(M))} \le \frac{\lambda(L\backslash M)}{\lambda(M)}\frac{\sup\limits_L |D\theta^n|}{\inf\limits_L |D\theta^n|} \tag{5.6}$$

となり，結局のところこの不等式の右辺が $<\beta/2\alpha$ となることを示せばよいことになる。

帰納法の仮定から，$k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$ についてはすでに

$$\lambda(\theta^k(L)) - \lambda(\theta^k(M)) < \beta$$

したがって

$$\theta^k(L) \subset V$$

となることが言えている。よって L は命題（Ⅰ）の仮定を満たすので，その帰結が使えて

$$\log\frac{\sup\limits_L |D\theta^n|}{\inf\limits_L |D\theta^n|} \le \gamma\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(\theta^k(L))$$

ゆえに

$$\frac{\sup\limits_L |D\theta^n|}{\inf\limits_L |D\theta^n|} \le e^{\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda(\theta^k(L))} \tag{5.7}$$

であることになる。ところが帰納法の仮定により

$$\frac{\lambda(\theta^k(L))}{\lambda(\theta^k(M))} \le \frac{\beta}{2\alpha}+1 \text{ for } k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$$

となっているから，

$$\lambda(\theta^k(L)) \le \left(\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)\lambda(\theta^k(M)),$$

そこでこれを上の（5.7）に適用することにより

$$\frac{\sup\limits_L |D\theta^n|}{\inf\limits_L |D\theta^n|} \le e^{\gamma\left(\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda(\theta^k(M))} \tag{5.8}$$

となる。

一方，補題 3 の仮定により $\theta|_V$ にはシンクがないことになっているので，補題 1 の帰結から $\theta^k(M)$, $k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$ は互いに共通部分を持つことはできない。これはそれらの長さを全部足しても全区間の長さ 2α を越えられないことを意味するから，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda(\theta^k(M)) \le 2\alpha \tag{5.9}$$

が成り立ち，これと（5.8）を合体することによって

$$\frac{\sup\limits_{L}|D\theta^n|}{\inf\limits_{L}|D\theta^n|} \leq e^{\gamma(\beta+2\alpha)} \tag{5.10}$$

という結果を得る。

これで先に導いた（5.6）式の右辺第 2 項については一応目鼻がついたので，ついで第 1 項のほうに目を移すと，

$$\frac{\lambda(L\backslash M)}{\lambda(M)} = \frac{\lambda(L)-\lambda(M)}{\lambda(M)} = \frac{\lambda(L)}{\lambda(M)} - 1,$$

そこでこれに命題（IV）の仮定にある

$$\frac{\lambda(L)}{\lambda(M)} < \frac{\beta}{2\alpha}e^{-\gamma(\beta+2\alpha)} + 1$$

を代入すれば,

$$\frac{\lambda(L\backslash M)}{\lambda(M)} = \frac{\beta}{2\alpha}e^{-\gamma(\beta+2\alpha)} \tag{5.11}$$

を得る。

これらの結果（5.10）と（5.11）を（5.6）に用いることで,

$$\frac{\lambda(\theta^n(L\backslash M))}{\lambda(\theta^n(M))} < \frac{\beta}{2\alpha}e^{-\gamma(\beta+2\alpha)}e^{\gamma(\beta+2\alpha)} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

となり，（5.5）に戻って求める帰結

$$\frac{\lambda(\theta^n(L))}{\lambda(\theta^n(M))} < \frac{\beta}{2\alpha} + 1$$

の成り立つことが首尾よく示された。（IV）証了。

以上のところで命題（IV）の証明は果たされたので，あとは上に得た成果にもとづき補題 3 そのものの証明を成就する課題のみが残されたことになる。その論旨の概略についてはすでに述べたが，そのさい証明を後回しにした部分の証明をも含め，重ねてより詳細に推論の行程を示せばつぎのとおりである。

まず背理法の仮定により，命題（Ⅱ），（Ⅲ）を経て，すべての $n \geq 0$ に対して $\theta^n(M)$ を含む V 上の同相区間はどれもが U_0 と交わらないことが分かっているから，当然 M 自体も U_0 とは交わらない。ゆえに命題（IV）の前提を満たすように L をとることができ，命題（IV）から，すべての $k \geq 0$ について

$$\lambda(\theta^k(L)) < \left(\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)\lambda(\theta^k(M)) \leq \beta + \lambda(\theta^k(M))$$

したがって

$$\lambda(\theta^k(L)) - \lambda(\theta^k(M)) < \beta$$

となる。よって $\theta^k(M)\cap U_0=\varnothing$ と併せて $\theta^k(L)\subset V$ となることが言える。さらに命題（IV）の帰結から，すべての $k\geq 0$ について $\theta^k|_L$ は同相写像となることが言えているので，前述の結果と併せて，L は V 上の同相区間となることが分かる。

こうして L が V 上の同相区間となることさえ示されれば，すでに述べたとおり，その L が M より大きくとられていることと，M が定義により最大の同相区間であることとがただちに矛盾となり，よって補題 3 の証明は完結したことになるのである。

補題 4　θ が単峰型であり，さらに対称性をも満たしているとき，

$$K_m=\{x|\,\theta^i(x)\notin[x;x'] \text{ for } i=1,\ 2,\cdots,\ m-1 \text{ かつ } \theta^m(x)\in(x;x')\}$$

と定義すれば，つぎの 2 命題が成り立つ。

（A）K_m の連結成分はすべて (p,q)，$\theta^m(p)=p$ または p'，$\theta^m(q)=q$ または q' の形をとる。

（B）θ が C^1 単峰型で安定周期解を持っていなければ，$\theta^m(p)=p$ かつ $\theta^m(q)=q'$ となるか，$\theta^m(p)=p'$ かつ $\theta^m(q)=q$ となるかのいずれかであり，しかも θ^m は K_m の各連結成分上で単調となる。

前にも記したように文中 x' というのは $(a,\ b)$ から x をとったときに $\theta(x')=\theta(x)$ となるような $(a,\ b)$ 内の点である。そして $(x;\ x')$ はそれら x，x' を端点とする開区間，また $[x;\ x']$ は両端を含めた閉区間である。

証明

（A）から順番に証明していくことにし，まずは K_m そのものが開集合となることに注目しよう。なぜなら $x\in K_m$ とするとき，$\theta^i(x)$，$i=1,\ 2,\cdots,\ m-1$ が閉区間 $[x;\ x']$ に入っていないということはその補集合の開集合に入っているということであり，また $\theta^m(x)$ は開区間 $(x;\ x')$ すなわち開集合に入っているのであるから，$\theta^i(x)$ は $i=1,\ 2,\cdots,\ m$ のすべてにわたって開集合に入っているわけであり，したがって K_m が定義する事態は x をわずか動かしたとしても変わるところはない。よって K_m は開集合であり，その連結成分はいずれも $(p,\ q)$ という開区間の形をとるのでなくてはならない。

そこでそのような $(p,\ q)$ の端点について

$$\theta^m(p)=p \text{ または } p'$$

$$\theta^m(q)=q \text{ または } q'$$

となることをつぎに示す。p の場合について示せば同様の推論が q の場合にもあてはまるので，以下ではもっぱら前者の場合に集中して推理を進める。まずはある $i=1,\ 2,\cdots,\ m$ に対して $\theta^i(p)=p$

または p' となることを示したい。背理法の論法にしたがい，いますべての $i=1,\ 2,\cdots,\ m$ について $\theta^i(p)\neq p$ かつ $\theta^i(p)\neq p'$ であったとしてみる。すると $\varepsilon>0$ が十分に小さければ $p+\varepsilon\in K_m$ であり，K_m の定義から $\theta^i(p+\varepsilon)\notin[p+\varepsilon;\ (p+\varepsilon)'],\ i=1,\ 2,\cdots,\ m-1$ かつ $\theta^m(p+\varepsilon)\in(p+\varepsilon;\ (p+\varepsilon)')$ となるが，$\varepsilon>0$ が小さければ $\theta^i(p)$，p，p' の位置関係は p を少し動かしても変わるところはないから，同様にまた $\theta^i(p-\varepsilon)\notin[p-\varepsilon;\ (p-\varepsilon)']$，$i=1,\ 2,\cdots,\ m-1$ かつ $\theta^m(p-\varepsilon)\in(p-\varepsilon;\ (p-\varepsilon)')$ もが成り立つことになる。ゆえに $(p-\varepsilon,\ p+\varepsilon)\subset K_m$ という帰結が得られ，これは $(p,\ q)$ が連結成分であるという事実に矛盾する。よってある $i=1,\ 2,\cdots,\ m$ に対して $\theta^i(p)=p$ または p' とならねばならないのである。

これで $i=1,\ 2,\cdots,\ m$ のどこかの i で $\theta^i(p)=p$ または p' となることが示されたが，（A）の主張としてはそれが m について，すなわち θ^m に対して言えることを示したいわけである。そこでそのことを示すために，いま $\theta^i(p)=p$ または p' となる i のうち最小のものをあらためて i として，ケースを二つに分けて論を進める。

ケース1　m が i の倍数となるケース，すなわちある k が存在して $m=ki$ となるケース

この場合は

$$\theta^m(p)=\overbrace{\theta^i(\theta^i(\cdots\theta^i(\theta^i(}^{i\text{ を }k\text{ 回}}p))))$$

と書け，ここで $\theta^i(p)=p$ または p'。また $\theta(p)=\theta(p')$ であるところから $\theta^i(p)=\theta^i(p')$ であるので，

$$\theta^i(\theta^i(p))=\theta^i(p\ or\ p')=\theta^i(p)=p\text{ または }p'。$$

すなわち i を2回繰り返しても，結果は p または p' となる。以下同じことを何回繰り返しても結果は同じになるので，結局

$$\theta^m(p)=p\text{ または }p'$$

となるほかはないのである。

ケース2　$m=ki+j$，$1\leq j<i$ となるケース

こんども

$$\theta^m(p)=\theta^j(\overbrace{\theta^i(\cdots\theta^i(\theta^i(}^{i\text{ を }k\text{ 回}}p))))$$

と書けるので，ケース1の結果を利用すれば

$$\theta^m(p)=\theta^j(\theta^{ki}(p))=\theta^j(p)\text{ または }\theta^j(p')$$

となり，また定義により $\theta(p)=\theta(p')$ であるところから $\theta^j(p)=\theta^j(p')$ となるので，上の結果と併せて

$$\theta^m(p)=\theta^j(p)$$

という帰結を得る。ここでいま $(p,\ q)$ から任意に x を選べば，$x\in K_m$，そして $1\leq j<i<m$ であることから

$$\theta^j(x)\notin[x;x']$$
$$\theta^m(x)\notin(x;x')$$

となるが，この x を p に近づければ，$x\to p$ の収束先では

$$\theta^j(p)\notin(p;p')$$
$$\theta^m(p)\notin[p;p']$$

となる[23]。よって $\theta^j(p)=\theta^m(p)=\bar{p}$ とおけば，$\bar{p}$ は開区間 $(p,\ p')$ には含まれないが，閉区間 $[p,\ p']$ には含まれうるのである。ということは $\bar{p}$ は p そのものになるか p' そのものになるかのいずれかでしかないとのことを意味し，そのことから

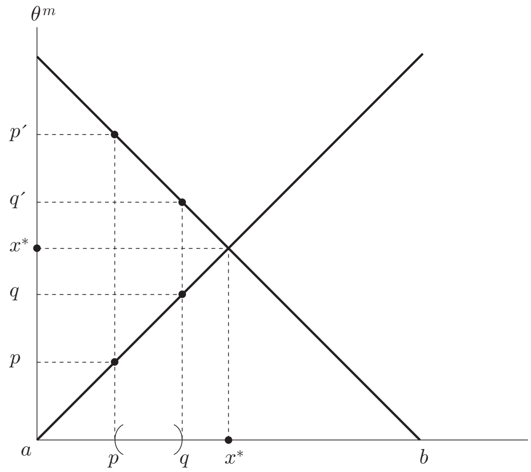
$$\theta^j(p)=\theta^m(p)=p \text{ または } p'$$

という帰結が導かれるのである。コレット＝エックマンの所論とは異なり，ここで矛盾を含意するのは第一の等号ではなく第二の等号である。なぜなら前述したように $\theta^j(p)=\theta^m(p)$ は別段に矛盾を含まないが，$\theta^j(p)=p$ または p'，$j<i$ はこの式を成立せしめる最小の番数を i とした当初の設定に明らかに反するからである。こうして $m=ki+j$，$1\leq j<i$ というケースが矛盾を生むという事実は，もともとこのケースが不可能な場合であることを意味しており，これで（A）の証明は完了したことになる。

つぎに（B）の証明に入る。いま K_m から任意に x をとると，$i<m$ なら K_m の定義から $\theta^i(x)\notin[x;x']$，$x^*\in[x;x']$ であるから $\theta^i(x)\neq x^*$ である。よって $(p,\ q)$ 上のどの x に対しても $\theta^1(x),\ \theta^2(x),\cdots,\theta^{m-1}(x)\neq x^*$ となり，$(p,\ q)$ は $\theta^1,\ \theta^2,\cdots,\theta^m$ によって単調に写されることが知られる（ただし $\theta^{m-1}\to\theta^m$ の場合 $\theta^{m-1}(p,\ q)\neq x^*$ から θ^m は単調になるが，$\theta^m(p,\ q)\neq x^*$ となるかどうかはもはや保証されない）。

（23） $\theta^j(x)$ は $[x;x']$ に含まれていないのであるから，$\theta^j(x)\in[a,\ x)\cup(x',\ b]$，ここで $x\to p$ とすれば収束先では $\theta^j(p)\in[a,\ p]\cup[p',\ b]$ となって，$\theta^j(p)\notin(p,\ p')$ となるのでなくてはならない。コレット＝エックマンは前掲書 p. 118 の証明中で $\theta^j(p)\notin[p,\ p']$ となるとして，それと $\theta^m(p)\in[p,\ p']$ の両立から，ただちに $\theta^j(p)=\theta^m(p)$ となることは不可能と結論しているが，正しい推論であるとは思われない。

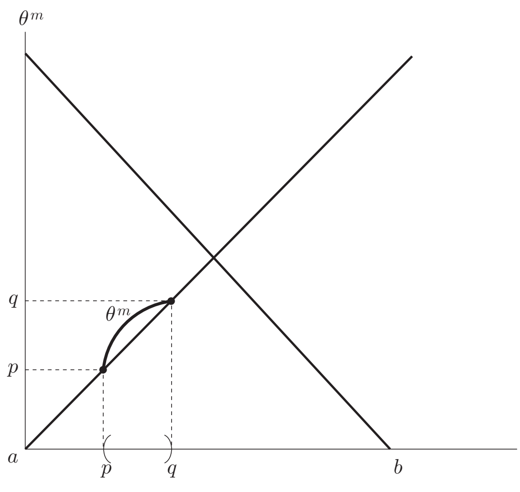
第 8 図



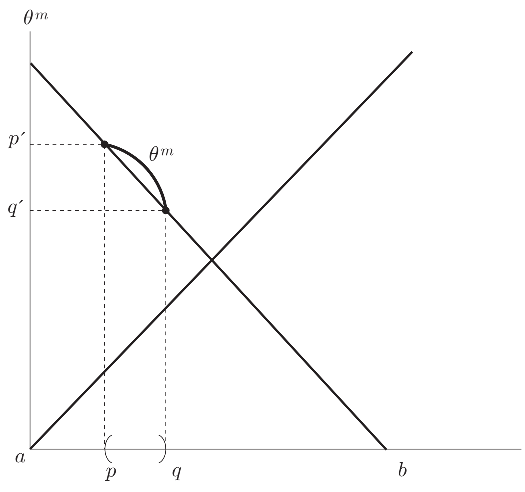
ここで（A）の帰結を考慮すれば，p，q における θ^m の値は第 8 図に示したように 45° 線上にくるか逆 45° 線上にくるかのいずれかであるが，いまかりに $\theta^m(p) = p$，$\theta^m(q) = q$ であったとすれば，上に示した単調性から θ^m のグラフはたとえば第 9 図のような形になる。ところがこの場合は q（またはグラフの凹凸が逆の場合は p）が安定な周期解となるので，（B）の前提と矛盾することになる。同様にまた $\theta^m(p) = p'$，$\theta^m(q) = q'$ であったとしても，θ^m のグラフはたとえば第 10 図のようになるから，p'（またはグラフの凹凸が逆の場合は q'）が安定周期解となって，やはり（B）の前提と矛盾する。

よって以上のところから，可能なのは θ^m のグラフが第 11 図，第 12 図のようになる場合のみであり，（B）の帰結が示されたことになる。証了。

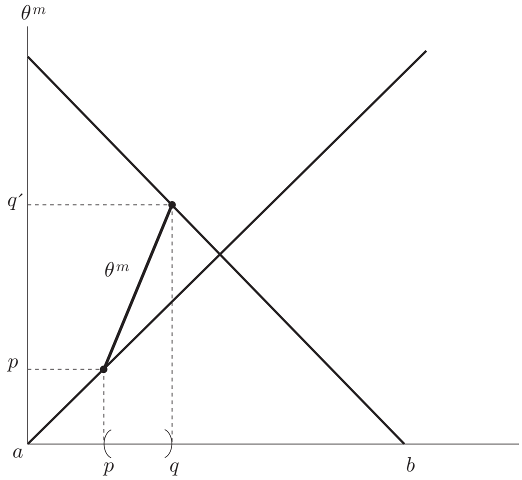
第 9 図



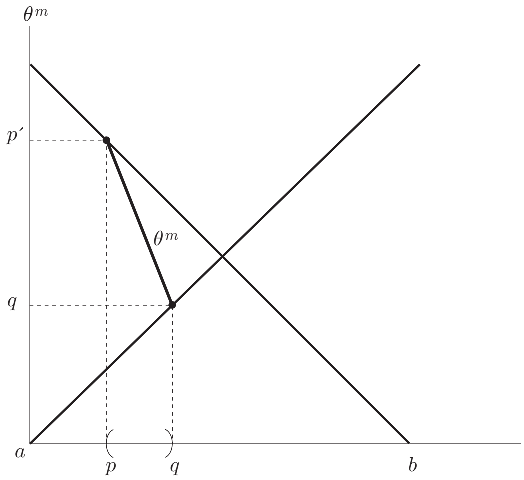
第 10 図



第 11 図



第 12 図



以上で本稿が企図したプログラムは一応すべて終了したことになる。なお蛇足ではあるが，ここで行った考察はもっぱら区間 $[\overset{\circ}{Y}', Y^M]$ での安定周期解の存否を主眼としたものであること，またその周期についても自然数 1, 2, ... のすべてを可能性の範囲に含めたものであることを，念のため付言しておきたい。区間 $[0, \overset{\circ}{Y}']$ に周期 1 の安定周期解たる安定定常解 $\overset{\circ}{Y}$ が存在することは，当初の仮定から言うまでもなく自明である。

（名誉教授）

（経済学部教授）