

Title	フォン・ノイマンのミニマックス定理をめぐる覚書
Sub Title	A note on the minimax theorem of von Neumann
Author	中山, 幹夫(Nakayama, Mikio)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2011
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.104, No.2 (2011. 7) ,p.285(133)- 291(139)
JaLC DOI	10.14991/001.20110701-0133
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20110701-0133

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究ノート

フォン・ノイマンのミニマックス定理をめぐる覚書

中山 幹 夫*

フォン・ノイマン (John von Neumann) のミニマックス定理といえは、ゲーム理論を少しでも学んだ人ならば聞き覚えのある用語であろう。2 人ゼロ和ゲームではマックスミニ値とミニマックス値が等しくなること、すなわち、一方が確実に獲得できる期待利得と他方がどうしても防ぎ切れない期待損失を等しくする最適戦略 (マックスミニ戦略とミニマックス戦略) の存在を述べる定理で 1928 年に発表されたものである⁽¹⁾。

この定理に関連してよく知られた事実の一つは、確率論の大家でもあり、フォン・ノイマンより早い 1921 年にゲーム理論の論文を発表している数学者のエミール・ボレル (Émile Borel) が、その中で戦略の数が $\nu = 3$ の場合

についての最適戦略の存在を証明し、さらに 1924 年に $\nu = 5$ の場合を証明した後、一般の場合については否定的な見解を述べていることである⁽²⁾。また、あまり知られてはいないが、やはりフォン・ノイマンより早くゲーム問題を考察していた数学者シュタインハウス (Hugo D. Steinhaus) は、追跡ゲームにおいてこれらの値が一致する場合を「閉じている (closed)」と定義していたが、これらの値がつねに一致するとは当時は知らなかったと述べていることも興味深い⁽³⁾。

しかし、これらの事実よりもさらに興味深い事実がある。それは、フォン・ノイマンによるその証明についての世界中に流布しているらしい誤解である。その誤解とは、

* 本稿に対して寄せられたコメントにより記述を改善でき、またゲーム理論史の今後の研究に参考になったことに感謝します。

(1) von Neumann [15].

(2) Fréchet [2] にこれについての記述がある。

(3) Steinhaus [17] の末尾に添付されたクーン (Harold W. Kuhn) への手紙にこのような記述がある。

フォン・ノイマンはミニマックス定理をブラウワーの不動点定理を用いて証明したという「定説」のことである。

本稿では、この誤解の訂正を迫る内容をもつ Kjeldsen [5] の論説とレオナード (Robert Leonard) による最近の大著 [6] を参考に、ミニマックス定理とその証明がどのように受け止められてきたかについて、若干の考察を施してみたい。

実は、筆者もまた

この定理は、不動点定理によるノイマンのオリジナルな証明のほかに凸集合の……

と述べており、その「定説」を 1994 年あたりまでは信じていたものである。⁽⁴⁾ ゲーム理論や数理経済学にとって、不動点定理は存在証明のためのあまりにも当然の方法であり、実際、ナッシュ (John F. Nash) がブラウワーの不動点定理を用いてミニマックス定理を特殊ケースとする均衡点の存在をエレガントに証明している以上、⁽⁵⁾ ミニマックス定理の証明は原典を参照するまでもなくこれで十分であり、フォン・ノイマン自身も当然この定理を使ったであろう、⁽⁶⁾ と思ひ込んだとしても無理はない。東工大名誉教授鈴木光男氏による日本最初の本格的ゲーム理論解説書には

ミニ・マックスの定理は、von Neumann

が 1928 年に始めて、「ゲーム理論について」という論文で証明した。それは位相数学的方法によるもので、おもに L. E. J. Brouwer の不動点定理が用いられている

という記述がある。⁽⁶⁾ 断定的ではないが、読者にはブラウワーの不動点定理による証明であると思わせる文章である。筆者は学生時代にこの本を読んでおり、無意識のうちにこれが記憶の中に埋め込まれていたものと思われる。また、ゲーム理論研究者ではない著者による書物にも、たとえば次のような記述がみられる：⁽⁷⁾

フォン・ノイマンは、すでに 1928 年のゲーム理論創始の論文でブラウワーの不動点定理を使っている……

この著者が鈴木 [18] の影響で、このように記したのかどうかはわからないが、経済学者の間でもこれが「定説」となっているのではないと思わせる記述である。筆者自身は、その後、マイヤーソン (Roger Myerson) の論文 [9] で、フォン・ノイマンがブラウワーの不動点定理を使ったのではないことを示す記述に接し、原論文 [15] でそれを確かめて以来、種々の機会に「定説」は誤解であることを述べてきた。⁽⁸⁾ 調査したわけではないが、この「定説」は内外の多くのゲーム理論研究者や数理経済

(4) 中山 [10], p.68。

(5) Nash [14].

(6) 鈴木 [18], p.79。

(7) 竹田 [19], p.120。

(8) Nakayama [11], p.76; 中山 [12], p.127; 中山 [13], p.498。

学者に共有されているのではないだろうか。⁽⁹⁾

レオナードによれば、この誤解はやはり国際的に広がっているようである。たとえば、Kjeldsen [5] に言及しながら彼は次のように述べている（太字と [] 内は筆者による）⁽¹⁰⁾：

Not only does she present it in detail, but she corrects the **widespread** misunderstanding that it [von Neumann's proof] involved the use of an extension of the Brouwer fixed-point theorem.

さらに引き続いて、ミロウスキー (Philip Mirowski) が⁽¹¹⁾、“von Neumann admitted later that he used the same fixed point technique ……as he did for the minimax theorem” と、フォン・ノイマン自身の言葉として書いていること、また、イングラオとイスラエル (Bruna Ingraio and Giorgio Israel)⁽¹²⁾ が⁽¹³⁾、“…… von Neumann made decisive use of Brouwer's theorem” と述べていることを指摘している。とくにイスラエルは別のところで、フォン・ノイマンが証明のために存在問題を位相数学の問題に帰着させたという記述に引き続いて、

This allowed von Neumann to bring in Brouwer's fixed point theorem.

と述べているのである。⁽¹⁴⁾

このように、ゲーム理論研究者というよりは、学説史研究者であるミロウスキーやイングラオ - イスラエルでさえ、「定説」を確信をもって述べていることは驚きである。1928年の原論文には参考文献が皆無であり、証明の文章中にも Brouwer や fixed point という単語は現れないことから、不動点定理を使っていないことは容易に「推測」されるはずだからである。

このような学会の雰囲気にもかかわらず、Kjeldsen が、フォン・ノイマンの原論文と対峙して、不動点定理に関連する一切の記述は存在しないばかりか、証明法にもフォン・ノイマンがそれを意識していたことをうかがわせるものはないことを、数式を1行ごとに点検しながら明らかにしたことは、数学史の専門家としての独創的な業績と言えるのではないだろうか。もっとも、原論文では common limit point と呼んでいる点の存在証明がなされていることから、フォン・ノイマンが意識してはいなかったとしても、数学的に不動点定理と無関係でないことは確かではある。しかし、ゲーム理論研究者や数理経済学者が、当面の個別的問題の分析に忙殺されフォン・ノ

(9) 少なくとも Myerson, および、この話題について筆者が直接に意見交換した一橋大学教授の岡田章氏は例外であるが。

(10) Leonard [6], pp.65–66 参照。

(11) Mirowski [7], p.113.

(12) Ingraio and Israel [3], p.187.

(13) Leonard [6], pp.65–66.

(14) Israel and Gasca [4], p.44 参照。ここではさらに、この存在証明が数理経済学における不動点定理の使用を標準的なものとするさきがけとなったと述べているが、これも Kjeldsen [5] によって反証された「定説」の一つである。

イマンの原論文にまで手が回らないことはむしろ当然であるとしても、学説史の専門家についても同様であるとは言えないであろう。ゲーム理論史に多少とも関わっている筆者としては、このような誤解が学説史研究者の間にも広まっていたことはミステリーでさえあると言うのは必ずしも誇張ではない。

では、この誤解の源泉は一体どこにあるのだろうか？ レオナードはそれを、フォン・ノイマン自身の言葉に帰している。⁽¹⁵⁾すなわち、1937年の発表になる経済の均衡成長を論じた論文の序文と第6段落の脚注Iの記述である。⁽¹⁶⁾序文では、次のように述べている（太字と[]内は筆者による）。

The mathematical proof is possible only by means of a generalization of Brouwer's Fix-Point Theorem, i.e., by the use of very fundamental *topological* facts.……

The connection with topology may be very **surprising** at first,……It [the minimum-maximum problem] is closely related to another problem occurring in the theory of games (see footnote I in paragraph 6).

さらに、第6段落の脚注Iでは、

The question whether our problem has a solution is **oddly** connected with that

of a problem occurring in the Theory of Games dealt with elsewhere.…… The problem there…… is solved here in a **new way** through our solution……

と述べている（太字は筆者による）。

レオナードが言うようにこれが誤解の源泉だとしたら、誤解した読者はこれらの文章自体を誤解したのではないだろうか。序文では、確かにブラウワーの不動点定理とゲーム理論に言及しているが、脚注では、明確にミニマックス定理の新しい証明（**new way**）に言及しているのである。また、Kjeldsen も指摘している⁽¹⁷⁾が、この問題の解の存在が奇妙にも（**oddly**）ゲームの解の存在と関係していると書いているのはそれが新しい発見であることの傍証であり、さらに、1928年に存在問題を位相数学的に定式化しブラウワーの不動点定理を使用していたならば、1937年のこの論文で、証明が位相数学と結びつくことが驚くべきことである（**surprising**）とは書かないであろう。要するに、フォン・ノイマンによるこれらのコメントを多少とも注意深く読めば、1928年の証明には不動点定理は使われていないことが読み取れるのである。1937年論文の読者は、おそらく、このフォン・ノイマン自身による1928年論文との関連の指摘には本文のモデルほどの関心をもたなかったのであろう。以後の数理経済学研究者にはとくにその傾向があったものと思われる。

(15) Leonard [6], p.65 参照。

(16) von Neumann [16].

(17) Kjeldsen [5], p.56.

誤解の源泉としては、むしろ、次のモルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) の言葉の方が興味深い。プリンストンの高等研究所の図書館で、ヴィレ (Jean Ville) によるミニマックス定理の初等的証明を偶然に発見したときの状況を回想して、彼は次のように述べている⁽¹⁸⁾：

There, in restating Johnny's minimax theory, instead of using Brouwer's fixed point theorem, he gave a more elementary proof……

このようにモルゲンシュテルン自身もフォン・ノイマンの証明がブラウワーの不動点定理によるものと思込んでいたようである。同じ回想文 (p.808) で、1928年論文を研究する中で不動点定理に関する問題は、(数学者ではない) 自分には難解なトピックスだったと率直に述べているが、フォン・ノイマンの方法を不動点定理を使うための論法として読んだのではないだろうか。ちなみに、前掲の鈴木光男名誉教授はプリンストンでの留学時、モルゲンシュテルンのところで研究をしており、このような回想に直接に接する機会があったものと思われる。この意味では筆者自身も、モルゲンシュテルン起源(?)の「定説」をかつては信じていたことになろうか。

1937年論文が契機となって、ブラウワー不動点定理とその拡張である角谷不動点定理の、

解の存在問題への有用性が認識され、さらにノイマン - モルゲンシュテルンの大著 *Theory of Games and Economic Behavior* が、社会科学のための新しい数学的方法としてのゲーム理論を創出するに及んで、不動点定理や分離定理などの凸解析が、経済の均衡や計画問題の最適解の分析に不可欠な方法となった。この意味で、Thompson [20] はフォン・ノイマンを数理計画的経済学 (mathematical programming economics)⁽¹⁹⁾ の創始者と呼んでいる。このような学問的環境の中で、大著では分離定理によって新たに証明されたミニマックス定理も、1928年のオリジナルでは凸解析の原点とも言うべき1910年のブラウワーの不動点定理で証明されたに違いないという思い込みが、この領域の研究者の間で定着したとしても不思議ではない。モルゲンシュテルンの回想も、この数理計画的経済学の勃興を経た後になされたものであり、原論文には一切現れないにもかかわらず Brouwer's fixed point theorem と明言しているのもその影響の結果であると言うこともできるだろう。

いずれにせよ、Kjeldsen [5] は、1928年論文におけるフォン・ノイマンの証明を仔細に点検することによって、ブラウワー不動点定理の使用はおろか、不動点を求めているという意識さえもフォン・ノイマンにはなく、それゆえ、これが不動点定理の使用に代表される凸解析の幕開けであるとする「定説」⁽²⁰⁾ も誤

(18) Morgenstern [8], p.811.

(19) Nakayama [11], p.87.

(20) Israel and Gasca [4], p.44.

解であることを説得力をもって論じている。

Kjeldsen [5]にはほかにも有名なフレッシュエ (Maurice Fréchet) [1]による, ゲーム理論の創始者をめぐる論争についての考察という貢献も含まれているが, 筆者もこれについては Nakayama [11]で同様の見解を述べているので, 1点だけ新たに追加しておきたい。

フレッシュエは, Fréchet [2] (p.122)において, 仮に, ボレルがフォン・ノイマンより早くミニマックス定理を証明していたとしても, それはボレルの一連のゲーム理論研究の獨創性にさらに貢献するものではないと述べるにとどまらず, 引き続いて

He would not thereby have even enriched the set of properly mathematical discoveries for which Borel has acquired a world-wide reputation.

と断言している。では, ボレルの名声をこれ以上高めるはずのないゲーム理論の創始者となることを, フレッシュエは何故, 主張したのであろうか。

(経済学部教授)

参 考 文 献

- [1] Fréchet, Maurice, “Émile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application,” *Econometrica* **21**, 1953, pp.95–96.
- [2] Fréchet, Maurice, “Commentary on the Three Notes of Émile Borel,” *Econometrica* **21**, 1953, pp.118–127.
- [3] Ingrao, Bruno and Giorgio Israel, *The Invisible Hand*, MIT Press.
- [4] Israel, Giorgio and Ana M. Gasca, *The World as a Mathematical Game: John von Neumann and Twentieth Century Science*, Basel: Birkhäuser, 2009.
- [5] Kjeldsen, Tinne. H., “John von Neumann’s Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts,” *Archive of the History of the Exact Sciences* **56**, 2001, pp.39–68.
- [6] Leonard, Robert, *Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory: From Chess to Social Science, 1900–1960*, Cambridge University Press, 2010.
- [7] Mirowski, Philip, “Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science,” Cambridge University Press, 2002.
- [8] Morgenstern, Oskar, “The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games,” *Journal of Economic Literature* **14**, 1976, pp.805–816.
- [9] Myerson, Roger B., “Nash Equilibrium and the History of Economic Theory,” *Journal of Economic Literature* **37**, 1999, pp.1067–1082.
- [10] 中山幹夫, 「経済学と数学, そしてゲーム理論」『経済志林』**63**, **1**, 1995, p.68.
- [11] Nakayama, M., “The Dawn of Modern Theory of Games,” *Advances in Mathematical Economics* **9**, 2006, pp.73–97.
- [12] 中山幹夫, 「社会科学への道を切り開く」『ゲーム理論プラス 経済セミナー増刊』, 日本評論社, 2007年6月, pp.124–127.
- [13] 中山幹夫, 「解説」銀林浩・宮本敏雄訳, フォン・ノイマン, モルゲンシュテルン著『ゲームの理論と経済行動』III, ちくま学芸文庫, 2009年, pp.493–504.
- [14] Nash, John F., “Non-Cooperative Games,” *Annals of Mathematics Studies* **54**, **2**, 1951, pp.286–295.

- [15] von Neumann, John, “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,” *Mathematische Annalen* **100**, 1928, pp.295–320. Translated by S. Bargmann as “On the Theory of Games of Strategy,” in Tucker, A.W. and R.D.Ruce (eds.), *Contributions to the Theory of Games* **4**, Princeton University Press, 1959, pp.13–42.
- [16] von Neumann, John, “Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes,” *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **8**, 1937. Translated as “A Model of General Equilibrium,” *Review of Economic Studies* **13**, 1945, pp.1–9.
- [17] Steinhaus, Hugo D., “Definitions for a Theory of Games and Pursuit,” *Mysl Akademia* **1**, 1925, pp.13–14. Translated by H.Kuhn in *Naval Research Logistics Quarterly* **7.2**, 1960, pp.105–108.
- [18] 鈴木光男, 『ゲームの理論』勁草書房, 1959。
- [19] 竹田茂夫, 『ゲーム理論を読みとく』ちくま新書, 2004.
- [20] Thompson, Gerald L., “John von Neumann’s Contributions to Mathematical Programming Economics,” in Dore, M. et al. (eds.), *John von Neumann and Modern Economics*, Oxford University Press, 1989.